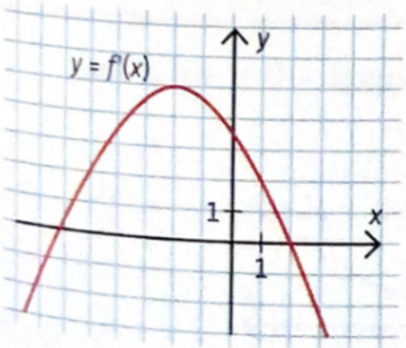
**4105** Figuren visar grafen $y = f'(x)$ som är derivatan av $f(x)$.




a) För vilket eller vilka värden på $x$ är $f'(x) = 0$?

b) I vilket intervall är funktionen $f$ strängt växande?

c) I vilka intervall är funktionen $f$ strängt avtagande?

4105. a) $x_1 = -6$ , $x_2 = 2$

b) $-6 < x < 2$

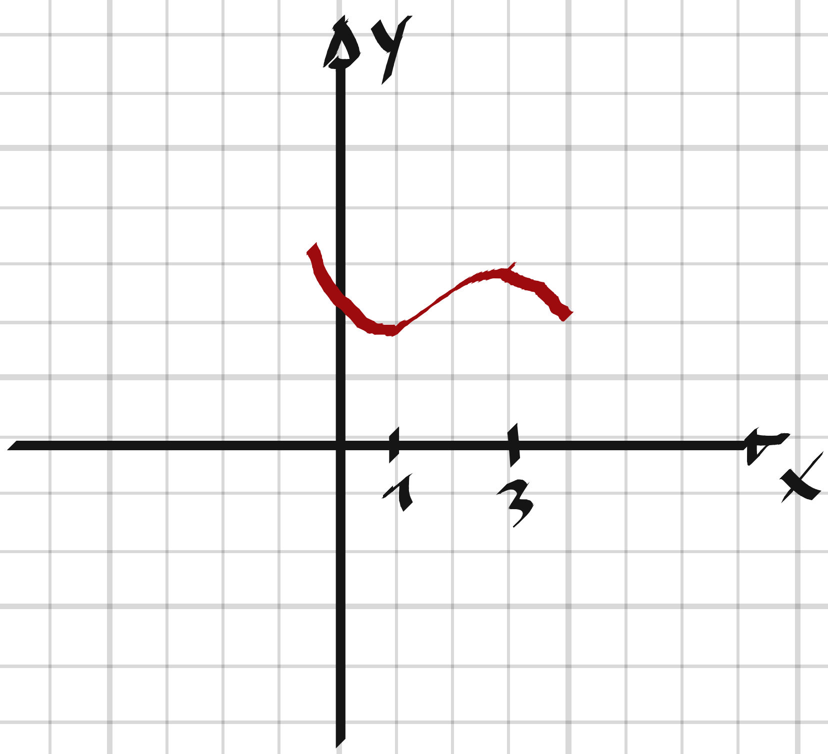
c) $x \leq -6$ , $x \geq 2$

---

**4106** En tredjegradsfunktion $f(x)$ har $f'(x) = 0$ i punkterna $(1, 2)$ och $(3, 3)$ samt $f'(x) < 0$ när $x < 1$ och när $x > 3$.

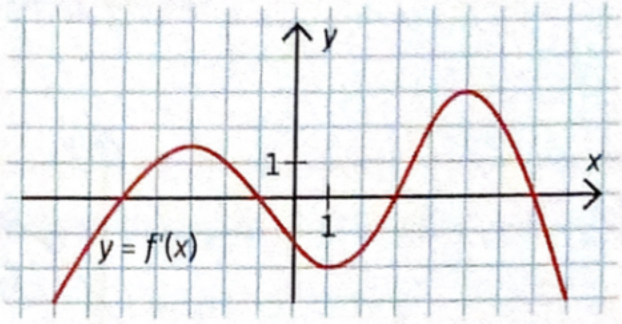
Vilket tecken har $f'(x)$ i intervallet $1 < x < 3$?

4106. $f'(x) > 0$ , $1 < x < 3$




---

**4107** Figuren visar grafen $y = f'(x)$.




a) För vilket eller vilka värden på $x$ är $f'(x) = 0$?

b) I vilket intervall är funktionen $f$ strängt växande?

c) I vilka intervall är funktionen $f$ strängt avtagande?

4107. a) $x_1 = -5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 7$

b) $-5 \leq x \leq -1$, $3 \leq x \leq 7$

c) $x \leq -5$, $-1 \leq x \leq 3$, $x \geq 7$

---

**4108 ö** Du får i uppgift att bestämma de intervall där $f$ är strängt växande respektive strängt avtagande. Hur skulle du lösa uppgiften utan att använda grafritande räknare?

4108. Tecknar derivatan och undersöker dess tecken.

---

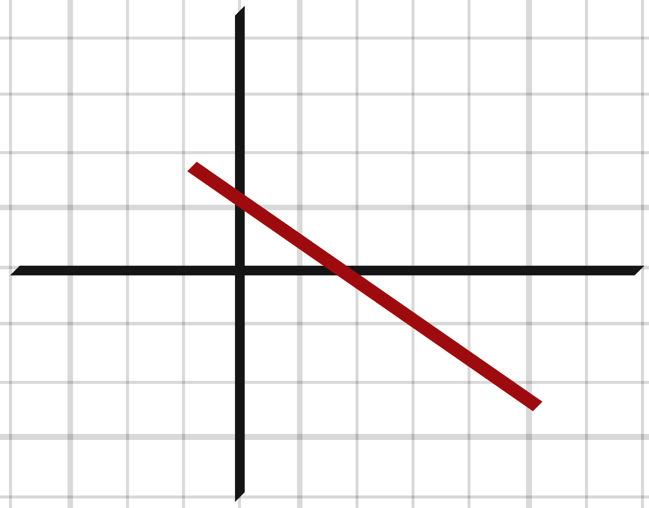
**4109** Skissa en graf till funktionen $f$ i intervallet
**ö** $-1 \leq x \leq 5$ om

a) $f'(x) < 0$ i hela intervallet.

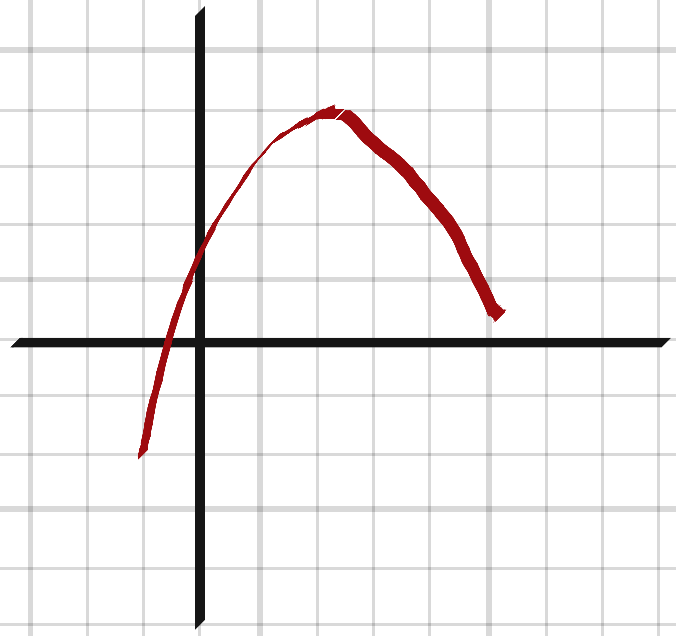
b) $f'(x) > 0$ för $x < 2$
$f'(x) = 0$ för $x = 2$
$f'(x) < 0$ för $x > 2$

4109.

