23 Linjen $y = -x$ är en tangent till kurvan $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$. Bestäm tangeringspunkten.

23. $x^3 - 6x^2 + 8x = -x$

$x(x^2 - 6x^2 + 9) = 0$

$x_1 = 0$

$x_{2,3} = 3$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$

$f'(0) = 8 \neq -1 \Rightarrow$ falsk lösning

$f'(3) = 27 - 36 + 8 = -1 \Rightarrow$ ok!

$f(3) = 27 - 54 + 24 = -3$

Tangeringspunkten $= (3, f(3)) = \underline{(3, -3)}$

24 För vilka värden på konstanten k är $y(x) = e^{kx}$ en lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' - 3y = 0$.

24. $y'(x) = ke^{kx}$, $y''(x) = k^2 e^{kx}$ $\Rightarrow$

$k^2 + 2k - 3 = 0$

$(k-1)(k+3) = 0$

$k_1 = 1$, $k_2 = -3$

---

25 Hur många lösningar har ekvationen $f'(x) = 5$, om

a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x - 4$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$

25.

a) $f'(x) = 6x + 2$ $\Rightarrow$ en lösning

b) $f'(x) = -3x^2 + 10x - 7$

$f'(x) = 5 \Rightarrow -3x^2 + 10x - 7 = 5$

$x^2 - \frac{10}{3}x + 4 = 0$ $\Rightarrow$ saknar reella lösningar

c) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$

$f'(x) = 5 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 6 = 5$; $x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ $\Rightarrow$ två lösningar

---

26 Ange en tredjegradsfunktion f, som har
ö $f''(2) = 4$.

26.

$$f''(x) = 2x$$

$$f'(x) = x^2 + c_1$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + c_1 x + c_2$$

ex. $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow \underline{f(x) = \frac{x^3}{3}}$

---

27 Bestäm de punkter där derivatan till $f(x) = x^3 - 4{,}5x^2 + 3$ har värdet -6.

27.

$$f'(x) = 3x^2 - 9x$$

$$f'(x) = -6 \Rightarrow 3x^2 - 9x = -6$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

$$f(1) = 1 - 4.5 + 3 = -0.5$$

$$f(2) = 8 - 18 + 3 = -7$$

Svar: Punkterna är $(1, -0.5)$ och $(2, -7)$

---

28 Luftledningar tål större strömbelastning då det blåser. För en viss luftledning ges den tillåtna strömbelastningen av funktionen

$S(x) = 342 \cdot (1 + 4x)^{0,25}$

där x är vindstyrkan i m/s och $S(x)$ är den tillåtna strömbelastningen i ampere, A.

a) Bestäm den tillåtna strömbelastningen när det är vindstilla.

b) Vid vilken vindstyrka ökar den tillåtna strömbelastningen med en hastighet av 50 A/(m/s)?

(*Np MaD vt 2011*)

28. a) $S(0) = \underline{342 \text{ A}}$

b) $S'(x) = 342 \cdot 0{,}25 \cdot 4 \cdot (1+4x)^{-0{,}75}$

$S'(x) = 50 \Rightarrow 342 \cdot (1+4x)^{-0{,}75} = 50$

$$(1+4x)^{-0{,}75} = \frac{50}{342}$$

$$-0{,}75 \cdot \ln(1+4x) = \ln\left(\frac{50}{342}\right) \Rightarrow$$

$$1+4x = e^{-\ln\left(\frac{50}{342}\right)/0{,}75} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{4}\left(e^{-\ln\left(\frac{50}{342}\right)/0{,}75} - 1\right) = \underline{3{,}0 \text{ m/s}}$$

29 Visa att $y = 3e^{3x} + e^{-x}$ är en lösning till differentialekvationen $y' - 3y = -4e^{-x}$.

(Np MaD ht 2000)

29. $y' = 9e^{3x} - e^{-x} \Rightarrow$

$VL = 9e^{3x} - e^{-x} - 3(3e^{3x} + e^{-x}) = -4e^{-x} = HL.$

30 En skridskoåkare hamnade i en vak och kroppstemperaturen sjönk då snabbt. Vi antar att den hastighet med vilken temperaturen, y °C, ändrades var proportionell mot kroppstemperaturen, enligt

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}011 \cdot y$$

där t är tiden i minuter som personen varit i vattnet.

a) Visa att $y = 37 \cdot e^{-0{,}011t}$ är en lösning till $\frac{dy}{dt} = -0{,}011 \cdot y$

b) Efter hur lång tid har åkarens kroppstemperatur sjunkit från 37 °C till 31 °C?

c) Med vilken hastighet ändras kroppstemperaturen 5 minuter efter det att en person med temperaturen 37 °C fallit i vaken?

