

22 Vilket av följande uttryck A–F kan förenklas till 1?

- A $(\sin x + \cos x)^2$
- B $(\sin x - \cos x)^2$
- C $(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)$
- D $\cos x (\tan x \cdot \sin x + \cos x)$
- E $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$
- F $2(\sin x + \cos x)$

(Np MaD vt 2005)

22. Alt D.

$$\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}, \sin x + \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

23 Bestäm lösningarna till ekvationerna som ligger i intervallet $180^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

- a) $\sin 3x = 0,70$
- b) $\frac{\cos x}{3} = 0,20$
- c) $\tan(3x - 14^\circ) = 1,8$

23. a) $3x_1 = 44,4^\circ + n \cdot 360^\circ, x_1 = 14,8^\circ + n \cdot 120^\circ$
 $3x_2 = 135,6^\circ + n \cdot 360^\circ, x_2 = 45,2^\circ + n \cdot 120^\circ \Rightarrow$

$$180^\circ \leq x \leq 360^\circ \Rightarrow n=1 \Rightarrow x_1 = 254,8^\circ, x_2 = 285,2^\circ$$

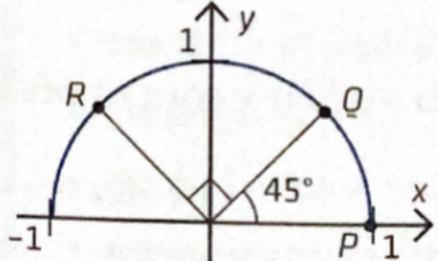
b) $x = \pm 53,1^\circ + n \cdot 360^\circ$

$$180^\circ \leq x \leq 360^\circ \Rightarrow x = 306,9^\circ$$

c) $3x - 14^\circ = 60,9^\circ + n \cdot 180^\circ$
 $x = 25,0^\circ + n \cdot 60^\circ$

$$180^\circ \leq x \leq 360^\circ \Rightarrow x_1 = 205^\circ, x_2 = 265^\circ, x_3 = 325^\circ$$

24 Bestäm koordinaterna för punkterna P , Q och R .



24. $P = (1, 0)$ $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $R = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

25 Bestäm $\sin 2x$ om $\cos x = \frac{1}{2}$.

25. $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \cos x \cdot \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$
 $= \pm 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

26 Visa att $\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 1$

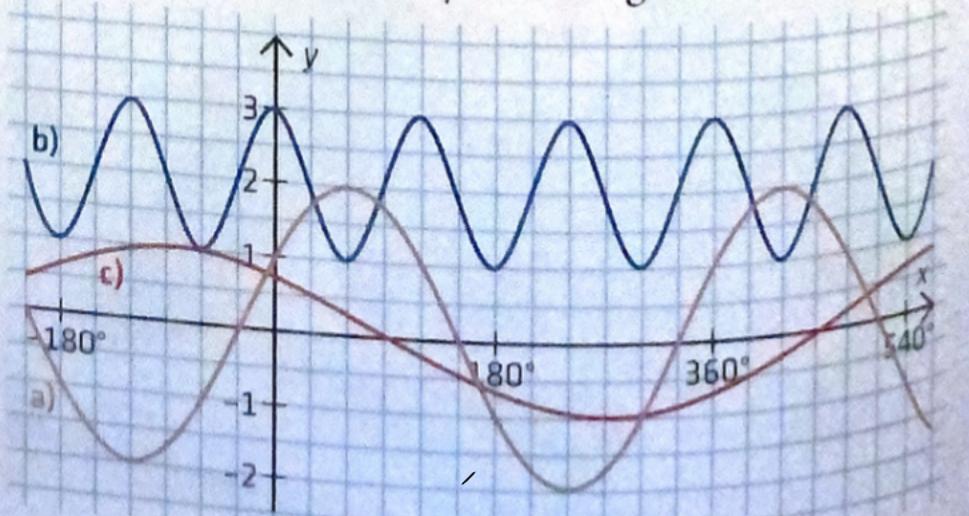
26. VL $= \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 \Rightarrow HL$

27 Lös ekvationen $3 \sin^2 x = 5 \sin x$.

27. $\sin x = t \Rightarrow 3t^2 = 5t \Rightarrow 3t(t - \frac{5}{3}) = 0 \Rightarrow$
 $\sin x = 0 \text{ eller } \sin x = \frac{5}{3}$ (falsk lösning)

$x = n \cdot 180^\circ$

28 Ange funktionsuttrycken till graferna i figuren.



$$y = \sin k(x + \varphi)$$

$$k = \frac{360^\circ}{T}$$

28.

a) $2\sin(x + 30^\circ)$

b) $\sin(3x + 90^\circ) + 2 = \cos 3x + 2$

c) $\sin(\frac{x}{2} + 135^\circ) = \cos(\frac{x}{2} + 45^\circ)$

29 Ange tangensfunktioner $f(x)$ som inte är definierade för

a) $x = 70^\circ$

b) $x = 0$

c) $x = n \cdot 90^\circ$; för $n = 1, 2, 3, \dots$

29. a) $f(x) = \tan(x + 20^\circ)$

b) $f(x) = \tan(x + 90^\circ)$

c) $f(x) = \tan(2x - 90^\circ)$

30 En växelspänning beskrivs av

$u = 50 \cdot \sin 100\pi t$, där u mäts i volt och t i sekunder.

