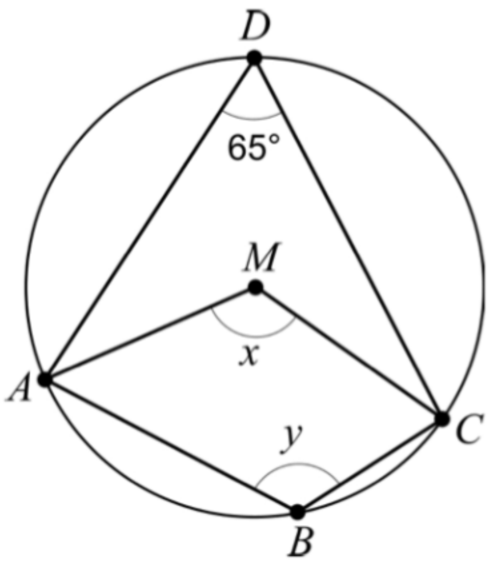
**6.** Fyrhörningen *ABCD* är inskriven i en cirkel med medelpunkten *M*.




a) Bestäm vinkeln $x$. $130°$ (1/0/0)

b) Bestäm vinkeln $y$. $115°$ (0/1/0)



**14.** Lös ekvationerna.

a) $x^{\frac{2}{3}} = 5^2,\ x > 0$ (0/2/0)

b) $4^x = 2^{4x+5}$ (0/0/2)

14 a) $x = (5^2)^{\frac{3}{2}} = 5^3 = \underline{125}$

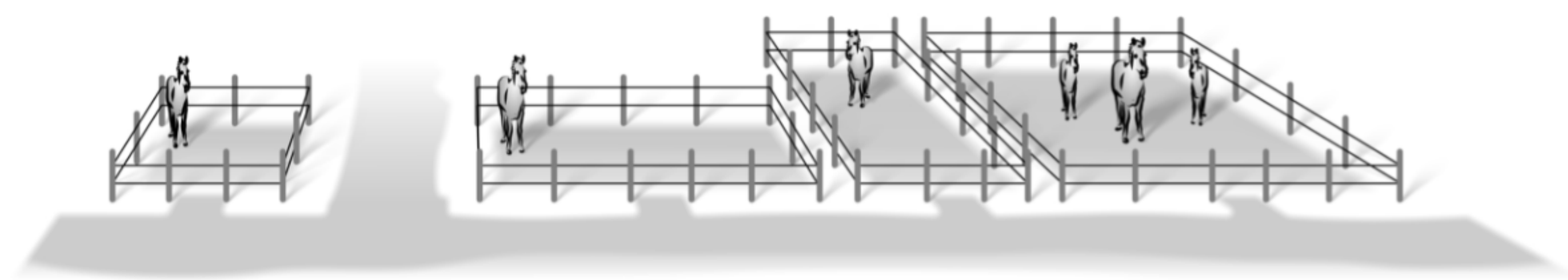
b) $(2^2)^x = 2^{4x+5}$ ; $2^{2x} = 2^{4x+5} \Rightarrow$

