

1 Skriv följande mängder på listform:

- a) mängden av alla positiva heltalsfaktorer till talet 12.
- b) mängden av positiva heltal vars kvadrater är mindre än 10.
- c) $\{x: x \text{ är ett jämnt tal och } 0 < x < 3\}$
- d) mängden av primtal som ligger i intervallet $20 < x < 40$.

1. a) $\{2, 3, 4, 6\}$

b) $\{1, 2, 3\}$

c) $\{2\}$

d) $\{23, 29, 31, 37\}$

2 Vilka av följande utsagor är sanna?

- a) $5 \in \{25\}$
- b) $5 \in \{5, 10, 15, 20, 25\}$
- c) $14 \in \{\text{tal delbara med } 3\}$
- d) $0 \subset \emptyset$

2. a) Falsk

b) Sann

c) Falsk

d) Falsk

3 Du har en påse med kulor, fem röda, sju blåa och fyra gula. Du tar en kula ur påsen. Hur stor är sannolikheten att

- a) kulan är blå?
- b) att kulan är röd eller gul?

3. a) $\frac{7}{16}$

b) $\frac{9}{16}$

4 Illustrera följande mängder i venndiagram

a) $A = \{\text{människor}\}$

$B = \{\text{kvinnor}\}$

$C = \{\text{svenskar}\}$

b) $A = \{\text{heltal}\}$

$B = \{\text{jämna heltal}\}$

$C = \{\text{heltal delbara med 6}\}$

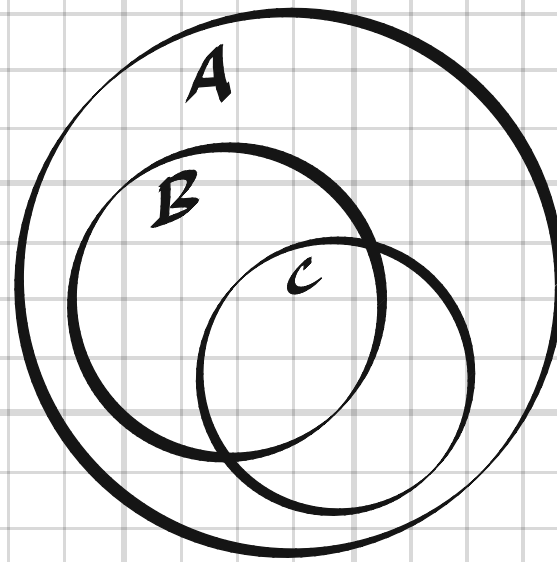
c) $A = \{\text{fyrhörningar}\}$

$B = \{\text{parallelogrammer}\}$

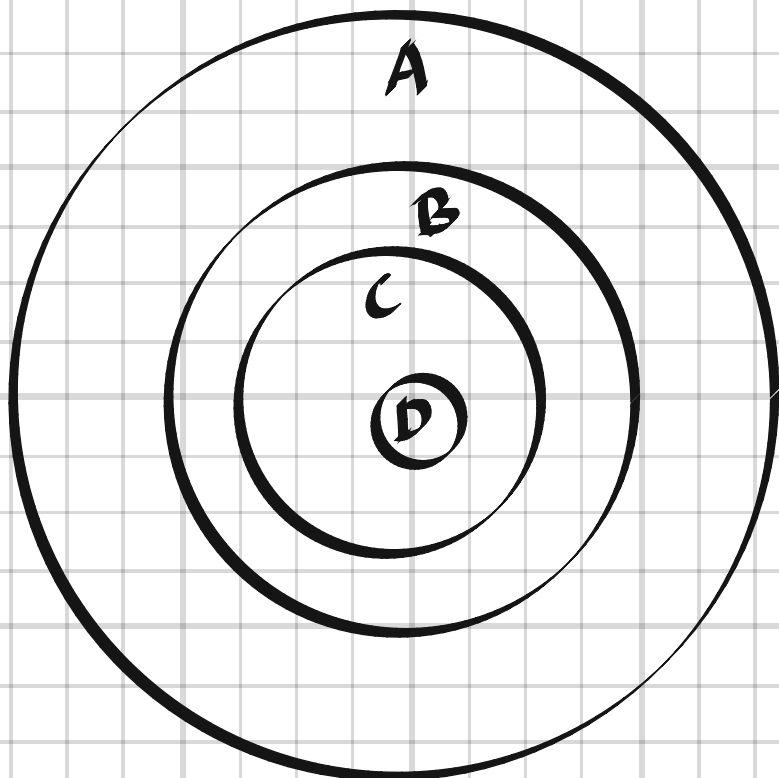
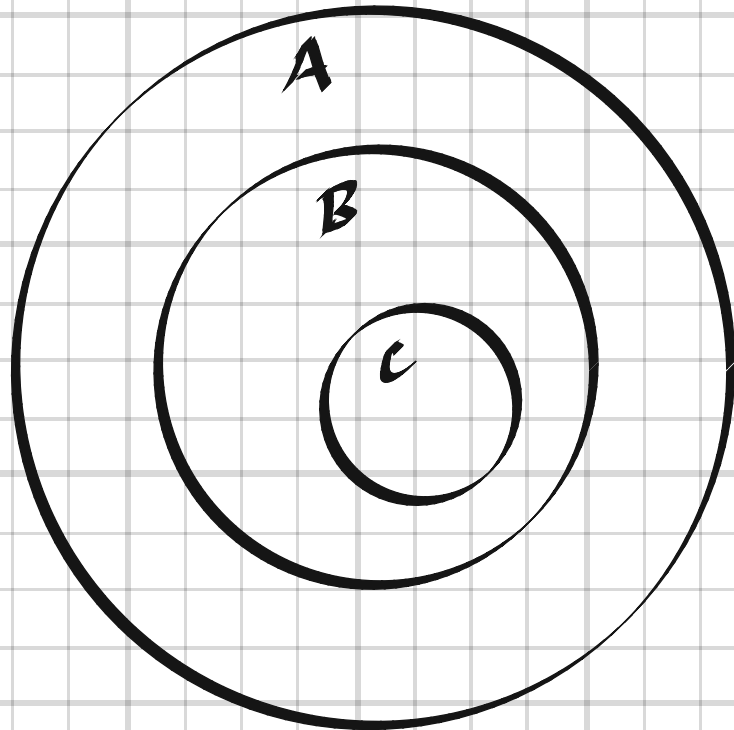
$C = \{\text{romber}\}$

