29 Låt $z = bi - 5$.

a) Bestäm b så att $\arg z = \frac{6\pi}{7}$

b) Bestäm $|z|$

29. a) $b = -5 \cdot \tan \frac{6\pi}{7} = \underline{2,41}$

b) $|z| = (b^2 + 5^2)^{1/2} = \underline{5,55}$

---

30 Bestäm det komplexa talet z så att
$4z + 3\bar{z} = 28 + 5i$
(*Nationella provbanken MaE 2005*)

30. $z = a + bi \quad , \quad \bar{z} = a - bi$

$4(a+bi) + 3(a-bi) = 28 + 5i$

$7a = 28 \Rightarrow a = 4$

$bi = 5i \Rightarrow b = 5$

$\underline{z = 4 + 5i}$

---

31 Bestäm det reella talet x så att $\operatorname{Re} \dfrac{10}{x+4i} = 1$.
(*Nationella provbanken MaE 2005*)

31.
$$\frac{10}{x+4i} = \frac{10(x-4i)}{x^2+16} = \frac{10x}{x^2+16} - \frac{40i}{x^2+16}$$

$$\frac{10x}{x^2+16} = 1 \quad ; \quad x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x-2)(x-8) = 0$$

$$\underline{x_1 = 2 \,,\; x_2 = 8}$$

---

32 Lös ekvationerna

a) $4x^2 - 6x + 18 = 0$

b) $7x^2 + 13x + 200 = 0$

c) $\dfrac{3x^2}{4} + 6x + 909 = 0$

32.

a) $$4\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}\right) = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 8}}{4} = \frac{3 \pm i\sqrt{63}}{4} = \underline{\frac{3(1 \pm i\sqrt{7})}{4}}$$

b) $$7\left(x^2 + \frac{13}{7}x + \frac{200}{7}\right) = 0$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 28 \cdot 200}}{14} = \underline{\frac{-13 \pm i\sqrt{5431}}{14}}$$

c) $$\frac{3}{4}\left(x^2 + 8x + 1212\right) = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1212}}{2} = \frac{-8 \pm i\sqrt{4784}}{2} = \underline{-2(2 \pm i\sqrt{299})}$$

---

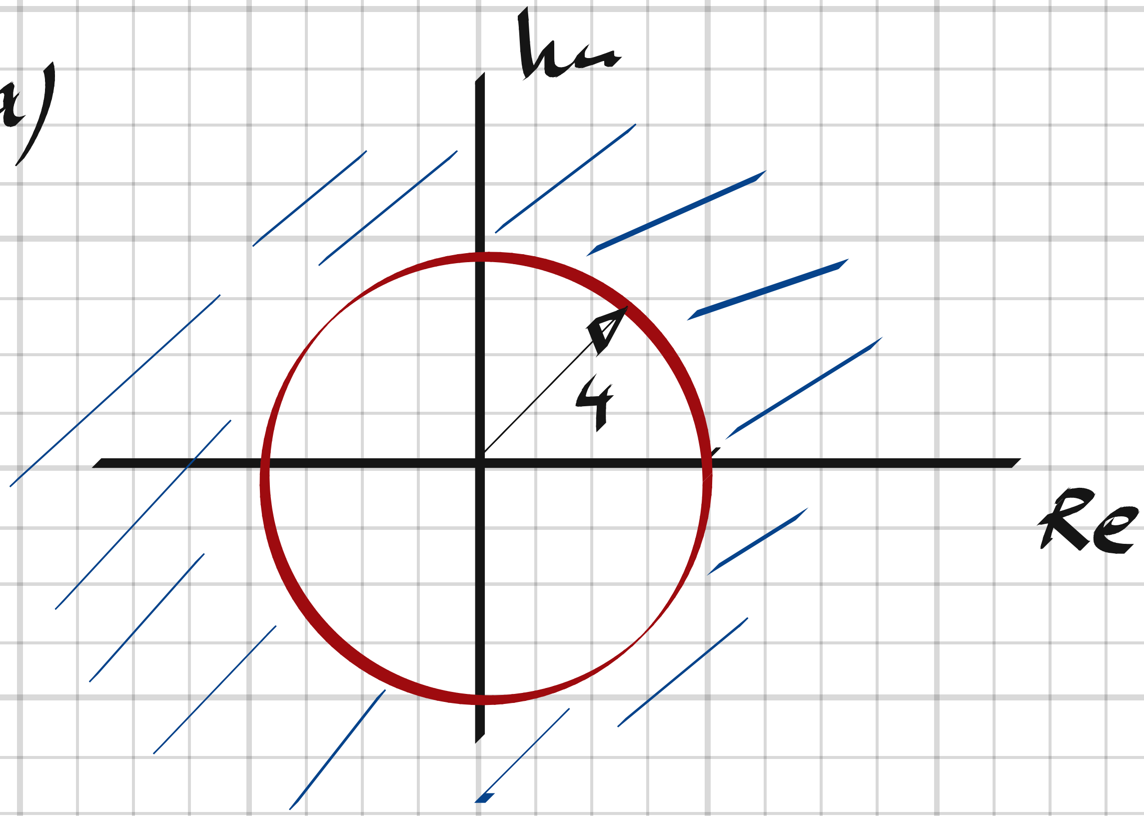
33 Markera följande tal i det komplexa talplanet.