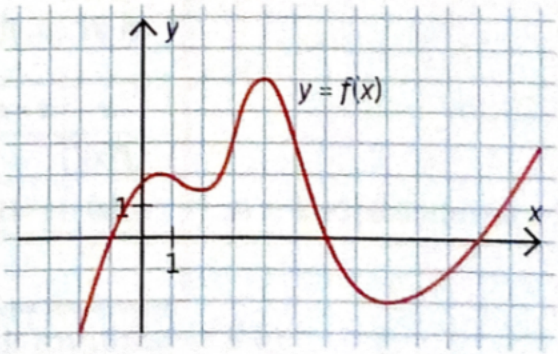
a)



b)



**4110** Figuren visar grafen $y = f(x)$. För vilka värden på $x$ gäller samtidigt att




a) $y > 0$ och $f'(x) > 0$

b) $y < 0$ och $f'(x) > 0$

c) $y < 0$ och $f'(x) < 0$

4110. a) $-1 < x < 0{,}5$ , $2 < x < 4$ , $x > 11$

b) $x < -1$ , $8 < x < 11$

c) $6 < x < 8$

---

**4118** Bestäm de lokala extrempunkternas och terrasspunktens koordinater för $y = x^4 - 4x^3$.

4118. $y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$

$y' = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0$ , $x_3 = 3$

| $x$ | | 0 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | $\searrow$ | terass | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Terasspunkt = (0,0)

Minpunkt = (3,-27)

**4119** ö Du får i uppgift att bestämma de lokala extrempunkterna till en funktion. Hur skulle du lösa uppgiften?

4119. Ta ut värdena där derivatan är noll, samt kontrollera ändvärdena. Sedan kontrollera om punkterna är max- eller minpunkter

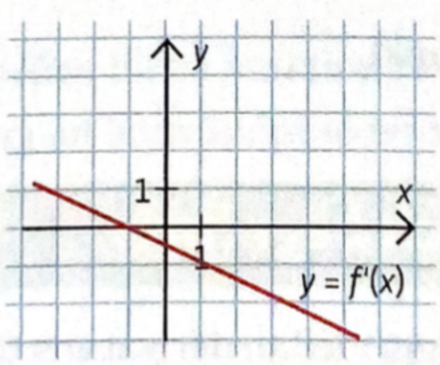
---

**4120** ö Du får i uppgift att bestämma terrasspunktens koordinater till en funktion. Hur skulle du lösa uppgiften?

4120. Som ovan med teckenstudium.

---

**4121** Figuren visar grafen $y = f'(x)$ som är derivatan av $f(x)$.




a) För vilket värde på $x$ har $f$ lokalt extremvärde?

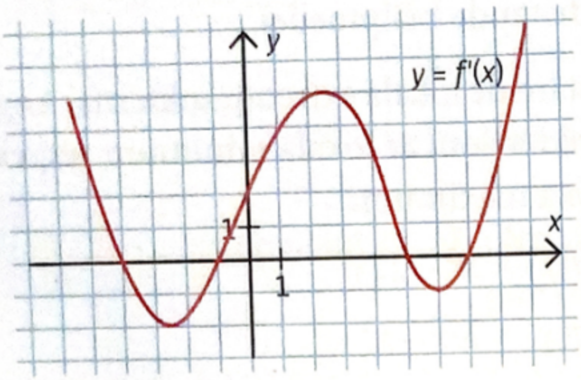
b) Är extremvärdet lokalt minimum eller lokalt maximum? Motivera ditt svar.

4121. a) $x = -1$

b) Det är ett lokalt maximum då $f'(x) > 0,\ x < -1$ och $f'(x) < 0,\ x > -1$

---

**4122** Figuren visar grafen $y = f'(x)$.




a) För vilka värden på $x$ har $f$ lokala extremvärden?

b) Vilka $x$-värden ger lokalt minimum respektive lokalt maximum för $f(x)$? Motivera ditt svar.

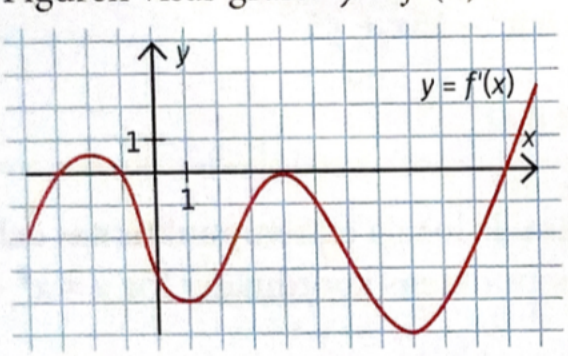
4122. a) $x_1 = -4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$

b) $x_1$ och $x_3$ ger lokalt maximum

$x_2$ och $x_4$ ger lokalt minimum

---

**4123** Figuren visar grafen $y = f'(x)$.




a) För vilka värden på $x$ har $f$ lokala extremvärden?

b) Vilken $x$-koordinat har terrasspunkten för $f(x)$? Motivera ditt svar.

4123. a) $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$, $x_4 = 11$

b) $x_3 = 4$ då $f'(x)$ har samma tecken på bägge sidor om $x = 4$.

---

**4124** I funktionen med $f(x) = \frac{x^3}{3} + ax^2$ är $a$ en konstant. Bestäm värden på $a$ så att $f$ får

a) två lokala extrempunkter

b) en terrasspunkt

4124.

$$f'(x) = x^2 + 2ax$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -a \pm a$$

Om $f'(x) = 0$ har två lösningar $\Rightarrow$

två lokala extrempunkter.

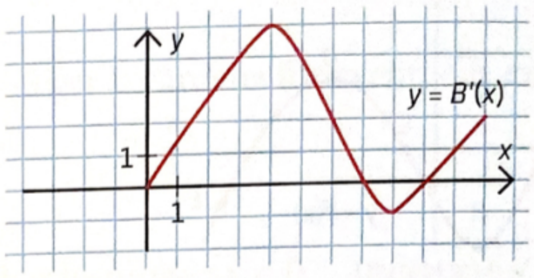
Detta gäller för alla $a \neq 0$.

Om $f'(x) = 0$ endast har en lösning $\Rightarrow$

en terrasspunkt.

Detta gäller för $a = 0$.

**4125** Grafen visar $y = B'(x)$ som är derivatan av $B(x)$. $B(x)$ beskriver antalet besökare i tusental på ett äventyrsbad, där $x$ är antalet dagar efter badets öppnande.




a) Hur många dagar efter badets öppnande har antalet besökare börjat sjunka?

b) Under vilka perioder har antalet besökare ökat?

