7. Bestäm $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ då $f(x) = 2x + \sin x$

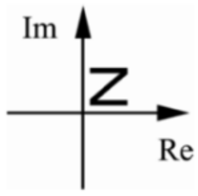
3 (0/0/1)

7. $f(h) = 2h + \sin h$

$f(0) = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(2 + \frac{\sin h}{h}\right) = 2 + 1 = 3$$

8. En mängd komplexa tal som tillsammans formar bokstaven Z är markerade i det komplexa talplanet.

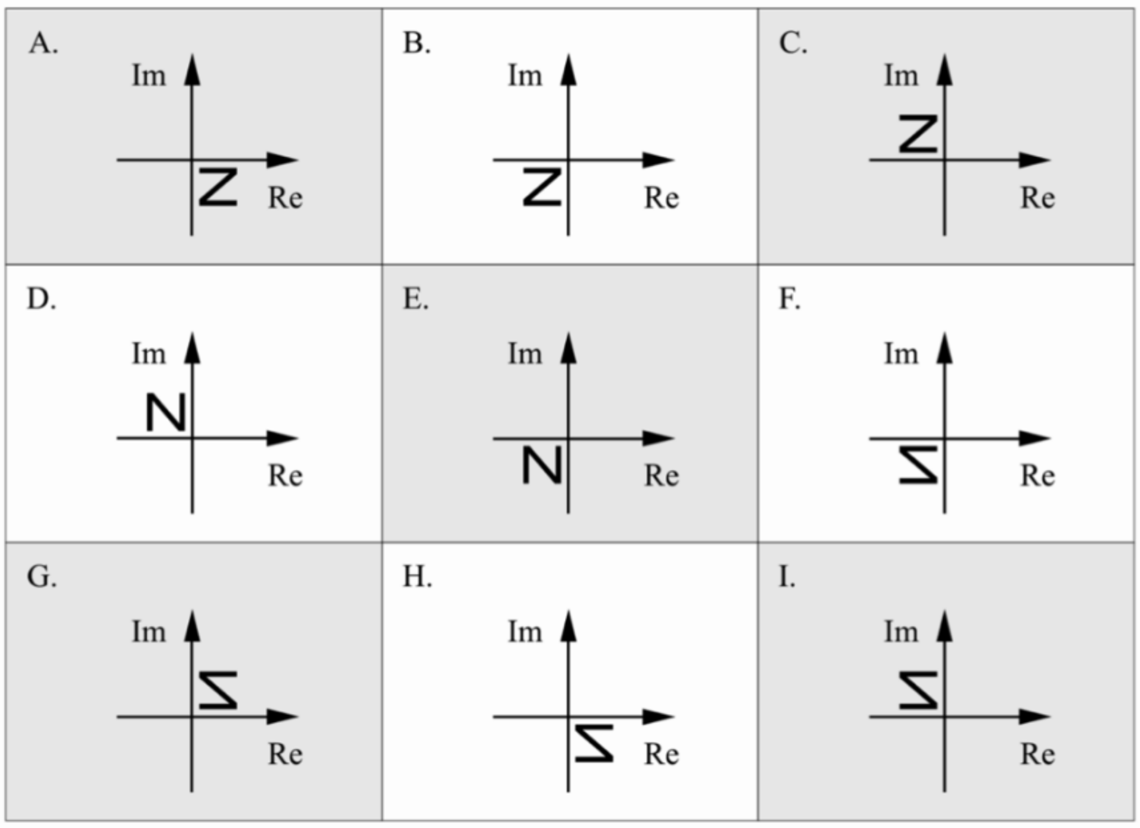


a) Vilket av alternativen A-I nedan visar den figur som bildas av konjugaten till de tal som formar Z i figuren ovan?

H (0/1/0)

b) Vilket av alternativen A-I nedan visar den figur som bildas då de tal som formar Z i ursprungsfiguren ovan multipliceras med i?