a) $|z| \geq 4$

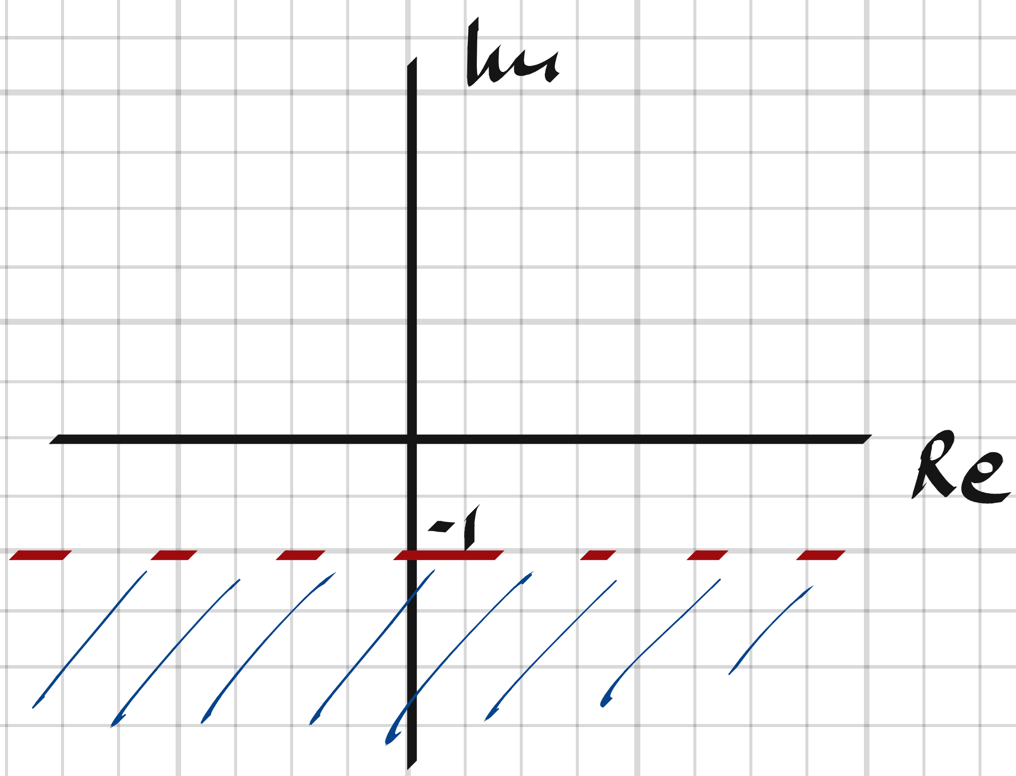
b) $\text{Im}\, z < -1$

c) $z = \bar{z}$

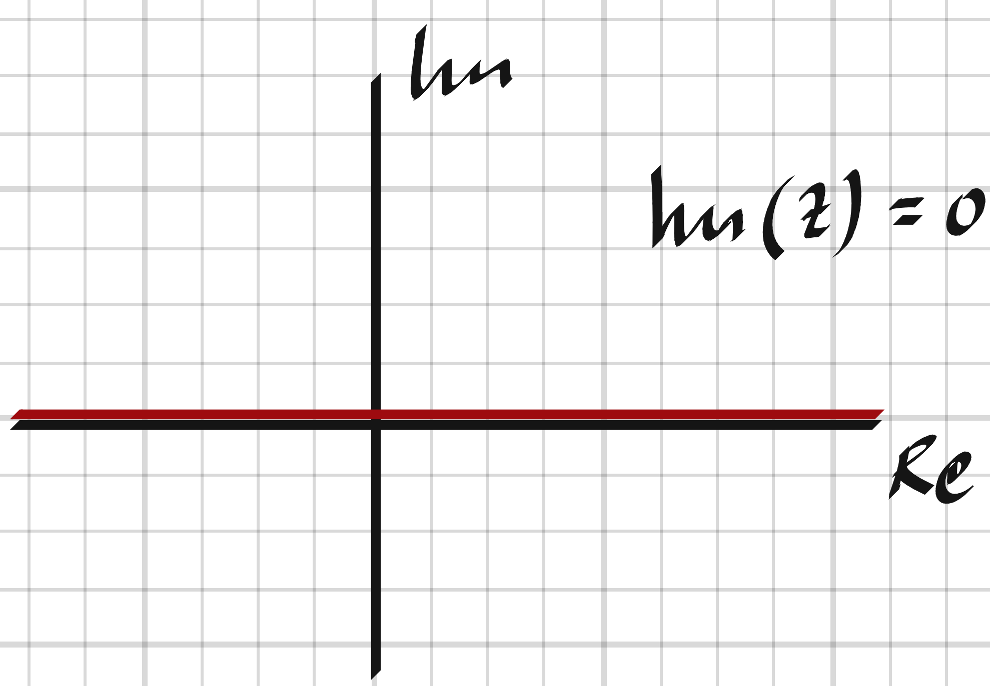
33. a)



b)



c)



34 Lös ekvationerna

a) $z^2 - 15iz = 0$ b) $z^2 + 4iz - 8 = 0$

c) $z^2 + 18iz + 9 = 0$ d) $z^2 - 6iz - 9 = 0$

34. a) $z(z-15i) = 0 \Rightarrow \underline{z_1 = 0 \;,\; z_2 = 15i}$

b) $z = -2i \pm \sqrt{-4+8} = \underline{-2i \pm 2}$

c) $z = -9i \pm \sqrt{-81-9} = \underline{-9i \pm 3\sqrt{10}\,i}$

d) $z = 3i \pm \sqrt{-9+9} = \underline{3i}$

---

35 Ekvationerna har en rot $x = 7$. Vilka är de övriga rötterna?

a) $x^3 - 8x^2 + x + 42 = 0$

b) $x^3 - 4x^2 - 31x + 70 = 0$

35. a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x - 6 \\
\hline
x - 7 & x^3 - 8x^2 + x + 42 \\
- & x^3 - 7x^2 \\
\hline
 & -x^2 + x + 42 \\
- & -x^2 + 7x \\
\hline
 & -6x + 42 \\
 & -6x + 42 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$(x-7)(x+2)(x-3) \Rightarrow$ $\underline{x_2 = -2 \; , \; x_3 = 3}$

b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 3x - 10 \\
\hline
x - 7 & x^3 - 4x^2 - 31x + 70 \\
- & x^3 - 7x^2 \\
\hline
 & 3x^2 - 31x + 70 \\
- & 3x^2 - 21x \\
\hline
 & -10x + 70 \\
 & -10x + 70 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$(x-7)(x-2)(x+5) \Rightarrow$ $\underline{x_2 = 2 \; , \; x_3 = -5}$

36 Visa att $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ kan skrivas $p(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)q(x)$, för något polynom q.

36.