(Np MaD ht 1997)

30. a) $\frac{dy}{dx} = 37(-0{,}011) \cdot e^{-0{,}011t} \Rightarrow$

$VL = 37 \cdot (-0{,}011) \cdot e^{-0{,}011t} = -0{,}011 \cdot y = HL$.

b) $y = 31 \Rightarrow 37 \cdot e^{-0{,}011t} = 31 \Rightarrow$

$-0{,}011t = \ln \frac{31}{37} \Rightarrow t = 16{,}1$ min

c) $\frac{dy}{dx}(5) = -0{,}407 \cdot e^{-0{,}011 \cdot 5} = -0{,}385$ °C/min

31 Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + xe^x}$

31.

$$g(x) = x^2 \quad ; \quad g'(x) = 2x$$

$$h(x) = 1 + xe^x \quad ; \quad h'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad ; \quad f'(x) = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(1+xe^x) - x^2e^x(1+x)}{(1+xe^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x + 2x^2e^x - x^2e^x - x^3e^x}{(1+xe^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x + x^2(1 - xe^x)}{(1+xe^x)^2}$$

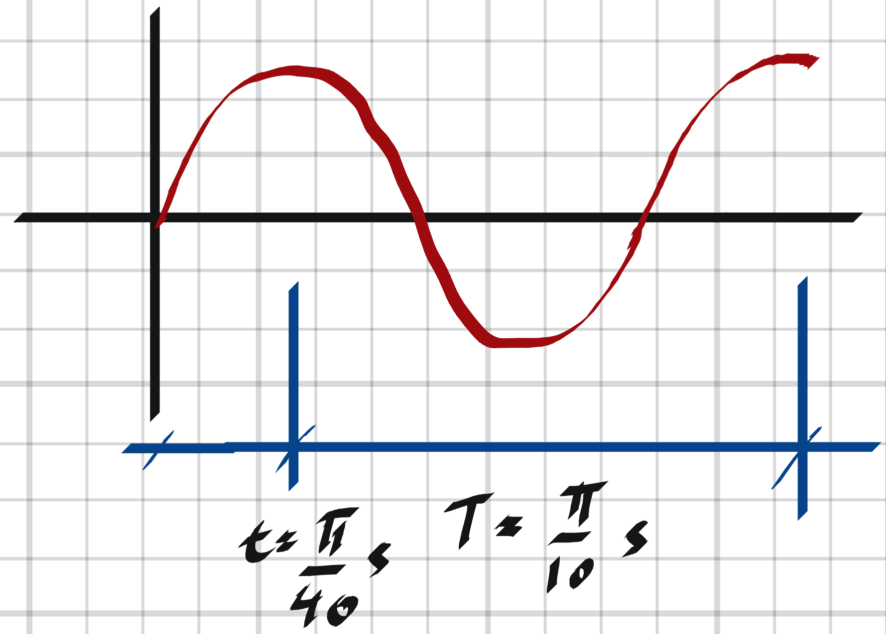
32 Emma tittar på ett snurrande cykelhjul från sidan. Ventilens höjd över marken är h cm efter t sekunder och beskrivs av $h(t) = 30 \sin 20t + 34$.

a) Vid vilka tidpunkter befinner sig ventilen i sitt högsta läge?

b) När är dess hastighet i vågrät riktning som störst?

c) När är dess acceleration i vågrät riktning som störst?

d) Med vilken fart snurrar ventilen?