D (0/0/1)



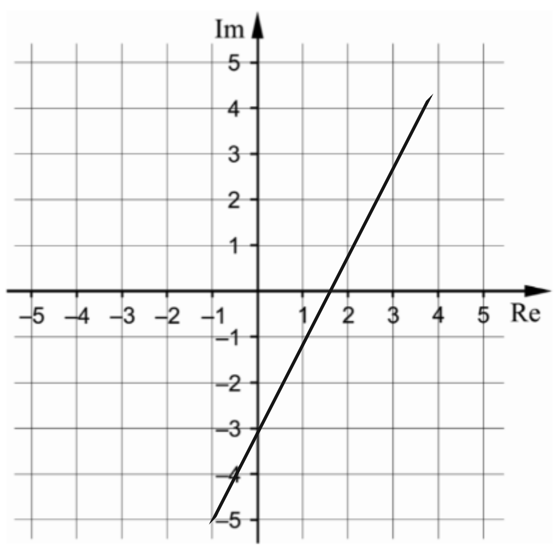
$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} \qquad iz = |z| \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}$$

9. Ange en funktion f som har derivatan $f'(x) = x^2 \cdot e^{x^3+5}$

$f = \frac{1}{3} \cdot e^{x^3+5}$ (0/0/1)

---

10. Markera i det komplexa talplanet de komplexa tal z för vilka det gäller att $|z-4| = |z-2i|$



(0/0/2)

$z = a + bi \Rightarrow$

$|(a-4)+bi| = |a+(b-2)i|$

$(a-4)^2 + b^2 = a^2 + (b-2)^2$

$-8a + 16 = -4b + 4$

$-2a + 4 = -b + 1$

$b = 2a - 3$

Alla tal längs linjen uppfyller villkoret.

---

6. Ange en kontinuerlig funktion f som är definierad för alla x och har värdemängden $-1 \le f(x) \le 7$

$f(x) = 4\sin x + 3$ (0/0/1)

17. För de komplexa talen z_1 och z_2 gäller att $z_2 = z_1 \cdot (1 - i)$ och att z_1 ligger i området $45° < \arg z_1 < 135°$ i det komplexa talplanet.

Bestäm i vilket område i det komplexa talplanet talet z_2 ligger. (0/1/1)

17.

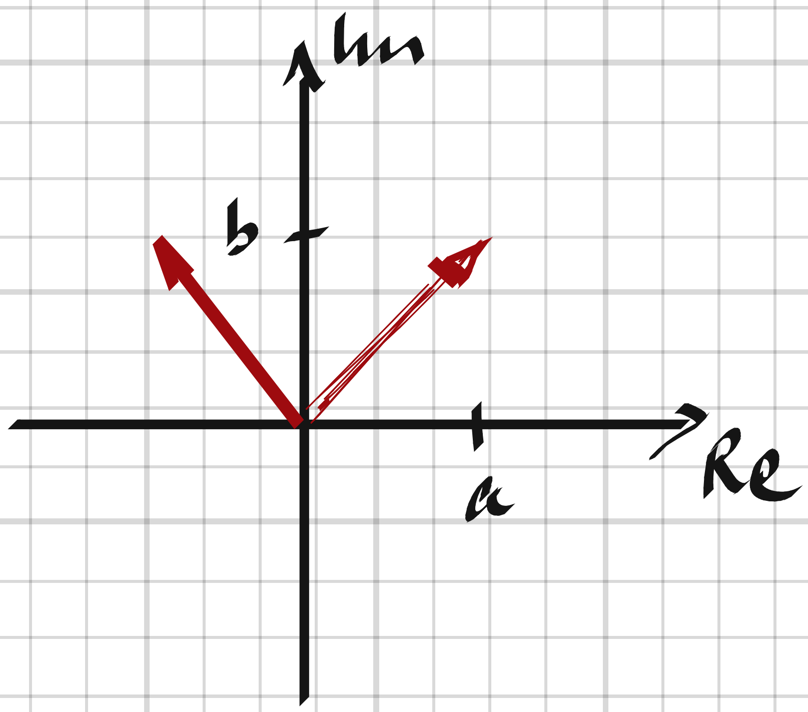
$z_1 = a + bi$

$z_2 = (a+bi)(1-i) = a - ai + bi + b = a + b + (b-a)i$

Gränser:

