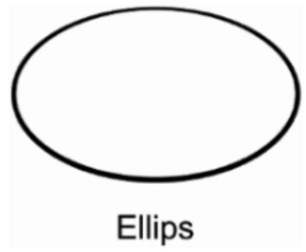
26. Ekvationen för en cirkel med medelpunkt i origo och med radien 1 är

$x^2 + y^2 = 1$

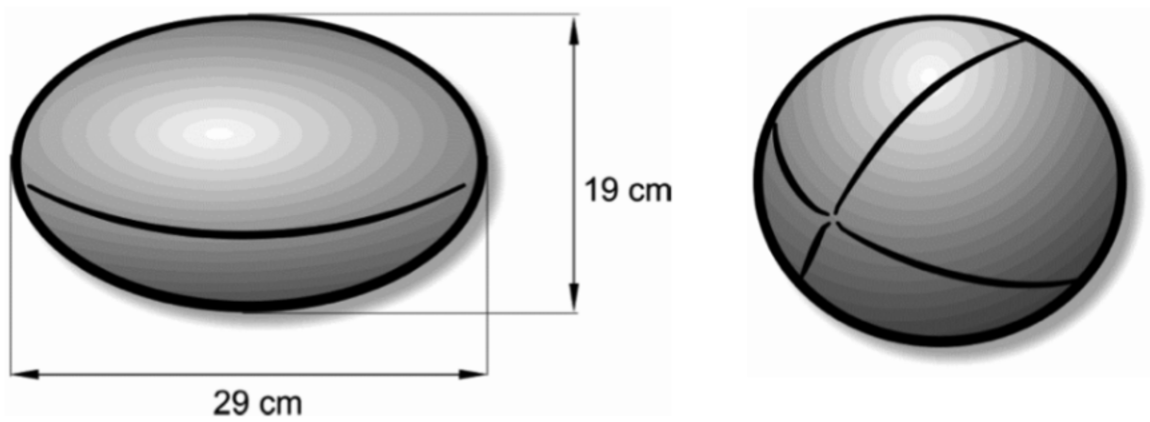
Ekvationen för en ellips med medelpunkt i origo och som skär axlarna i $(\pm a, 0)$ och $(0, \pm b)$ är på motsvarande sätt

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



När en sådan ellips roterar runt x-axeln får man en ellipsoid.
I rugby används en boll som har formen av en ellipsoid.

En typ av boll som är godkänd för rugbymatcher har de mått som anges i figuren nedan.



Bestäm volymen av denna boll. (0/0/3)

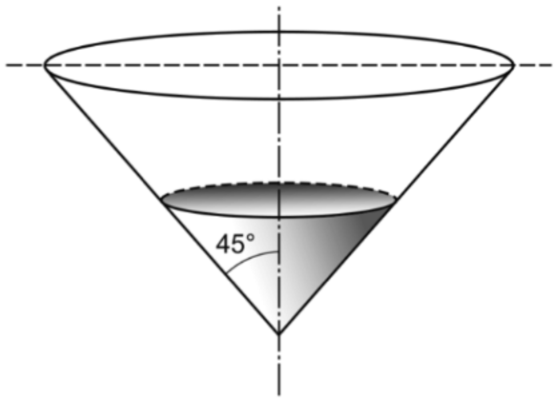
26. $dV = A \cdot dx = \pi y^2 \cdot dx = \pi b^2 \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) \cdot dx$

$$V = \int_{-a}^{a} dV = 2\pi b^2 \cdot \int_0^a \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) dx = 2\pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a =$$

$$= 2\pi b^2 \left(a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4\pi a b^2}{3}$$

$a = \frac{29}{2} = 14.5$, $b = \frac{19}{2} = 9.5$ $\Rightarrow$ $V = \frac{4\pi \cdot 14.5 \cdot 9.5^2}{3} = 5.5 \text{ dm}^3$

27. Lasse och Marcus ska lösa följande uppgift:

> En behållare har formen av en kon som figuren visar. Behållaren är tom från början. Vatten tillförs med hastigheten $(25 + 0{,}2t)$ liter/min, där t är tiden i minuter från påfyllningens start.
>
> Med vilken hastighet stiger behållarens vattennivå då den är 7,0 dm?
>
> 
>

Lasse räknar först ut att det tar 13,6 minuter för vattennivån att bli 7,0 dm.

Marcus ska använda Lasses resultat för att lösa resten av uppgiften. Marcus börjar med att beteckna vattennivån med h och bestämmer volymen i behållaren uttryckt i h. Sedan beräknar han den efterfrågade hastigheten.

a) Utgå från Lasses resultat och genomför Marcus del av lösningen. (0/1/1)

b) Visa att Lasse har räknat rätt, det vill säga att vattennivån efter 13,6 minuter är 7,0 dm. (0/1/2)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

27. a) $V = \frac{bh}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h^3}{3}$

$\frac{dV}{dh} = \pi h^2 \quad \frac{dV}{dh}(7) = \pi \cdot 7^2 = 49\pi \ \text{l/dm} \Rightarrow \frac{dh}{dV} = \frac{1}{49\pi} \ \text{dm/l}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dh}{dV} = (25 + 0.2 \cdot 13.6) \cdot \frac{1}{49\pi} = \underline{0.18 \ \text{l/min}}$