$2x = 4x + 5$

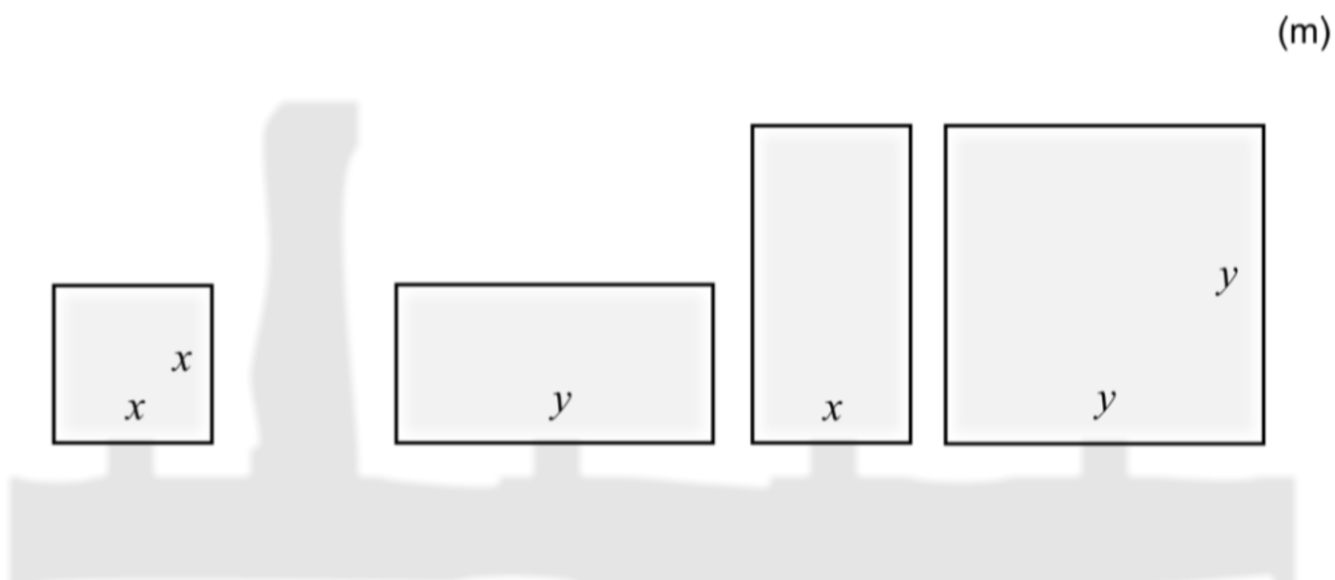
$2x = -5$

$x = -\frac{5}{2}$

**15.** Bilden visar fyra hästhagar som är kvadratiska respektive rektangulära med sidlängderna $x$ och $y$ meter.



Nedan visas en skiss över hur hagarna ser ut ovanifrån.



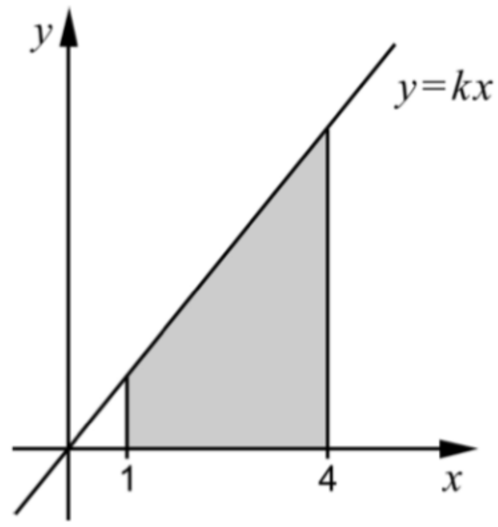

Hästarna ska flyttas till en ny gemensam hage. Den nya hagen är kvadratisk och har lika stor area som de fyra ursprungliga hagarna tillsammans.

Bestäm ett förenklat uttryck för sidans längd hos den nya hagen. (0/1/1)

15. $z^2 = x^2 + xy + xy + y^2 = (x+y)^2 \Rightarrow$

$\underline{z = x + y}$

**16.** Ett område begränsas av $x$-axeln, linjerna $x = 1$ och $x = 4$ samt den räta linjen $y = kx$ där $k > 0$




Bestäm riktningskoefficienten $k$ algebraiskt så att områdets area blir exakt 10 areaenheter. (0/0/4)

16.

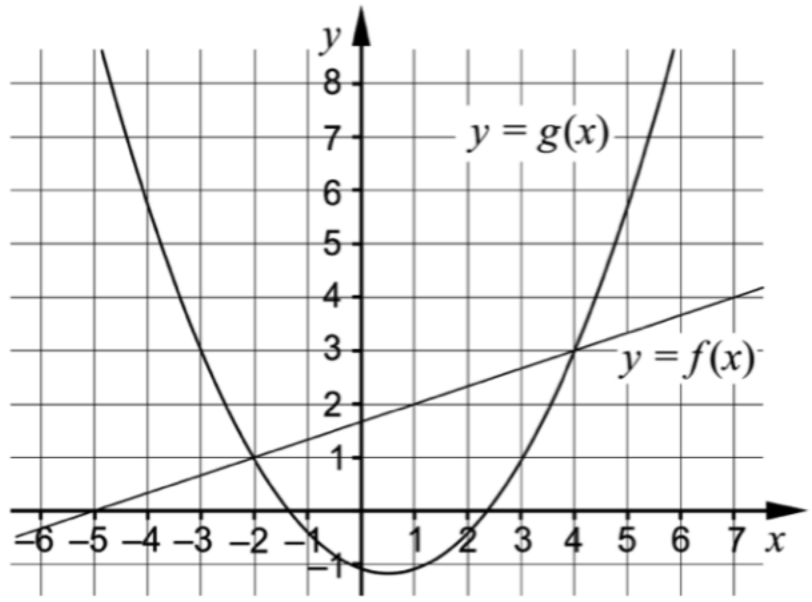
$$k \cdot \int_1^4 x\,dx = 10$$

$$\frac{k}{2} \cdot \left[x^2\right]_1^4 = 10$$

$$\frac{k}{2} \cdot (16-1) = 10$$

$$k = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

**8.** Koordinatsystemet visar graferna till en rät linje $f$ och en andragradsfunktion $g$.




Besvara frågorna med hjälp av graferna.

a) För vilka värden på $x$ gäller att $g(x) < 3$? $-3 < x < 4$ (0/2/0)

b) För vilka värden på $x$ gäller att $f(x) - g(x) = 0$? $x_1 = -2,\ x_2 = 4$ (0/0/1)