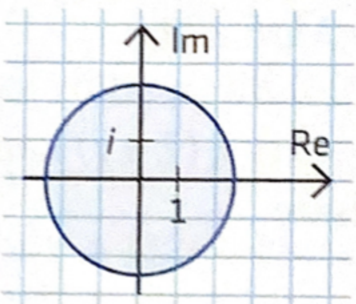
$$p\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(-\tfrac{1}{8}\right) - 5\cdot\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + 2 = \frac{-1-5-2+2\cdot 4}{4} = 0 \Rightarrow$$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)$ är en faktor i $p(x)$

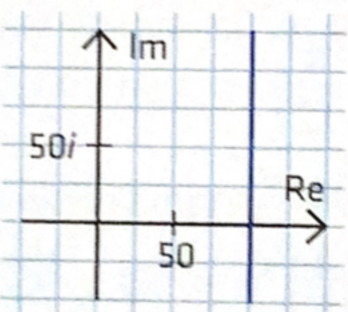
---

37 Vilka tal visar figuren?

a)



b)



37. a) $|z| \leq 2{,}5$

b) $\mathrm{Re}(z) = 100$

---

38 För tre komplexa tal z, w och u gäller att

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{w} - \frac{1}{u}$$

Bestäm z på formen $a + bi$ om $w = 2 + 3i$ och $u = 3 + 4i$.

38.

$$\frac{1}{z} = \frac{u-w}{uw} \Rightarrow z = \frac{u \cdot w}{u - w} =$$

$$= \frac{(3+4i)(2+3i)}{3+4i-2-3i} = \frac{6+9i+8i-12}{1+i} =$$

$$= \frac{(17i-6)(1-i)}{1+1} = \frac{17i+17-6+6i}{2} = \frac{11+23i}{2}$$

$$\underline{z = a+bi = 5.5 + 11.5i}$$

---

39 Skriv z i formen re^{iv}, där $r = |z|$.

a) $z = 3 + 4i$ b) $z = 1 - i\sqrt{3}$

39.

a) $|z| = (3^2+4^2)^{1/2} = 5$ $\arg z = \arctan \frac{4}{3} = 0.93$

$$\underline{z = 5 \cdot e^{0.93i}}$$

b) $|z| = (1+3)^{1/2} = 2$ $\arg z = \arctan -\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$$\underline{z = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{3}i}}$$

---

40 Konstruera en uppgift som kan lösas med hjälp av de Moivres formel. Uppgiften ska innehålla *i* och resultatet ska ha argumentet $\frac{\pi}{5}$ radianer.

40.

de Moivres formel

$$(\cos v + i\sin v)^n = \cos nv + i\sin nv$$

Uppgift

$$z = \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{\pi}{15}i}$$

Bestäm en lösning till z^3 m h a de Moivres formel.

41 Ekvationen $z^4 - z^3 - z - 1 = 0$ har fyra rötter. En rot är $z_1 = i$ och en annan rot är $z_2 = -i$. Vilka är de övriga rötterna?

(Nationella provbanken MaE 2002)

41.

$$(z-i)(z+i) = z^2+1$$

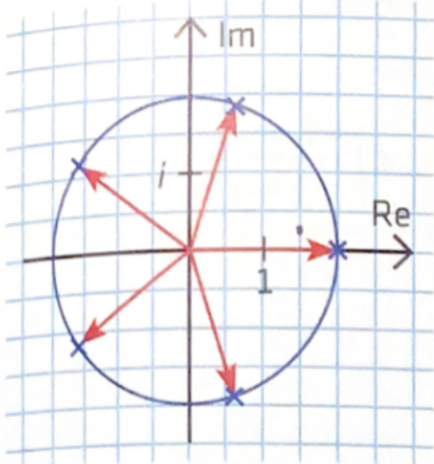
$$\begin{array}{r|l}
 & z^2 - z - 1 \\
\hline
z^2+1 & z^4 - z^3 + 0 - z - 1 \\
 & -\ (z^4 \qquad + z^2) \\
\hline
 & -z^3 - z^2 - z - 1 \\
 & -\ (-z^3 \qquad - z) \\
\hline
 & -z^2 \qquad -1 \\
 & -\ (-z^2 \qquad -1) \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

$$z^2 - z - 1 = 0$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow$$

övriga rötter $= \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ och $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

42 Rötterna till ekvationen $z^n = w$ visas i figuren.



a) Bestäm ekvationens rötter i polär form.

b) Bestäm ekvationen genom att ange n och w.

