1 Beräkna kurvlängden hos $y = e^x$ i intervallet $0 \leq x \leq 2$ med hjälp av

a) 20 steg i Excel b) digitalt verktyg.

1. $s = \int_0^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \underline{6.79 \text{ l.e}}$

Löst i Excel enligt:

delta_x = 0.1

x	delta_y=e^(x+delta_x)-e^(x)	y'=delta_y/delta_x	delta_s=sqrt(1+(delta_y)^2)*delta_x
0	0.11	1.05	0.15
0.1	0.12	1.16	0.15
0.2	0.13	1.28	0.16
0.3	0.14	1.42	0.17
0.4	0.16	1.57	0.19
0.5	0.17	1.73	0.20
0.6	0.19	1.92	0.22
0.7	0.21	2.12	0.23
0.8	0.23	2.34	0.25
0.9	0.26	2.59	0.28
1	0.29	2.86	0.30
1.1	0.32	3.16	0.33
1.2	0.35	3.49	0.36
1.3	0.39	3.86	0.40
1.4	0.43	4.26	0.44
1.5	0.47	4.71	0.48
1.6	0.52	5.21	0.53
1.7	0.58	5.76	0.58
1.8	0.64	6.36	0.64
1.9	0.70	7.03	0.71
		Summa:	6.79

Löst i Geogebra enligt:

Function

$f(x) = e^x$

$g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$

$\rightarrow \sqrt{1 + (e^x)^2}$

Number

$a = \text{Integral}(g, 0, 2)$

$\rightarrow 6.79$

2 Beräkna kurvlängden hos $y = \ln x$ i intervallet $1 \le x \le e^2$ med hjälp av

a) 20 steg i Excel b) digitalt verktyg.

2. $$s = \int_1^{e^2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$\ln(x)$ är speglingen av e^x kring $y=x$

$\ln(1) = 0$, $\ln e^2 = 2$

Integrationsgränserna motsvarar alltså de i uppgift 1.

Längden blir således densamma: 6.79 l.e

3 Beräkna $\int_1^{\infty} \frac{3}{x^2\sqrt{x}}\,dx$.

3. $f(x) = 3x^{-\frac{5}{2}}$, $F(x) = -2x^{-3/2} = \frac{-2}{x \cdot \sqrt{x}}$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(1) = 0 - (-2) = \underline{2}$$

---

4 Bestäm $\frac{dy}{dx}$ för $2(x+2)^2 + y^2 = 4$ och beräkna dess värde i $(-2, 2)$.

4. $y^2 = 4 - 2(x+2)^2$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(4 - 2(x+2)^2)$$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = -4(x+2) \implies$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x+2)}{y}$$

$$\underline{\frac{dy}{dx}(-2) = 0}$$

---

5 Bestäm tangentens ekvation i punkten (1, 1) för grafen till $x^2 + y^2 = 2$.

5. $\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{d}{dx} 2$

$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$\frac{dy}{dx}(1) = -1$

Tangentens ekv:

$y - y(1) = \frac{dy}{dx}(1)(x-1)$

$y = 2 - x$

6 Partialbråksuppdela $\frac{2x}{x+3}$.

6. $$\frac{2x}{x+3} = \frac{2x-(x-3)}{x+3} + \frac{x-3}{x+3} = 1 + \frac{x-3+6-6}{x+3} =$$

$$= 1+1-\frac{6}{x+3} = \underline{2-\frac{6}{x+3}}$$

Kan lösas i Geogebra enligt:

Function

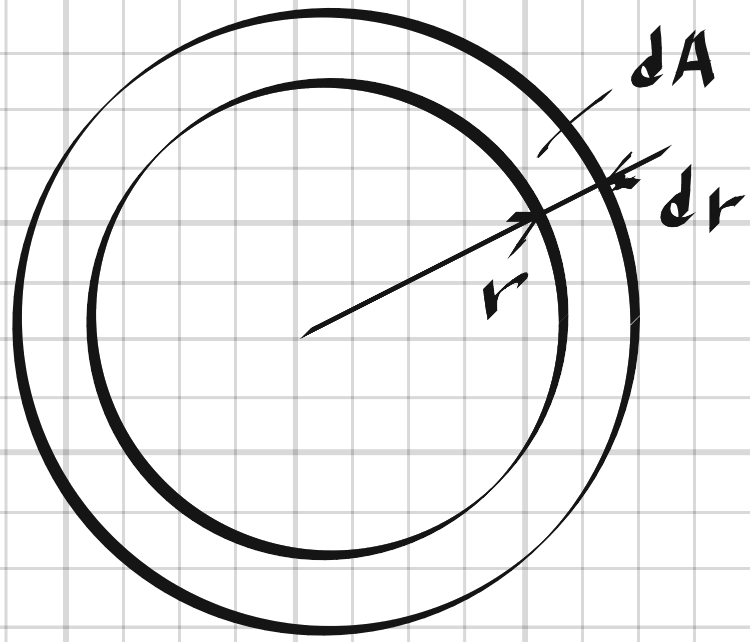
$f(x) = \text{PartialFractions}\left(\frac{2x}{x+3}\right)$