**9.** Förenkla följande uttryck så långt som möjligt.

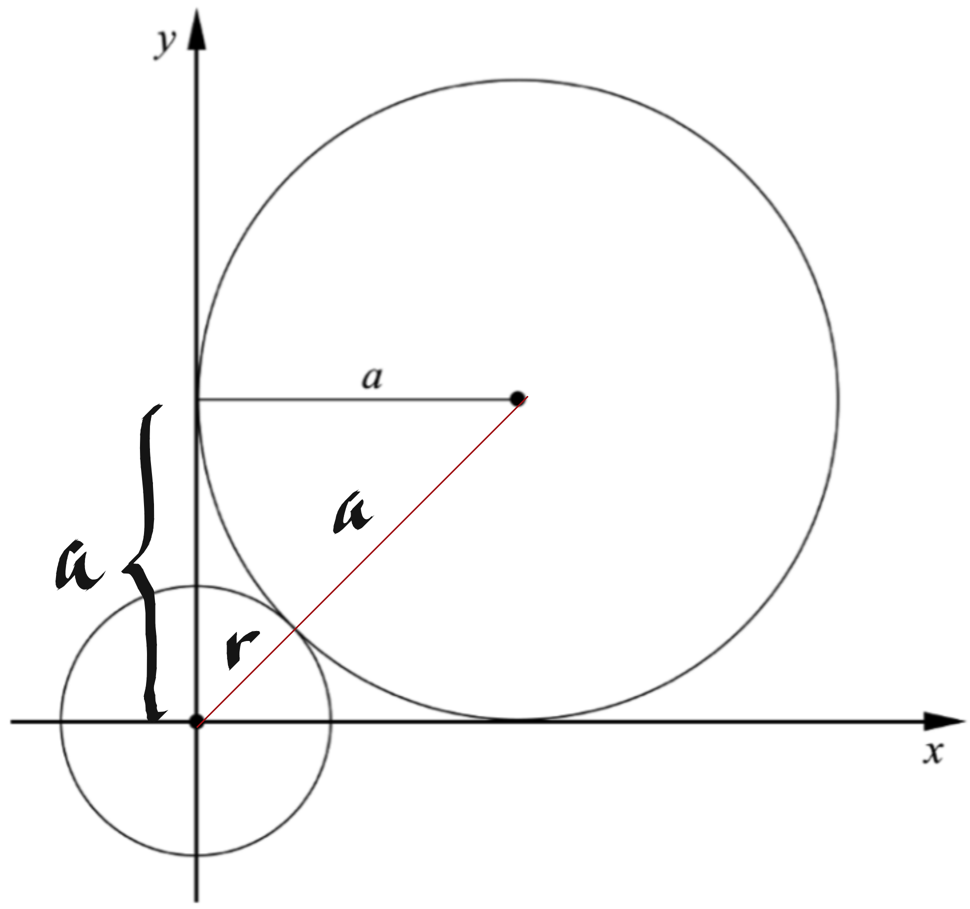
a) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})^2-(x+3)}{2}$ $\sqrt{x}\cdot\sqrt{3}$ (0/0/1)

b) $\dfrac{x^{\frac{5}{6}}(x^{\frac{1}{3}}+1)(x^{\frac{1}{3}}-1)}{x^{\frac{1}{6}}\cdot x^{\frac{1}{3}}}$ $x - x^{1/3}$ (0/0/1)

9. a) $\dfrac{x+2\sqrt{x}\sqrt{3}+3-x-3}{2} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{3} = \underline{\sqrt{3x}}$

b) $\dfrac{x^{5/6}(x^{2/3}-1)}{x^{3/6}} = x^{1/3}(x^{2/3}-1) = \underline{x-x^{1/3}}$

**16.** En cirkel med radien $a$ tangerar de positiva koordinataxlarna. Den tangerar även en mindre cirkel som har mittpunkten i origo. Se figur.




Visa att den mindre cirkelns radie är $a(\sqrt{2}-1)$ längdenheter. (0/0/3)