42. a) $z = 2e^{i \cdot k \cdot \frac{2\pi}{5}}$, $k = 0,1,2,3,4$

b) $n = 5$, $w = z^5 = 32$

---

43 Hur många reella rötter har ekvationen $z^6 = 729$? Motivera ditt svar.

43. $z^6 = 729 = 729e^{i2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$

$z = 3e^{i \cdot \frac{\pi}{3}k}$, $k = 0,1,2,3,4,5$

z har två reella rötter $= 3$ och -3.
övriga fyra är icke reella.

44 En rot till ekvationen $z^{12} = w$ har argumentet $v = 35°$.

a) Var i det komplexa talplanet kommer ekvationens rötter att befinna sig?

b) Vilka argument bestämmer övriga rötter?

Motivera dina svar.

44. a) 12 lösningar $\Rightarrow \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} = 30°$ mellan varje.

b) $65°, 95°, \ldots, 5°$

---

45 Ange en lösning till ekvationen genom att bestämma z i formen $x + iy$.

a) $e^z = 16 + 12i$

b) $2e^z - \sqrt{3} - i = 0$

45. a) $$e^z = (16^2+12^2)^{1/2} \cdot e^{i \cdot \arctan \frac{3}{4}} = 20e^{i \cdot 0{,}644}$$

$$z = \ln 20 + i \cdot 0{,}644$$

b) $$e^z = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^2 e^{i \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z = 0 + i \cdot \frac{\pi}{6}$$

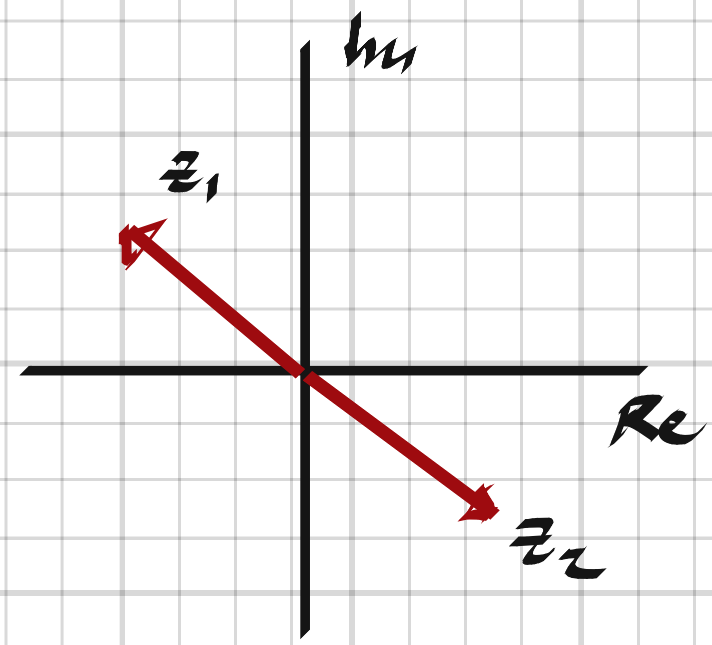
46 Ange en lösning till

$$\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^x=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

46. $$e^{i\frac{\pi x}{6}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \Rightarrow \frac{\pi x}{6}=\frac{4\pi}{3} \Rightarrow \underline{x=8}$$

---

47 Bestäm z då $|z| = 2$ och $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z$



47. $$\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z \Rightarrow z+\bar{z} = -\frac{z-\bar{z}}{i}$$

$$z+\bar{z} = i(z-\bar{z})$$

$$|z|^2 = z\bar{z} = 4 \Rightarrow z + \frac{4}{z} = iz - \frac{4i}{z}$$

$$z^2+4 = iz^2-4i$$

$$-2(1-1+2i)$$

$$z^2(1-i) = -4\cdot(1+i)$$

$$z^2 = \frac{-4(1+i)^2}{1+1} = -2(1+i)^2 = -4i = 4e^{i\cdot(-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi)}, \quad k=0,1$$

$$\underline{z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = 2e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}}$$

---

48 Visa att $z \cdot \bar{z} \geq 4$ då $z = 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot i$ och $x > 0$

(*Nationella provbanken MaE 2000*)

48.