$\rightarrow 2-\frac{6}{x+3}$

\+ Input...

7 En person släpper en liten sten ner på en lugn vattenyta. Cirkulära vågor breder ut sig från nedslagspunkten med en radiell fart som är 4,0 cm/s. Hur snabbt ändras arean av den cirkulära yta som innesluter vågen då cirkelns radie är 20 cm?

7. $$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$



$$dA = 2\pi r \cdot dr \implies$$

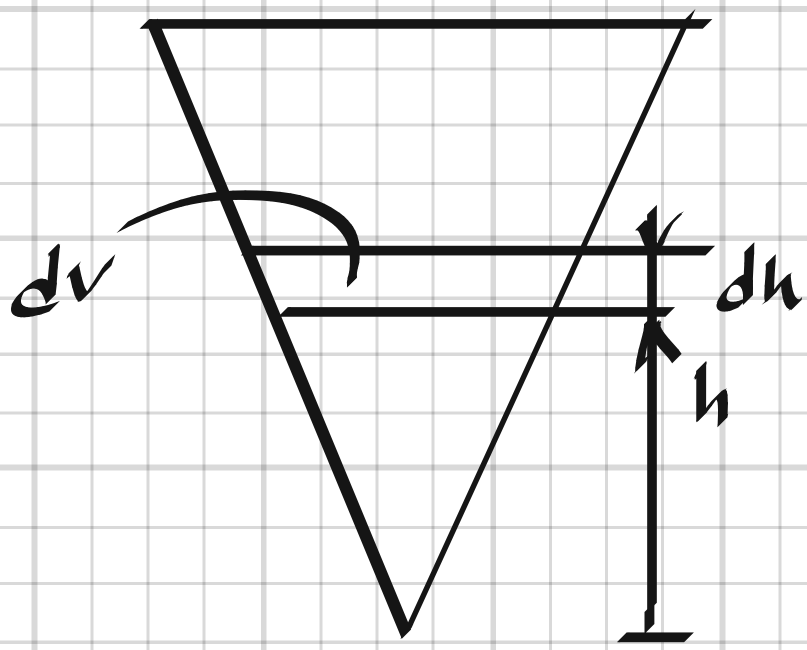
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot 4 \quad cm^2/s$$

$$\frac{dA}{dt}(20) = 8\pi \cdot 20 = 160\pi \approx \underline{503\ cm^2/s}$$

8 En rak cirkulär kon placeras med spetsen vänd nedåt. Basytans diameter är 4,0 dm och höjden är 6,0 dm. Konen fylls med vatten med hastigheten 1,5 liter per minut. Med vilken hastighet stiger vattenytan då vattendjupet, *h*, är 3,0 dm?

8.

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dV} \cdot \frac{dV}{dt}$$



$$dV = A(h) \cdot dh$$

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{6} \quad , \quad r = \frac{h}{3}$$

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi h^2}{9} \quad \Rightarrow dV = \frac{\pi h^2}{9} dh$$

$$\frac{dh}{dV} = \frac{9}{\pi h^2} \quad ; \quad \frac{dV}{dt} = 1{,}5 \ \text{dm}^3/\text{min}$$

4,8 cm/min

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9 \cdot 1{,}5}{\pi h^2} \ \text{dm/min}$$

$$\frac{dh}{dt}(3{,}0) = \frac{3}{2\pi} \approx \underline{0{,}48 \ \text{dm/min}}$$