16. Pythagoras sats ger:

$$(a+r)^2 = a^2 + a^2$$

$$a^2 + 2ar + r^2 = 2a^2$$

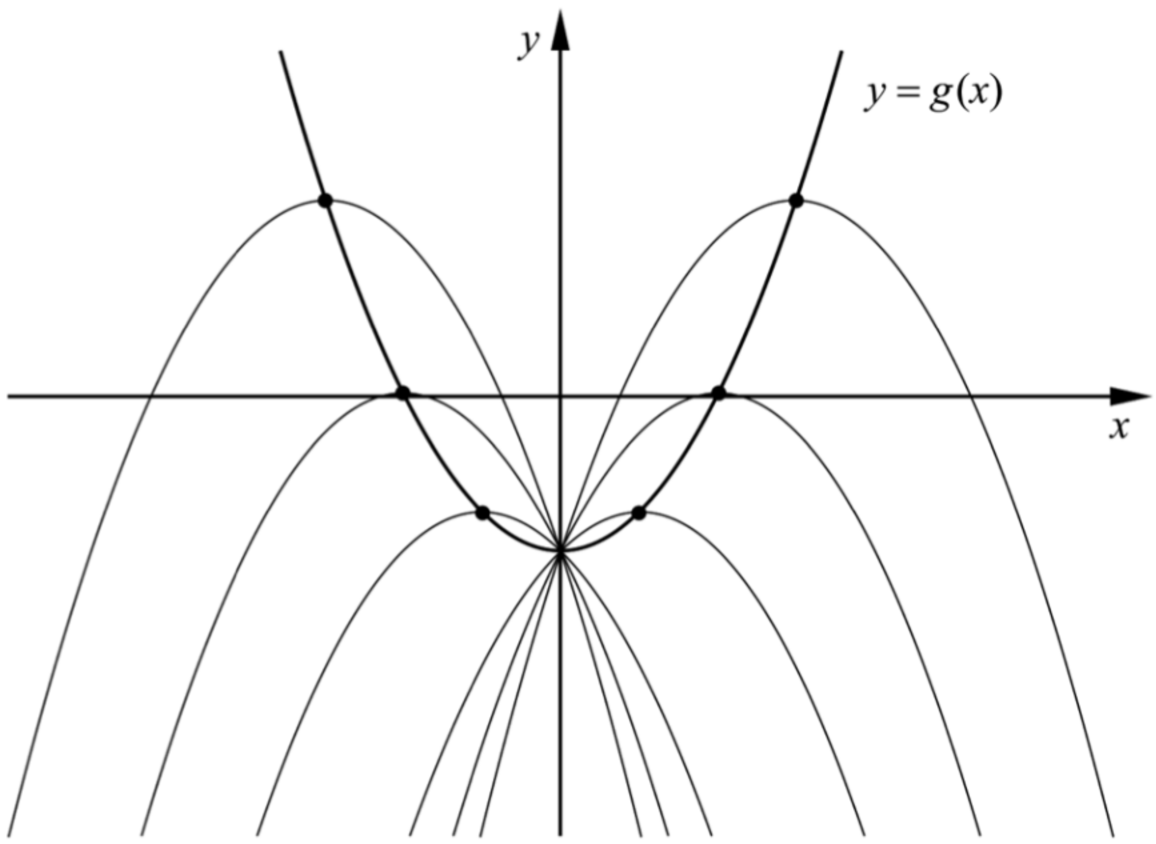
$$r^2 + 2ar - a^2 = 0$$

$$r = -a(\pm)\sqrt{a^2+a^2} = -a + a\sqrt{2} = a(\sqrt{2}-1)$$

**17.** För andragradsfunktionen $f$ gäller att $f(x) = -0{,}5x^2 + bx - 2$

a) Bestäm för vilka värden på $b$ som $f$ endast har ett nollställe. (0/2/0)

I figuren nedan ser du graferna till funktionen $f$ för några olika värden på $b$. Grafernas maximipunkter är markerade. Då $b$ varierar följer maximipunkterna grafen till en ny andragradsfunktion $g$, se figur.




b) Bestäm andragradsfunktionen $g$. (0/0/3)

17. a) $f(x) = -0{,}5(x^2 - 2bx + 4)$

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2bx + 4 = 0$

$x = b \pm \sqrt{b^2 - 4}$

Endast ett nollställe $\Rightarrow b^2 - 4 = 0 \Rightarrow \underline{b = \pm 2}$

b) $g(x)$ har nollställen i $\pm b = \pm 2 \Rightarrow$

$g(x) = k(x+2)(x-2) + c$

$f(-2) = g(-2) = 0 \Rightarrow c = 0$

$f(0) = g(0) \Rightarrow -2 = k(0+2)(0-2) \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\underline{g(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-2) = \frac{1}{2}x^2 - 2}$

**9.** Faktorisera uttrycket $8x^3 - 18xy^2$ så långt som möjligt.

$2x(2x+3y)(2x-3y)$ (0/0/1)

**10.** Lös ekvationen $(x-\sqrt{3})^2 - 4(x-\sqrt{3}) + 3 = 0$ om du vet att $t^2 - 4t + 3 = 0$ har lösningarna $t_1 = 3$ och $t_2 = 1$. Svara med exakta värden.

