1 Bestäm den allmänna lösningen till

a) $y' = 7x$ b) $2y' - 6x = 0$

c) $y'' = 6x + 2$ d) $y'' - 8e^{-2x} = 0$

1. a) $y = \frac{7x^2}{2} + C$

b) $y = \frac{3x^2}{2} + C$

c) $y' = 3x^2 + 2x + C_1$

$y = x^3 + x^2 + C_1 x + C_2$

d) $y' = -4e^{-2x} + C_1$

$y = 2e^{-2x} + C_1 x + C_2$

2 Riktningskoefficienten i vilken punkt som helst på en graf är proportionell mot kvadratroten ur x-koordinaten. Kurvan går genom punkten (1, 2). I denna punkt är riktningskoefficienten 0,6. Ställ upp och lös differentialekvationen. Visa att kurvan går genom punkten (4; 4,8) och bestäm riktningskoefficienten i denna punkt.

2. $y'(x) = k \cdot x^{1/2}$

$y'(1) = 0{,}6 \Rightarrow k = 0{,}6$

$y = 0{,}6 \cdot x^{3/2} \cdot \frac{2}{3} + C = 0{,}4\,x\sqrt{x} + C$

$y(1) = 2 \Rightarrow 0{,}4 + C = 2 \Rightarrow C = 1{,}6$

$y(4) = 0{,}4 \cdot 4 \cdot \sqrt{4} + 1{,}6 = 3{,}2 + 1{,}6 = 4{,}8$

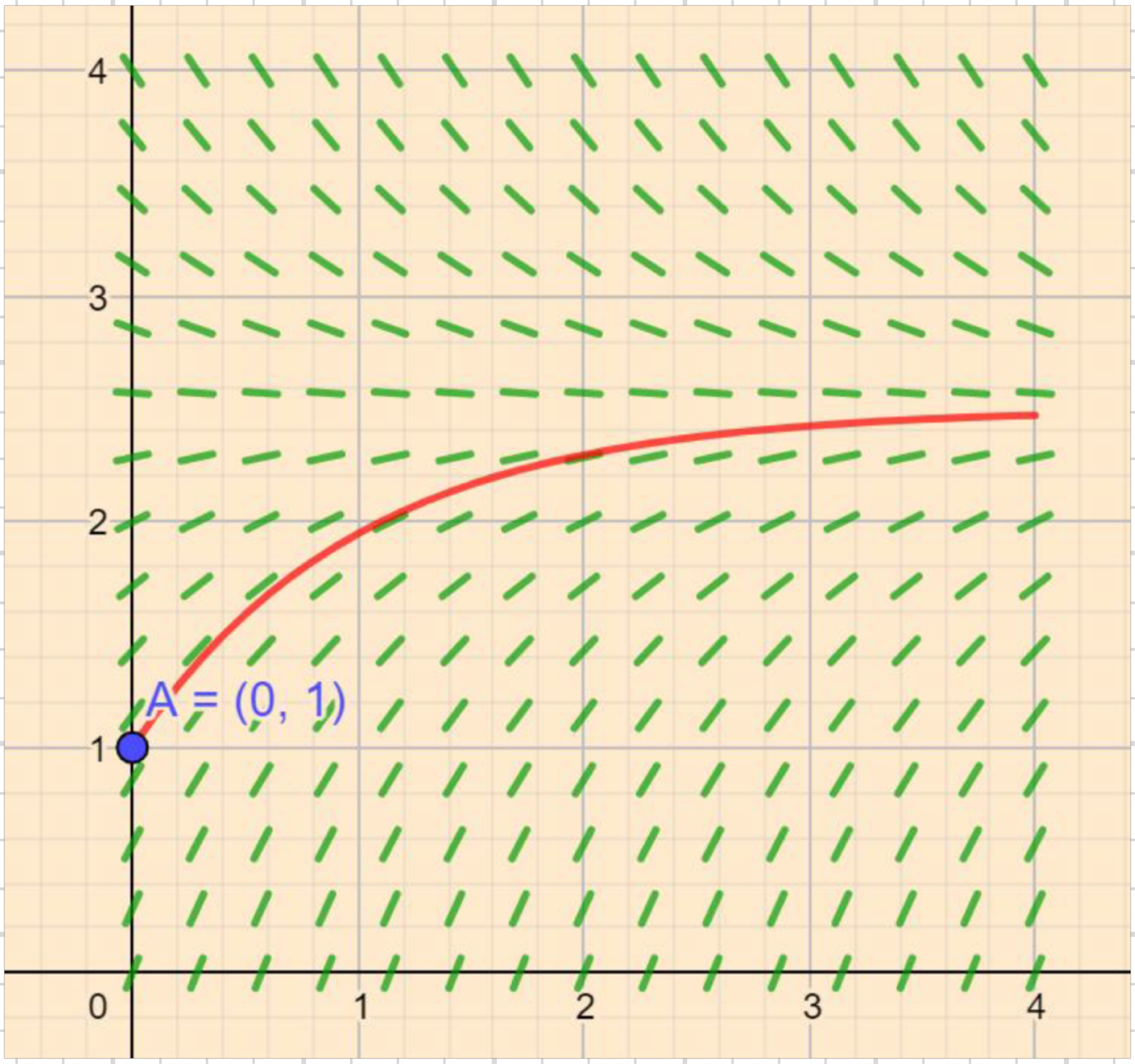
$y'(4) = 0{,}6\sqrt{4} = 1{,}2$

3 Differentialekvationen $\frac{dI}{dt} = 2{,}5 - I$ är en modell för strömmen i en elektrisk krets, där I är strömmen i ampere vid tiden t sekunder.

a) Rita riktningsfältet i t ex Geogebra för följande värden på t och I: $0 \leq t \leq 4$ och $0 \leq I \leq 4$.

b) Hur stor blir strömmen i kretsen efter lång tid?

3. a)



b) $I \rightarrow 2{,}5\ A \ , \ t \rightarrow \infty$

4 Ange den lösning till differentialekvationen $y' - y = 0$ som för $x = 0$ antar värdet $y = 3$.

4. $y = C \cdot e^{kx}$

$y(0) = 3 \Rightarrow C = 3$

$3ke^{kx} - 3e^{kx} = 0 \Rightarrow k = 1$

$\underline{y = 3e^{x}}$

---

5 Bestäm den lösning till differentialekvationen $2\frac{dy}{dx} - y = 0$, vars graf skär y-axeln i punkten $(0, 3)$.

5. $y = Ce^{kx}$

$y(0) = 3 \Rightarrow C = 3$

$2 \cdot 3ke^{kx} - 3e^{kx} = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

$\underline{y = 3e^{\frac{x}{2}}}$

---

6 Man betraktar lösningskurvorna till differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = -2y$.

Bestäm ekvationen för tangenten till lösningskurvan i punkten (1, 2).

6. $y = Ce^{-2x} \quad , \; y' = -2Ce^{-2x}$

$y(1) = 2 \Rightarrow C = 2 \quad , \; y'(1) = -4$

Tangentens ekvation:

$y - y(1) = y'(1)(x-1) \Rightarrow$

$y = -4x + 4 + 2$

$\underline{y = -4x + 6}$

7 Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' - 12y = 0$, för vilken gäller att $y(0) = 0$ och $y'(0) = 3$.

