20 Vinsten i ett litet företag beskrivs av funktionen $V(t) = 2t^2 - 12t + 118$, $0 \le t \le 12$, där $V(t)$ är vinsten i tusen kronor t månader efter det att prognosen görs. Bestäm vinstens minsta värde.

20. $V'(t) = 4t - 12$

$V'(t) = 0 \Rightarrow t = 3$

$V''(t) = 4 > 0 \Rightarrow$ minvärde

$V(0) = 118$

$V(3) = 18 - 36 + 118 = 100$

$V(12) = 288 - 144 + 118 = 262$

Minsta värdet = 100 000 kr

---

21 Ange vertikala och horisontella asymptoter till kurvan $y = \dfrac{1\,000}{x - 51} + 20$

21. Nämnaren 0 då $x = 51$

$\lim_{x \to \infty} y = 0 + 20 = 20$

Asymptoter: $x = 51$, $y = 20$

---

22 Skissa kurvan $y = \dfrac{x^2 - 2}{x}$ genom att bestämma asymptoterna, derivatan och koordinaterna för eventuella extrempunkter.

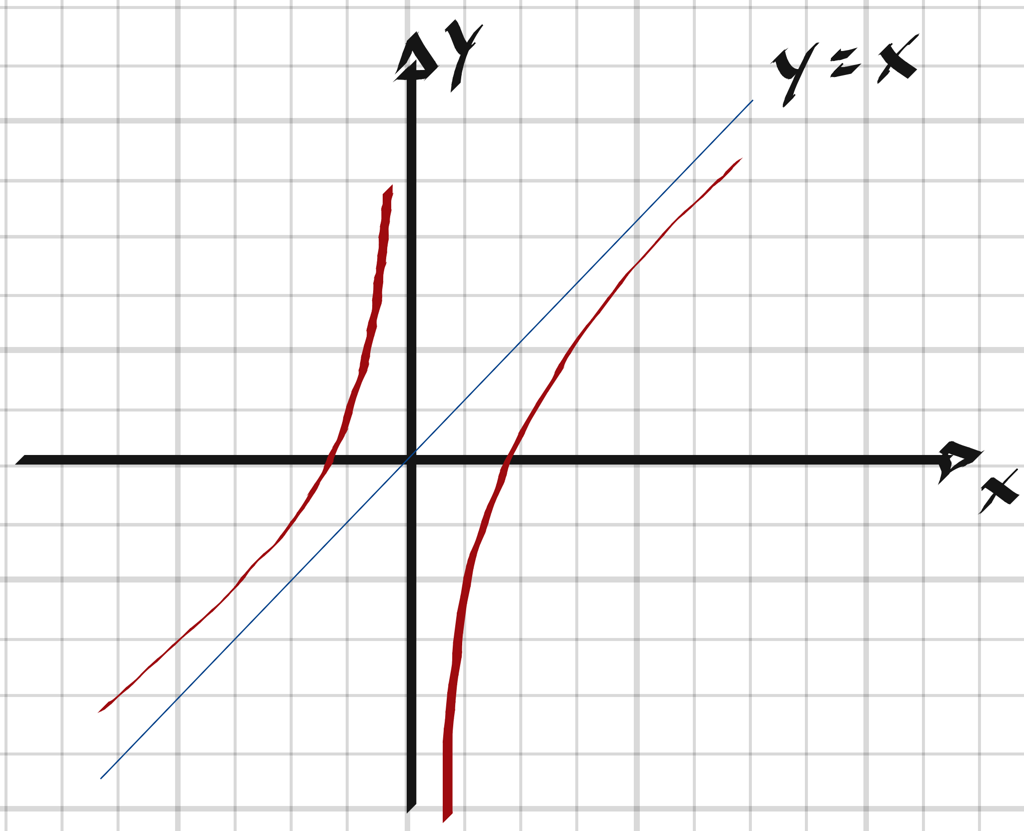
22. $y = \dfrac{x^2-2}{x} = x - \dfrac{2}{x}$