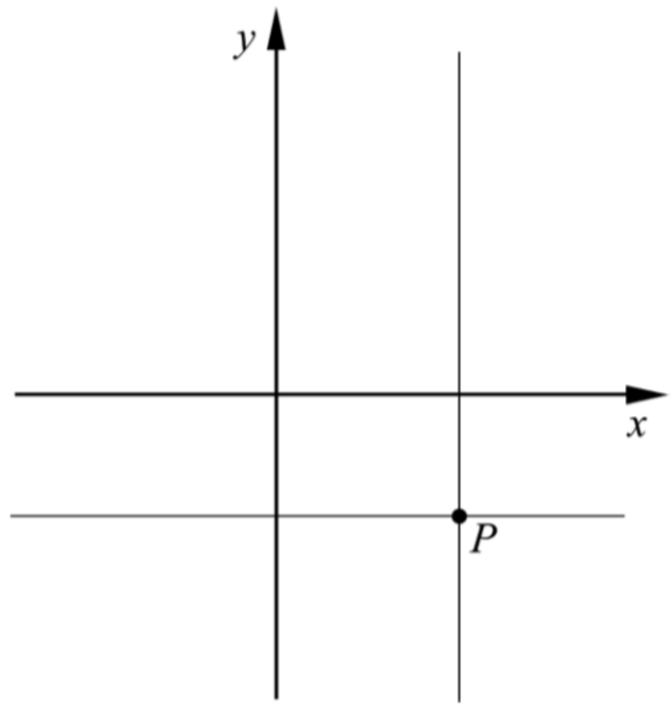
$x - \sqrt{3} = 1$

$x - \sqrt{3} = 3$

$x_1 =$ $1+\sqrt{3}$

$x_2 =$ $3+\sqrt{3}$ (0/0/1)

**11.** Figuren visar linjerna $x = a$ och $y = b$, där $a$ och $b$ är olika konstanter, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Linjerna skär varandra i punkten $P$ i koordinatsystemets fjärde kvadrant.




Vilken eller vilka av nedanstående linjer A-D går genom punkten $P$?

A. $ax + by = 0$ $a^2+b^2=0$

B. $ax - by = 0$ $a^2=b^2$; $y=\frac{a}{b}x$

C. $ay + bx = 0$ $2ab=0$

D. $ay - bx = 0$ $ab=ab$; $y=\frac{b}{a}x$

D (0/0/1)

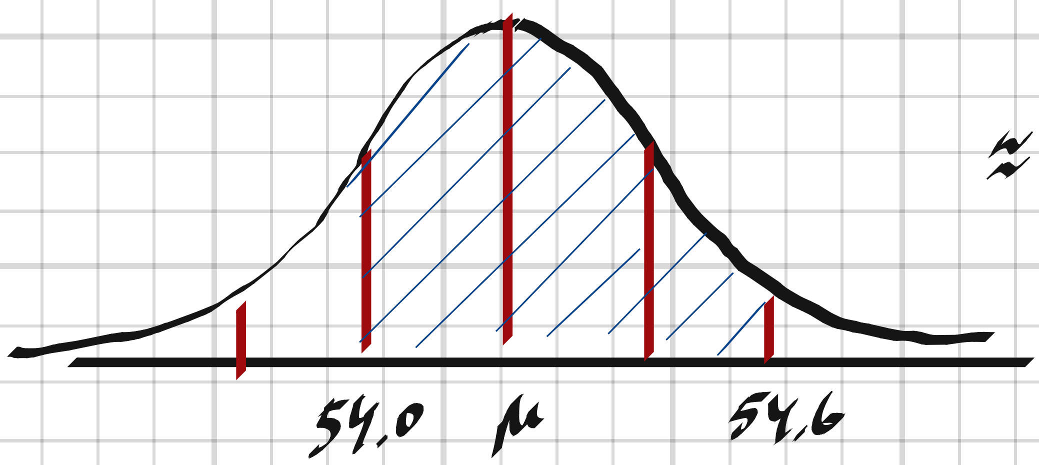
**14.** En maskin tillverkar skruvar. Skruvarnas längder är normalfördelade med en standardavvikelse på 0,20 mm.

Ungefär 82 % av skruvarna har en längd mellan 54,0 mm och 54,6 mm.

Bestäm skruvarnas medellängd. (0/2/1)

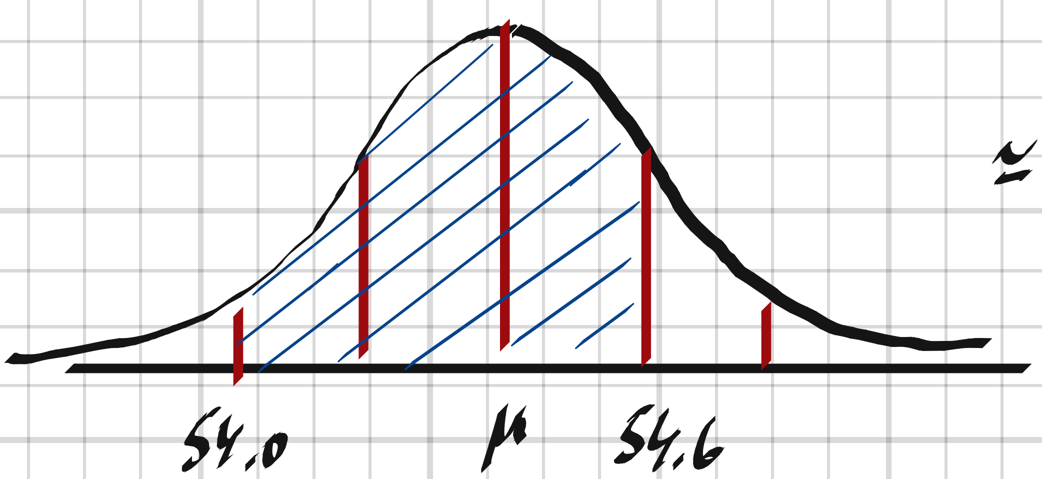
14.