- Bestäm spänningens största värde.
- Ange frekvensen, dvs. antalet hela svängningar per sekund.
- Efter hur lång tid är spänningen 25 V första gången?

30. a) $u_{\max} = \underline{50 \text{ V}}$

b) $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{100\pi}{2\pi} = \underline{50 \text{ Hz}}$

c) $25 = 50 \cdot \sin 100\pi t \Rightarrow$

$$100\pi t = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$100\pi t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{6000} \text{ s} = \underline{0,17 \text{ ms}}$$

31 Bestäm alla lösningar till ekvationen $\sin x = 0,6$ i intervallet $0^\circ < x < 450^\circ$

(Np MaD vt 1999)

31. $x = 36,9^\circ + n \cdot 360^\circ$

$$x = 143,1^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\underline{x_1 = 36,9^\circ, x_2 = 143,1^\circ, x_3 = 396,9^\circ}$$

33 Visa att $\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$

$$33. VL = \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\sin x + \cos^2 x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} = HL.$$

34 Visa att $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

$$34. VL = \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = \\ = 1 - 2 \sin^2 x = HL.$$

35 Lös ekvationen $\cos x (\sin x - 0,20) = 0$

$$35. \cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \underline{90^\circ + n \cdot 180^\circ}$$

$$\sin x - 0,20 = 0 \Rightarrow x_2 = \underline{11,5^\circ + n \cdot 360^\circ}$$
$$x_3 = \underline{168,5^\circ + n \cdot 360^\circ}$$

36 Trigonometriska ekvationer kan också lösas med grafiska metoder. Lös följande ekvationer grafiskt i intervallet $0^\circ < x < 360^\circ$ med hjälp av en grafritande räknare.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin x = \cos 2x$

c) $\cos 3x = \cos x$

36. a) $\underline{x_1 = 60^\circ}$
 $\underline{x_2 = 120^\circ}$

b) $\sin x = 1 - 2\sin^2 x$

$$\sin x = t \Rightarrow t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0$$

$$t = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \quad t_1 = -1, \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow \underline{x_1 = 270^\circ}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{x_2 = 30^\circ}, \quad \underline{x_3 = 150^\circ}$$

c) $\cos 3x = \cos x \Rightarrow$

$$3x = x + n \cdot 360^\circ \Rightarrow x = n \cdot 180^\circ$$

$$3x = -x + n \cdot 360^\circ \Rightarrow x = n \cdot 90^\circ \Rightarrow$$

$$\underline{x_1 = 90^\circ}, \quad \underline{x_2 = 180^\circ}, \quad \underline{x_3 = 270^\circ}$$

37 Kan man säkert säga att graferna till funktionerna här nedanför skär grafen till $y = \sin x$ om

$$a_0, a_1, a_2, a_3 \neq 0?$$

- a) $y = a_1x + a_0$
- b) $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$
- c) $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

37. a) Ja, en rät linje med lutningen a, kommer alltid att skära $\sin x$

b) Nej, en parabel kan ligga autingen över eller under 1 och därmed $\sin x$

c) Ja, en tredjegradskurva skär alltid x-axeln och därmed också $\sin x$.

38 Ljuset kan betraktas som elektromagnetiska vågor som i vakuum rör sig framåt med hastigheten $3,0 \cdot 10^8$ m/s. Vågorna kan beskrivas med $f(t) = A \sin Bt$. Vilket är värdet på B för

- a) blått ljus med våglängden 450 nm
- b) gult ljus med våglängden 580 nm

$$B = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

38. a) $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c \cdot 2\pi}{B}$; $B = \frac{c \cdot 2\pi}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 2\pi}{450 \cdot 10^{-9}} = 4,2 \cdot 10^{15}$

b) $B = 3,2 \cdot 10^{15}$

39 Beräkna det exakta värdet av

- $\sin v$ då $\cos v = -0,2$ och $180^\circ < v < 270^\circ$
- $\cos v$ då $\sin v = \frac{1}{3}$ och v ligger i andra kvadranten
- $\sin v$ då $\cos v = \frac{3}{12}$ och $270^\circ < v < 360^\circ$