7. **Ansats:**

$$y = C \cdot e^{kx}, \quad y' = Cke^{kx}, \quad y'' = Ck^2e^{kx} \Rightarrow$$

$$k^2 + 4k - 12 = 0$$

$$(k-2)(k+6) = 0 \Rightarrow k_1 = 2, k_2 = -6$$

Ny ansats:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-6x}, \quad y' = 2C_1e^{2x} - 6C_2e^{-6x}, \quad y'' = 4C_1e^{2x} + 36C_2e^{-6x}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$

$$y'(0) = 3 \Rightarrow 2C_1 + 6C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = \frac{3}{8}, \quad C_2 = -\frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{2}e^{2x} - \frac{54}{4}e^{-6} + 4\left(\frac{3}{4}e^{2x} + \frac{9}{4}e^{-6x}\right) - 12\left(\frac{3}{8}e^{2x} - \frac{3}{8}e^{-6x}\right) =$$

$$= \left(\frac{12 + 24 - 36}{8}\right)e^{2x} + \left(\frac{-108 + 72 + 36}{8}\right)e^{-6x} = 0 \quad \text{ok!}$$

$$\underline{y = \frac{3}{8}\left(e^{2x} - e^{-6x}\right)}$$

Alternativ

Löst i Geogebra enligt:

l1 := SolveODE(y'' + 4 y' − 12 y = 0, (0, 0), (0, 3))

PointList: $l1 := \left\{ y = \frac{-3}{8}\, e^{-6x} + \frac{3}{8}\, e^{2x}, 0 = 0 \right\}$

Input

---

8 En lösningskurva till differentialekvationen $y' + 3y = 0$ skär y-axeln i punkten $(0, -2)$. Bestäm riktningskoefficienten för kurvans tangent i denna punkt.

8.

$y = ce^{-3x} \quad , \quad y' = -3ce^{-3x}$

$y(0) = -2 \Rightarrow c = -2 \quad , \quad \underline{y'(0) = 6}$

---

9 Funktionen $y(x)$ är en lösning till differentialekvationen $y' + xy + \frac{1}{y} = 0$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. Beräkna $y(-2)$ med Eulers metod med steglängden 0,05.

9. Löst i Geogebra enligt:

Free Objects

$x_{value} = -2$

$\delta x = -0.05$

$\rightarrow$ -0.05

Dependent Objects

$$l1 = \mathrm{IterationList}\left(\left\{\mathrm{Element}(a,1) + \delta x, \mathrm{Element}(a,2) + \delta x\left(-\mathrm{Element}(a,1)\ \mathrm{Element}(a,2) - \frac{1}{\mathrm{Element}(a,2)}\right)\right\}, a, (\ 0\quad 1\ ), \left|\frac{x_{value}}{\delta x}\right|\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.05 & 1.05 \\ -0.1 & 1.09 \\ -0.15 & 1.14 \\ -0.2 & 1.17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1.45 & 1.01 \\ -1.5 & 0.99 \\ -1.55 & 0.96 \\ -1.6 & 0.94 \\ -1.65 & 0.92 \\ -1.7 & 0.9 \\ -1.75 & 0.88 \\ -1.8 & 0.86 \\ -1.85 & 0.84 \\ -1.9 & 0.82 \\ -1.95 & 0.8 \\ -2 & 0.79 \end{pmatrix}$$

$y(-2) = 0{,}79$

10 Låt $y(x)$ vara lösningen till differentialekvationen $y' = (x + y)^{2/3}$, $y(0) = 1$.
Hitta ett närmevärde till $y(3)$ med hjälp av Eulers metod med steglängden

a) 0,5 b) 0,05.

10 a) $\underline{y(3) \approx 8.83}$

b) $\underline{y(3) \approx 10.43}$

Löst i Geogebra enligt:

y'=(x+y)^(2/3)

$x_{value} = 3$

$\delta x = 0.5$

$\rightarrow 0.5$

endent Objects

$l1 = \text{IterationList}\left(\left\{\text{Element}(a,1) + \delta x, \text{Element}(a,2) + \delta x\,(\text{Element}(a,1) + \text{Element}(a,2))^{\frac{2}{3}}\right\}, a, (\ 0 \quad 1\ ), \left|\frac{x_{value}}{\delta x}\right|\right)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 1.5 \\ 1 & 2.29 \\ 1.5 & 3.4 \\ 2 & 4.84 \\ 2.5 & 6.65 \\ 3 & 8.83 \end{pmatrix}$$

11 Bestäm lösningen till differentialekvationen

$$2y' + \frac{4}{x}y = \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x}.$$

11. $$y' + \frac{2}{x}y = \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

Ansatz: $y = \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x} + C$, $y' = -\frac{2A}{x^3} + \frac{B}{x^2}$

$$-\frac{2A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{2A}{x^3} - \frac{2B}{x^2} + \frac{2C}{x} = \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} \quad \Rightarrow$$

$$-B + 2Cx = 4 - 2x$$

$$B = -4, \quad C = -1$$

$$y = \frac{A}{x^2} + \frac{4}{x} - 1$$

Kontroll: $y' = -\frac{2A}{x^3} - \frac{4}{x^2}$

$$VL = -\frac{2A}{x^3} - \frac{4}{x^2} + \frac{2A}{x^3} + \frac{8}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} = HL \quad \text{ok!}$$

Alternativ:

Löst i Geogebra enligt:

1 SolveODE$\left(y' = -\frac{2}{x}\,y + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}\right)$

$\rightarrow\ y = \frac{c_1 - x^2 + 4\,x}{x^2}$

---

12 Lös ekvationen $y' - \sin(x)\cdot y = 0$ så att lösningskurvan går genom punkten $(\pi/2, 8)$.

Ansats: $y = Ce^{-\cos x}$, $y' = C\cdot \sin x \cdot e^{-\cos x}$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 \Rightarrow C = 8$

$$y = 8e^{-\cos x}$$

Kontroll: $8\cdot \sin x \cdot e^{-\cos x} - \sin x \cdot 8e^{-\cos x} = 0$ ok!

Alternativ: Löst i Geogebra enligt:

1 SolveODE$\left(y' = \sin(x)\,y, \left(\frac{\pi}{2}, 8\right)\right)$

$\rightarrow\ y = 8\,e^{-\cos(x)}$

---

13 $f(x)$ är en lösning till differentialekvationen $f''(x) + 9f(x) = 0$. $f(0) = 4$ och $f'(0) = 5$.
Vilket är det största värde $f(x)$ kan anta?

13. $r^2 + 9r = 0 \Rightarrow r = \pm 3i$

Ansats:

$$f = C_1 \sin 3x + C_2 \cdot \cos 3x$$

$$f' = 3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x$$

$$f'' = -9C_1 \sin 3x - 9C_2 \cos 3x$$

$$f(0) = 4 \Rightarrow C_2 = 4$$

$$f'(0) = 5 \Rightarrow C_1 = \frac{5}{3}$$

$$f = \frac{3}{5} \sin 3x + 4 \cdot \cos 3x$$

$$f = \left(\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 4^2\right)^{1/2} \cdot \sin(3x + \varphi) \quad , \varphi = 3 \cdot \arctan$$

Maxvärdet $\left(\frac{25 + 16 \cdot 9}{9}\right)^{1/2} = \left(\frac{169}{9}\right)^{1/2} = \frac{13}{3}$

14 Differentialekvationen $y'' - 4y' + 4y = 0$ har en lösning $y(x)$, som skär koordinataxlarna i punkterna (1, 0) och (0, 1). Bestäm $y(x)$ och beräkna koordinaterna för lösningskurvans eventuella maxima- eller minimipunkter.

14. $r^2 - 4r + 4 = 0$

$(r-2)^2 = 0 \qquad r_{1,2} = 2$ (dubbelrot)

Ansats: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$

$y(1) = 0 \Rightarrow C_2 = -1$

$y = e^{2x} - x e^{2x} = e^{2x}(1-x)$

$y' = 2e^{2x} - e^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x}(1-2x)$

$y'' = 2e^{2x} - 2e^{2x} - 4xe^{2x} = -4xe^{2x}$

$y' = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0 \; ; \; x = \frac{1}{2}, \; y(\frac{1}{2}) = e(1 - \frac{1}{2}) = \frac{e}{2}$

$y''(\frac{1}{2}) = -2e < 0 \Rightarrow$ maximum.