$\mu = 54 + s =$
$54 + 0.2 = 54.2$




≈ 82%

$\mu = 54 + 2s =$
$54 + 0.4 = 54.4$




≈ 82%

Svar: Skruvarnas medellängd kan antingen vara 54.2 eller 54.4.

**15.** För funktionerna $f$ och $g$ gäller att $f(x) = x^2 + a$ och $g(x) = -x^2 + b$.
Antalet skärningspunkter mellan funktionernas grafer beror på hur konstanterna $a$ och $b$ väljs.

Undersök hur antalet skärningspunkter beror på valet av $a$ och $b$. (0/2/1)

15.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + a = -x^2 + b$$

$$2x^2 + a - b = 0$$

$$x^2 = \frac{b-a}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{b-a}{2}}$$

$b > a$: 2 reella rötter (skärningspunkter)

$b = a$: 1 reell rot i $x = 0$ (skärningspunkt)

$b < a$: Inga reella rötter (ingen skärningspunkt)

**16.** Lös ekvationssystemet $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - 6 = -1 \\ 4^x \cdot 4^y = 64 \end{cases}$ (0/0/2)

16.

$\frac{x}{y} - 6 = -1 \quad ; \quad y = \frac{x}{5}$

$4^x \cdot 4^y = 64 \quad ; \quad 4^{x+y} = 4^3 \quad ; \quad y = 3 - x$

$\frac{x}{5} = 3 - x$

$x = 5(3 - x)$

$6x = 15$

$x = \frac{5}{2} \quad , \quad y = \frac{1}{2}$

**17.** I ekvationen $ax^2 - a^2x = -2$ är $a$ en positiv konstant. Lös ekvationen och visa vilka värden på $a$ som ger två olika reella rötter. (0/0/3)

17.

$$x^2 - ax + \frac{2}{a} = 0$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{2}{a}} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^3 - 8}{4a}}$$

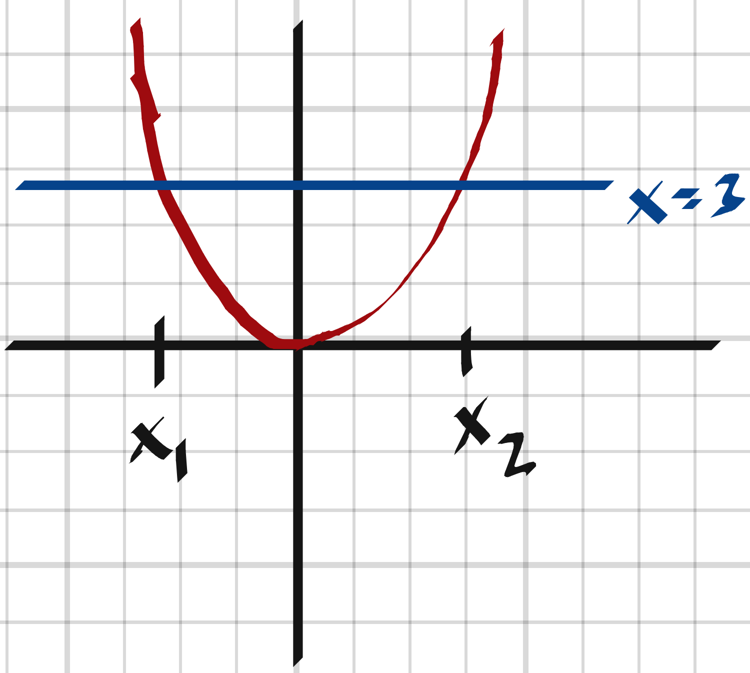
2 reella rötter $\Rightarrow$ $a^3 - 8 > 0$ ; $a^3 > 8 = 2^3$

$\underline{a > 0 \Rightarrow a > 2}$

---

**9.** Bestäm för vilka värden på $x$ som olikheten $x^2 > 3$ gäller.

____________________ (0/1/1)




$x_1 = -\sqrt{3}$ , $x_2 = \sqrt{3}$

$x^2 > 3 \Rightarrow$

$\underline{x < -\sqrt{3} \, , \, x > \sqrt{3}}$

**9.** I början av år 2011 köpte Matilda en dator för 10000 kr. Datorns värde kan beskrivas med $V(t) = 10000 \cdot 0{,}60^t$ där $V$ är datorns värde i kr och $t$ är tiden i år efter inköpet.

a) Med hur många procent minskar datorns värde per år?