$\arg z_1 = 45° \Rightarrow a = b, a > 0, b > 0 \Rightarrow \arg z_2 = 0°$

$\arg z_1 = 135° \Rightarrow a = -b, a < 0, b > 0 \Rightarrow \arg z_2 = 90°$



$$\underline{0° < \arg z_2 < 90°}$$

11. För funktionen f gäller att $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$

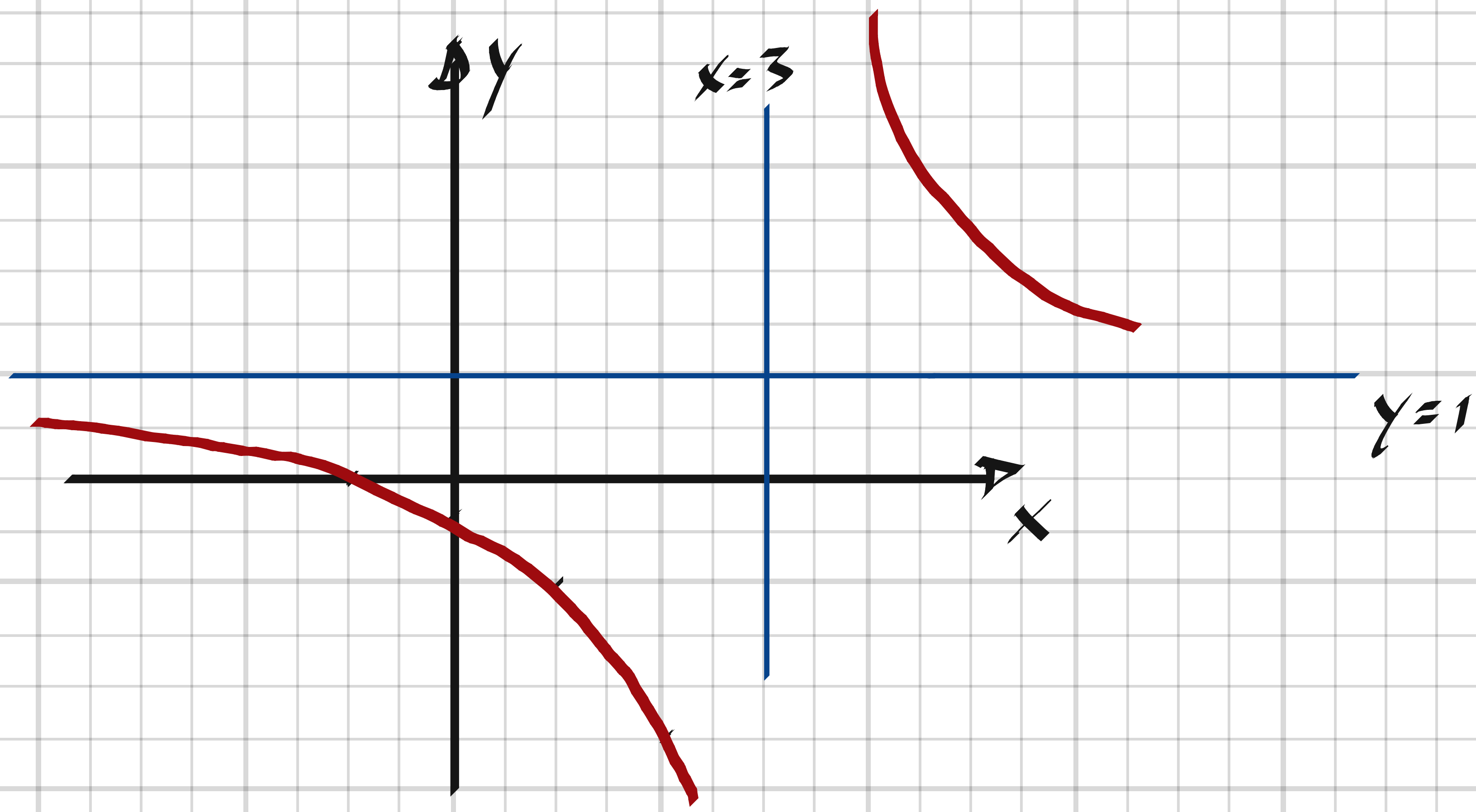
a) Ange asymptoterna till funktionen f *Endast svar krävs* (1/1/0)