$\lim_{x \to -\infty} y = x \; ; \; \lim_{x \to \infty} y = x$

$\lim_{x \to 0} y = \pm \infty$

Asymptoter: $x = 0$, $y = x$

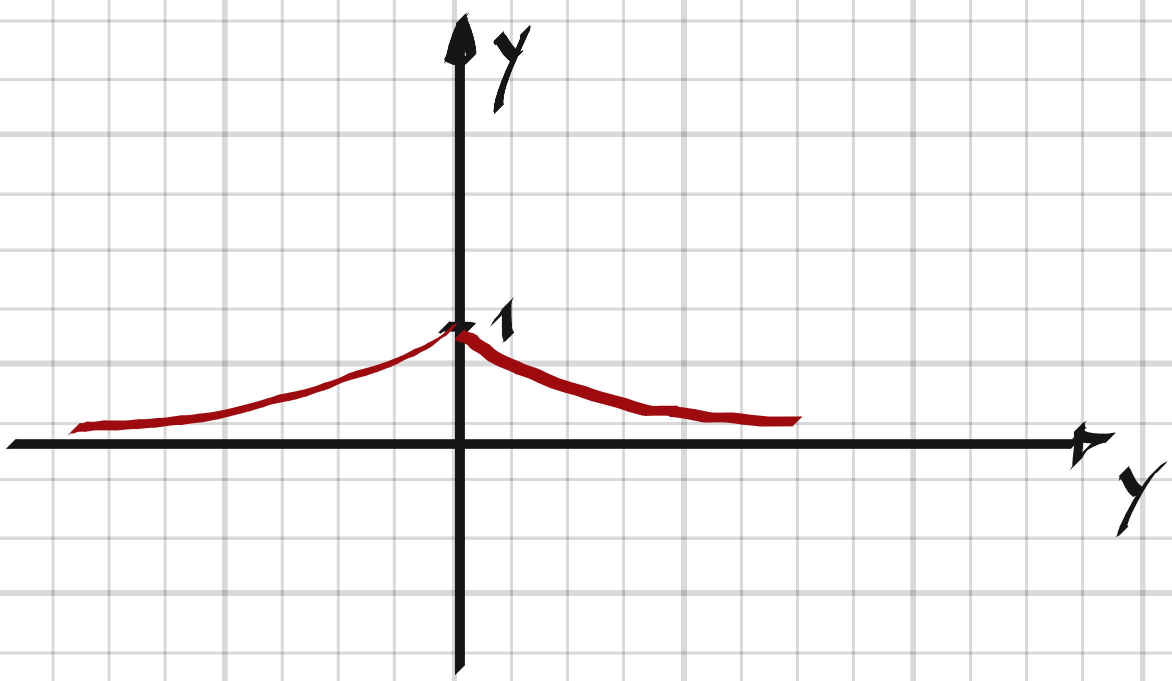
$y' = 1 + \dfrac{2}{x^2}$; $y' \neq 0 \Rightarrow$ extrempunkter saknas



23 Bestäm eventuella asymptoter till kurvan $e^{-|x|}$

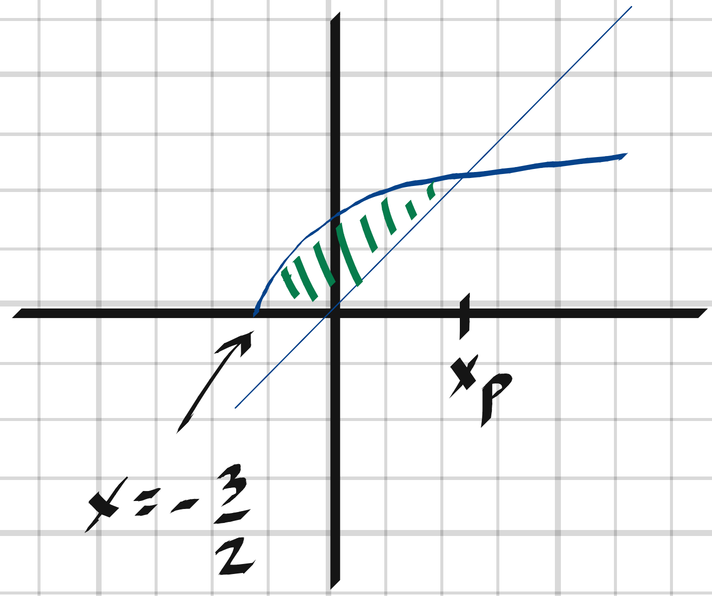
23. $\lim_{x \to \infty} e^{-|x|} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} e^{-|x|} = 0$

