18 En familj ska bygga ut sitt hus. De lånar 500 000 kr i januari 2009 och ska betala tillbaka lånet under de 25 följande åren med lika stora belopp, s.k. annuiteter. Den första januari 2010 gör familjen den första inbetalningen. Hur stor är varje annuitet om allt ska vara betalt vid den sista inbetalningen år 2034, och räntesatsen är 6,0 %?

18.

$$\underbrace{x \cdot 1{,}06^{24}}_{\text{Nuvärdet för x år 1}} + \underbrace{x \cdot 1{,}06^{23}}_{\text{Nuvärdet för x år 2}} + x \cdot 1{,}06^{22} + \ldots x \cdot 1{,}06^{0} = 500' \cdot 1{,}06^{25}$$

Geometrisk summa $\frac{a_1(1-k^n)}{1-k}$, $a_1 = x$, $k = 1{,}06$, $n = 25$

$$\frac{x(1-1{,}06^{25})}{1-1{,}06} = 500' \cdot 1{,}06^{25} \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{-0{,}06 \cdot 500' \cdot 1{,}06^{25}}{1-1{,}06^{25}} = \underline{39\,113 \text{ kr}}$$

19 Teckna med hjälp av summatecknet Σ den geometriska summa vars termer består av elementen i talföljden som beskrivs av

a) $a_1 = 8; a_n = 3{,}1 \cdot a_{n-1}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$

b) $a_n = 2 \cdot 1{,}65^{n-1}$ för $n = 1, \ldots, 15$

19. a) $\sum_{n=1}^{10} k \cdot a^{n-1} = \sum_{n=1}^{10} 8 \cdot 3{,}1^{n-1}$

b) $\sum_{n=1}^{15} k \cdot a^{n-1} = \sum_{n=1}^{15} 2 \cdot 1{,}65^{n-1}$

---

20 Calle och Kalle får arbete på en chokladfabrik. Det första året får båda en lön på 20 000 kr/mån. Calle får sedan löneförhöjning med 2,0 % varje år, medan Kalle får en höjning med 4,1 % vartannat år från och med år 3.

a) Hur mycket har var och en tjänat totalt efter 14 år?

b) Vem får den bästa löneutvecklingen?

20. a) Calle: $240' \cdot 1{,}02^0 + 240' \cdot 1{,}02^1 + 240' \cdot 1{,}02^2 + \ldots 240' \cdot 1{,}02^{13}$

$$\frac{240'(1-1{,}02^{14})}{1-1{,}02} = 3834' \text{ kr}$$

Kalle: $481' \cdot 1{,}041^0 + 480' \cdot 1{,}041^1 + 480' \cdot 1{,}041^2 + \ldots + 480' \cdot 1{,}041^7$

$$\frac{480'(1-1{,}041^7)}{1-1{,}041} = 3803' \text{ kr}$$

b) Calle

---

21 Pelle lånar 35 000 kr av sin morbror till en vespa. Han ska betala igen lånet med lika stora annuiteter varje år. Han börjar betala tillbaka på lånet efter ett år och då tar det honom 7 avbetalningar innan lånet är återbetalt. Hur stor var annuiteten om räntan som hans morbror tog var 5 %?

21.

$$\frac{x(1-1{,}05^7)}{1-1{,}05} = 35000 \cdot 1{,}05^7$$

$$x = \frac{-0{,}05 \cdot 35000 \cdot 1{,}05^7}{1-1{,}05^7} = \underline{6049 \text{ kr}}$$

---

22 För en geometrisk talföljd gäller att $a_2 = 0{,}5$ och $a_5 = 4$. Bestäm s_{10}.

22.

$$\begin{cases} x \cdot k^1 = 0{,}5 \\ x \cdot k^4 = 4 \end{cases}$$

$$\frac{k^4}{k} = \frac{4}{0{,}5} \Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = 2, \; x = 0{,}25$$

$$s_{10} = \frac{0{,}25(1-2^{10})}{1-2} = \underline{255{,}75}$$

---

23 Ibland använder man formeln $s_n = \dfrac{a_1(1-k^n)}{1-k}$ för att beräkna en geometrisk summa. Visa att formeln ger samma resultat som $s_n = \dfrac{a_1(k^n-1)}{k-1}$.

23.

$$1-k^n = -(k^n-1)$$
$$1-k = -(k-1)$$

$$\Rightarrow \frac{1-k^n}{1-k} = \frac{k^n-1}{k-1}$$

---

24 Ange en rekursiv formel för talföljderna som beskrivs av de slutna formlerna

a) $a_n = 2^{n-1}$ för $n \geq 1$

b) $a_n = 6n - 7$ för $n \geq 1$

24.

a) $a_1 = 1$

$a_{n+1} = 2n$

b) $a_1 = -1$

$a_{n+1} = a_n + 6$

---

25 En talföljd definieras av $a_n = n^2 + n$.

a) Vilket element har värdet 1 406?

b) Förklara varför alla element i talföljden är jämna.