$\underline{y(x) = e^{2x}(1-x)}$

har maximum i punkten $(\frac{1}{2}, \frac{e}{2})$

15 En insektspopulation består av 900 individer. Den ökar exponentiellt så att antalet insekter efter 2 veckor senare har ökat med 500.

Ställ upp differentialekvationen som beskriver tillväxten och bestäm med hjälp av dess lösning antalet individer efter ytterligare 3 veckor.

15.

$$y' = k \cdot y$$

Ansats: $y = Ce^{kx}$, $y' = Cke^{kx}$

$y(0) = 900 \Rightarrow C = 900$

$y(2) = 1400 \Rightarrow 900e^{2k} = 1400$

$$k = \frac{1}{2} \ln \frac{1400}{900} = 0{,}221$$

$$y(x) = 900e^{0{,}221x}$$

$$y(5) = 900e^{0{,}221 \cdot 5} = \underline{2700 \text{ st}}$$

16 I en population bananflugor med y individer är tillväxthastigheten i antal/dygn
$y' = 0{,}003y(500 - y)$, $y(0) = 10$.
Beräkna
a) $y(1)$ och $y(4)$
b) tillväxthastigheten vid $t = 1$ och $t = 4$.

16. Löst i Geogebra enligt:

$f(x) = \text{SolveODE}(1.5\,y - 0.003\,y^2, (0, 10))$

$\rightarrow \dfrac{500}{49\,e^{-3\cdot\frac{x}{2}} + 1}$

$f'(x) = f'(x)$

$\rightarrow 36750 \cdot \dfrac{e^{\frac{-3}{2}x}}{2401\left(e^{\frac{-3}{2}x}\right)^2 + 98\,e^{\frac{-3}{2}x} + 1}$

Number

$a = f(1)$

$\rightarrow 41.899$

$b = f(4)$

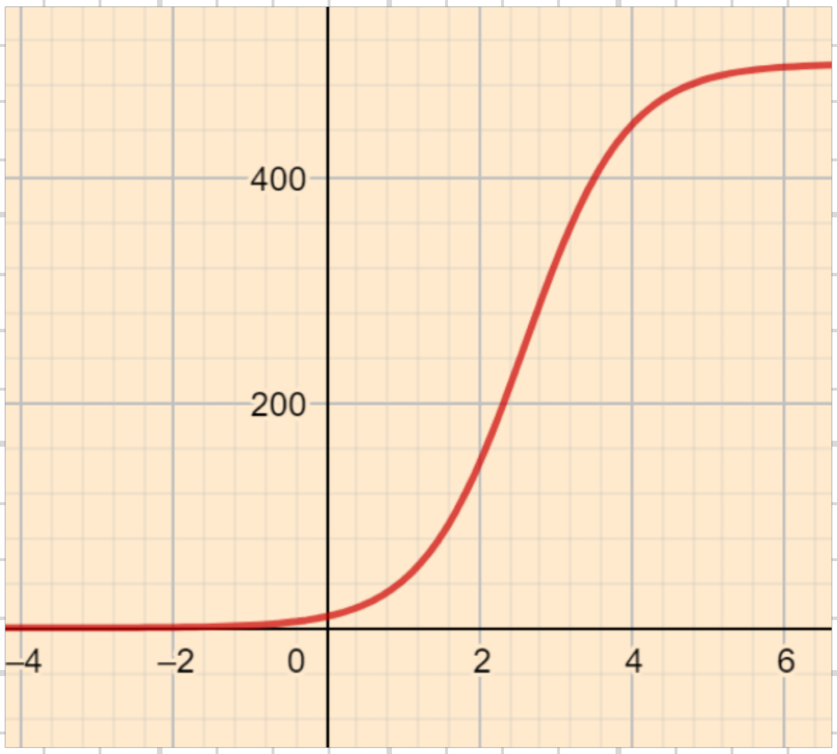
$\rightarrow 445.848$

$c = f'(1)$

$\rightarrow 57.582$

$d = f'(4)$

$\rightarrow 72.431$



a) $y(1) = 42$ st , $y(4) = 446$ st

b) $y'(1) = 57$ st/dygn , $y'(4) = 72$ st/dygn.

17 En population ökar enligt den logistiska ekvationen med begynnelsetalet 40 och maximala antalet 400. Från början är tillväxten 10 % per år.

a) Beräkna den logistiska tillväxtkonstanten.

b) Ställ upp differentialekvationen.

c) Efter hur lång tid är antalet 300?

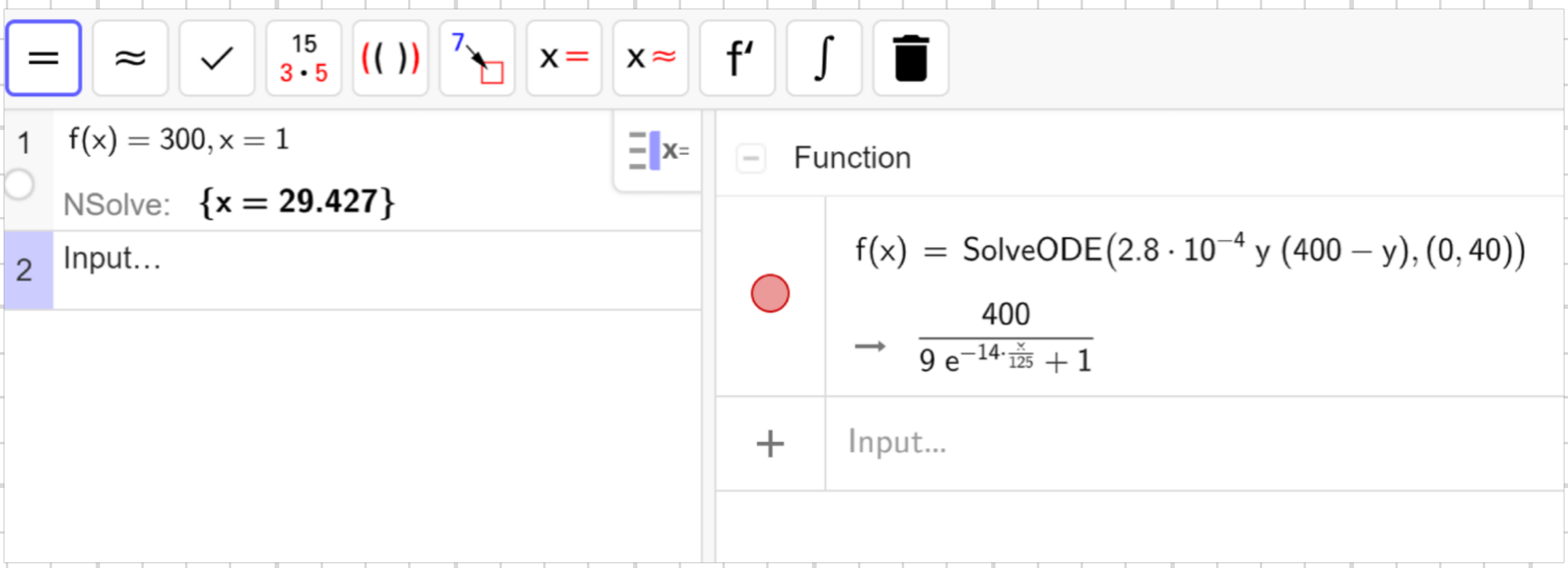
17. $y' = ky(400-y)$

Tillväxt 10 %/år $\Rightarrow$ $y' = 0{,}1 \cdot 40 = 4$

$4 = k \cdot 40(400-40) \Rightarrow k = 2{,}8 \cdot 10^{-4}$

$y' = 2{,}8 \cdot 10^{-4} y(400-y)$

Löst i Geogebra enligt:



a) $k = 2{,}8 \cdot 10^{-4}$

c) $t \approx 30$ år

b) $y' = 2{,}8 \cdot 10^{-4} y(400-y)$

18 Rymdfysiker kan, genom att analysera ljuset från en stjärna, bestämma hur mycket av ämnet Uran-238 som finns kvar i stjärnan. På så sätt kan man avgöra stjärnans ålder. Atomkärnor av Uran-238 sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot antalet kvarvarande atomkärnor, N, vid tiden t år.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver sönderfallet.

b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen då hälften av antalet atomkärnor har sönderfallit efter $4{,}5 \cdot 10^9$ år.

c) Genom att analysera ljuset från stjärnan CS 31082-001 har fysikerna bestämt att det återstår ungefär 14,6 % av den ursprungliga mängden Uran-238 som fanns i stjärnan då den bildades. Bestäm stjärnans ålder.