4125. a) $\underline{7 \text{ dgr}}$

b) $\underline{0 < x < 7 \quad , \quad x > 9 \quad \text{dgr}}$

---

**4126** För $f(x) = x^2 + px + q$, där $p$ och $q$ är konstanter, gäller att $f(2) = f'(2) = 0$. Bestäm $p$ och $q$.

4126. $f'(x) = 2x + p$

$f'(2) = 0 \Rightarrow p = -4$

$f(2) = 0 \Rightarrow 2^2 - 4 \cdot 2 + q = 0 \Rightarrow q = 4$

---

**4127** Låt $f(x) = x^3 + ax^2 + x$, där $a$ är en konstant. För vilka värden på $a$

a) har $f$ två lokala extrempunkter

b) har $f$ en terrasspunkt

4127. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{2a}{3}x + \frac{1}{3} = 0$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 3}}{3}$$

a) 2 lösningar om $a^2 - 3 > 0 \Rightarrow a > \sqrt{3}$

$a < -\sqrt{3}$

b) 1 lösning om $a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$

**4128** Staffan säger att om en funktion $f$ är strängt växande på ett intervall $a \leq x \leq b$, så måste det också gälla att $f'(x) > 0$ för alla $x$ i intervallet. Nej, säger Rudi, $f$ kan vara strängt växande även om det finns $x$ där $f'(x) = 0$. Förklara varför Rudi har rätt.

4128. $f(x)$ kan ha en terrasspunkt.

---

**4207** Låt $f(x) = x^3 - 4{,}5x^2 + 11$ och bestäm utan att använda grafritande räknare funktionens största respektive minsta värde i intervallet $-5 < x \leq 2$.

4207. $f'(x) = 3x^2 - 9x = 3x(x-3)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, (x_2 = 3)$

$f(0) = 11$

$f(2) = 1$

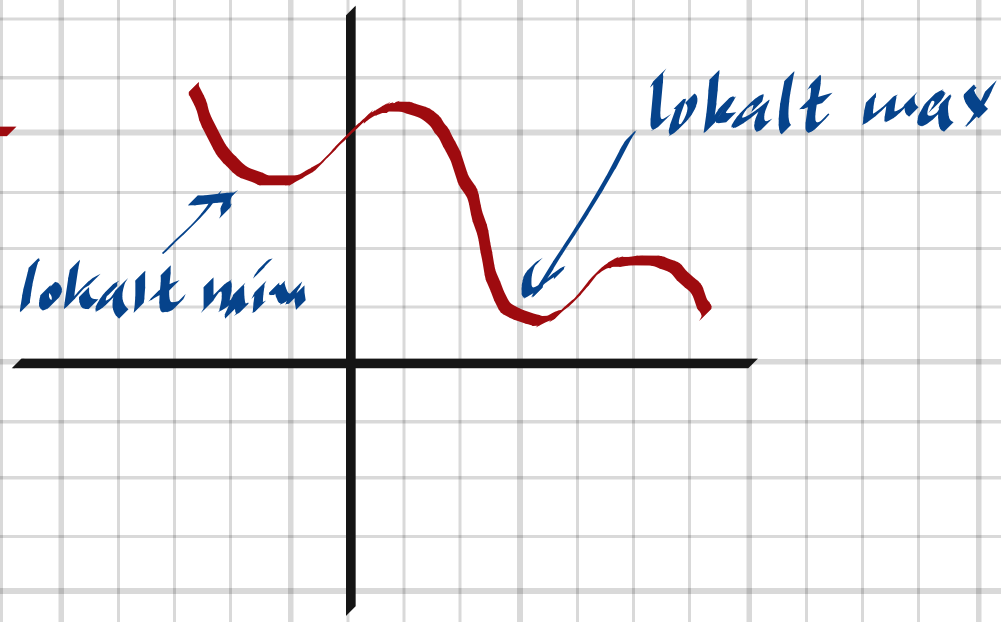
| $x$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | $\nearrow$ | max | $\searrow$ |

maxvärde = 11

---

**4208** Kan det inom ett och samma intervall finnas ett lokalt minimum som är större än ett lokalt maximum? Motivera ditt svar.

4208. Ja.




**4209** Givet $f(x) = x^3 - 5x^2 + m$, där $m$ är en konstant:

a) Påverkas $x$-koordinaten för de lokala extrempunkterna av $m$? Motivera ditt svar.

b) Hur påverkas funktionens lokala extremvärden av $m$?

4209. a) Nej, m påverkar bara kurvans höjd.

b) Extremvärdet blir större eller lägre.

**4210** En tredjegradsfunktion är definierad i intervallet $a \le x \le b$ och har en terrasspunkt i intervallet $a < x < b$. Är det möjligt att funktionsvärdet i terrasspunkten är funktionens minsta värde i intervallet? Motivera ditt svar.

4210. Nej, eftersom funktionsvärdet antingen växer eller avtar på bägge sidor om terasspunkten.

---

**4211** Bestäm största och minsta värde till $f(x) = e^x - 3x - 2$ i intervallet $-4 \le x < 5$.

4211. $f'(x) = e^x - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \ln 3$

$f(-4) = 10{,}0$

$f(\ln 3) = -2{,}30$

| $x$ | | $\ln 3$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | minpunkt | $\nearrow$ |

$f_{min} = -2{,}30$

**4212** En funktion $f$ har derivatan $f'(x) = kx - 1$. Derivatan har ett nollställe i $x = 3$. Har funktionen lokalt minimum eller lokalt maximum för $x = 3$? Motivera ditt svar.

4212.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{x}{3} - 1$$

| $x$ | | 3 | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

---

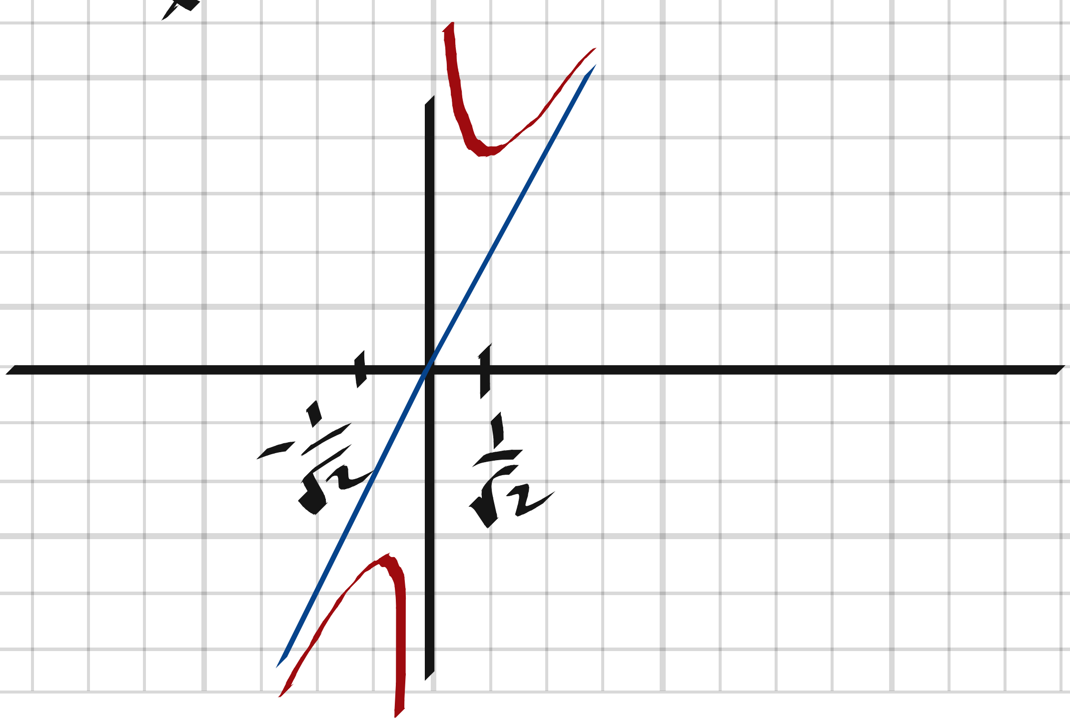
**4213** Skissa grafen till funktionen $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

Undersök om funktionen har ett största eller ett minsta värde.