$D = \{\text{kvadrater}\}$

a)



b)



- 5 På hur många sätt kan en tiokrona, en femkrona, en krona och en femtioöring placeras på en rad?

5. $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{24}$ sätt.

- 6 Hela grundmängden är $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$,
 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ och
 $C = \{5, 6, 7, 8\}$. Ange

- $\complement(A \cap \complement B)$
- $\complement(A \cap C)$
- $(A \cup B) \cap C$
- $(A \cap B) \cap C$
- $(A \cap C) \cup (\complement A \cap B)$
- $(A \cup C) \cap (\complement A \cup B)$

6. a) $\{6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{1, 4, 6, 8, 9, 10\} = \{6, 8, 9, 10\}$

b) $\{5\}^c = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$

c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \cap \{5, 6, 7, 8\} = \{5, 7\}$

d) $\{2, 3, 5\} \cap \{5, 6, 7, 8\} = \{5\}$

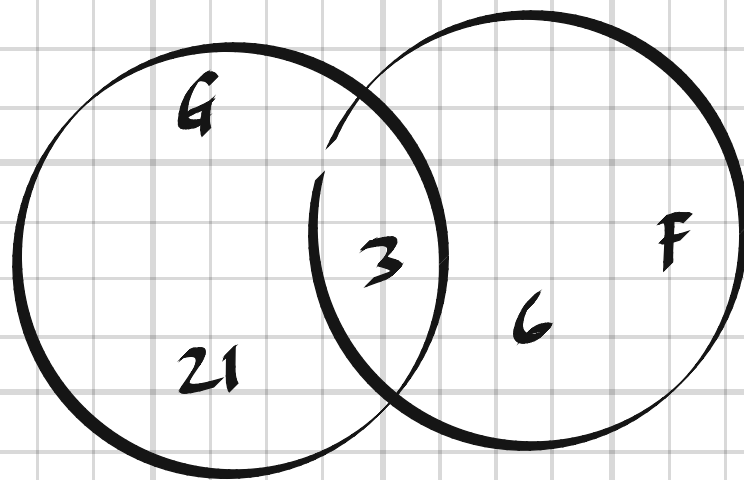
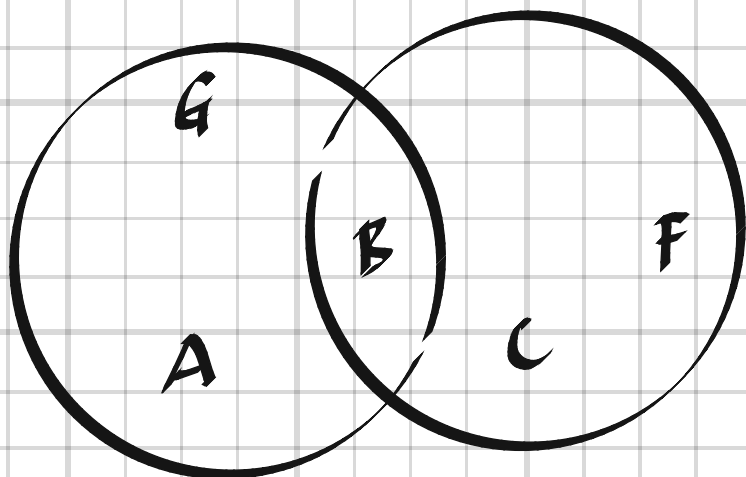
e) $\{5\} \cup \{6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{2, 3, 5, 7\} = \{5\} \cup \{7\} = \{5, 7\}$

f) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \cap \{6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{2, 3, 5, 7\} =$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} \cap \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$

7 I en klass med 30 elever spelar 24 golf och 9 fotboll. Alla i klassen utövar minst en av sporterna. Hur många utövar båda?

7.



$$\begin{cases} A+B+C=30 \\ A+B=24 \\ B+C=9 \end{cases}$$

$$A=24-B$$

$$C=9-B$$

$$24-B+B+9-B=30 \Rightarrow \underline{B=3}$$

8 På hur många sätt kan man sätta samman en grupp med två flickor och två pojkar ur en klass som består av 18 flickor och 12 pojkar?