18. a) $\underline{N' = -k \cdot N}$

b) $N = C \cdot e^{kt}$

$e^{k \cdot 4,5 \cdot 10^9} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{4,5 \cdot 10^9} = -1,54 \cdot 10^{-10}$

$\underline{N = C \cdot e^{-1,54 \cdot 10^{-10} t}}$

c) $e^{-1,54 \cdot 10^{-10} t} = 0,146 \Rightarrow t = \frac{\ln 0,146}{-1,54 \cdot 10^{-10}} = \underline{12,5 \text{ miljarder år}}$

19 På hösten ställer Erik in sin motorcykel i ett garage för vintern. Han konstaterar att lufttrycken i båda däcken är 2,8 bar. När han kommer tillbaka sex veckor senare har trycket i framdäcket sjunkit till 2,5 bar och i bakdäcket till 2,6 bar.

Anta att trycket i ett däck minskar med en hastighet som är proportionell mot trycket. Hur stor kommer tryckskillnaden mellan fram- och bakdäck att vara när han tar fram motorcykeln 20 veckor efter det att han ställt in den?

19. $p' = -k \cdot p$

Ansats: $p = 2{,}8 \cdot e^{kt}$

Framdäck: $2{,}5 = 2{,}8e^{k_f \cdot 6} \Rightarrow k_f = \dfrac{\ln \frac{2{,}5}{2{,}8}}{6} = -0{,}0189$

$p_f = 2{,}8e^{-0{,}0189t}$

Bakdäck: $2{,}6 = 2{,}8e^{k_b \cdot 6} \Rightarrow k_b = \dfrac{\ln \frac{2{,}6}{2{,}8}}{6} = -0{,}0124$

$p_b = 2{,}8e^{-0{,}0124t}$

Skillnaden efter 20 v $= 2{,}8\left(e^{-0{,}0124 \cdot 20} - e^{-0{,}0189 \cdot 20}\right) = 0{,}27$ bar

20 Bestäm den lösning till ekvationen $y'' + 0{,}4y' - 0{,}32 = 0$ vars lösningskurva i origo tangeras av linjen $y = -2x$.

20.

$$r^2 + 0{,}4r - 0{,}32 = 0$$

$$r = -0{,}2 \pm (0{,}2^2 + 0{,}32)^{1/2} = -0{,}2 \pm 0{,}6$$

$$r_1 = -0{,}8 \;,\; r_2 = 0{,}4$$

$$y = C_1 e^{-0{,}8x} + C_2 e^{0{,}4x}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$

$$y = C_1(e^{-0{,}8x} - e^{0{,}4x})$$

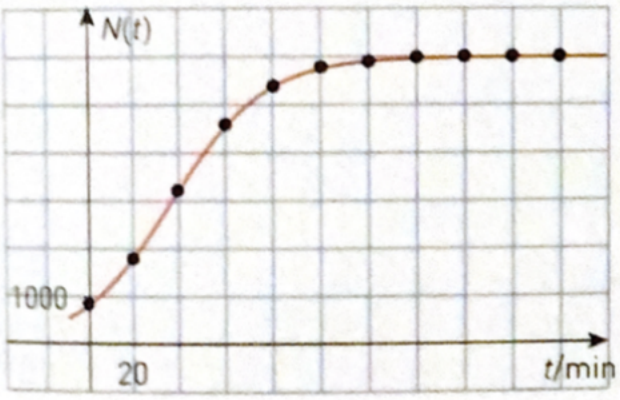
$$y' = C_1(-0{,}8e^{-0{,}8x} - 0{,}4e^{0{,}4x})$$

$$y'(0) = -2 \Rightarrow C_1 = \frac{-2}{-0{,}8 - 0{,}4} = \frac{1}{0{,}6} = \frac{5}{3}$$

$$\underline{y = \frac{5}{3}(e^{-0{,}8x} - e^{0{,}4x})}$$

21 Vid en odling av bakterier fanns från början ca 800 bakterier på en agarplatta. Agarplattan innehåller näringslösning som bakterierna kan leva av. Antalet bakterier vid olika tidpunkter framgår av diagrammet nedan. På grund av olika faktorer kan inte bakterieantalet bli hur stort som helst på plattan.

Sådana faktorer är t ex temperatur samt tillgång till näring och syre.



Bakterietillväxten kan beskrivas med differentialekvationen $\frac{dN}{dt} = k \cdot N(6000 - N)$ där N är antalet bakterier vid tidpunkten t minuter och $k = 8{,}08 \cdot 10^{-6}$.

Denna differentialekvation har en lösning $N(t) = \frac{6000}{6{,}5e^{-0{,}04848 \cdot t} + 1}$ som väl ansluter till mätvärdena i diagrammet ovan. Differentialekvationen och dess lösning utgör en matematisk modell till försöket.

a) Differentialekvationen betyder att bakterietillväxten är proportionell mot antalet bakterier N och mot uttrycket $(6\,000 - N)$. Hur ska uttrycket $(6\,000 - N)$ tolkas?

b) Vid vilken tidpunkt var tillväxthastigheten maximal enligt den matematiska modellen?
(NP Ma Vt-02)

21. a) Då N uppnått 6000 avstannar tillväxten.

b) $$\frac{d^2N}{dt^2} = k(6000 - 2N)$$

$$\frac{d^2N}{dt^2} = 0 \Rightarrow N = 3000 \Rightarrow$$

$$3000 = \frac{6000}{6.5e^{-0.04848t} + 1}$$

$$e^{-0.04848t} = \frac{1}{6.5}$$

$$t = \frac{\ln \frac{1}{6.5}}{-0.04848} = \underline{38.6 \text{ min}}$$

22 Den radioaktiva väteisotopen tritium har sönderfallskonstanten $1{,}79 \cdot 10^{-9}\ s^{-1}$. Ett prov innehåller från början 1 gram tritium, vilket motsvarar $2 \cdot 10^{23}$ atomer.

a) Ställ upp en differentialekvation för ändringen av antalet tritiumatomer som funktion av tiden.

b) Hur stor är den ursprungliga sönderfallshastigheten?

c) Beräkna hur många tritiumkärnor som sönderfaller under det första året. Hur stor andel av ursprungsmängden är detta?

22. a) $\underline{T' = -1{,}79 \cdot 10^{-9} \cdot T}$

b) $T = 2 \cdot 10^{23} e^{-1{,}79 \cdot 10^{-9} t}$

$T' = -1{,}79 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{23} e^{-1{,}79 \cdot 10^{-9} t}$

$T'(0) = \underline{-360 \cdot 10^{12}\ st}$

c) $T(1) = 2 \cdot 10^{23} \cdot (1 - e^{-1{,}79 \cdot 10^{-9}}) = \underline{0.11 \cdot 10^{23}\ st}$

$\frac{T(1)}{T(0)} = \frac{0.11}{2} = 0{,}055 = \underline{5.5\%}$

23 En behållare med undertryck fylls med luft från atmosfären. Behållarens tryck är p och atmosfärens tryck, p_a, är 1 (bar).

Luften strömmar genom ett smalt rör, som gör att luftflödet är proportionellt mot tryckskillnaden $(p_a - p)$. Även ändringshastigheten $\frac{dp}{dt}$ är proportionell mot tryckskillnaden, alltså är $\frac{dp}{dt} = k(p_a - p)$.