b) Skissa grafen till funktionen f och dess asymptoter. (0/2/0)

c) Lös olikheten $|f(x)|>3$ där $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$ (0/0/2)

11. a) $x=3$ och $y=1$ asymptoter

b)



c)

$\dfrac{x+1}{x-3}>3 \Rightarrow x+1>3x-9$

$2x<10$, $x<5$

$\dfrac{x+1}{x-3}>-3 \Rightarrow x+1>9-3x$

$4x>8$; $x>2$

$2<x<5$, $x\neq 3$

12. Ekvationen $z^p = \mathrm{i}$ ska undersökas för olika värden på heltalet p.
För vissa värden på heltalet p är $z_1 = \cos 9° + \mathrm{i}\sin 9°$ en lösning till ekvationen $z^p = \mathrm{i}$

a) Visa att detta gäller för $p = 50$, det vill säga visa att z_1 är en lösning till $z^{50} = \mathrm{i}$ (0/2/0)

b) Bestäm alla heltalsvärden på p för vilka z_1 är en lösning till ekvationen $z^p = \mathrm{i}$ (0/0/2)

12. a)

$$z^{50} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{100} + k\cdot\frac{4\pi}{100}\right)}, \quad k = 0,1,2,\ldots,49$$

$$k=1 \Rightarrow \quad z = e^{i\frac{5\pi}{100}} = \cos 9° + i\sin 9°$$

b)

$$z^p = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = e^{i\left(\frac{\pi}{2p} + k\cdot\frac{4\pi}{2p}\right)}, \quad k = 0,1,2,\ldots,p-1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2p} + k\cdot\frac{4\pi}{2p} = \frac{5\pi}{100}$$

$$\frac{1}{p}(1+4k) = \frac{1}{10}$$

$$\underline{p = 10(1+4k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots,p-1$$

13. För polynomet p gäller att $p(z) = z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8$

a) Visa att $(z^2 + 4)$ är en faktor i polynomet p. (0/2/0)

b) Lös ekvationen $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = 0$ (0/1/2)

13. a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^3 - 2 \\
\hline
z^2+4 & z^5 \quad +4z^3 - 2z^2 - 8 \\
 & -\ (z^5 \quad +4z^3) \\
\hline
 & \qquad -2z^2 - 8 \\
 & \qquad -2z^2 - 8 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Rest $= 0 \Rightarrow (z^2+4)$ är en faktor i $p(z)$

b) $p(z) = (z^2+4)(z^3-2) = 0 \Rightarrow$

① $z^2 + 4 = 0 \Rightarrow \underline{z = \pm 2i}$

② $z^3 = 2$, $\underline{z = 2^{1/3} e^{i\frac{2\pi}{3}k}, \ k = 0, 1, 2}$

14. Beräkna $\displaystyle\int_0^{\pi/6}(2\sin x+5)\cos x\,dx$ (0/0/2)

14.