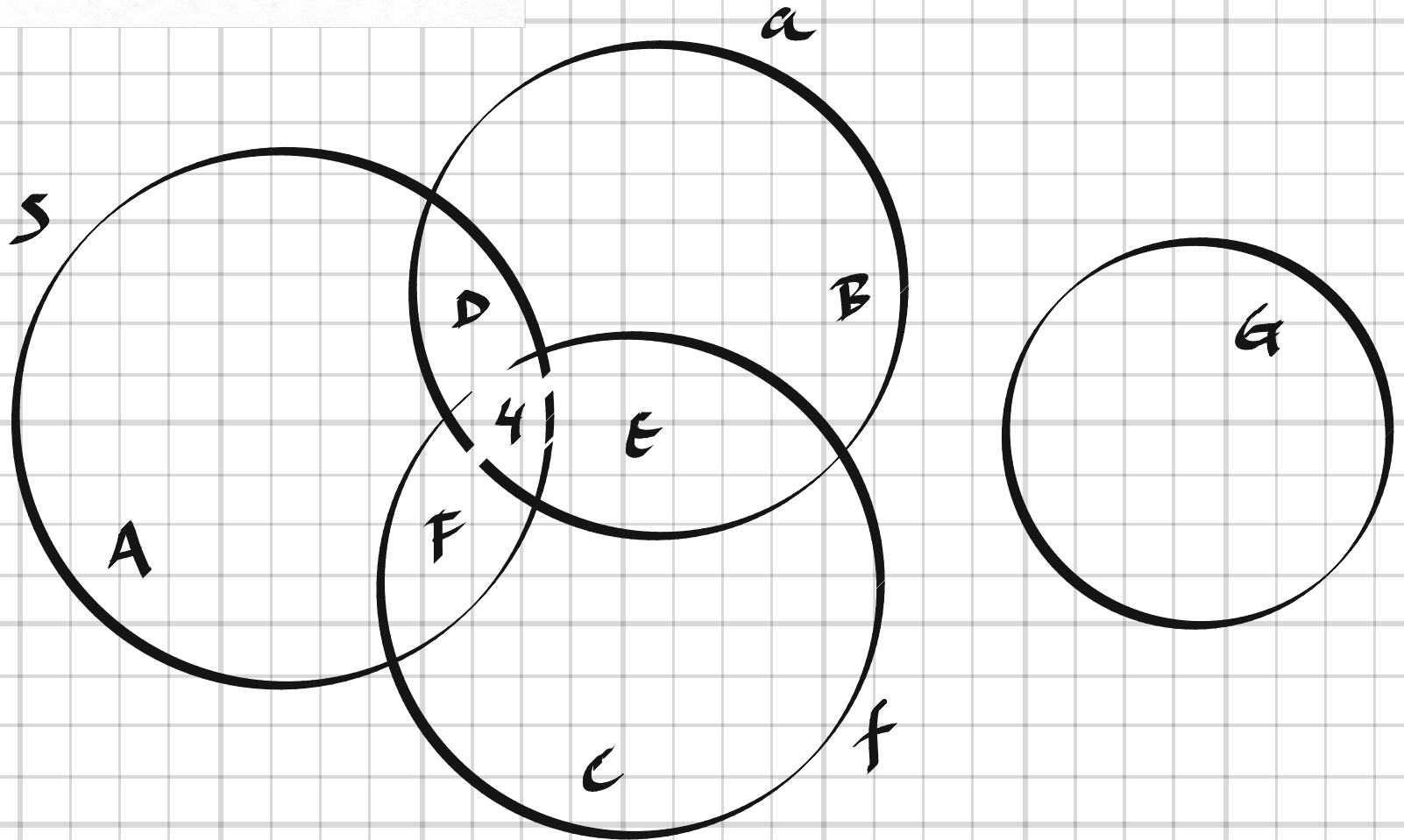
$$8. \binom{18}{2} \binom{12}{2} = \frac{18!}{2! \cdot 16!} \cdot \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{18 \cdot 17}{2} \cdot \frac{12 \cdot 11}{2} = \underline{10098}$$

9 En affär har 40 stolar till försäljning.
 16 är av skinn, 20 har armstöd och
 12 säljs med tillhörande fotpall.

4 har alla tre egenskaperna,
 8 har armstöd och är av skinn,
 7 är av skinn och säljs med fotpall,
 4 har armstöd och säljs med fotpall.

Hur många av stolarna saknar alla dessa
 tre egenskaper?

9.



$$A + D + F + C + E + B + G = 40 - 4 = 36$$

$$A + D + F = 16 - 4 = 12$$

$$B + D + E = 20 - 4 = 16$$

$$C + E + F = 12 - 4 = 8$$

$$D + 4 = 8$$

$$F + 4 = 7$$

$$E + 4 = 4$$

$$C + E + B + G = 24$$

$$E = 0 \Rightarrow C + B + G = 24$$

$$F = 3 \Rightarrow$$

$$C = 5 \Rightarrow B + G = 19$$

$$D = 4 \Rightarrow B = 12 \Rightarrow$$

$$\underline{G = 7}$$

10 Utveckla $(a + b)^{10}$ med hjälp av Pascals triangel.

$$10, \quad \binom{10}{0} = 1 \quad \binom{10}{2} = 45 \quad \binom{10}{4} = 210 \quad \binom{10}{6} = 210$$

$$\binom{10}{1} = 10 \quad \binom{10}{3} = 120 \quad \binom{10}{5} = 252 \quad \binom{10}{7} = 120$$

$$\binom{10}{8} = 45 \quad \binom{10}{10} = 1$$

$$\binom{10}{9} = 10$$

$$(a+b)^{10} = \underline{a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}}$$