9 Bestäm $\frac{dy}{dx}$ för

a) $y=(e^{x^2}+x^2)^5$ b) $y=\frac{5}{(\cos x - x^3)^2}$

9. a) $\frac{dy}{dx} = 5(e^{x^2}+x^2)^4 \cdot (2xe^{x^2}+2x) =$

$= \underline{10x(e^{x^2}+x^2)^4(e^{x^2}+1)}$

b) $\frac{dy}{dx} = -10 \cdot (\cos x - x^3)^{-3} \cdot (-\sin x - 3x^2) =$

$= \underline{\frac{10 \cdot (\sin x + 3x^2)}{(\cos x - x^3)^3}}$

---

10 Bestäm $\frac{dy}{dx}$ för

a) $x^2+y+y^2=1$ b) $x^2 \cdot y^2 - 4 = 0$

10. a) $\frac{d}{dx}(x^2+y+y^2) = \frac{d}{dx}(1)$

$2x + \frac{dy}{dx} + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$\underline{\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{1+2y}}$

b) $\frac{d}{dx}(x^2 \cdot y^2 - 4) = 0$

$2xy^2 + x^2 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$\underline{\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}}$

---

11 Området som begränsas av grafen till funktionen $y = \frac{1}{e^{x+1}}$, x-axeln och $x = -1$ roterar kring x-axeln. Bestäm volymen av den rotationskropp som då uppkommer.

11.

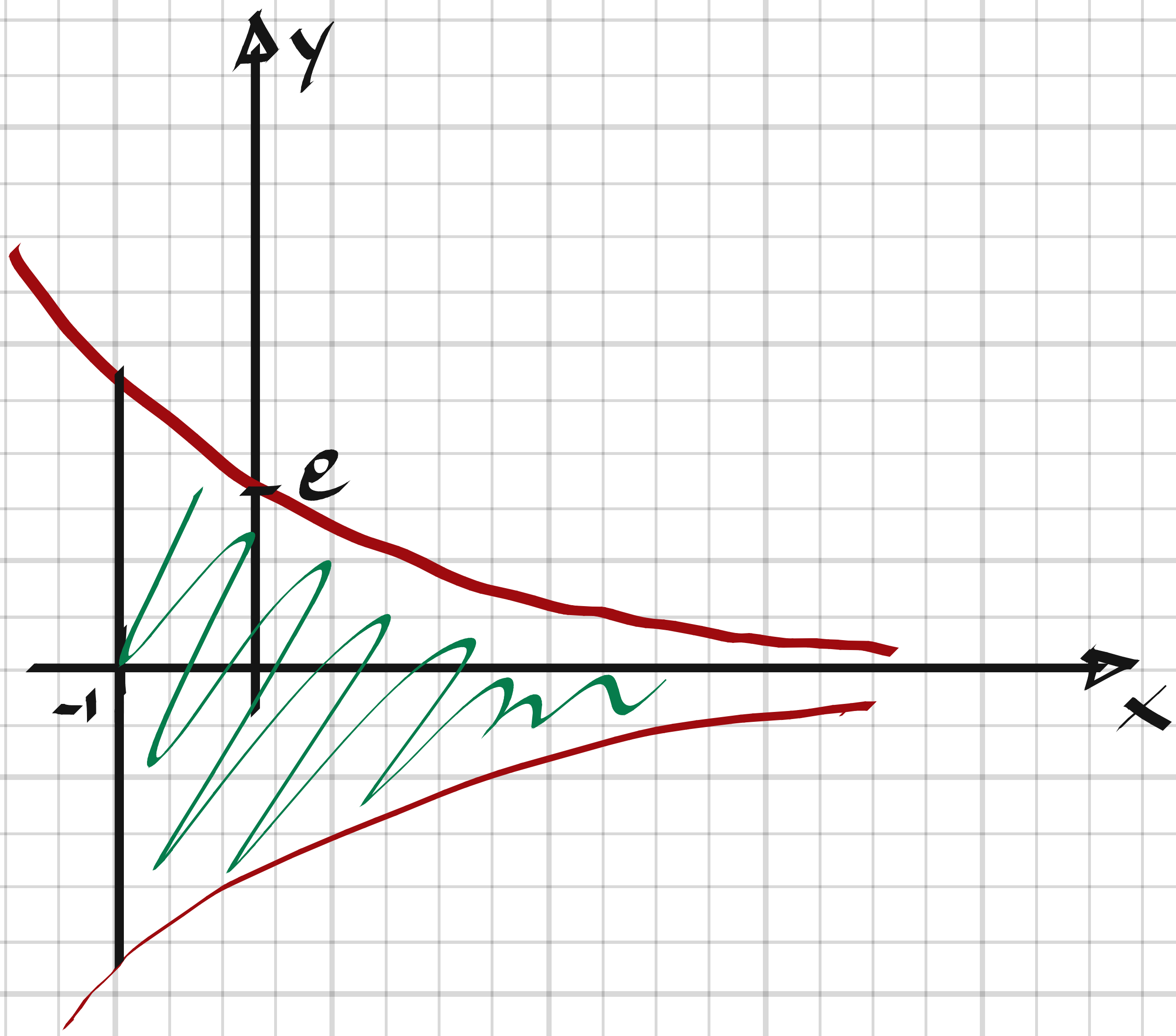
$$A(x) = \pi\left(\frac{1}{e^{x+1}}\right)^2 = \pi e^{-2(x+1)}$$