$$\int_0^{\pi/6}(2\sin x+5)\cdot\cos x\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/6}(\sin 2x + 5\cos x)dx = \left[5\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/6} =$$

$$= 5\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{2} = \frac{10-1+2}{4} = \underline{\underline{\frac{11}{4}}}$$

10. Bestäm $\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$ om $g(x)=4x^2+\sin 3x$ ___1___ (0/0/1)

10. $\frac{g(h)-g(0)}{h}=\frac{4h^2+\sin 3h-0}{h}=4h+\frac{\sin 3h}{h}$

$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=0+3=\underline{3}$

---

11. Vilka två av följande linjer A-F är asymptoter till $y=\frac{x^2-2x+1}{x}$?

A. $x=0$

B. $y=0$

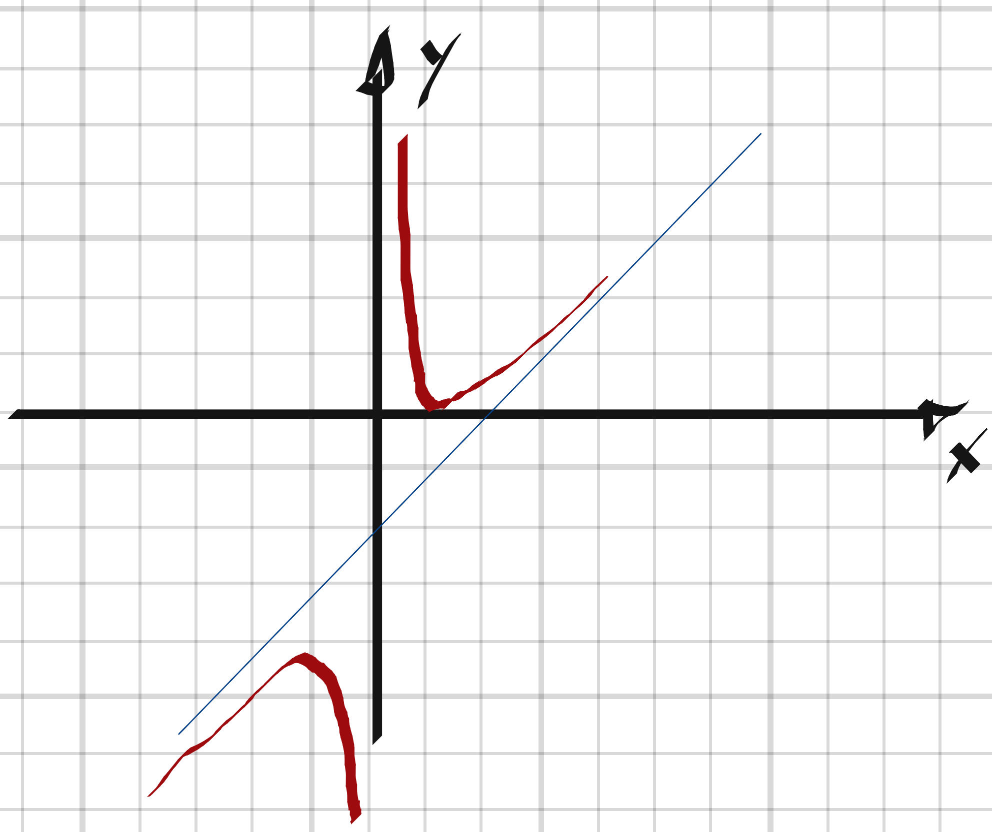
C. $x=1$

D. $y=-2x+1$

E. $y=x-2$

F. $y=2x-2$

___A, E___ (0/0/1)



$y=x-2+\frac{1}{x}$

$x\to\infty \Rightarrow y\to x-2$

18. Beräkna $\int_0^1 f''(x)\,dx$ då $f(x) = \sin(\pi x^2)$ (0/1/2)

18.