Om tiden mäts i sekunder är konstanten $k = 0{,}01$.

a) Lös differentialekvationen då $p(0) = 0$.

b) Lös differentialekvationen då $p(0) = 0{,}2$.

c) Kontrollera de båda lösningarna med ett grafritarverktyg. Vad händer för stora värden på t?

d) Beräkna hur lång tid det tar för trycket att nå 0,9 bar om $p(0) = 0$.

23. a) $p' = 0.01(p_a - p) = 0.01(1-p)$

$$\underline{p(t) = 1 - e^{-0.01t}, \quad p(0) = 0}$$

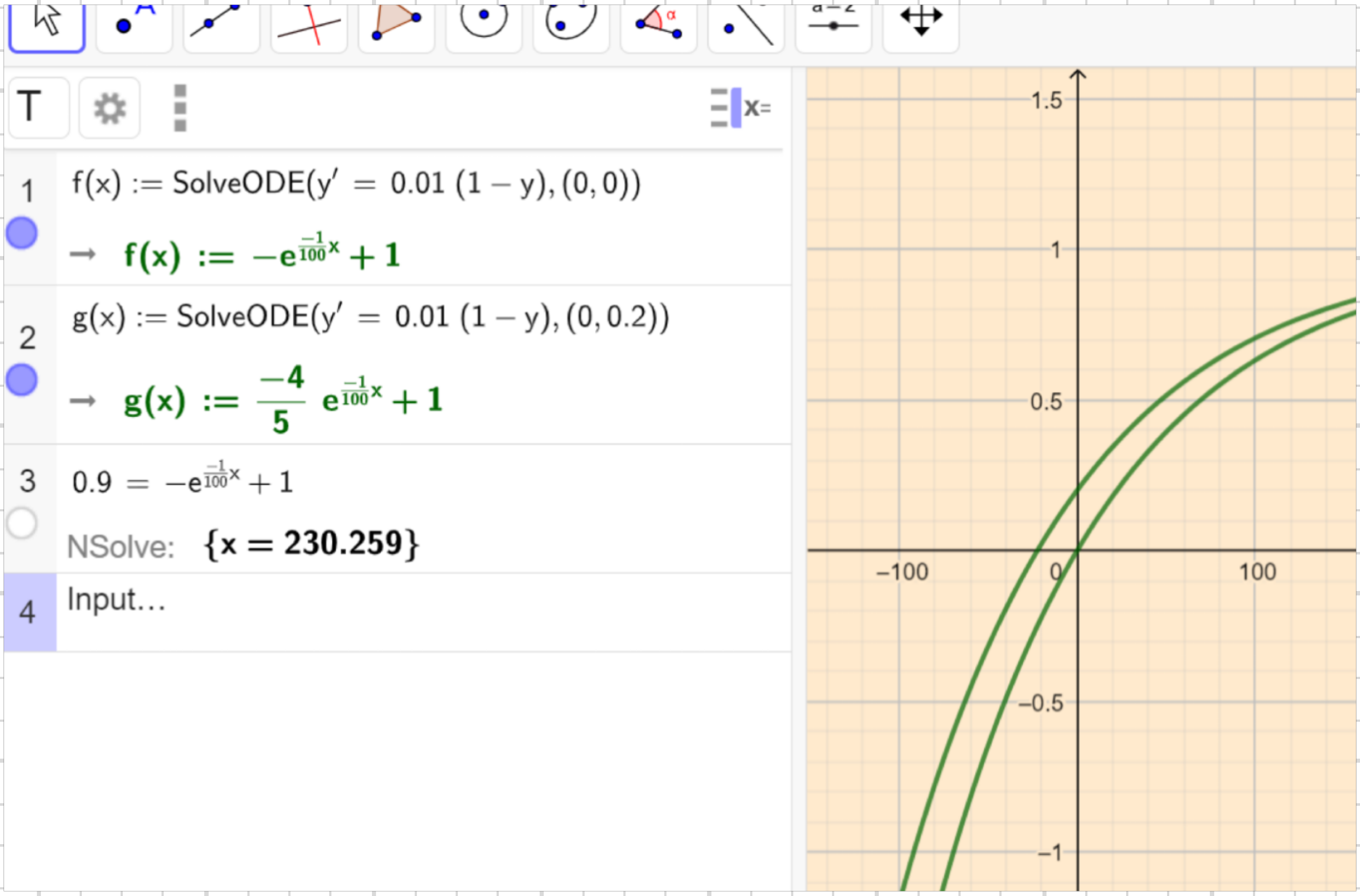
b) $$\underline{p(t) = 1 - 0.8e^{-0.01t}, \quad p(0) = 0.2}$$

c) p <u>närmar sig atmosfärtrycket 1 bar.</u>

d) $1 - e^{-0.01t} = 0.9$

$$\underline{t = \frac{\ln(1-0.9)}{-0.01} = 230 \text{ s}}$$

Löst i Geogebra enligt:



24 I ett företag med 100 anställda sprids en smittsam influensa. Antalet som insjuknar en viss dag är proportionellt dels mot antalet redan smittade, dels mot antalet friska enligt differentialekvationen $y' = 0{,}008 \cdot y \cdot (100 - y)$. När man blivit smittad tar det ca 14 dagar innan man är frisk igen.

Hur ser sjukdomsförloppet ut de närmaste dagarna om antalet sjuka första dagen (dag 0) är 8 stycken? Hur många är sjuka dag 3? Hur många insjuknar dag 3? Hur förändras bilden om antalet sjuka dag 1 bara är två stycken? (Det är så att ledningen misstänker att sex av de sjuka är "inbillat sjuka"). Vilken dag kommer det att bli flest sjukanmälningar? Genomför ovanstående för båda situationerna.

24. Löst i Geogebra enligt nedan.

Ant sjuka dag 3 = 49 resp 18.

Ant insjukningar/dag dag 3 = 20 resp 12. (ges av derivatan)

Största antalet insjukningar/dag = 50 (andraderivatan = 0)