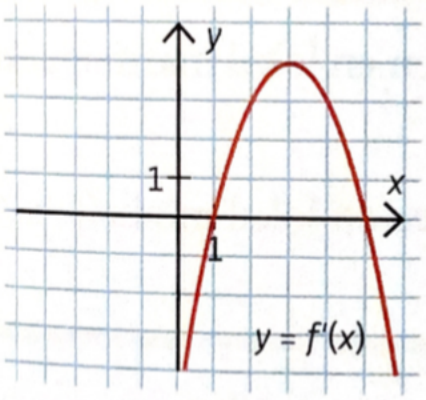
4213.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2x \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$



**4220** Grafen till $f'(x)$ är ritad i figuren.

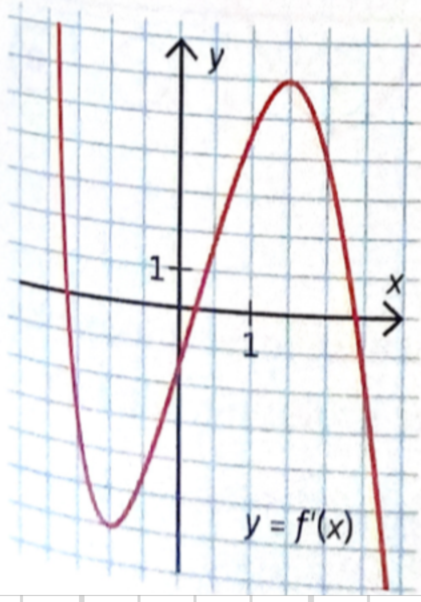



Ange $x$-koordinaten för inflexionspunkten till funktionen $f$.

4220. $x = 3$

---

**4221** Grafen till $f'(x)$ är ritad i figuren. Bestäm $x$-koordinaten för eventuella inflexionspunkter till $f$.




4221. $x_1 = -1$, $x_2 = 1{,}5$

---

**4222** Låt $f(x) = kx + m$, där $k$ och $m$ är konstanter.

a) Bestäm $f''(x)$.

b) Förklara resultatet från a) med hjälp av utseendet av grafen till $f(x)$.

4222. a) $f'(x) = k$

$\underline{f''(x) = 0}$

b) <u>Andraderivatan av en linjär funktion blir alltid noll.</u>

---

**4223** Undersök följande kurvor. Bestäm inflexionspunkter och ange i vilka intervall de är konvexa respektive konkava.

a) $y = x^3 - 3x + 2$

b) $y = x^4 - 6x^3 + 8$

4223. a) $y' = 3x^2 - 3$

$y'' = 6x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0$

<u>Inflexionspunkt i $x = 0$</u>

| $x$: | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | konkav | | konvex |

b) $y' = 4x^3 - 18x^2$

$y'' = 12x^2 - 36x = 12x(x-3)$

$y'' = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3$

<u>Inflexionspunkter i $x = 0$ och $x = 3$</u>

| $x$: | | 0 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | konvex | | konkav | | konvex |

**4224** Kurvan till $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$ har en inflexionspunkt. Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan i inflexionspunkten.

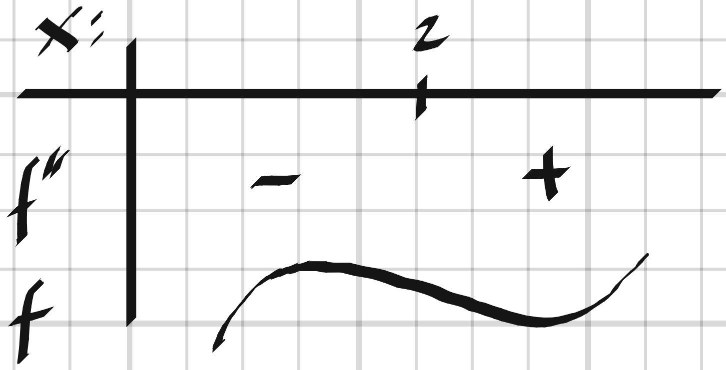
4224. $f'(x) = 3x^2 - 12x$

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

$f''(x<2) < 0$ : konkav

$f''(x>2) > 0$ : konvex




Tangentens ekv:

$y - y(2) = k(x-2)$ , $k = f'(2) = -12$

$y(2) = f(2) = 8 - 24 + 7 = -9$

$y - (-9) = -12(x-2)$

$y = -12x + 15$

**4225** Bestäm de intervall där funktionen $f(x) = e^{2x} - 2e^x$ är konvex respektive konkav.

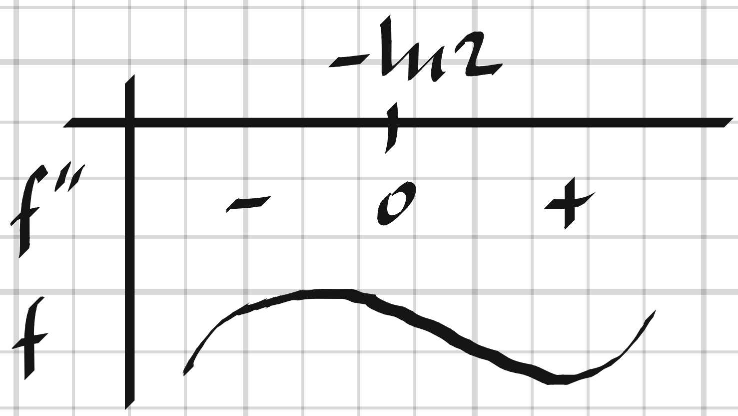
4225. $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x$

$f''(x) = 4e^{2x} - 2e^x$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 4e^{2x} = 2e^x \Rightarrow 2e^x = 1 \;;\; x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

$\underline{f''(x < \ln\frac{1}{2}) < 0 \;:\; f \text{ konkav}}$

$\underline{f''(x > \ln\frac{1}{2}) > 0 \;:\; f \text{ konvex}}$




**4226** Bestäm konstanterna $a$ och $b$ så att $f(x) = x^4 + ax^3 + b$ får en inflexionspunkt i $(-1, 0)$.

4226. $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2$

$f''(x) = 12x^2 + 6ax = 6x(2x + a)$

$f''(-1) = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}$

$f(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^4 + 2(-1)^3 + b = 0 \Rightarrow \underline{b = 1}$

**4227** Några elever har fått i uppgift att bestämma inflexionspunktens koordinater till funktionen $f(x) = x^5 - 19x^4 + 71x^3 - x^2 + 93$, samt de intervall där funktionen är konvex respektive konkav.

