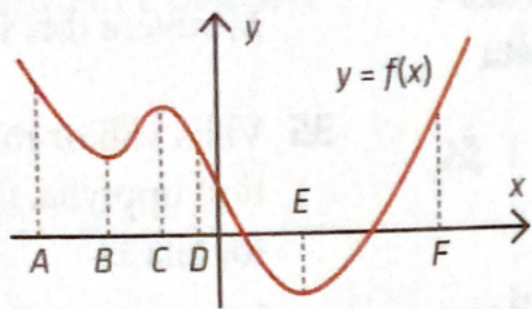


1 Grafen $y = f(x)$ är ritad i figuren.



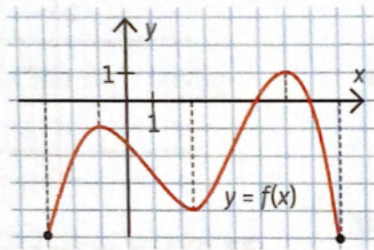
I vilka av intervallen $A-B$, $B-C$ osv. är

- a) f strängt växande
- b) f strängt avtagande

1. a) $B-C$, $E-F$

b) $A-B$, $C-D$, $D-E$

2 Grafen $y = f(x)$ är ritad i figuren. Funktionen definitionsmängd är $-3 \leq x \leq 8$.



- a) I vilka intervall är $f'(x) > 0$?
- b) I vilka intervall är $f'(x) < 0$?
- c) För vilka värden på x är $f'(x) = 0$?

2. a) $-3 < x < -1$, $2.5 < x < 6$

b) $-1 < x < 2.5$, $6 < x < 8$

c) $x = -1$, $x = 2.5$, $x = 6$

3 Funktionen f har för $-5 \leq x \leq 6$ teckentabellen

x	-5	$-5 < x < -1$	-1	$-1 < x < 2$	2	$2 < x < 6$	6
$f'(x)$		+	0	-	0	-	
$f(x)$	1	\nearrow	4	\searrow	-3	\searrow	-7

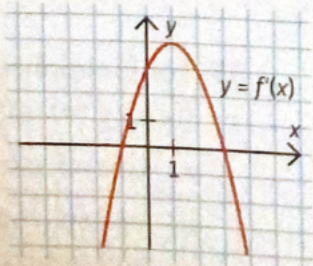
- I vilka punkter har funktionen lokala extremvärden?
- I vilken av punkterna har f sitt största värde i intervallet?
- I vilken av punkterna har f sitt minsta värde i intervallet?

3. a) $(-1, 4)$, $(1, -5)$, $(6, -7)$

b) $(-1, 4)$

c) $(6, -7)$

4 Grafen till $f'(x)$ är ritad i figuren. Bestäm x -koordinaterna till eventuella lokala maximi-, lokala minimi- och inflexionspunkter. Motivera ditt svar.



4. Lokalt max i punkt med x -värdet = 3

Lokalt min — " — = -1

Inflexionspunkt då $x = 1$

5 Låt $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x - 2$ och bestäm de lokala extrempunkternas koordinater.

$$5. \quad f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$$

$$f''(x) = 6x + 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x - 15 = 0$$

$$3(x^2 + 4x - 5) = 0$$

$$3(x-1)(x+5) = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -5$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 + 12 > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

$$f''(-5) = 6 \cdot (-5) + 12 < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