$$\int e^{-2(x+1)}\,dx = \frac{e^{-2(x+1)}}{-2}$$

$$dV = A(x)\cdot dx$$

$$V = \int_{-1}^{\infty} dV = \pi\int_{-1}^{\infty} e^{-2(x+1)}\,dx = -\frac{\pi}{2}\left[e^{-2(x+1)}\right]_{-1}^{\infty} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}(0-1) = \underline{\frac{\pi}{2} \text{ v.e.}}$$



12 Partialbråksuppdela

a) $\dfrac{5x}{(x-1)(x+4)}$ b) $\dfrac{5}{(x-1)(x+4)}$

12. a) $$\frac{5x}{(x-1)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4}$$

$$A(x+4) + B(x-1) = 5x \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rl} & A + B = 5 \\ + & 4A - B = 0 \\ \hline & 5A = 5 \Rightarrow A = 1, B = 4 \end{array}$$

$$\underline{\frac{5x}{(x-1)(x+4)} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x+4}}$$

b) $$\frac{5}{(x-1)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4}$$

$$\begin{array}{rl} & A + B = 0 \\ + & 4A - B = 5 \\ \hline & 5A = 5 \Rightarrow A = 1, B = -1 \end{array}$$

$$\underline{\frac{5}{(x-1)(x+4)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+4}}$$

13 Bestäm

a) $\int \frac{x}{x+4}\,dx$ b) $\int \frac{x+2}{x+4}\,dx$

13. a) $f(x) = \frac{x}{x+4} = \frac{x+4-4}{x+4} = 1 - \frac{4}{x+4}$

$$\int f(x)\,dx = \underline{x - 4\ln|x+4| + C}$$

b) $f(x) = \frac{x+2}{x+4} = \frac{x+2+2-2}{x+4} = 1 - \frac{2}{x+4}$

$$\int f(x)\,dx = \underline{x - 2\ln|x+4| + C}$$

14 Beräkna

a) $\displaystyle\int_0^{0,5} 2xe^{2x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$

14 a) $$\int_0^{0.5} 2xe^{2x}\,dx = \left[xe^{2x}\right]_0^{0.5} - \int_0^{0.5} e^{2x}\,dx =$$

$$= \frac{e}{2} - 0 - \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{0.5} = \frac{e}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}}$$

b) $$\int_0^{4} \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \int_0^{4} 2x(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2x(x^2+9)^{1/2}}{\frac{1}{2}\cdot 2x}\right]_0^{4} =$$