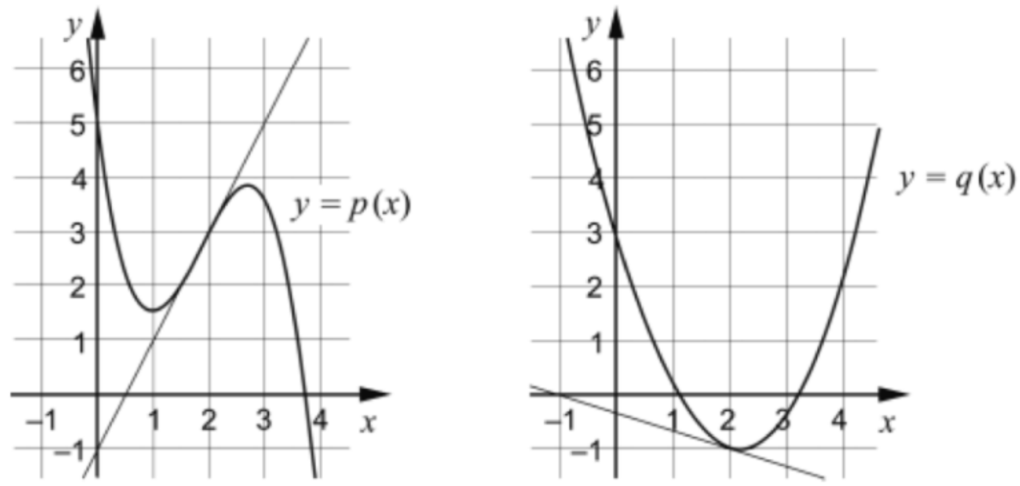
b) $v(t) = 25 + 0.2t$

$V = 25t + 0.1t^2$

$\frac{\pi \cdot h^3}{3} = V \Rightarrow h = \left(\frac{3}{\pi}(25t + 0.1t^2)\right)^{1/3}$

$h(13{,}6) = \frac{3}{\pi}(25 \cdot 13{,}6 + 0.1 \cdot 13{,}6^2)^{1/3} \underline{= 7 \ \text{dm}}$

22. Figurerna visar kurvorna $y = p(x)$ och $y = q(x)$ samt tangenterna till dessa för $x = 2$



Låt $r(x) = p(x) \cdot q(x)$ och bestäm $r'(2)$. (0/0/2)

22.

$$r'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$$

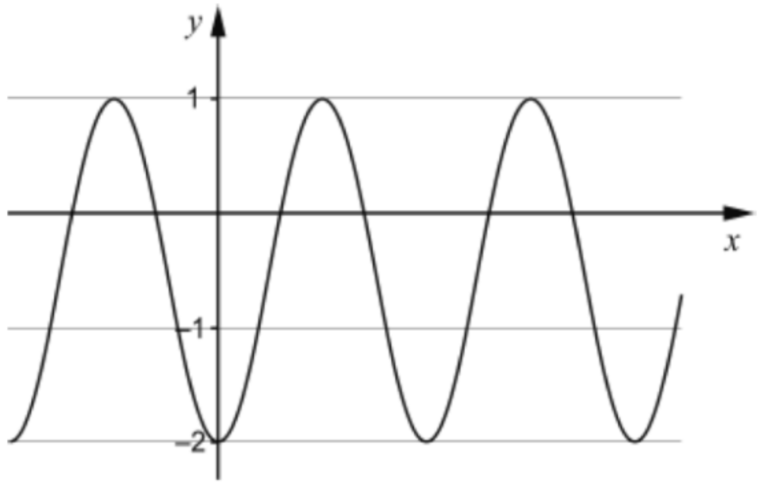
$$r'(x) = 2 \cdot q(x) - \frac{1}{3} p(x)$$

$$r'(2) = 2 \cdot q(2) - \frac{1}{3} p(2) = 2 \cdot (-1) - \frac{1}{3} \cdot 3 = \underline{-3}$$

23. I Lisas matematikbok finns följande uppgift:

Figuren visar kurvan $y = A\sin^2 x + B$

Bestäm konstanterna A och B.



Lisa löser uppgiften så här:

$$A = \frac{1-(-2)}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$B = \frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

Svar: $A = 1{,}5$ och $B = -0{,}5$

Lisas lösning är inte korrekt. Hjälp Lisa att lösa uppgiften korrekt. (0/0/2)

23.

$$y(0) = -2 \Rightarrow A \cdot \sin^2 0 + B = -2 \Rightarrow \underline{B = -2}$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow A \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2} + B = 1 \Rightarrow A - 2 = 1 \Rightarrow \underline{A = 3}$$

29. En trigonometrisk kurva har en maximipunkt i $\left(\frac{2\pi}{3}, 5\right)$ och en minimipunkt i $\left(\frac{5\pi}{3}, 1\right)$. Kurvan har inga extrempunkter mellan dessa två punkter.

Bestäm en ekvation för kurvan. (0/0/3)

29. Inga extrempunkter mellan topp och botten $\Rightarrow T = 2\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = 2\pi$

$$y = A \cdot \sin(Bx + C) + D$$

$$B = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$A = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$\begin{cases} y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} + C\right) + D = 5 \\ y\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{5\pi}{3} + C\right) + D = 1 \end{cases}$$

$$2\sin\left(\frac{2\pi}{3} + C\right) - 2\sin\left(\frac{5\pi}{3} + C\right) = 4 \Rightarrow$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} + C\right) = 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$$

$$D = 5 - 2\sin\frac{\pi}{2} = 3$$

$$\underline{y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 3}$$