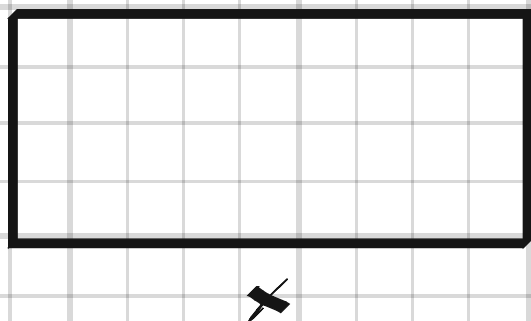
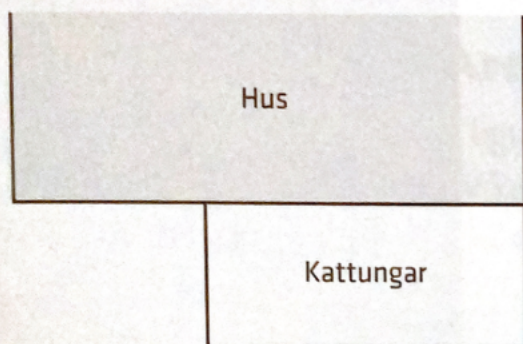
$$f(1) = 1 + 6 \cdot 1 - 15 \cdot 1 - 2 = -10$$

$$f(-5) = (-5)^3 + 6 \cdot (-5)^2 - 15 \cdot (-5) - 2 = -125 + 150 + 75 - 2 = 98$$

Svar: Minpunkt i $(1, -10)$

Maxpunkt i $(-5, 98)$

- 6 Hefi vill inhägna en rektangulär uteplats längs en rak husvägg för sina kattungar. Hon har 18 m stängsel som ska räcka till rektangelns övriga tre sidor. Beräkna uteplatsens maximala area.



$$x + 2y = 18 \Rightarrow x = 18 - 2y$$

$$A = x \cdot y$$

$$A(y) = (18 - 2y) \cdot y = 18y - 2y^2$$

\Rightarrow ^{maximum}

$$A'(y) = 18 - 4y$$

$$A'(y) = 0 \Rightarrow 18 - 4y = 0 \Rightarrow y = 4,5$$

$$A_{\max} = A(4,5) = 18 \cdot 4,5 - 2 \cdot 4,5^2 = \underline{40,5 \text{ m}^2}$$

7 Ett företag gör en prognos för antalet anställda under de närmaste 2 åren. Antalet anställda N kan beskrivas med $N(t) = 0,002t^3 - 0,11t^2 + 1,5t + 10$ för $0 \leq t \leq 24$, där t är tiden i månader efter det att man gjorde prognosen. Bestäm när antalet anställda är störst under perioden.

$$7. \quad N'(t) = 0,006t^2 - 0,22t + 1,5$$

$$N''(t) = 0,012t - 0,22$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow 0,006t^2 - 0,22t + 1,5 = 0$$

$$0,006(t^2 - 36,67t + 250) = 0$$

$$t = 18,34 \pm \sqrt{18,34^2 - 250} = 18,34 \pm 9,283$$

$$t_1 = 27,62 \quad (\text{utanför def. mängden})$$

$$t_2 = 9,06$$

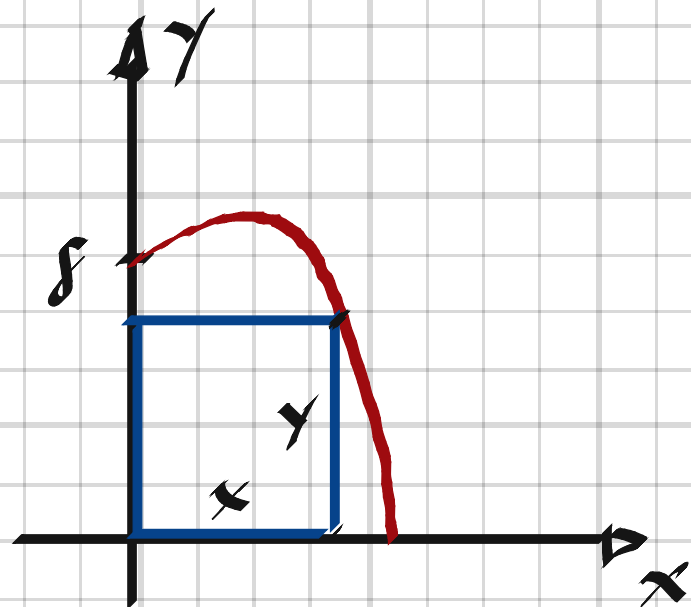
$$N''(9,06) = 0,012 \cdot 9,06 - 0,22 = -0,11 < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

Svar: Antalet anställda är störst vid tiden $t = 9$ mån

8 En rektangel ritad i den första kvadranten har ett hörn på kurvan $y = -x^2 + 5x + 8$ och det motsatta hörnet i origo. Rektangelns sidor är parallella med koordinataxlarna. Beräkna rektangelns maximala area.