Asymptot: $y = 0$



24 Kurvorna $y = \sqrt{2x+3}$ och $y = x$ begränsar tillsammans med x-axeln ett område. Bestäm ett exakt värde på områdets area.

(*NP MaD vt 1997*)



$$\sqrt{2x_p + 3} = x_p \implies$$

$$x_p^2 - 2x_p - 3 = 0$$

$$(x_p - 3)(x_p + 1) = 0$$

$x_p = 3$, $x_p = -1$ falsk rot

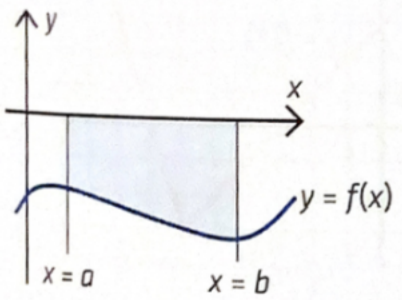
$$A = \int_{-3/2}^{0} \sqrt{2x+3}\,dx + \int_{0}^{3} (\sqrt{2x+3} - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{(2x+3)^{3/2}}{3}\right]_{-3/2}^{0} + \left[\frac{(2x+3)^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{3} - 0 + \frac{9\sqrt{9}}{3} - \frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{3} + 0 =$$

$$= \frac{6\sqrt{3} + 54 - 27 - 6\sqrt{3}}{6} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ a.e}$$

25 Vilka integraler beskriver arean av det skuggade området



A $\int_a^b f(x)\,dx$

B $\int_b^a f(x)\,dx$

C $-\int_a^b f(x)\,dx$

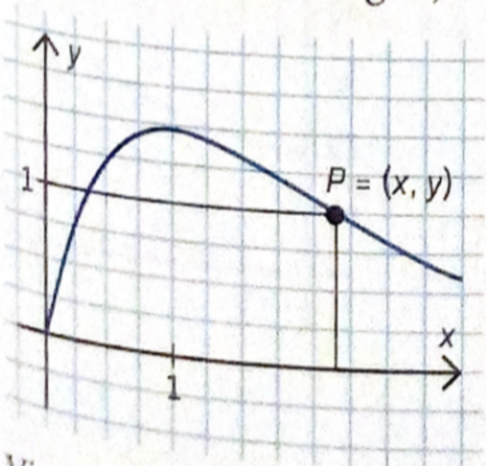
D $\int_a^b |f(x)|\,dx$

25. Alt. B, C och D

(Integralen $\int_a^b f(x)dx < 0$)

---

26 Figuren visar grafen till funktionen $y = 4x \cdot e^{-x}$ i intervallet $x > 0$. Från en punkt P på kurvan dras linjer mot x-axeln och y-axeln så att en rektangel bildas (se figur).



Visa med hjälp av derivata att rektangelns area har ett lokalt maximum för $x = 2$.