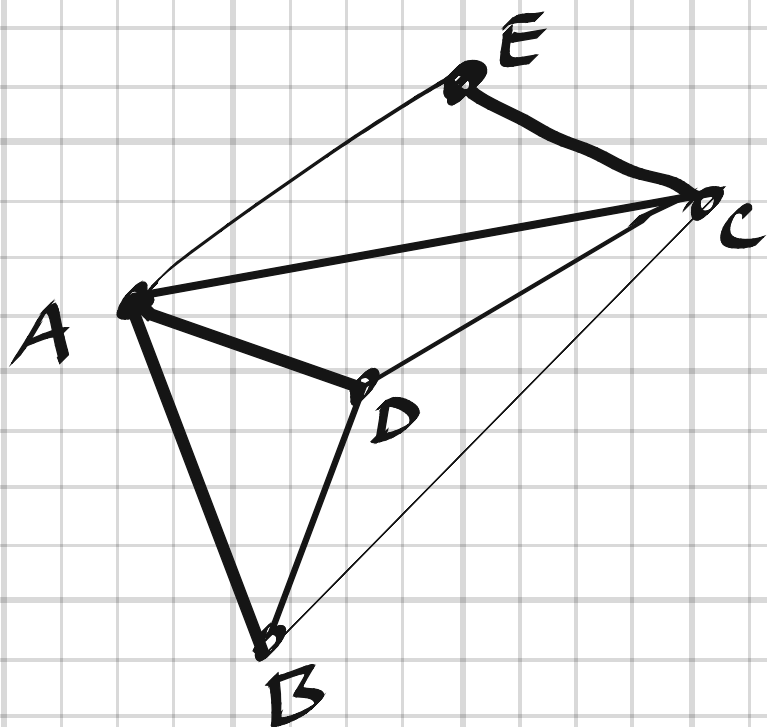
11 Ett bokstavslås med 10 bokstäver är så konstruerat att det kan öppnas om man trycker på fyra av bokstäverna i rätt ordning. Hur många sådana lås kan konstrueras?

$$11, \quad 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

$$\text{alt.} \quad \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \underline{5040}$$

12 Rita en graf med 5 noder A, B, C, D och E och minst 6 kanter. Grafen ska innehålla en cykel ABCA.

12.



13 Hur många olika permutationer kan man göra av bokstäverna

- a) LETA?
- b) LATA?

13. a) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{24 \text{ st}}$

b) $\frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = \underline{12 \text{ st}}$