8.

$$A = x \cdot y$$



$$A(x) = x \cdot (-x^2 + 5x + 8) = -x^3 + 5x^2 + 8x$$

$$A'(x) = -3x^2 + 10x + 8$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -3\left(x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{8}{3}\right) = 0$$

$$x = \frac{10}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{6}\right)^2 + \frac{8}{3}} = \frac{10 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{10 \pm 14}{6}$$

$$(x_1 = -\frac{2}{3}), x_2 = 4$$

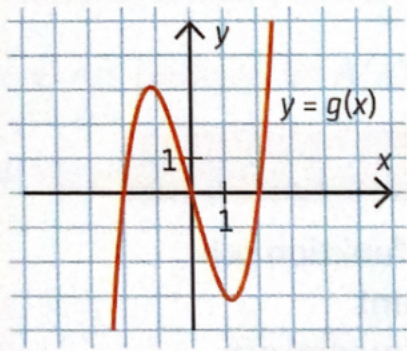
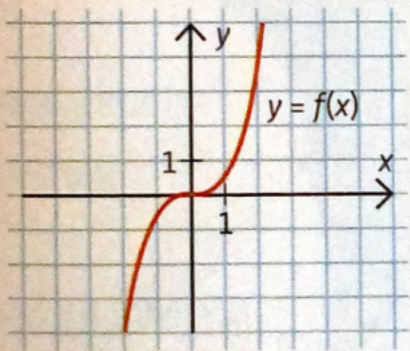
$$A''(x) = -6x + 10$$

$$A''(4) = -6 \cdot 4 + 10 < 0 \Rightarrow \text{maximum}$$

$$A(4) = -4^3 + 5 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 = -64 + 80 + 32 = 48$$

Svar: Maxarean = 48 a.e

9 Här nedanför har vi ritat graferna till $f(x) = 0,5x^3$ och $g(x) = x^3 - 4x$.



- Visa med hjälp av derivata att funktionen f har terrasspunkt för $x = 0$
- Visa med hjälp av derivata att funktionen g har extrempunkter för $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ och $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

I funktionsuttrycket $h(x) = ax^3 + bx$ är a och b är konstanter. Hur ska du välja a och b så att funktionen h får

- två extrempunkter
- en terrasspunkt

9. $f'(x) = 1,5x^2$

x	0		
f'	+	0	+
f	↗ terrasspunkt ↗		

$$g'(x) = 3x^2 - 4$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

x	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		
g'	+	0	-	0	+
g	↗ max punkt ↘		↘ min punkt ↗		

$$h'(x) = 3ax^2 + b$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 3ax^2 + b = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{b}{3a}; x = \pm \sqrt{-\frac{b}{3a}}$$

2 extrempunkter \Rightarrow derivatan måste ha 2 reella nollställen $\Rightarrow -\frac{b}{3a} > 0$