(NP MaE vt 1996)

26. $A = x \cdot y = 4x^2 \cdot e^{-x}$

$A' = 8xe^{-x} - 4x^2 \cdot e^{-x} = 4xe^{-x}(2-x)$

$A' = 0 \Rightarrow x = 2$, då $x > 0$ och $e^{-x} > 0$

$A'' = 8e^{-x} - 8xe^{-x} - (8xe^{-x} - 4x^2 \cdot e^{-x}) = 4e^{-x}(2 - 4x + x^2)$

$A''(2) = 4e^{-2} \cdot (-2) < 0 \Rightarrow$ maximum

27 En undersökning visade att skostorleken hos vuxna män var normalfördelad med medelvärdet $\mu = 42,1$ och standardavvikelsen $\sigma = 2,4$. Beräkna sannolikheten att en slumpvis vald vuxen man har en skostorlek mellan 40 och 44.

27.

Täthetsfunktionen $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$P(40 < x < 44) = \int_{40}^{44} f(x)\,dx$$

Metod 1: Geogebra

Integral$(f(x), 40, 44) = 0.595 = \underline{59.5\%}$

Metod 2: Standardiserad normalfördelning

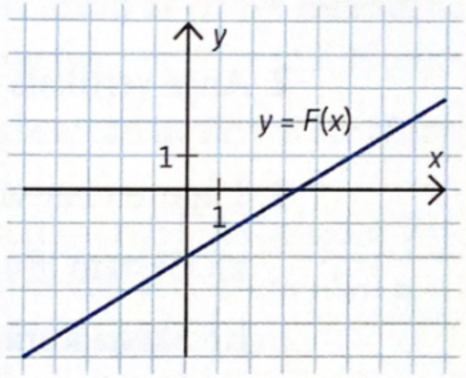
$44 - 42.1 = 1.9$ motsvarar $\frac{1.9}{2.4} = 0.792$ st.av.

$40 - 42.1 = -2.1$ — " — $-\frac{2.1}{2.4} = 0.875$ st.av.

$-0.875 \leq x \leq 0.792 \Rightarrow \underline{P = 59.5\%}$

28 Funktionen F är primitiv funktion till f. Figuren nedan visar $y = F(x)$.

Bestäm $\int_0^5 f(x)\,dx$.



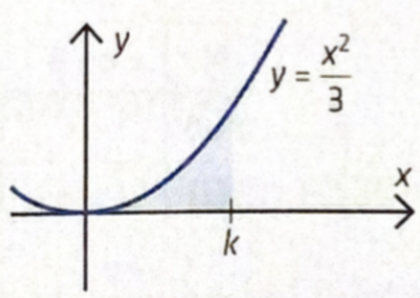
(*NP MaD vt 2005*)

28.

$$\int_0^5 f(x)dx = F(5) - F(0) = 1 - (-2) = \underline{3}$$

---

29 Det bildas en rotationskropp när kurvan $y = \frac{x^2}{3}$ roterar kring x-axeln i intervallet $0 \le x \le k$. Bestäm talet k, så att rotationskroppens volym blir 1 volymenhet.



29.

$$dV = \pi y^2 dx = \pi \frac{x^4}{9} dx$$

$$V = \int_0^k dV \Rightarrow \frac{\pi}{9}\int_0^k x^4 dx = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{9} \cdot \frac{k^5}{5} = 1$$

$$k^5 = \frac{45}{\pi} \; ; \; \underline{k = \left(\frac{45}{\pi}\right)^{1/5} \approx 1{,}7}$$

---

30 En partikels hastighet kan under en tidsperiod beskrivas med funktionen $v(t) = \frac{1}{(t+3)^2}$, där $t > 0$ är tiden i sekunder från tidsperiodens början och $s(0) = -\frac{1}{3}$ l.e. Visa att partikeln inte kan förflytta sig mer än $\frac{1}{3}$ l.e. från sin utgångspunkt, oavsett hur länge den är i rörelse.

30.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(t+3)^2} =$$

$$= -\left[\frac{1}{t+3}\right]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{t_1+3} - \frac{1}{t_2+3}$$

$$t_1 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{3} - \frac{1}{t_2+3}$$

$t_2 > 0 \Rightarrow |s|$ kan aldrig bli längre än $\frac{1}{3}$