15 Du kommer till en fest med 10 personer.
Alla personer skakar hand med varandra.
Hur många handskakningar blir det?

$$15. \quad \binom{10}{2} = \underline{45 \text{ st}}$$

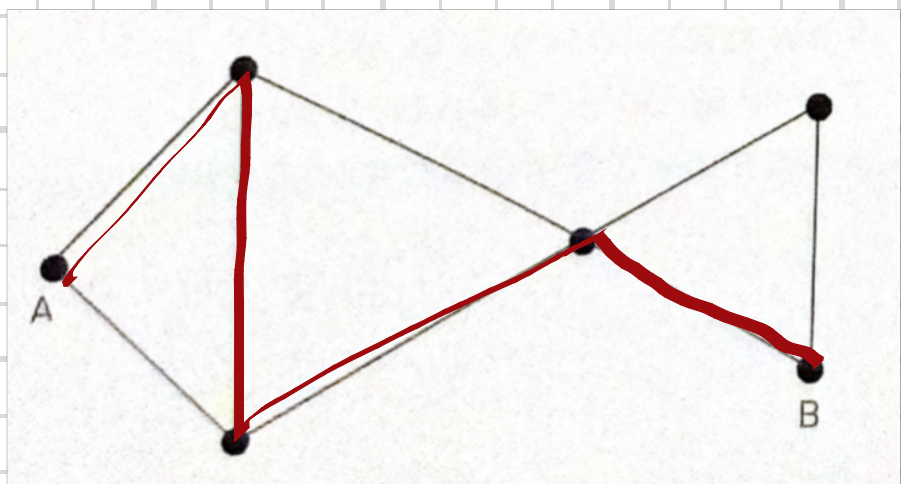
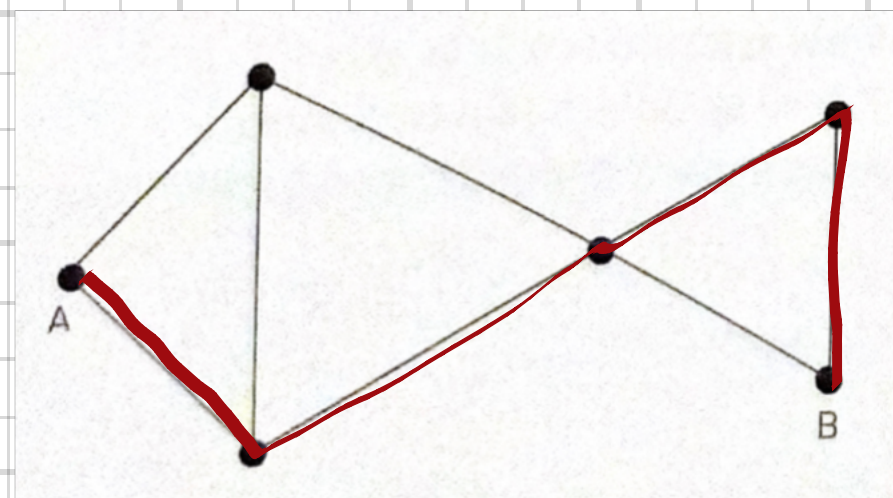
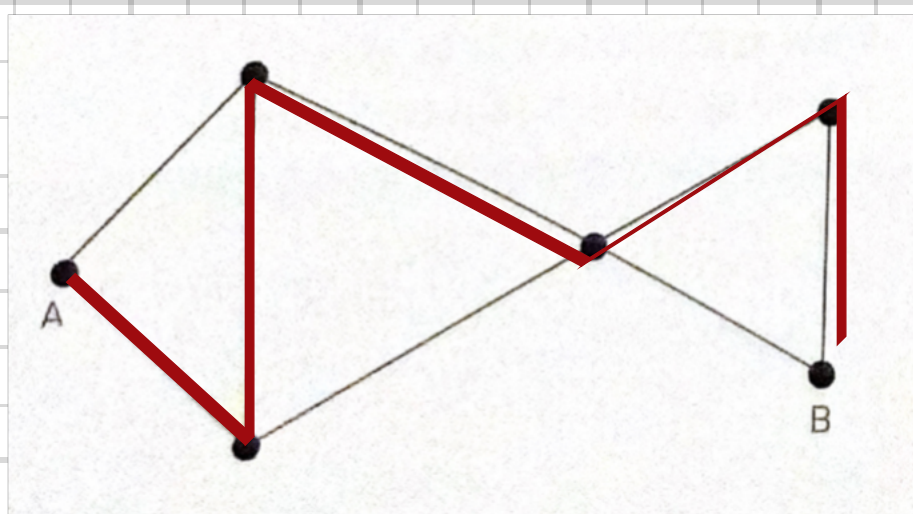
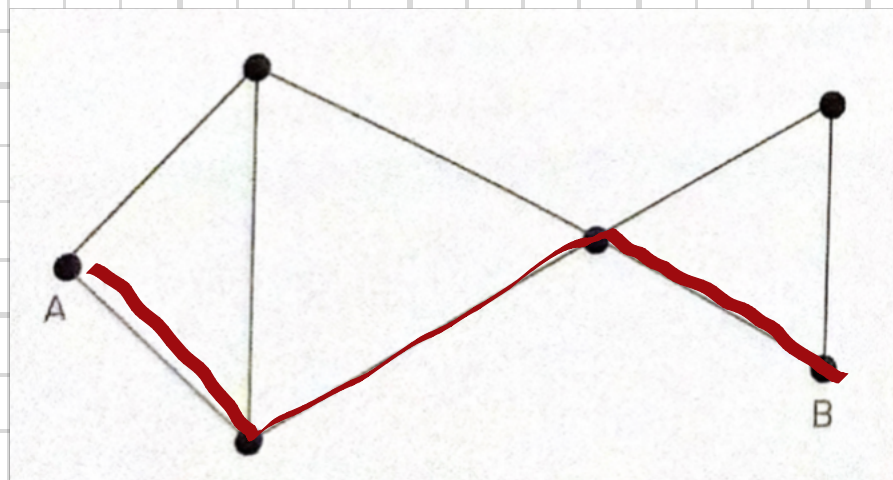
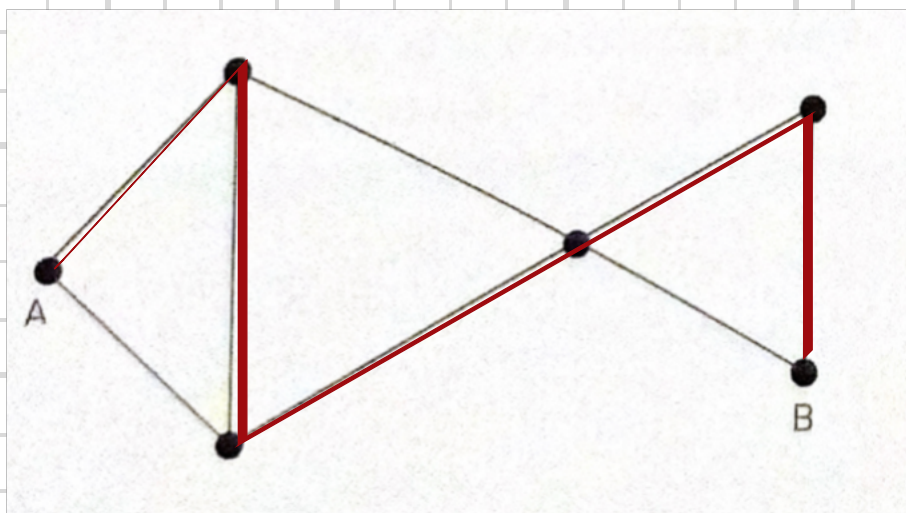
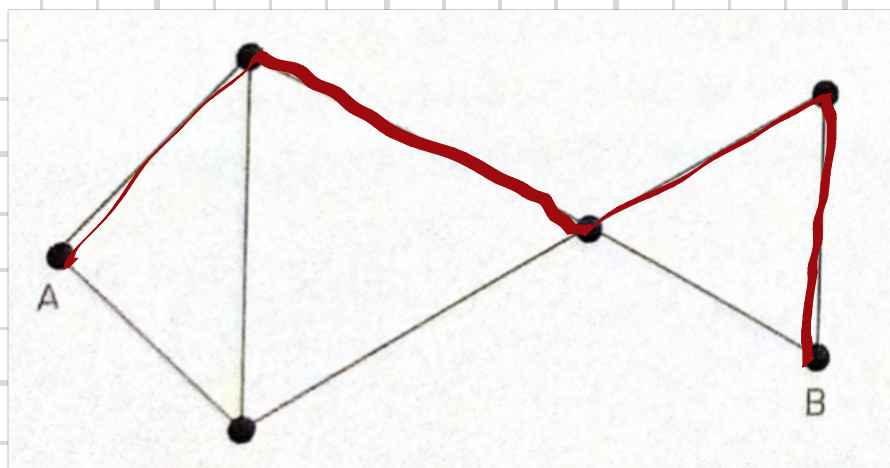
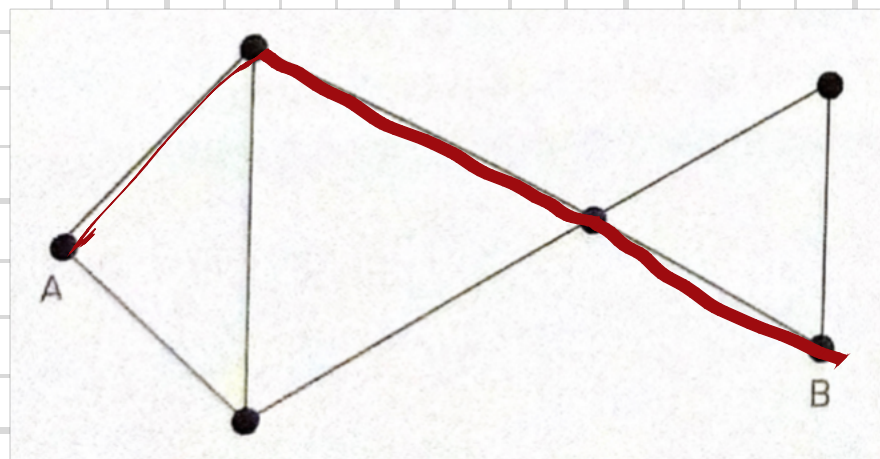
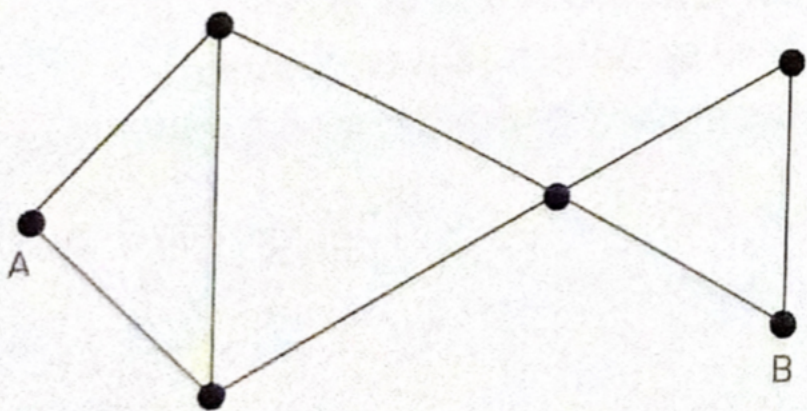
16 I en fotbollsserie spelar 10 lag.
Varje lag spelar två matcher mot varje
annat lag, nämligen en bortamatch och en
hemmamatch. Hur många matcher spelas
totalt i serien?