Klara säger på en gång att funktionen kan ha maximalt tre inflexionspunkter. Hennes kamrater menar att man inte kan säga så utan att först ha löst uppgiften.

Har Klara rätt eller fel? Motivera ditt svar.

4227. Klara har rätt. Andraderivatan blir en tredjegradsekvation med maximalt 3 nollställen

---

**4228** Visa att funktionen $f(x) = x^4 - 4x - 6$ saknar inflexionspunkt.

4228.

$f'(x) = 4x^3 - 4$

$f''(x) = 12x^2$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x<0) > 0$ : $f$ konvex

$f''(x>0) > 0$ : $f$ konvex

Andraderivatan växlar ej tecken för $x>0$ och $x<0$

$\Rightarrow$ Inflexionspunkt saknas.

---

**4234** Avgör om följande påståenden är sanna:

a) Om $f(x)$ har en lokal maximipunkt för $x = a$, så är $f'(a) = 0$.

b) Om $f'(a) = 0$ och $f''(a) < 0$, så har $f$ minimipunkt för $x = a$.

c) Om $f(x)$ har en terrasspunkt för $x = a$, så är $f''(a) = 0$.

4234. a) Ja.

b) Nej. $f''(a) > 0$ vid minimipunkt

c) Ja.

---

**4235** Ange en funktion som har

ö

a) en terrasspunkt i (0, 3)

b) en lokal maximipunkt i (0, 3)

4235. a) $\underline{f(x) = x^3 + 3}$

b) $\underline{f(x) = -x^2 + 3}$

---

**4236** Beräkna $f''(1)$ om

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x}$

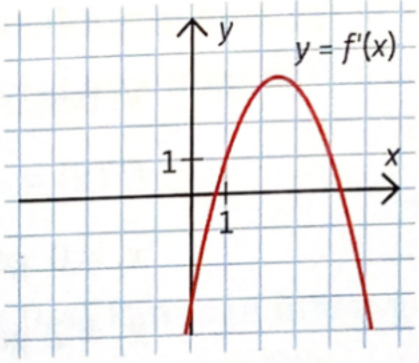
b) $f(x) = 5^{2x} + x$

4236. a) $f'(x) = 1 + 2x^{-2}$, $f''(x) = -4x^{-3}$, $f''(1) \underline{= -4}$

b) $f'(x) = \ln 25 \cdot 5^{2x} + 1$, $f''(x) = (\ln 25)^2 \cdot 5^{2x}$, $f''(1) \underline{= 259}$

---

**4237** Figuren visar grafen till andragradsfunktionen $y = f'(x)$.




a) För vilket värde på $x$ är $f''(x) = 0$?

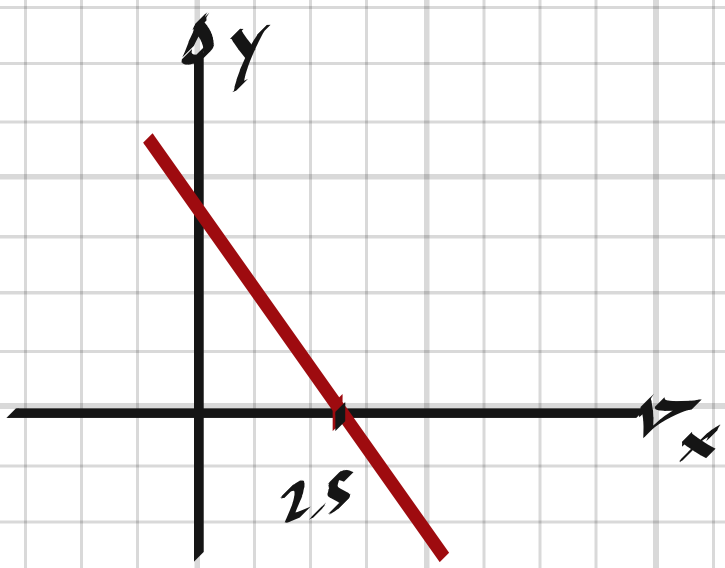
b) Bestäm det värde på $x$, där $f$ har ett lokalt maximivärde.

c) Beskriv grafen $y = f''(x)$.

4237. a) $x = 2,5$

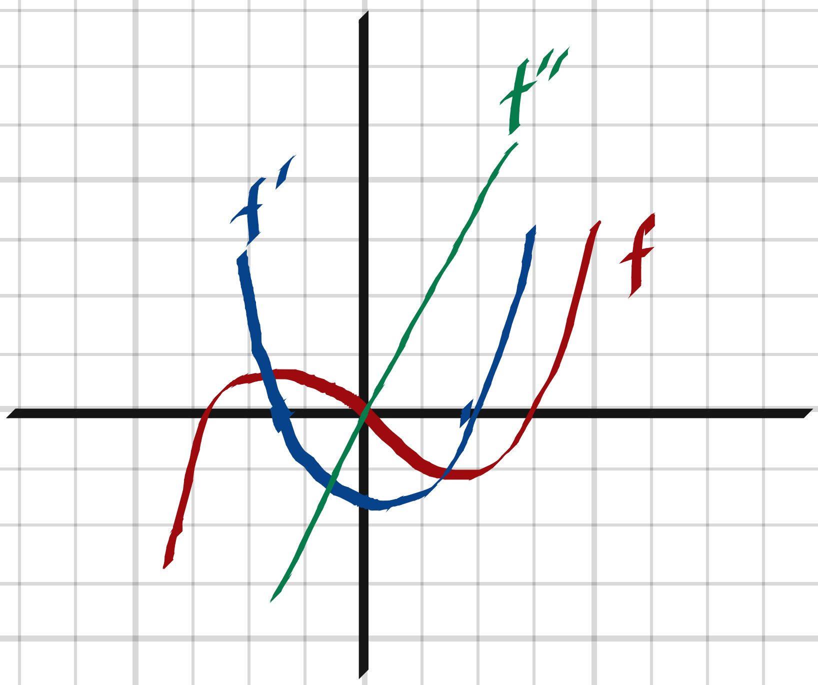
b) $x = 4,2$

c)



**4238** Rita graferna till $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$, $f'(x)$ och $f''(x)$ i samma koordinatsystem. Beskriv och jämför deras utseende.

4238. $f'(x) = x^2 - 1$ , $f''(x) = 2x$




---

**4239** Funktionen $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ har en lokal minimipunkt i $(2, -2)$. Bestäm konstanterna $a$ och $b$.