1 $f(x) := \text{SolveODE}(0\, y\, (100 - y), (0, 8))$

$\approx f(x) := \dfrac{200}{23\, e^{-0.8x} + 2}$

2 $f(3)$

≈ 48.9

3 $g(x) := \text{SolveODE}(0\, y\, (100 - y), (0, 2))$

$\rightarrow g(x) := \dfrac{100}{49\, e^{\frac{-4}{5}x} + 1}$

4 $g(3)$

≈ 18.4

5 $a(x) := \dfrac{200}{23\, e^{-0.8x} + 2}$

$\rightarrow a(x) := \dfrac{200}{23\, e^{\frac{-4}{5}x} + 2}$

6 $a'(x) := \text{Derivative}(a(x))$

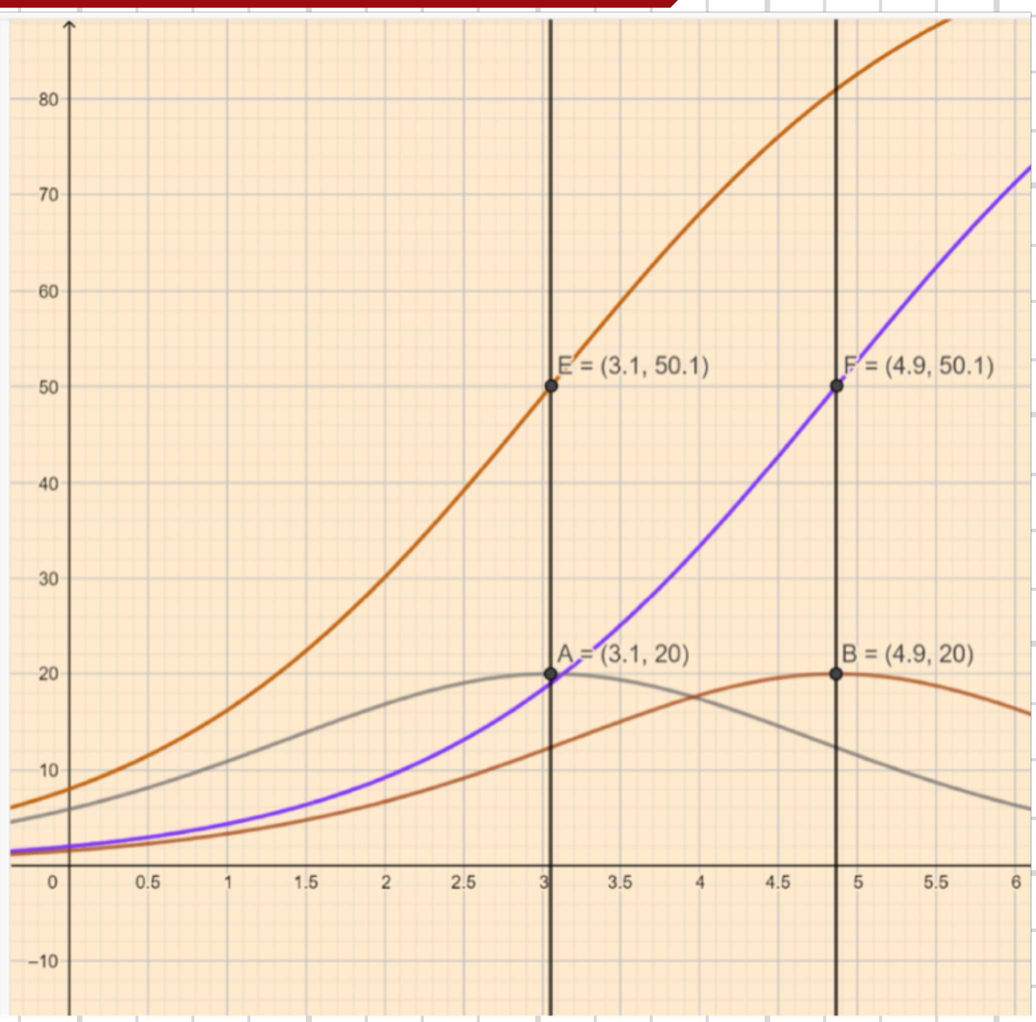
$\rightarrow a'(x) := 3680 \cdot \dfrac{e^{\frac{-4}{5}x}}{\left(23\, e^{\frac{-4}{5}x} + 2\right)^2}$

7 $a'(3)$

≈ 20

8 $b(x) := \dfrac{100}{49\, e^{\frac{-4}{5}x} + 1}$

100



25 En fallskärmshoppare kan nå en maximal hastighet på ca 50 m/s så länge han inte vecklar ut fallskärmen. Den bromsande kraften i fallrörelsen är proportionell mot hastigheten i kvadrat. Den resulterande nedåtriktade kraften är alltså hopparens tyngd minus denna bromskraft. Anta att hopparen väger 80 kg.

a) Beräkna hopparens "luftmotstånds-konstant" *k*.

b) Ställ upp och lös differentialekvationen för rörelsen.

c) Bestäm hopparens hastighet när han fallit i 3 s och 8 s.

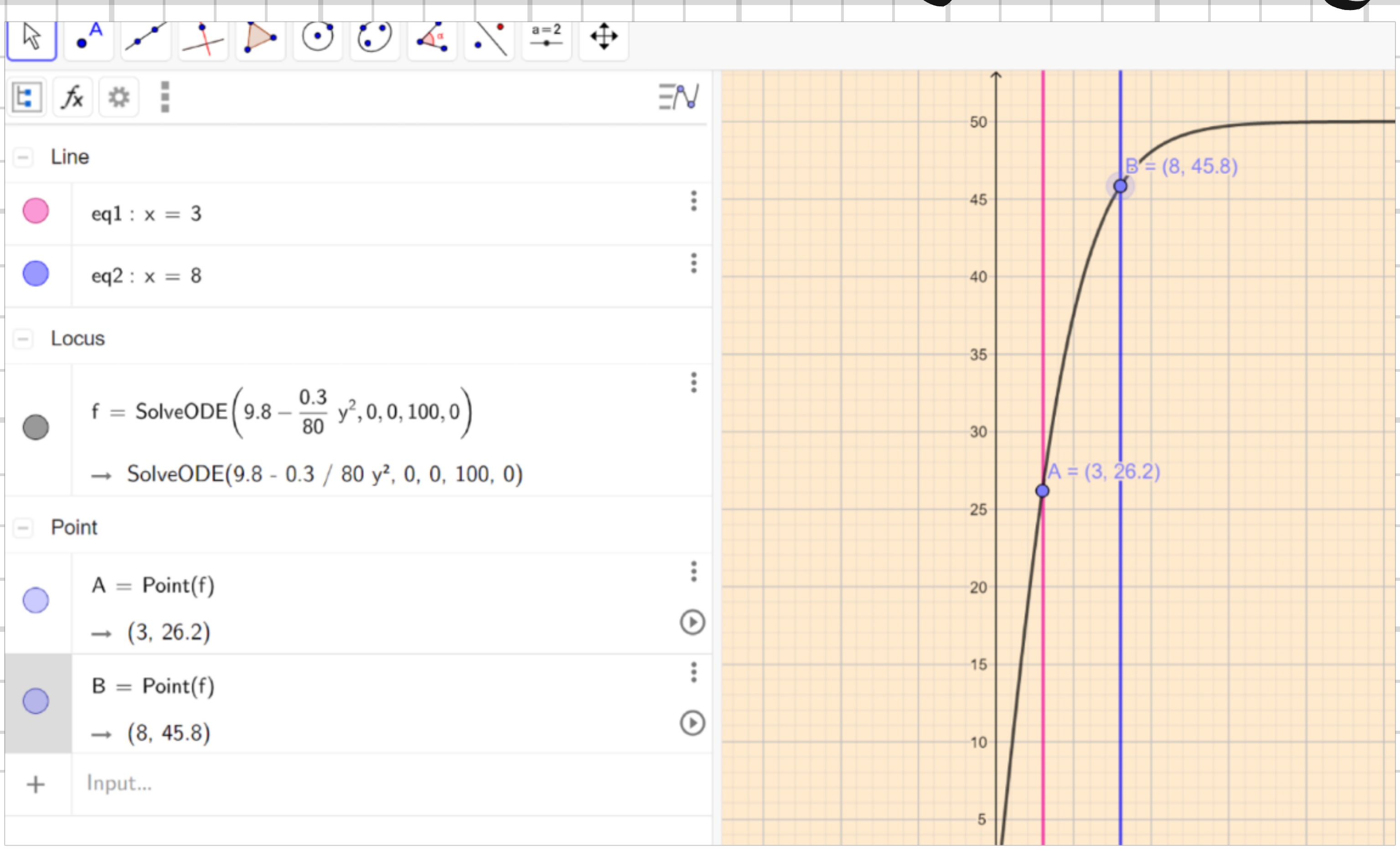
25. $\Sigma F = m \cdot a = mg - k \cdot v^2$

a) $\Sigma F = 0 \Rightarrow k = \frac{mg}{v^2} = \frac{80 \cdot 9{,}8}{50^2} = \underline{0{,}314 \text{ kg/m}}$

b) $mv' = mg - kv^2$; $\underline{v' = g - \frac{k}{m}v^2 = 9{,}8 - \frac{0{,}314}{80} \cdot v^2}$

c) $v(3) = \underline{26 \text{ m/s}}$, $v(8) = \underline{46 \text{ m/s}}$

Löst i Geogebra med Eulers stegmetod enligt:



26 Rörsocker bryts ned i samband med konservering av livsmedel. Nedbrytningshastigheten, tidsderivatan av koncentrationen, är proportionell mot koncentrationen. Vid tiden $t = 0$ mättes koncentrationen till 1 %, tre timmar senare uppmättes 0,2 %. Lös differentialekvationen för nedbrytningen och beräkna hur stor koncentrationen var efter 12 timmar.