$$16. \quad \binom{10}{2} \cdot 2 = \underline{90 \text{ st}}$$

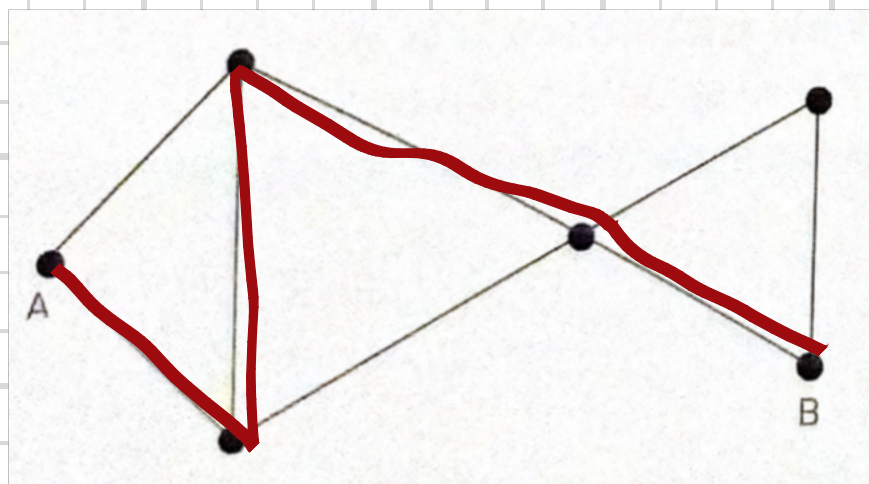
17 Varför är alla faktorer utom $1!$ jämna tal?

17. För att den näst sista faktorn = 2.
Därmed är alla tal delbara med 2.

18 Hur många olika promenader finns det från A till B i grafen i figuren så att promenaden går högst 1 gång genom varje hörn?