4239. $f'(x) = 3x^2 + 2ax$

$f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 = 0 \Rightarrow a = -3$

$f(2) = -2 \Rightarrow 2^3 + (-3) \cdot (-2)^2 + b = 0 \Rightarrow b = 4$

---

**4240** ö Bestäm en funktion som har

a) en terrasspunkt i (2, –3)

b) en lokal minimipunkt i (–12, 3)

4240. a) $(x-2)^3 - 3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3 - 3 =$

$= \underline{x^3 - 6x^2 + 12x - 11}$

b) $(x+12)^2 + 3 = x^2 + 24x + 144 + 3 =$

$= \underline{x^2 + 24x + 147}$

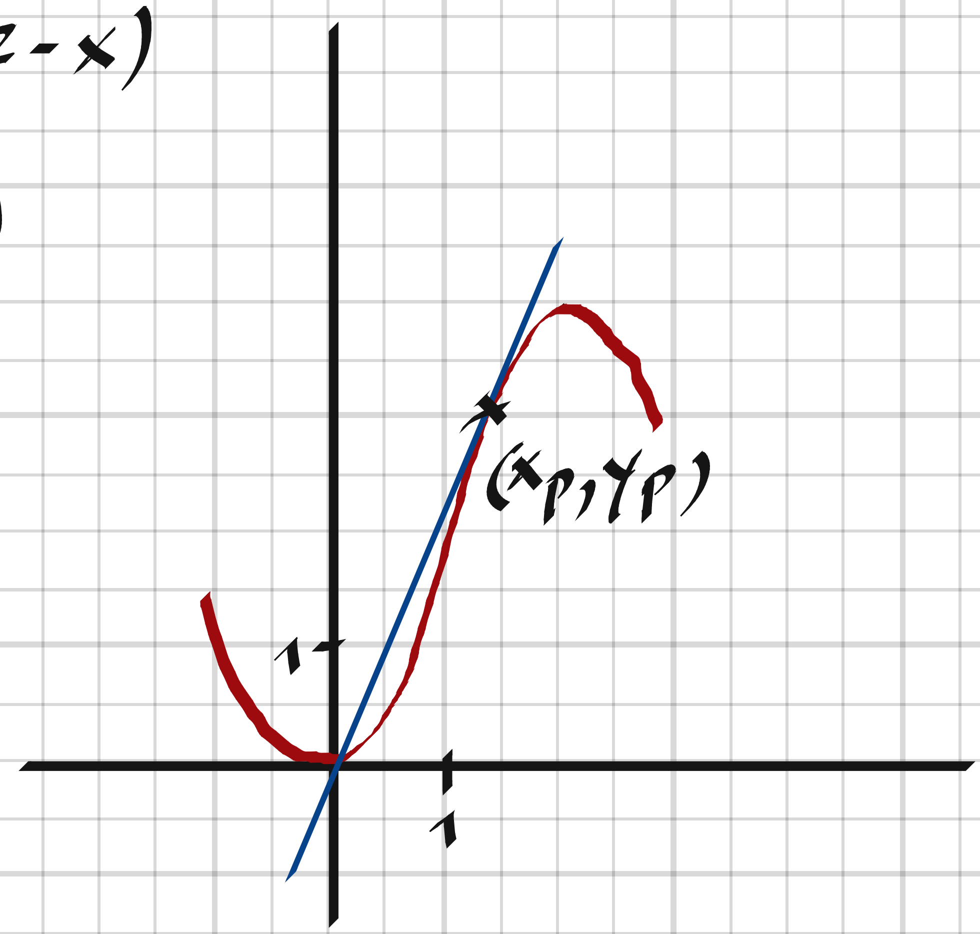
**4241** En rät linje går genom den lokala minimipunkten till kurvan $y = 3x^2 - x^3$. Linjen tangerar kurvan i en annan punkt. Bestäm den punktens koordinater.

4241.

$$y = 3x^2 - x^3 = x^2(3-x)$$

$$y' = 6x - 3x^2 = 3x(2-x)$$

$$y'' = 6 - 6x = 6(1-x)$$




$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$

$y''(0) > 0$ : minimum

$y''(2) < 0$ : maximum

$y(0) = 0$

$y(2) = 4$

Tangentens ekv: $(m = 0)$

$$g - g(x_p) = k(x - x_p) \quad , \quad k = y'(x_p),\ g(x_p) = y(x_p)$$

$$g = y'(x_p) \cdot x - y'(x_p) \cdot x_p + g(x_p)$$

$m = 0 \Rightarrow \quad g(x_p) = y'(x_p) \cdot x_p$

$$3x_p^2 - x_p^3 = (6x_p - 3x_p^2) \cdot x_p$$

$x_p \neq 0 \Rightarrow \quad 3 - x_p = 6 - 3x_p \Rightarrow \quad x_p = \frac{3}{2},\ y_p = \frac{27}{8}$

**4242** Bestäm en funktion som har

**ö**

a) en inflexionspunkt i (7, 3)

b) en lokal maximipunkt i (1, 2) och en lokal minimipunkt i (5, –4)

4242. a) $y(7) = 3$ , $y''(7) = 0$

$$y = (x-7)^3 + 3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 7 + 3 \cdot x \cdot 7^2 + 7^3 + 3 =$$
$$= x^3 - 21x^2 + 147x + 346$$

$y' = 3x^2 - 42x + 147$

$y'' = 6x - 42$

$y''(x) = 0 \Rightarrow x = 7$ ok!

$$\left.\begin{array}{l} y''(x<7) < 0 \\ y''(x>7) > 0 \end{array}\right\} \text{växlar tecken} \Rightarrow \text{ok!}$$

$$\underline{y = x^3 - 21x^2 + 147x + 346}$$

b) $y(1) = 2$ , $y(5) = -4$ , $y'(1) = 0$ , $y'(5) = 0$

$y''(1) < 0$ , $y''(5) > 0$

$$y' = k(x-1)(x-5) = k(x^2-6x+5)$$

$$y = k\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right) + c$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow k\left(\frac{1}{3} - 3 + 5\right) + c = 2$$

$$y(5) = -4 \Rightarrow k\left(\frac{125}{3} - 75 + 25\right) + c = -4$$

$$\begin{cases} \frac{7k}{3} + c = 2 \\ -\frac{25k}{3} + c = -4 \end{cases} \qquad \frac{32k}{3} = 6 \Rightarrow k = \frac{9}{16}$$

$$c = 2 - \frac{7 \cdot 9}{3 \cdot 16} = \frac{33}{48} = \frac{11}{16}$$

$$\underline{y = \frac{3x^3}{16} - \frac{27x^2}{16} + \frac{45x}{16} + \frac{11}{16}}$$

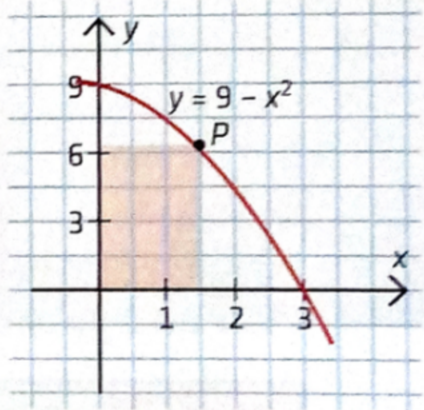
$$y'' = k(2x-6) = \frac{9x}{8} - \frac{27}{8}$$

$y''(1) < 0$ ok!

$y''(5) > 0$ ok!

---

**4251** I figuren är kurvan $y = 9 - x^2$ ritad i första kvadranten. Rektangeln har ett hörn $P$ på kurvan. När $P$ varierar så varierar också rektangelns area.




a) Bestäm ett funktionsuttryck $A(x)$ för rektangelns area.

b) Bestäm det största värdet som rektangelns area kan anta.