26.

$$y' = ky$$

$$y = Ce^{kt}$$

$$y(0) = 0{,}01 \Rightarrow y = 0{,}01e^{kt}$$

$$y(3) = 0{,}002 \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{0{,}002}{0{,}01}}{3} = -0{,}536$$

$$y(t) = 0{,}01e^{-0{,}536t}$$

$$y(12) = 0{,}01e^{-0{,}536 \cdot 12} = 1{,}6 \cdot 10^{-5} = \underline{0{,}016 ‰}$$

27 En flaska läsk ska kylas i ett kylskåp, vars temperatur är 4 °C. Flaskan har temperaturen 20 °C när den sätts in i kylen.

Enligt Newtons avsvalningslag är förändringshastigheten hos temperaturen proportionell mot temperaturskillnaden till omgivningen. I detta fall är proportionalitetskonstanten –0,04 (min^{-1}).

a) Ställ upp Newtons avsvalningslag och lös den.

b) Hur lång tid tar det för att flaskan att kylas till temperaturen 10 °C respektive 5 °C?

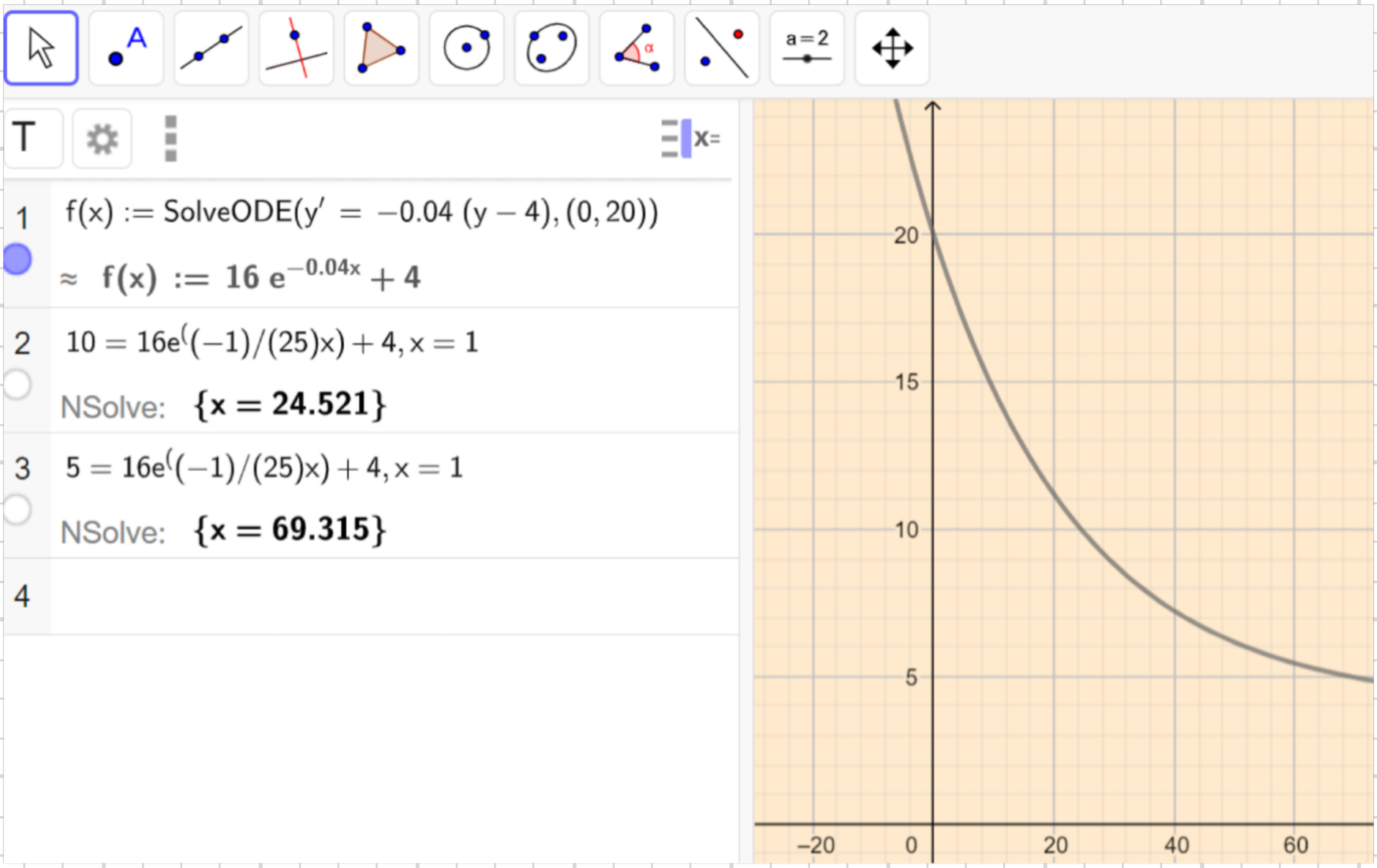
27. a) $T' = -0.04(T-4)$, $T(0) = 20$

$$T = (20-4)e^{-0.04t} + 4 = \underline{16e^{-0.04t} + 4}$$

b) $10 = 16e^{-0.04t} + 4 \Rightarrow t = \dfrac{\ln \frac{6}{16}}{-0.04} = \underline{24.5 \text{ min}}$

$5 = 16e^{-0.04t} + 4 \Rightarrow t = \dfrac{\ln \frac{1}{16}}{-0.04} = \underline{69.3 \text{ min}}$

Löst i Geogebra enligt:



28 Vid medicinering är det vanligt att patienten får en viss initialdos. Sedan ska hon med vissa mellanrum ta *ytterligare* doser av medicinen för att få en viss halt av den i kroppen.

En patient ordineras Novocain med en startdos på 380 mg. Påföljande dagar ska patienten ta *ytterligare* 160 mg. Kroppen bryter ner en viss mängd Novocain per dygn. Denna mängd är 68 %.

a) Ställ upp en differentialekvation som visar mängden Novocain i kroppen som funktion av tiden i dygn.

b) Lös ekvationen och studera grafiskt hur mängden Novocain i kroppen förändras under de tre veckor som medicineringen ska pågå.

c) Variera storleken på initialdosen och undersök hur detta påverkar mängden av Novocain i kroppen efter ca en vecka.

d) Hur påverkar den dagliga dosen av medicinen mängden Novocain i kroppen?

e) Vad bestämmer den stabila nivån av medicinen i kroppen?

28. $y' = -0{,}68y + 160$

$, \; y(0) = 380$

$y = 145e^{-0{,}68t} + 235$

Högre initialdos ⇒ tar längre tid att nå slutvärdet

Högre daglig dos ⇒ ger högre slutnivå.