$$\int_0^1 f''(x)\,dx = f'(1) - f'(0)$$

$$f'(x) = 2\pi x \cdot \cos(\pi x^2) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f''(x)\,dx = -2\pi - 0 = \underline{-2\pi}$$

19. Visa att funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$ saknar maximi- och minimipunkter om $a \geq 3$ (0/1/3)

19. $f'(x) = 3x^2 + 6x + a$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 + 2x + \frac{a}{3}) = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{a}{3}} \Rightarrow$

Om $a > 3$ saknas nollställen

Om $a = 3 \Rightarrow x = -1$

x		-1	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	terass	$\nearrow$

$f'(x) > 0$ på bägge sidor om $x = 1$

$\Rightarrow$ funktionen har endast en teras̈spunkt då $a = 3$

15. Lasse och Niklas ska lösa följande uppgift:

> Undersök om funktionen $f(x)=\dfrac{1}{2x-5}$ antar något största värde då $x \geq 0$

Lasse löser uppgiften så här:

$$f(x)=\frac{1}{2x-5}$$

$$f'(x)=-\frac{2}{(2x-5)^2} < 0 \quad \text{för alla } x.$$

Då är f avtagande och har sitt största värde i den vänstra ändpunkten, d.v.s. för $x=0$.

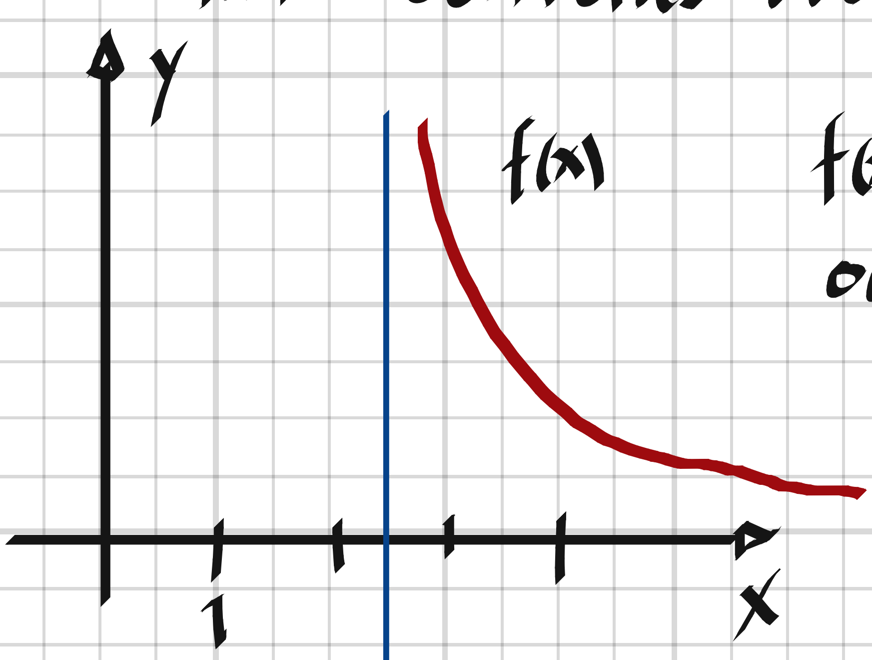
$$f(0)=-\frac{1}{5}$$

Svar: Det största värdet är $-\frac{1}{5}$

Niklas säger att Lasses svar är fel eftersom funktionen kan anta större värden än $-\dfrac{1}{5}$. Till exempel antar funktionen värdet 1 då $x=3$

Utred vilket fel Lasse gör i sin lösning och lös den givna uppgiften. (0/0/3)

15. f(x) är inte kontinuerlig (med en asymptot i x=2.5) och kan därför inte deriveras över alla x.



f(x) saknar maxvärde och går mot ±∞ då x → 2,5.

12. För de komplexa talen z_1 och z_2 gäller att $z_1 = 3i$ och $|z_2| = 7$
Bestäm det minsta värde som $|z_1 + z_2|$ kan anta.