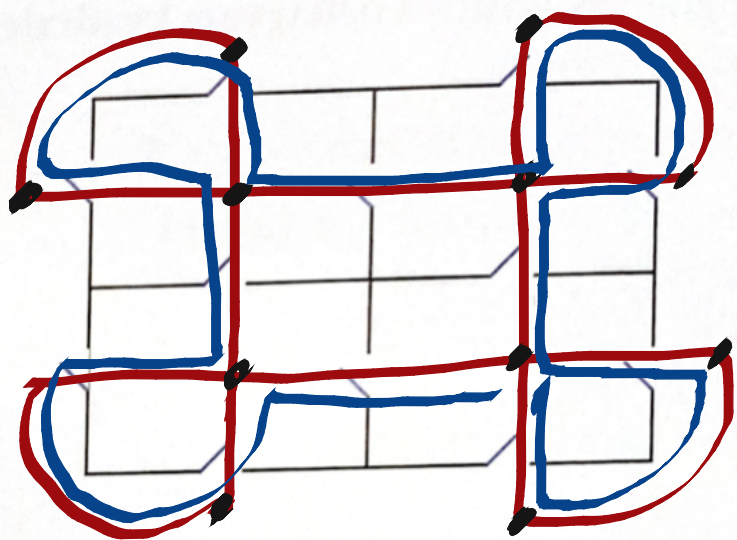


8st

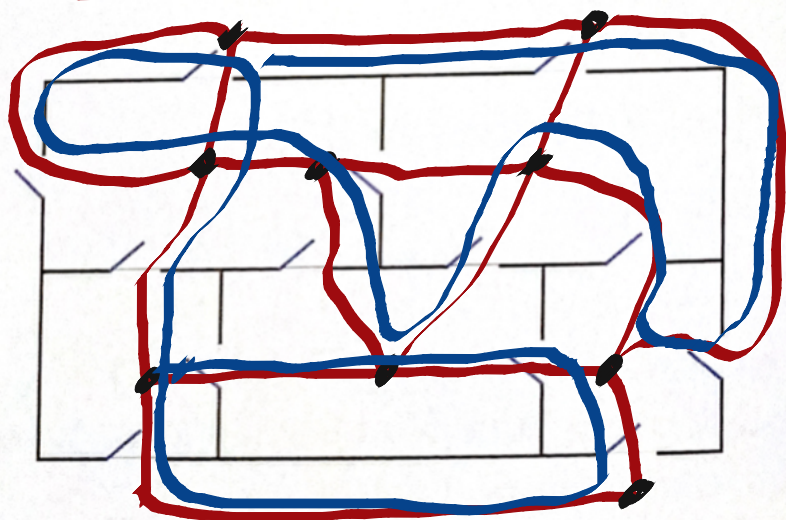


19 Följande figurer visar planen på hus där dörrarna är markerade.

- a) Visa att det i båda husen går att ta en promenad som passerar varje dörr exakt en gång.
- b) Kan denna promenad börja och sluta på samma ställe?



b) Ja



b) Nej

20 Bestäm termen som inte innehåller x vid

utvecklingen av $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$.

$$20. \quad x^{18}, x^{16-1}, x^{14-2}, x^{12-3}, x^{10-4}, x^{8-5}, \\ x^6-6, x^4-7, x^2-8, x^{-9}$$

$$\text{Termen är } \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = \underline{84}$$

21 Hur stor är sannolikheten att det i en grupp på 30 personer finns minst två som har samma födelsedag?

21,

$$P(\text{minst 2}) = 1 - P(\text{alla olika})$$

$$P(\text{alla olika}) = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{336}{365} \approx 0,29 \Rightarrow$$

$$P(\text{minst 2}) \approx 1 - 0,29 = 0,71 = 71\%$$

n	dgr	dgr / 365	dgr/(365-(n))*dgr/(365-(n-1))
1	365	1	1
2	364	0.9973	0.9973
3	363	0.9945	0.9918
4	362	0.9918	0.9836
5	361	0.9890	0.9729
6	360	0.9863	0.9595
7	359	0.9836	0.9438
8	358	0.9808	0.9257
9	357	0.9781	0.9054
10	356	0.9753	0.8831
11	355	0.9726	0.8589
12	354	0.9699	0.8330
13	353	0.9671	0.8056
14	352	0.9644	0.7769
15	351	0.9616	0.7471
16	350	0.9589	0.7164
17	349	0.9562	0.6850
18	348	0.9534	0.6531
19	347	0.9507	0.6209
20	346	0.9479	0.5886
21	345	0.9452	0.5563
22	344	0.9425	0.5243
23	343	0.9397	0.4927
24	342	0.9370	0.4617
25	341	0.9342	0.4313
26	340	0.9315	0.4018
27	339	0.9288	0.3731
28	338	0.9260	0.3455
29	337	0.9233	0.3190
30	336	0.9205	0.2937

22 Visa att $\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$ genom att använda definitionen för $\binom{n}{k}$.

$$22. \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad n! = n(n-1)!$$

$$HL = \frac{16!}{5! \cdot 11!} + \frac{16!}{6! \cdot 10!} = \frac{16!}{5! \cdot 11 \cdot 10!} + \frac{16!}{6 \cdot 5! \cdot 10!} =$$

$$= \frac{16! \cdot (6 + 11)}{6 \cdot 11 \cdot 5! \cdot 10!} = \frac{17!}{6! \cdot 11!} = \binom{17}{6} = VL.$$