1 $f(x) := \text{SolveODE}(y' = -0.68\,y + 160, (0, 380))$

$\rightarrow f(x) := \frac{2460}{17} e^{\frac{-17}{25}x} + \frac{4000}{17}$

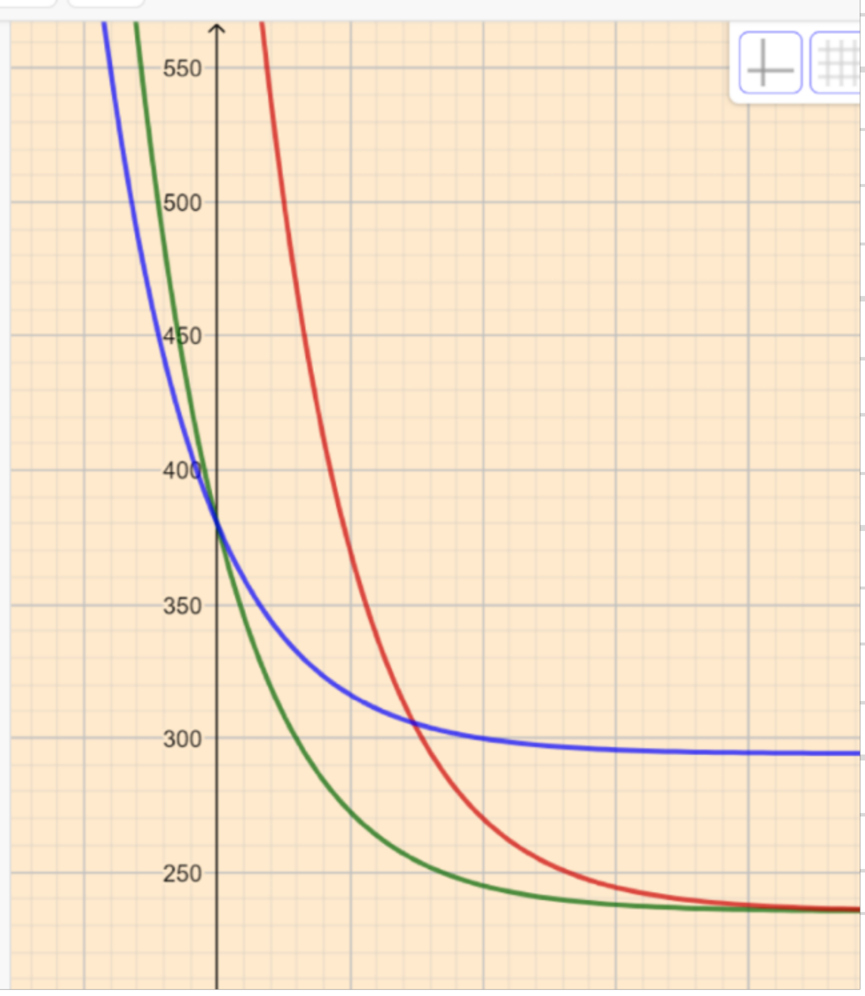
2 $g(x) := \text{SolveODE}(y' = -0.68\,y + 160, (0, 760))$

$\rightarrow g(x) := \frac{8920}{17} e^{\frac{-17}{25}x} + \frac{4000}{17}$

3 $h(x) := \text{SolveODE}(y' = -0.68\,y + 200, (0, 380))$

$\rightarrow h(x) := \frac{1460}{17} e^{\frac{-17}{25}x} + \frac{5000}{17}$

4 Input...



29 Newtons avsvalningslag kan skrivas så här:

$T' = k(T_{Rum} - T)$

där k är en positiv konstant.

Denna ekvation fungerar både vid avsvalning och uppvärmning. Förklara hur det är möjligt!

29. T' växlar tecken beroende om T är större eller mindre än T_{rum}.

30 Du vet att $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = k$.

Härled ett uttryck för kvoten $\dfrac{f^{(n)}(x)}{f(x)}$,

där $f^{(n)}(x)$ är den n:e derivatan av funktionen $f(x)$.

30.

$$f'(x) = k \cdot f(x)$$

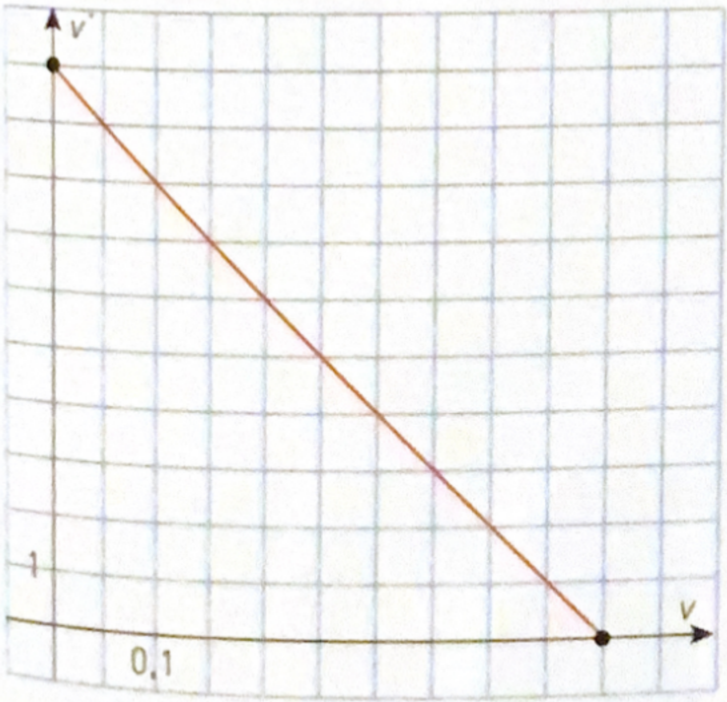
$$f(x) = C \cdot e^{kt}$$

$$f' = C \cdot k e^{kt}$$

$$f^{(n)} = C \cdot k^n e^{kt}$$

$$\frac{f^{(n)}}{f(x)} = \frac{C \cdot k^n e^{kt}}{C \cdot e^{kt}} = k^n$$

31 En fjäder i vila släpps från höjden 5,0 m. Analys av mätningar på fjäderns fallrörelse gav följande diagram.



a) Ange en differentialekvation som beskriver hur $v'(t)$ beror av v.

b) Lös differentialekvationen.

c) Vilken maximal hastighet når fjädern?

31.

a) $\underline{v'(t) = -20 \cdot v(t) + 10}$

b) $v(t) = Ae^{-20t} + B$

$v'(t) = -20Ae^{-20t}$

$-20Ae^{-20t} = -20(Ae^{-20t} + B) + 10$

$-20B + 10 = 0 \Rightarrow B = 0.5$

$v(0) = 0 \Rightarrow$

$A + 0.5 = 0$; $A = -0.5$

$\underline{v(t) = -0.5e^{-20t} + 0.5}$

c) $\lim_{t \to \infty} v(t) = 0.5 \Rightarrow$ Maximala hastigheten $= \underline{0.5 \text{ m/s}}$

32 En bordtennisboll med massan m släpps från hög höjd. Luftmotståndet antas vara proportionellt mot hastigheten v m/s. Proportionalitetskonstanten är k.

Bestäm ett uttryck för det värde som bollens hastighet närmar sig.

32. $\downarrow$: $mv' = mg - k \cdot v$

$$v' = g - \frac{k}{m} \cdot v$$

$$v' = 0 \Rightarrow \underline{v = \frac{mg}{k}}$$

33 En vattenbehållare innehåller från början 10 000 liter rent vatten. Till behållaren förs förorenat vatten med hastigheten 20 liter/s. Koncentrationen av föroreningen i tillflödet är 2,0 mg/liter. Samtidigt avtappas 20 liter/s. Omrörning i behållaren gör att koncentrationen av föroreningen förblir homogen i behållaren. Mängden föroreningar i behållaren vid tiden t sekunder är $m(t)$.

a) Ställ upp en differntialekvation som beskriver situationen.

b) När är koncentrationen av föroreningen 0,6 mg/liter?

c) Vilket värde närmar sig koncentrationen då $t \to \infty$?

33. a) $y' = -0.002y + 40$

$y = Ae^{-0{,}002t} + B$

$-0{,}002Ae^{-0{,}002t} = -0{,}002Ae^{-0{,}002t} - 0{,}002B + 40 \Rightarrow B = 20\,000$

$y(0) = 0 \Rightarrow A = -B = -20\,000$

$\underline{y = 20000(1 - e^{-0{,}002t})}$ mg

b) $y(t) = 6000 \Rightarrow t = \dfrac{\ln\left(1 - \frac{6000}{20000}\right)}{-0{,}002} = \underline{178\ s}$

c) $\lim_{t \to \infty} y = 20000$ mg

Koncentrationen $= \dfrac{20000}{10000} = \underline{2\ mg/l}$