40% (1/0/0)

b) Teckna en ny funktion som anger datorns värde $V$ i kr som funktion av tiden $t$, där tiden nu istället ska räknas i *månader* efter inköpet.

$V(t) = 10000 \cdot 0.60^{\frac{t}{12}}$ (0/0/1)

**10.** Ett ekvationssystem består av två ekvationer där varje ekvation innehåller två variabler $x$ och $y$.

a) Den ena ekvationen är $3x + 2y = 12$
Ge ett exempel på hur den andra ekvationen kan se ut så att ekvationssystemet saknar lösningar.

$2y + 3x = 0$ (0/0/1)

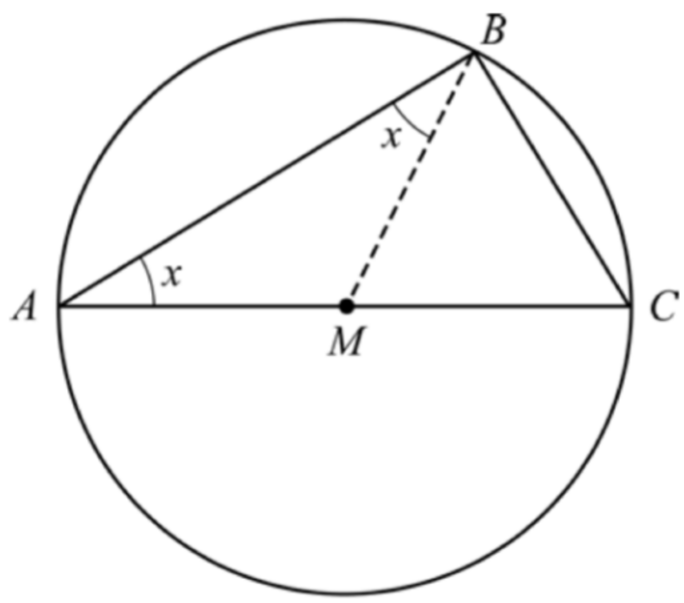
b) Den ena ekvationen är fortfarande $3x + 2y = 12$
Ge ett exempel på hur den andra ekvationen kan se ut så att ekvationssystemet endast får lösningen $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

$2y - 3x = 0$ (0/0/1)

**13.** Thales från Miletos var en grekisk matematiker som levde för 2600 år sedan. Han formulerade en sats med följande innebörd:

*Varje triangel som är inskriven i en cirkel har en rät vinkel om en av triangelns sidor är diameter i cirkeln.*

Triangeln $ABC$ är inskriven i en cirkel på ett sådant sätt. Sidan $AC$ är en diameter i cirkeln. Punkten $M$ är mittpunkt på sträckan $AC$. I figuren är även sträckan $BM$ inritad.



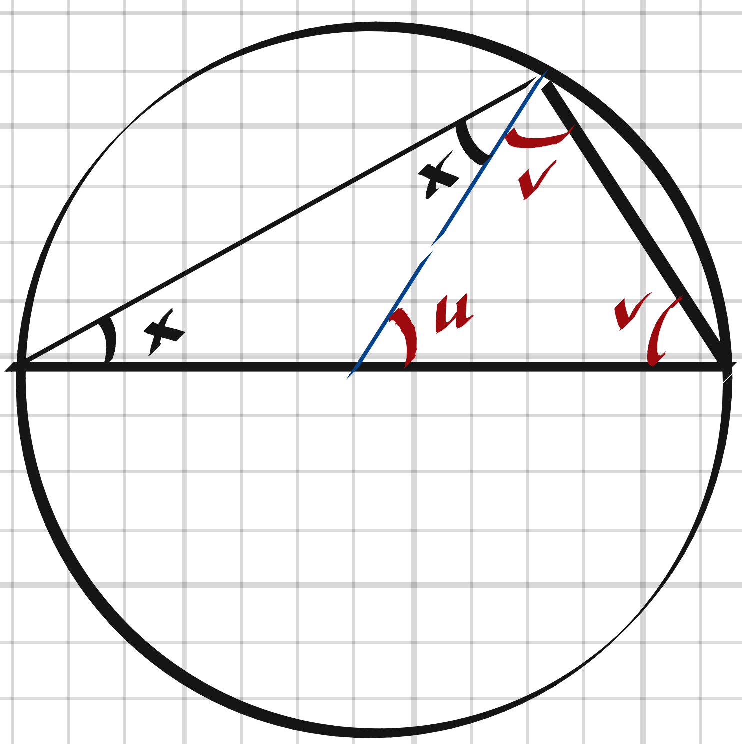

a) Förklara varför de två vinklarna betecknade med $x$ är lika stora. (1/1/0)

b) Visa, utan att använda randvinkelsatsen, att Thales sats är korrekt. (0/2/2)