4 (0/0/1)

$z_2(min) = -7$ eller $-7i$ $\quad |z_1 + z_2|_{min} = |3i - 7i| = 4$

---

13. Ange en primitiv funktion till $f(x) = \cos^2 3x - \sin^2 3x$

$F(x) = \frac{1}{6}\sin 6x$ (0/0/1)

13. $f(x) = \cos 6x$

---

18. Bestäm eventuella maximi- och minimipunkter för funktionen f där
$f(x) = -x \ln x, \quad x > 0$ (0/1/1)

18. $f'(x) = -\ln x - 1 = -(\ln x + 1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

x		$1/e$	
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$f(\frac{1}{e})$ max	↘

$f(x)$ har en maximipunkt
i $(\frac{1}{e}, f\frac{1}{e}) = (\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$

19. Bestäm alla heltal $n > 0$ för vilka $(1+i)^n$ är ett reellt tal. (0/1/1)

19.

$$(1+i)^n = ae^{i2\pi k}$$

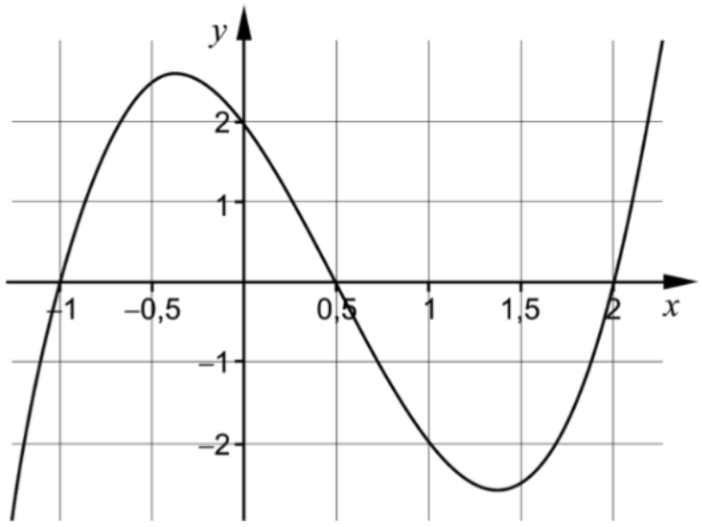
$$1+i = a^{1/n} \cdot e^{\frac{i2\pi k}{n}} \Rightarrow$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = a^{1/n} \cdot e^{\frac{i2\pi k}{n}} \cdot 1$$

$a^{1/n}$, 1 reella tal $\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi k}{n} \Rightarrow$

$n = 4k$, k heltal > 0

20. I figuren visas grafen till funktionen $y = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$



Lös ekvationen $2\cos^3 x - 3\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$ (0/0/2)

20.

$\cos x_1 = -1 \Rightarrow \underline{x_1 = \pi + k \cdot 2\pi}$

$\cos x_2 = 0.5 \Rightarrow \underline{x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi}$

$\cos x_3 = 2 \quad > 1$ falsk lösning

21. En funktion f har derivatan $f'(x) = 4x + 6\cos\frac{x}{2}$

a) Visa att funktionen f inte kan ha någon maximipunkt. (0/1/1)

b) Undersök om f har någon minimipunkt. (0/0/2)

21. a) $f''(x) = 4 - 3\sin\frac{x}{2}$

$f''(x) > 0$ för alla x $\Rightarrow$ maxpunkt saknas

b) $f(x) = 2x^2 + 12\sin\frac{x}{2} + C$

Termen $2x^2$ är en parabel med minpunkt i $x=0$.

Termen $12 \cdot \sin\frac{x}{2}$ varierar mellan $+12$ och -12 och följer parabeln.

Termen C är en godtycklig konstant.

Vi kan alltså sluta oss till att funktionen f har ett minimum men inte på vilken nivå.