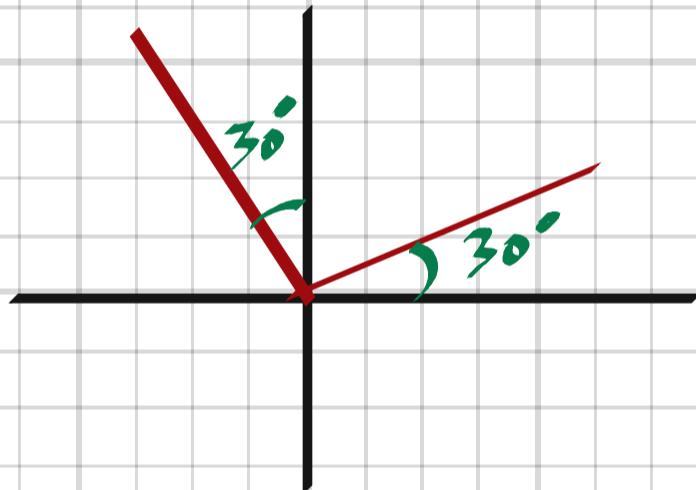
39. a) $\sin v = \pm (1 - \cos^2 v)^{1/2} = \pm \sqrt{0,96} = \pm \sqrt{0,96}$

b) $\cos v = \pm (1 - \sin^2 v)^{1/2} = \pm \frac{\sqrt{8}}{3} = \pm \frac{\sqrt{8}}{3}$

c) $\sin v = \pm (1 - \cos^2 v)^{1/2} = \pm \frac{\sqrt{141}}{12} = \pm \frac{\sqrt{135}}{12}$

40 Punkten P på enhetscirkeln har koordinaterna $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Vilka koordinater får punkten om den förflyttas 90° motsols?

40. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



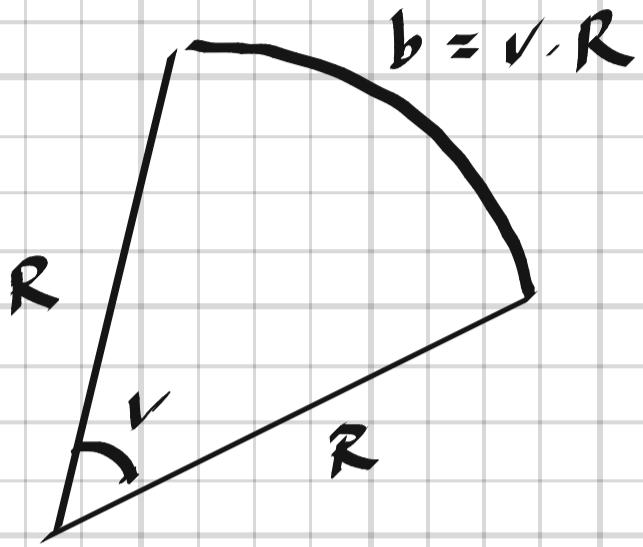
41 Visa att $\frac{1}{1/\tan^2 x + 1} = \sin^2 x$

41. $VL = \frac{1}{\frac{1}{\tan^2 x} + 1} = \frac{1}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 1} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sin^2 x = HL$

42 En cirkelsektor har omkretsen 50 l.e.

- Ange ett funktionsuttryck för hur medelpunktsvinkelns storlek beror av radien.
- Vilka är funktionens definitions- och värdemängder?

42. a)



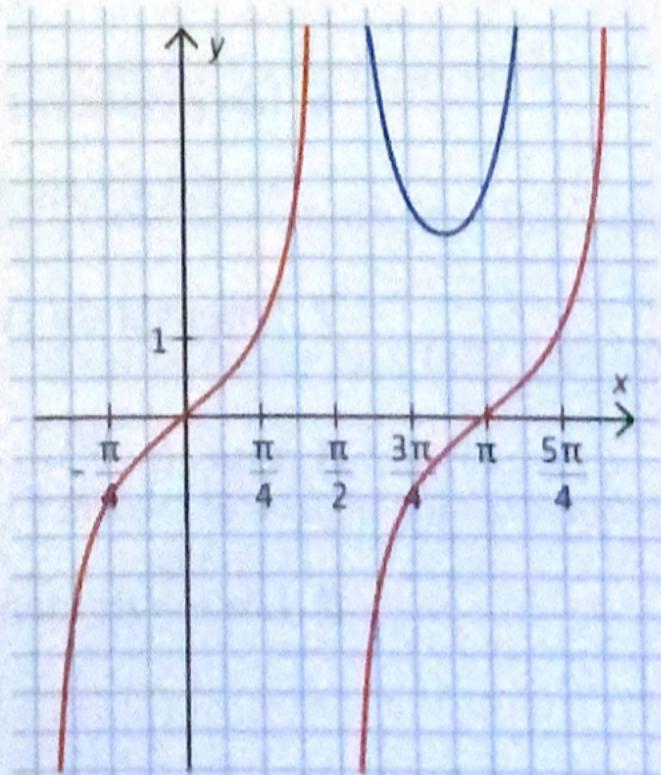
$$\nu \cdot R + 2R = 50$$

$$\nu = \frac{50 - 2R}{R}$$

b) Definitionsängd: $0 < R < 25$ l.e

Värdeängd: $0 < \nu < 2\pi$

- 43 Figuren visar dels grafen till en andragradsfunktion, dels till grafen $y = \tan x$. Kan man säga säkert att graferna inte skär varandra?



43. Nej. Tangensfunktionen har asymptoter i $x = \frac{\pi}{2}$ och $x = \frac{3\pi}{4}$. En andragradskurva (parabol) saknar asymptoter.