23 Hur stor måste en grupp vara för att sannolikheten att minst två har samma födelsedag överstiger 50 %?

$$23. \quad P(\text{minst 2}) = 1 - P(\text{alla olika})$$

$$1 - P(\text{alla olika}) > 50\% \Rightarrow$$

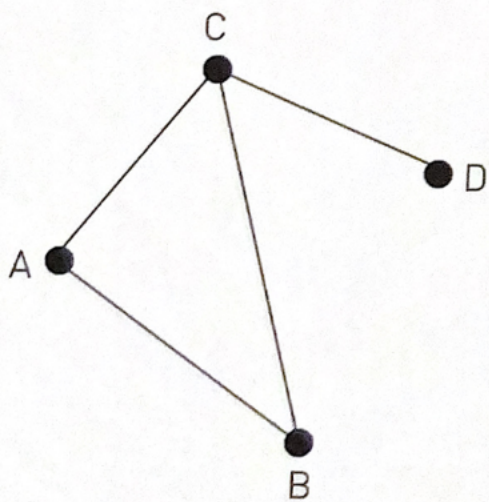
$$P(\text{alla olika}) < 50\%$$

$$\frac{364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (364 - n + 1)}{365^n} < 0.5 \Rightarrow$$

Löst i Excel till 23 personer

n	dgr	dgr / 365	dgr/(365-(n))*dgr/(365-(n-1))
1	365	1	1
2	364	0.9973	0.9973
3	363	0.9945	0.9918
4	362	0.9918	0.9836
5	361	0.9890	0.9729
6	360	0.9863	0.9595
7	359	0.9836	0.9438
8	358	0.9808	0.9257
9	357	0.9781	0.9054
10	356	0.9753	0.8831
11	355	0.9726	0.8589
12	354	0.9699	0.8330
13	353	0.9671	0.8056
14	352	0.9644	0.7769
15	351	0.9616	0.7471
16	350	0.9589	0.7164
17	349	0.9562	0.6850
18	348	0.9534	0.6531
19	347	0.9507	0.6209
20	346	0.9479	0.5886
21	345	0.9452	0.5563
22	344	0.9425	0.5243
23	343	0.9397	0.4927
24	342	0.9370	0.4617
25	341	0.9342	0.4313
26	340	0.9315	0.4018

24 Det antal kanter som utgår från ett hörn i en graf kallas hörnets gradtal. I figuren har A och B gradtal 2, C gradtal 3 och D gradtal 1.

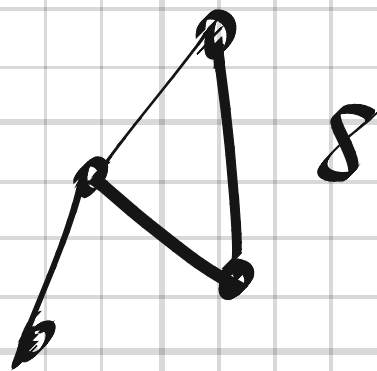
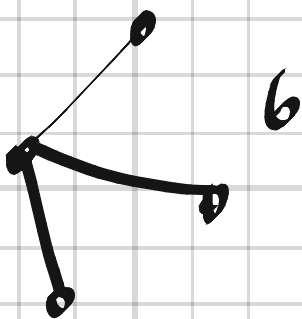
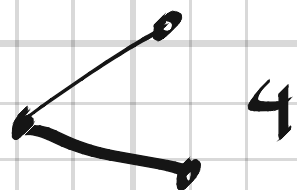


- a) Titta på några av graferna som vi studerat i detta kapitel. Vad kan du säga om summan av hörnens gradtal i var och en av dessa grafer? (För grafen i figuren ovan är summan $2 + 2 + 3 + 1 = 8$.)
- b) Gäller den observation som du eventuellt gjort i uppgift a för alla grafer?

a)

Summan är ett jämnt tal.

b) Ja.



För varje adderad kant tillkommer 2 noder.

25 I kortspelet bridge får varje deltagare 13 kort.

a) Hur stor är sannolikheten att färgfördelningen blir 10 - 1 - 1 - 1 (t ex 10 hjärter, 1 ruter, 1 spader och 1 klöver)?

b) Hur stor är sannolikheten för fördelningen 5 - 5 - 3 - 0?

25. a)

$$\text{Antal kombinationer} = \binom{13}{10} \cdot \binom{13}{1} \binom{13}{1} \binom{13}{1} \cdot 4$$

$$\text{Totalt ant kombinationer} = \binom{52}{13}$$

$$p(10-1-1-1) = \frac{\binom{13}{10} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot 4}{\binom{52}{13}} = \frac{2513368}{635 \cdot 10^9} = \underline{3.96 \cdot 10^{-6}}$$

b)

$$p(5-5-3-0) = \frac{\binom{13}{5} \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{13}{3} \cdot 4 \cdot 3}{\binom{52}{13}} = \frac{5685 \cdot 10^6}{635 \cdot 10^9} = \underline{8.95 \cdot 10^{-3}}$$

21 Hur stor är sannolikheten att det i en grupp på 30 personer finns minst två som har samma födelsedag?

364

336

21,

$$P(\text{minst 2}) = 1 - P(\text{alla olika})$$

$$P(\text{alla olika}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{335}{365} =$$

$$= 1 \cdot 0,9973 \cdot 0,9945 \cdot 0,9917 \cdot \dots \cdot 0,918$$

$$\approx \left(\frac{0,9973 + 0,918}{2} \right)^{29} = 0,958^{29} \approx 0,29 \Rightarrow$$

$$P(\text{minst 2}) = 1 - 0,29 = 0,71 = 71\%$$

$$(365 - n)!$$