4251. a) $A(x) = x(9 - x^2) = \underline{9x - x^3}$

b) $A'(x) = 9 - 3x^2$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$A(\sqrt{3}) = 9 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3}^3 = 9\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$A''(x) = -6x$

$A''(6\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow$ maximum

$\underline{A_{max} = A(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \approx 10.4 \text{ a.e}}$

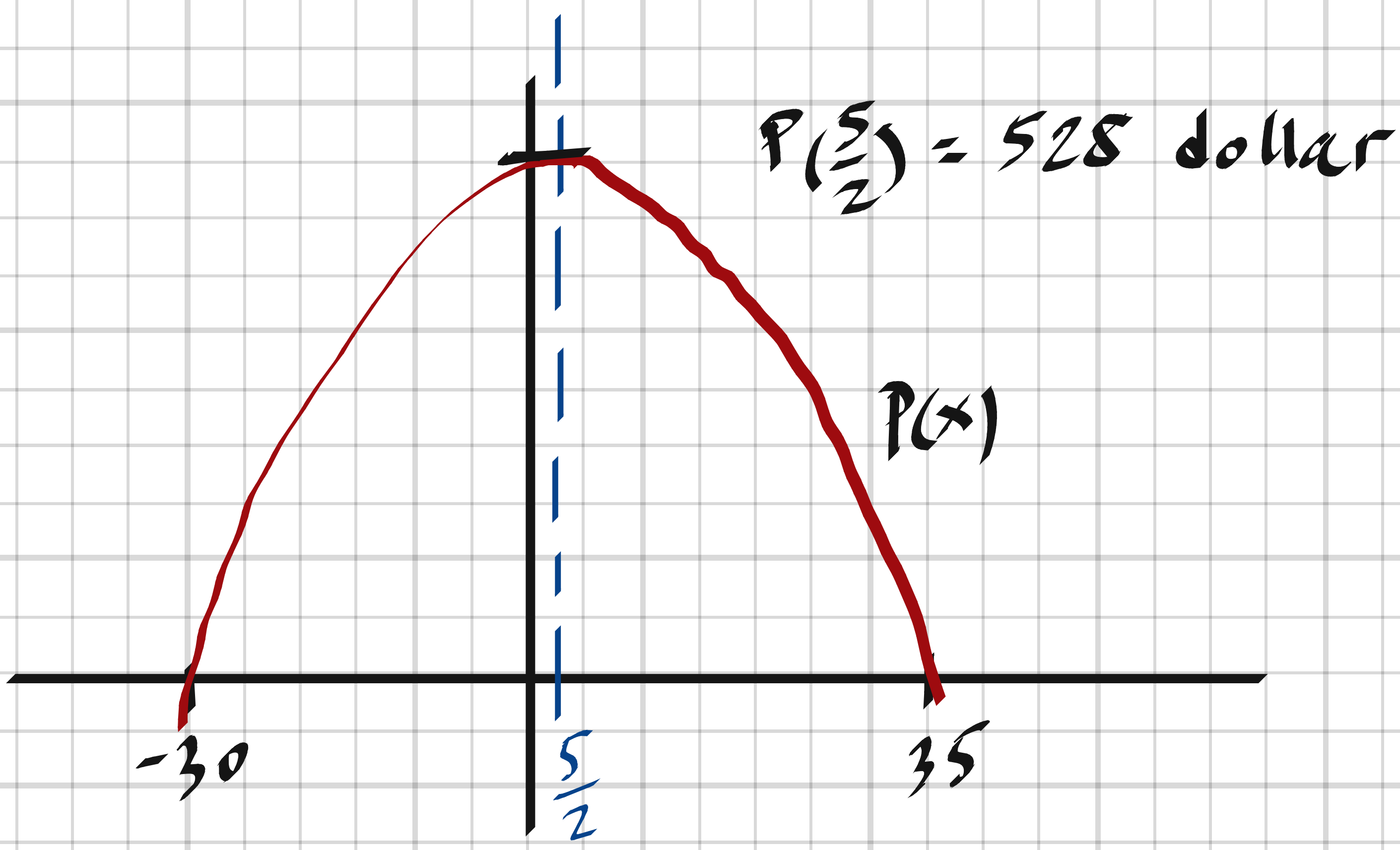
**4252** Mia ska ta hand om en kanotuthyrning på en semesterort. Hon tittar på gammal statistik och ser att det har kostat 15 dollar att hyra en kanot för en dag. Hon ser också att det i genomsnitt har hyrts ut 35 kanoter per dag. Hon gör sedan en liten marknadsundersökning och kommer fram till att för varje $\frac{1}{2}$ dollar som priset ökar per dag, så minskar uthyrningen med 1 kanot per dag. Vilket pris ska hon sätta för att inkomsten under de 2 månader som hon ska sköta uthyrningen ska bli så stor som möjligt?

4252. $P(x) = (35 - x)\left(15 + \frac{x}{2}\right) = 525 + \frac{5x}{2} - \frac{x^2}{2}$

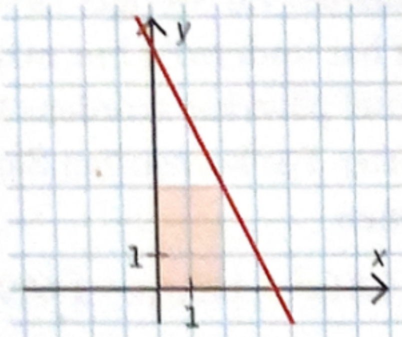
$P'(x) = \frac{5}{2} - x$

$P'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

Pris/kanot $= 15 + \frac{5}{4} = \underline{16{,}25 \text{ dollar}}$



**4253** I figuren är linjen $y = 7 - 2x$ ritad i första kvadranten. En rektangel ritas under kurvan enligt figuren.




a) Bestäm funktionsuttrycket $A(x)$ som beskriver rektangelns area.

b) Bestäm det största värdet som rektangelns area kan anta.

4253. a) $A(x) = x(7-2x) = 7x - 2x^2$

b) $A'(x) = 7 - 4x$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{4}$

$A_{max} = A(\frac{7}{4}) = 7 \cdot \frac{7}{4} - 2 \cdot (\frac{7}{4})^2 = \frac{49}{4} - \frac{49}{8} = \frac{49}{8} \approx \underline{6{,}125}$ a.e

---

**4254** Summan av diametern och höjden i en cylinderformad behållare är 20 cm. Beräkna behållarens maximala volym.

4254. $V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h$ , $d + h = 20 \Rightarrow$

$V(d) = \frac{\pi}{4} d^2 (20 - d) = \frac{\pi}{4}(20d^2 - d^3)$

$V'(d) = \frac{\pi}{4}(40d - 3d^2) = \frac{\pi}{4} d (40 - 3d)$

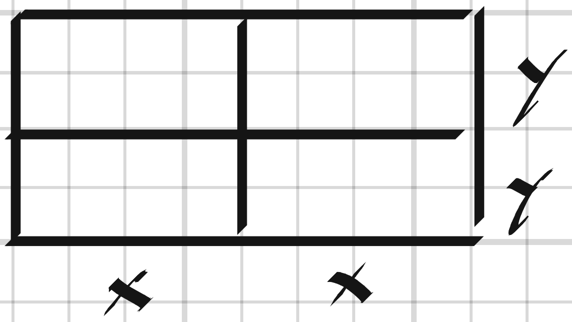
$V'(d) = 0 \Rightarrow d = \frac{40}{3}$ ; $V_{max} = V(\frac{40}{3}) = \frac{\pi}{4}\left(20 \cdot (\frac{40}{3})^2 - (\frac{40}{3})^3\right) \approx \underline{931 \text{ cm}^3}$