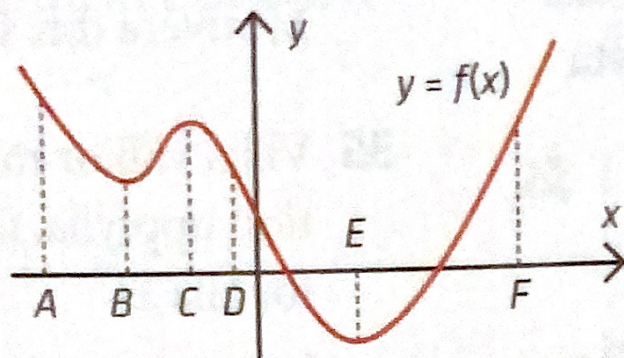
a och b måste ha olika tecken

1 terrasspunkt \Rightarrow derivatan har endast 1 nollställe vilket bara kan inträffa om $-\frac{b}{3a} = 0$

b = 0 samt a \neq 0

DEL 1 Utan räknare

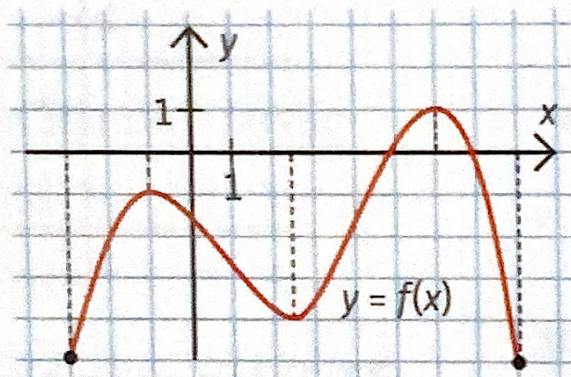
1 Grafen $y = f(x)$ är ritad i figuren.



I vilka av intervallen $A-B$, $B-C$ osv. är

- f strängt växande
- f strängt avtagande

2 Grafen $y = f(x)$ är ritad i figuren. Funktionens definitionsmängd är $-3 \leq x \leq 8$.



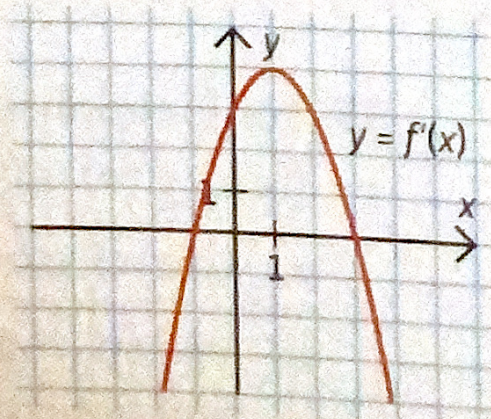
- I vilka intervall är $f'(x) > 0$?
- I vilka intervall är $f'(x) < 0$?
- För vilka värden på x är $f'(x) = 0$?

3 Funktionen f har för $-5 \leq x \leq 6$ teckentabellen

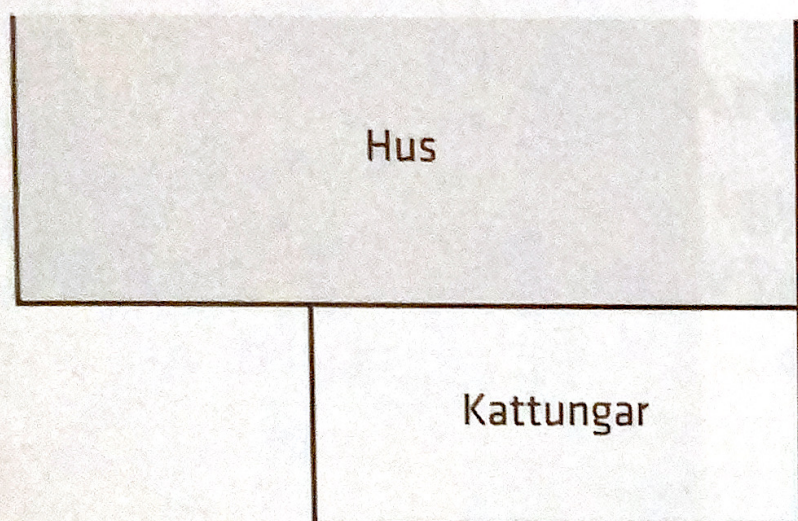
x	-5	$-5 < x < -1$	-1	$-1 < x < 2$	2	$2 < x < 6$	6
$f'(x)$		+	0	-	0	-	
$f(x)$	1	\nearrow	4	\searrow	-3	\searrow	-7

- I vilka punkter har funktionen lokala extremvärden?
- I vilken av punkterna har f sitt största värde i intervallet?
- I vilken av punkterna har f sitt minsta värde i intervallet?