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$|z|^2 = (2\sqrt{x})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} i\right)^2 = 4x - \frac{1}{x} \geq 4 \quad \text{då} \quad x > 0$$

---

provbanken MaE 2000)

49 I Iris mattebok har det blivit en fläck där det står en beräkning. Det gör att hon varken kan avgöra vilket räknesätt som gäller eller vilket det andra talet är. Ge tre förslag på vad som skulle kunna stå där fläcken har blivit:
$(7 + 3i)$ $\quad = 29 - 29i$.

49.

$$(7+3i) + x = 29 - 29i \Rightarrow$$

$$x = 29 - 29i - 7 - 3i = \underline{22 - 32i}$$

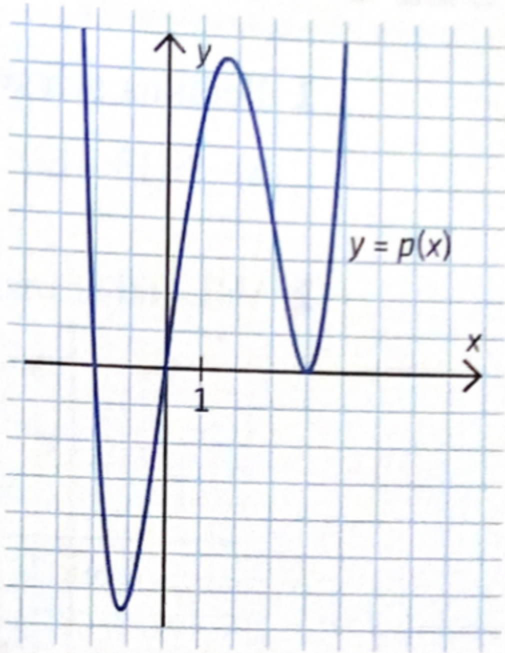
$$(7+3i) \cdot x = 29 - 29i \Rightarrow$$

$$x = \frac{29-29i}{7+3i} = \frac{(29-29i)(7-3i)}{49+9} = \frac{116-290i}{58}$$

$$= \underline{2 - 5i}$$

$$(7+3i) - x = 29 - 29i \Rightarrow \underline{x = -22 + 32i}$$

50 Grafen visar en polynomfunktion.



a) Vilka är funktionens nollställen?

b) Jenny påstår att grafen visar ett tredjegradspolynom. Sanna säger att det inte kan stämma. Vem har rätt och varför?

c) Ge exempel på två polynom som beskriver polynomfunktionen.
ö

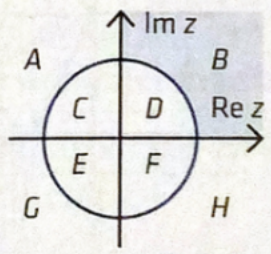
50. a) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_{3,4} = 4$

b) Sanna har rätt. Grafen visar ett 4-gradspolynom med 4 reella rötter varav två är dubbelrot.

c) $y = k \cdot x(x+2)(x-4)^2$

k kan ha olika värden med samma nollställen.

51 I figuren är åtta olika områden i det komplexa talplanet markerade med *A, B, C, D, E, F, G* och *H*. Cirkeln är en enhetscirkel med centrum i origo. Cirkeln och koordinataxlarna ingår inte i något av de markerade områdena.



Bestäm i vilket eller vilka områden talet $\frac{1}{z}$ kan ligga om z ligger i *B*.

(*Nationella provbanken MaE 2005*)

51.

$$z = |z| e^{i\varphi} \qquad \frac{1}{z} = z^{-1} = |z|^{-1} \cdot e^{-i\varphi}$$

$$\left.\begin{array}{l} \arg(z) = 0 \Rightarrow \arg\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \\ \arg(z) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \arg\left(\frac{1}{z}\right) < 0$$

$$|z| > r \Rightarrow |z|^{-1} < r \Rightarrow$$

Område F

52
ö Konstruera en uppgift som kan lösas genom att man bestämmer rötter till en potensekvation. Uppgiften ska innehålla talet 625 och resultatet, dvs. rötterna ska ha argumenten 30°, 120°, 210° och 300°.

52.

$$z^4 = 625 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Beräkna z.