---

**4255** Lotta vill plantera fyra olika växter i en rektangulär odling enligt figuren. Hon har 200 meter staket till sitt förfogande, som ska räcka både runt hela området och till att avgränsa de mindre områdena innanför. Vilka mått på området ger den största arean?

| | |
|---|---|
| Morötter | Sallad |
| Rädisor | Bönor |

4255




$$A = 2x \cdot 2y = 4xy$$

$$6x + 6y = 200 \Rightarrow y = \frac{200 - 6x}{6}$$

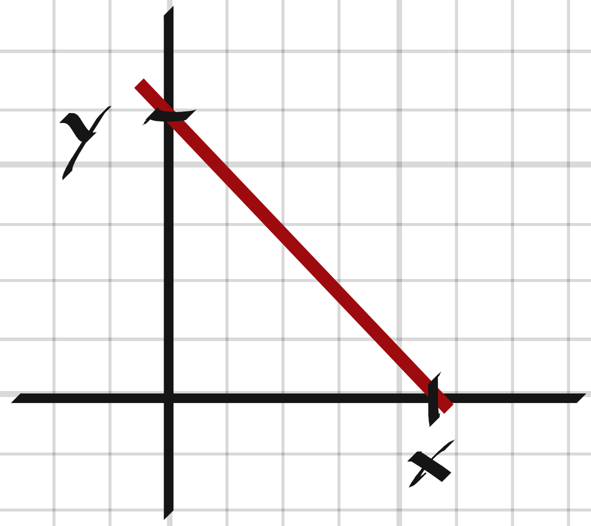
$$A(x) = 4x \cdot \frac{200 - 6x}{6} = \frac{400x}{3} - 4x^2$$

$$A'(x) = \frac{400}{3} - 8x$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x = \frac{400}{3 \cdot 8} = \frac{100}{6}}$$

$$\underline{y = \frac{200 - 100}{6} = \frac{100}{6}}$$

**4256** En rät linje bildar tillsammans med koordinataxlarna en triangel i den första kvadranten. Bestäm triangelns största area om summan av *x*- och *y*-koordinaterna för linjens skärningspunkter med axlarna är 21.




4256.

$$A = x \cdot y / 2$$

$$x + y = 21 \Rightarrow$$

$$A(x) = \frac{x}{2}(21 - x) = \frac{21x}{2} - \frac{x^2}{2}$$

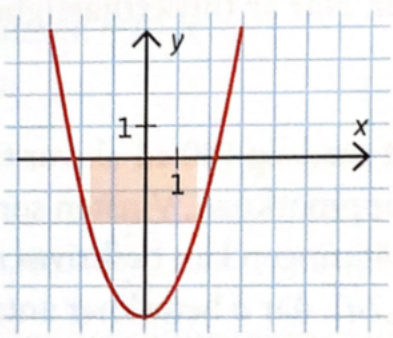
$$A'(x) = \frac{21}{2} - x$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{21}{2}$$

$$A_{max} = A\left(\frac{21}{2}\right) = \frac{21}{2} \cdot \frac{21}{2} - \frac{\left(\frac{21}{2}\right)^2}{2} = \frac{21^2}{8} \approx \underline{55{,}1 \text{ cm}^2}$$

---

**4257** I figuren är kurvan $y = x^2 - 5$ ritad. En rektangel ritas mellan kurvan och *x*-axeln enligt figuren. Bestäm det största värdet som rektangelns area kan anta.




4257.

$$A = 2x \cdot (-y) = 2x(5 - x^2) = 10x - 2x^3$$

$$A' = 10 - 6x^2$$

$$A' = 0 \Rightarrow x = \overset{+}{(-)}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$A_{max} = A\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 10 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} - 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} = \underline{8{,}6 \text{ a.e}}$$

---

**4258** Vilken radie och höjd ska en plåtcylinder med volymen $\pi$ v.e. ha, om materialåtgången ska vara så liten som möjligt?

4258. Mantelytan, $Y = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \Rightarrow h = \frac{1}{r^2}$

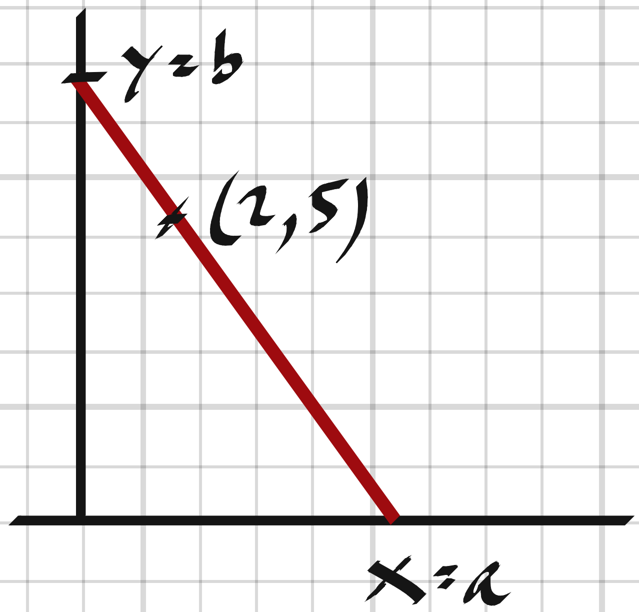
$Y(r) = 2\pi r^2 + 2\pi \cdot \frac{1}{r}$

$Y'(r) = 4\pi r - \frac{2\pi}{r^2}$

$Y'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{2\pi}{r^2} \Rightarrow r = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} \approx 0{,}794$ l.e

$h = \frac{1}{0{,}794^2} = \underline{1{,}587 \text{ l.e}}$

**4259** En linje genom punkten (2, 5) bildar tillsammans med koordinataxlarna i första kvadranten en triangel. Bestäm linjens ekvation så att triangelns area blir så liten som möjligt.




4259.

$$y-5=k(x-2)$$

$$y=kx+5-2k$$

$$y(a)=0 \Rightarrow 0=k\cdot a+5-2k \Rightarrow a=\frac{2k-5}{k}$$

$$y(0)=b \Rightarrow b=5-2k$$

$$A=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{(2k-5)(5-2k)}{2k}=\frac{-(2k-5)^2}{2k}=\frac{-(4k^2-20k+25)}{2k}=$$

$$=-2k+10-\frac{12{,}5}{k}$$

$$A'(k)=-2+\frac{12{,}5}{k^2}\ ;\ A'(k)=0 \Rightarrow k=(\pm)\sqrt{6{,}25}=-2{,}5$$

$$y=-2{,}5x+5-2\cdot(-2{,}5)$$

$$\underline{y=-2{,}5x+10}$$