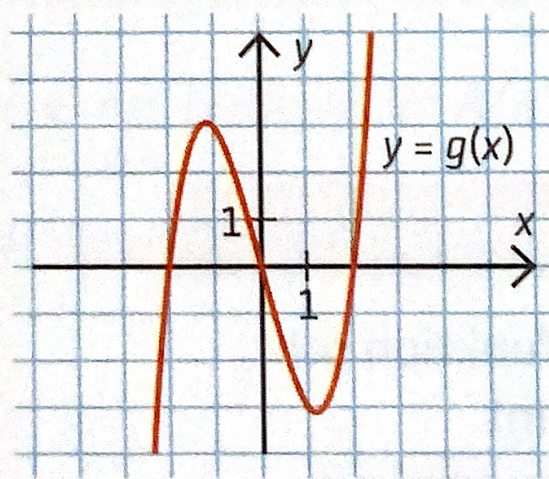
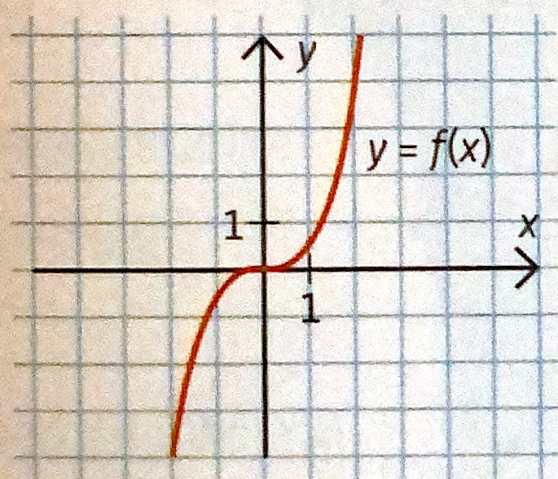
4 Grafen till $f'(x)$ är ritad i figuren. Bestäm x -koordinaterna till eventuella lokala maximi-, lokala mimimi- och inflexionspunkter. Motivera ditt svar.



- 5 Låt $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x - 2$ och bestäm de lokala extrempunkternas koordinater.
- 6 Hefi vill inhägna en rektangulär uteplats längs en rak husvägg för sina kattungar. Hon har 18 m stängsel som ska räcka till rektangelns övriga tre sidor. Beräkna uteplatsens maximala area.



- 7 Ett företag gör en prognos för antalet anställda under de närmaste 2 åren. Antalet anställda N kan beskrivas med $N(t) = 0,002t^3 - 0,11t^2 + 1,5t + 10$ för $0 \leq t \leq 24$, där t är tiden i månader efter det att man gjorde prognosen. Bestäm när antalet anställda är störst under perioden.
- 8 En rektangel ritad i den första kvadranten har ett hörn på kurvan $y = -x^2 + 5x + 8$ och det motsatta hörnet i origo. Rektangelns sidor är parallella med koordinataxlarna. Beräkna rektangelns maximala area.
- 9 Här nedanför har vi ritat graferna till $f(x) = 0,5x^3$ och $g(x) = x^3 - 4x$.



- Visa med hjälp av derivata att funktionen f har terrasspunkt för $x = 0$
- Visa med hjälp av derivata att funktionen g har extrempunkter för $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ och $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

I funktionsuttrycket $h(x) = ax^3 + bx$ är a och b är konstanter. Hur ska du välja a och b så att funktionen h får

- två extrempunkter
- en terrasspunkt