32.

a) $h = h_{max}$ då $\sin 20t = 1 \Rightarrow$

$$20t = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad , \quad n \in N$$

$$t = \frac{\pi}{40} + n \cdot \frac{\pi}{10} \text{ s}$$

b) $v = v_{max}$ då $\sin 20t = \pm 1 \Rightarrow$

$$20t = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

$$t = \frac{\pi}{40} + n \cdot \frac{\pi}{20} \text{ s}$$

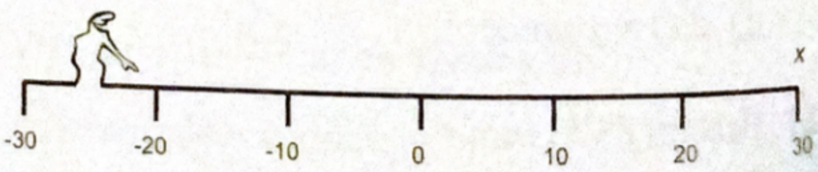
c) $a = a_{max}$ då $h = 34$ cm, dvs $\sin 20t = 0$

$$20t = n \cdot \pi$$

$$t = n \cdot \frac{\pi}{20} \text{ s}$$

d) $v = 20 \text{ rad/s} = 20 \cdot R \text{ m/s} = 20 \cdot 0.3 = 6 \text{ m/s}$

33 Linus rör sig på en linje som är 60 m lång. För att kunna beskriva var Linus befinner sig på linjen är den graderad från −30 till 30 som framgår av figuren nedan.



Linus startar vid tidpunkten $t = 0$. Hans position m på linjen bestäms av tiden t s enligt ekvationen

$x(t) = (t-2)^2\,(6-t)$

a) Var på linjen befinner sig Linus vid tidpunkten $t = 0$?

b) Bestäm ett uttryck för Linus hastighet vid tiden t.

c) Hastigheten är noll när Linus vänder. Vid vilka tidpunkter sker detta?

(*NP MaD ht 2000*)

33. a) $x(0) = 4 \cdot 6 = \underline{24 \text{ m}}$

b) $x(t) = (t^2-4t+4)(6-t) = 6t^2 - t^3 - 24t + 4t^2 + 24 - 4t$

$= -t^3 + 10t^2 - 28t + 24$

$x'(t) = \underline{-3t^2 + 20t - 28 = (t-2)(14-3t)}$

c) $x'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 20t - 28 = 0$

$-3\left(t^2 - \frac{20}{3}t + \frac{28}{3}\right) = 0$

$t = \frac{20}{6} \pm \frac{\sqrt{400 - 12 \cdot 28}}{6} = \frac{20 \pm 8}{6} \Rightarrow$

$\underline{t_1 = 2 \text{ s}, \; t_2 = \frac{28}{6} \text{ s}}$

34 Bestäm $f'(x)$

a) $f(x) = \ln x \cos x - e^{2x}$

b) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\cos x}$

c) $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{3x^4}$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

34. a) $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos x - \ln x \cdot \sin x - 2e^{2x}$

b) $f'(x) = \dfrac{2\cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$

c) $f'(x) = \dfrac{\cos 3x \cdot 12x^3 - 9\sin 3x \cdot x^4}{9x^8} =$

$$= \frac{4\cos 3x}{3x^5} - \frac{\sin 3x}{x^4}$$

d) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $g'(x) = \dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$

$$f(x) = \ln g(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = -\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{2}{(x-1)^2} = -\underline{\frac{2}{x^2-1}}$$

35 Bestäm konstanten k så att $f'(2) = 0$, då

$$f(x) = \frac{e^{kx}}{x^2 - 1}$$

35.

$$f'(x) = \frac{ke^{kx}(x^2-1) - 2xe^{kx}}{(x^2-1)^2} = \frac{e^{kx}(kx^2-2x-k)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow kx^2 - 2x - k = 0$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 4k - 4 - k = 0$$

$$3k = 4$$

$$\underline{k = \frac{4}{3}}$$

---

36 Lös ekvationen $f'(x) = 0$, om $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$

36.

$$f'(x) = \frac{3x^2e^x - x^3e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(3x^2 - x^3)}{e^{2x}} = \frac{3x^2 - x^3}{e^x}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(3-x) = 0$, då $e^x \neq 0 \Rightarrow$

$$\underline{x_{1,2} = 0, \quad x_3 = 3}$$

---

37 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan

$y = \dfrac{3x+5}{4x+6}$ i punkten $\left(1, \dfrac{4}{5}\right)$

37.