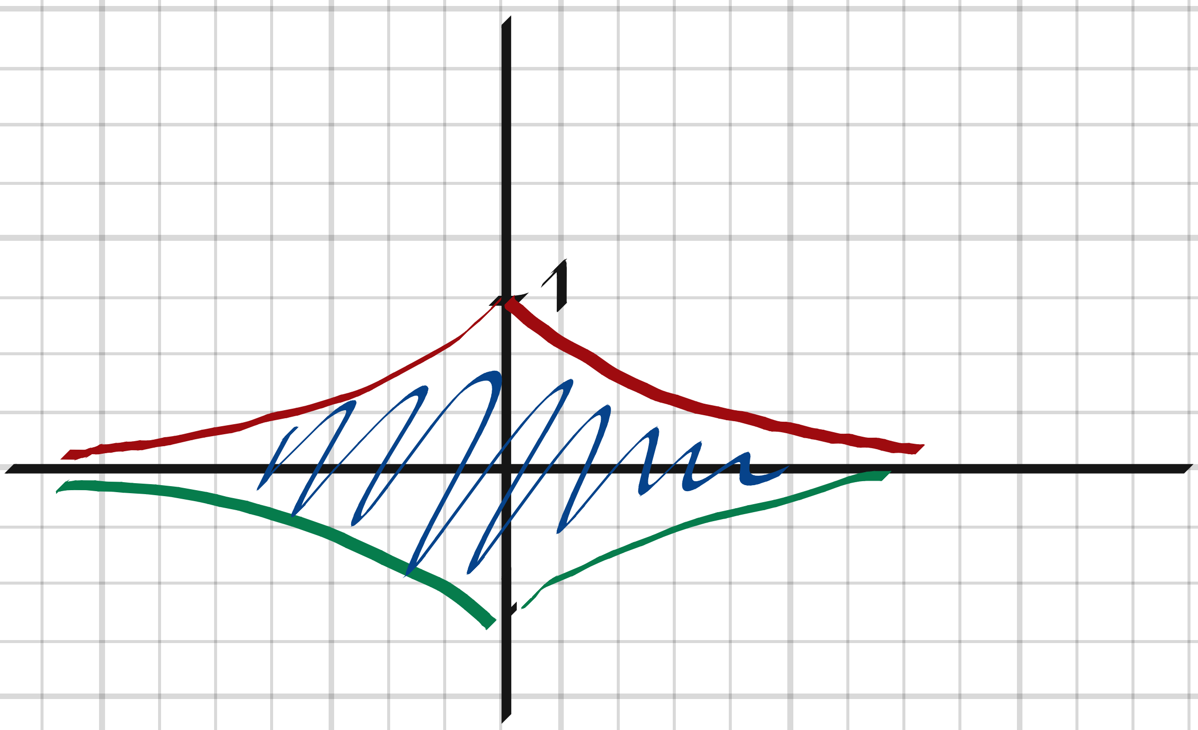
$$= \left[2\sqrt{x^2+9}\right]_0^{4} = 2\cdot(5-3) = \underline{4}$$

---

15 Området som begränsas av grafen till funktionen $y = e^{-|x|}$ roterar kring x-axeln. Bestäm volymen av den oändliga rotationskropp som då uppkommer.

15.

$$y = \begin{cases} e^{x} & , x \le 0 \\ e^{-x} & , x > 0 \end{cases}$$



$$A(x) = \pi \cdot e^{-2x} \quad , x \ge 0$$

$$dV = A(x) \cdot dx$$

$$V = 2\int_0^{\infty} dV = 2\int_0^{\infty} \pi e^{-2x} dx = -\pi \left[e^{-2x} \right]_0^{\infty} = 0 + \pi = \underline{\pi \text{ v.e.}}$$

16 Beräkna kurvlängden för $y = \frac{1}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$ i intervallet $1 \le x \le e$. Använd formeln för beräkning av kurvlängd och försök att beräkna integralens värde utan ett digitalt verktyg.

16.

$$s = \int \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

$$y' = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2}$$

$$(y')^2 = \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}$$

$$1+(y')^2 = \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} = \left(\frac{1}{2x} + \frac{x}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2}$$

$$s = \int_1^e \left(\frac{1}{2x} + \frac{x}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{1}{2} + \frac{e^2}{4} - 0 - \frac{1}{4} =$$

$$= \underline{\frac{1+e^2}{4} \text{ l.e}}$$

17 Ett klots area ökar konstant med hastigheten 42 cm^2 per minut. Hur snabbt ökar klotets volym när radien är 12 cm?

17.
$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dA} \cdot \frac{dA}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dA} \cdot \frac{dA}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{8\pi r} \cdot 42 = 21 \cdot r$$

$$\frac{dV}{dt}(12) = 21 \cdot 12 = \underline{252 \text{ cm}^3/\text{min}}$$

---

18 Beräkna kurvlängden för $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$ i intervallet $1 \leq x \leq 4$. Använd formeln för beräkning av kurvlängd och försök att beräkna integralen utan digitalt verktyg.

18.
$$y' = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}, \quad (y')^2 = \frac{x^4}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4}$$

$$1 + (y')^2 = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$s = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{12} - \frac{1}{x}\right]_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + 1 =$$

$$= \frac{16 \cdot 4 - 3 - 1 + 12}{12} = \frac{72}{12} = \underline{6 \text{ l.e.}}$$