13.

a) $\Delta ABM$ är likbent

b)




$u = 2x$

$2v + u = 180° \Rightarrow$

$2v + 2x = 180° \Rightarrow$

$v + x = 90°$

**14.** I ekvationssystemet nedan är $A$ och $B$ konstanter.

$$\begin{cases} 15x - 6 = -By \\ Ax - 3y = 4 \end{cases}$$

Bestäm konstanterna $A$ och $B$ så att ekvationssystemet har oändligt många lösningar. (0/0/2)

14. Oändligt många lösningar $\Rightarrow$

Ekvationerna lika.

$$\begin{cases} 15x + By - 6 = 0 \\ Ax - 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

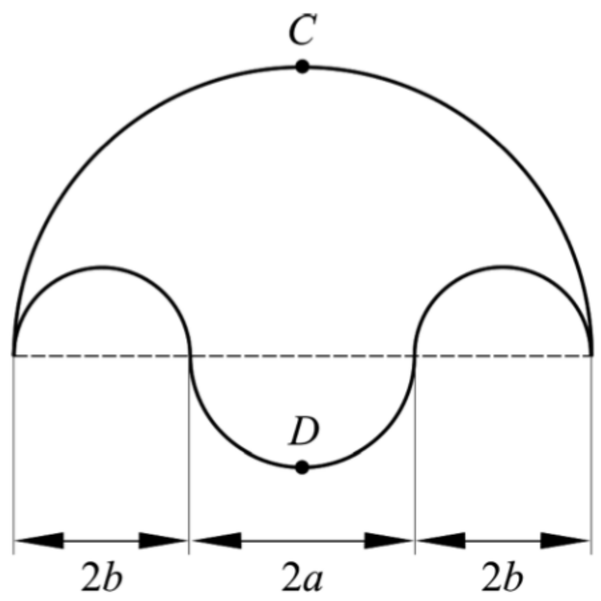
$$\begin{cases} y = -\frac{15}{B}x + \frac{6}{B} \\ y = \frac{A}{3}x - \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\frac{6}{B} = -\frac{4}{3} \Rightarrow B = -\frac{9}{2}$$

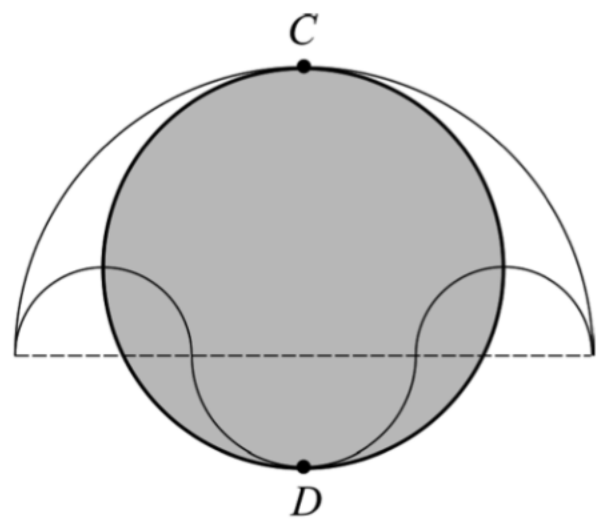
$$-\frac{15}{B} = \frac{A}{3} \Rightarrow A = -\frac{45}{B} = \frac{90}{9} = 10$$

$$A = 10, \quad B = -\frac{9}{2}$$

**15.** Arkimedes är en av tidernas största matematiker och levde för två tusen år sedan. I en arabisk samling av Thabit ibn Currah finns det geometriska satser som med stor sannolikhet bevisats av Arkimedes. Figurerna nedan åskådliggör en sådan matematisk sats.




Figur 1




Figur 2

Figur 1 visar ett område som begränsas av fyra halvcirklar. Den grå cirkeln i figur 2 har diametern *CD*.

Visa att arean av den grå cirkeln i figur 2 är lika stor som arean av området i figur 1. (0/0/4)

15.

$$\begin{cases} A_2 = \pi \cdot r^2 = \pi(a+b)^2 \\ A_1 = \frac{\pi}{2}(a+2b)^2 + \frac{\pi}{2} \cdot a^2 - \pi \cdot b^2 \end{cases}$$

$$A_1 = \pi\left(\frac{1}{2}(a^2 + 4ab + 4b^2) + \frac{1}{2}a^2 - b^2\right)$$

$$A_1 = \pi\left(a^2 + 2ab + b^2\right) = \pi(a+b)^2 \Rightarrow A_1 = A_2$$