$$y' = \frac{3(4x+6) - 4(3x+5)}{(4x+6)^2} = \frac{12x + 18 - 12x - 20}{(4x+6)^2} =$$

$$= -\frac{2}{(4x+6)^2}$$

$$y'(1) = -\frac{1}{50}$$

Tangentens ekvation: $g = kx + m = y'(1)x + m$

$$g(1) = y(1) = \frac{4}{5}$$

$$g(x) - g(1) = y'(1)(x-1) \Rightarrow$$

$$g(x) = -\frac{x}{50} + \frac{1}{50} + \frac{4}{5} \;;$$

$$\underline{g(x) = \frac{41 - x}{50}}$$

38 Ett föremål släpps från höjden h meter över marken. Hastigheten v m/s strax innan det slår i marken beror på fallhöjden och kan skrivas $v = \sqrt{2gh}$ ($g \approx 9{,}82$ m/s^2).

a) Bestäm $\frac{dv}{dh}$ för $h = 20$.

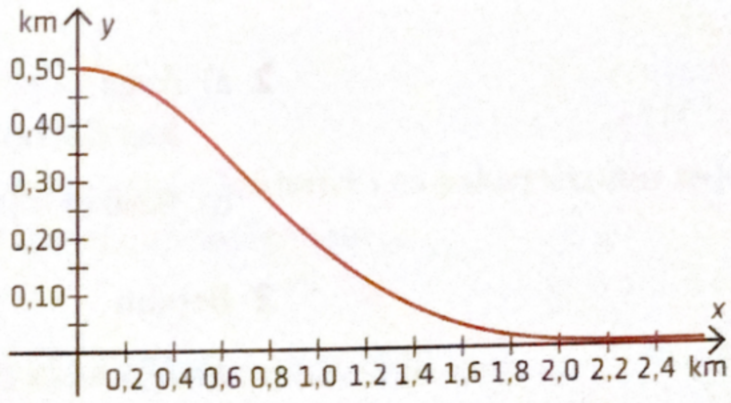
b) Förklara med ord vad du har beräknat.

38. a) $$\frac{dv}{dh} = \frac{1}{2\sqrt{2gh}} = \frac{1}{\sqrt{8gh}}$$

$$\frac{dv}{dh}(20) = \frac{1}{\sqrt{8 \cdot 9{,}82 \cdot 20}} = 25 \text{ mm/s}^2$$

b) Föremålets accelleration vid höjden 20 m

39 En skidbacke har fallhöjden 500 meter. Banprofilen ser du i bilden nedan



Höjden y km är en funktion av sträckan x km. Sambandet mellan y och x ges av $y = 0{,}5e^{-x^2}, 0 \leq x \leq 2{,}5$.

a) Bestäm backens lutning för $x = 0{,}8$.

Ett allmänt sätt att beskriva backar med liknande banprofil som ovan ges av funktionen $y = 0{,}5e^{-ax^2}, 0 \leq x \leq 2{,}5$, där a är en positiv konstant.

b) Ställ upp en ekvation för bestämning av x-värdet i den punkt där backar med en sådan banprofil är brantast.

c) Bestäm a så att backen är brantast för $x = 1{,}0$.

(Np MaD vt 2002)

39. a) $y' = xe^{-x^2}$; $y'(0.8) = -0.8e^{-0.8^2} = \underline{-0.4}$

b) Backen brantast då $y' = y'_{max}$, dvs då $y'' = 0$

$$y' = -axe^{-ax^2}$$

$$y'' = -a(e^{-ax^2} - 2axe^{-ax^2}) = -ae^{-ax^2}(1-2ax)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \underline{1 - 2ax = 0} \Rightarrow x = \frac{1}{2a}$$

c) $a(x) = \frac{1}{2x} \Rightarrow$

$$\underline{a(1) = \frac{1}{2}}$$

40 I vilka intervall är $f'(x) > 0$, om $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 5}$?

40. $$f'(x) = \frac{(2x+3)(x-5) - x^2 - 3x}{(x-5)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 7x - 15 - x^2 - 3x}{(x-5)^2} = \frac{x^2 - 10x - 15}{(x-5)^2}$$

$f'(x) > 0 \Rightarrow x^2 - 10x - 15 > 0$, då $(x-5)^2$ aldrig kan bli < 0

Skärningspunkterna: $x = 5 \pm \sqrt{40} \Rightarrow$

$f'(x) > 0$ då $\underline{x < 5 - \sqrt{40}}$ och $\underline{x > 5 + \sqrt{40}}$