25.

a) $n^2 + n = 1406$

$$n = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 + 1406 \cdot 4}}{2} = \frac{-1 \pm 75}{2} = 37$$

b) $n^2 + n = n(n+1)$

Om n jämnt $\Rightarrow$ $n+1$ udda

Om n ojämnt $\Rightarrow$ $n+1$ jämnt

Ett udda tal multiplicerat med ett jämnt blir alltid ett jämnt tal.

26 Under 10 års tid sätter Janica i början av januari in 2 000 kr på ett bankkonto med räntesatsen 2,9 %. Hon gör inga uttag. Hur mycket pengar finns på kontot i januari 13 år efter den första insättningen?

26.

$$\frac{2000\cdot(1-1{,}029^{10})}{1-1{,}029}\cdot 1{,}029^3 = \underline{24\,866 \text{ kr}}$$

---

27 Skriv följande summor med hjälp av summaformeln

a) $a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{90}$

b) $b^4 + b^6 + b^8 + \ldots + b^{100}$

27. a) $$a(a^0+a^1+a^2+\ldots+a^{89}) = \underline{\frac{a(1-a^{90})}{a-1}}$$

b) $$b^4(b^0+b^2+b^4+\ldots+b^{96}) = b^4((b^2)^0+(b^2)^1+(b^2)^2+\ldots(b^2)^{48}) =$$

$$= b^4\frac{(1-(b^2)^{49})}{1-b^2} = \underline{b^4\frac{(1-b^{98})}{1-b^2}}$$

---

28 Maria och Josef äger ett stuteri och vill göra förbättringar i stallet. De lånar 450 000 kr till räntesatsen 5,20 %. Lånet ska betalas tillbaka med lika stora annuiteter under 25 år med första återbetalningen efter ett år. Hur stor ska varje annuitet vara?

28.

$$\frac{x(1-1{,}052^{25})}{1-1{,}052} = 450000\cdot 1{,}052^{25} \Rightarrow$$

$$\underline{x = 32600 \text{ kr}}$$

---

29 År 2006 lånade Roffe 5 000 kr av Ulla. Pengarna ska betalas tillbaka 2011 och med ränta på ränta är summan då 8 000 kr. Men 2010 vinner Roffe på tipset och vill därför lösa sitt lån till Ulla i förtid. Hur stor är summan då, om räntesatsen är konstant under hela perioden?

29.

$$5000 \cdot a^5 = 8000$$

$$\ln a^5 = \ln \frac{8}{5} \Rightarrow 5 \cdot \ln a = \ln \frac{8}{5} \Rightarrow a = e^{\frac{\ln \frac{8}{5}}{5}} = 1.099$$

Inbetald summa $= 5000 \cdot 1.099^4 = \underline{7300 \text{ kr}}$

---

30 Lös ekvationen $x + x \cdot 1{,}24 + x \cdot 1{,}24^2 + \ldots +$ $+ x \cdot 1{,}24^{12} = 4\,500$, där termerna i vänstra ledet är elementen i en geometrisk talföljd.

30.

$$\frac{x(1 - 1.24^{13})}{1 - 1.24} = 4500$$

$$x = \frac{-0.24 \cdot 4500}{1 - 1.24^{13}} = \underline{70.2}$$

---

31 Motivera varför
$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x - 1) = x^7 - 1$
utan att utföra multiplikationen.

31. $VL = \frac{1\cdot(1-x^7)}{1-x}\cdot(x-1) = -(1-x^7) = x^7-1 = HL.$

---

32 Michaela är tolk och driver ett eget företag. Företaget tar ett lån på 2 500 000 kr för att köpa och inreda helt nya lokaler. Lånet är ett annuitetslån och räntan på lånet är 4,8 % per år. Företaget har råd att betala 350 000 kr per år till varje annuitet. Hur många år tar det innan lånet är betalt om företaget börjar återbetala efter ett år?

32. $$\frac{350'(1-1{,}048^x)}{1-1{,}048} = 2500'\cdot 1{,}048^x$$

$$350' - 350'\cdot 1{,}048^x = 0{,}048\cdot 2500'\cdot 1{,}048^x$$

$$(350'-120')\cdot 1{,}048^x = 350'$$

$$1{,}048^x = \frac{350}{230}$$

$$x = \frac{\ln\frac{350}{230}}{\ln 1{,}048} = 8{,}95 \approx 9 \text{ år}$$

---

33 Bevisa att en geometrisk summa $s_n = a_1 + a_1k + a_1k^2 + \ldots + a_1k^{n-1}$ kan beräknas med formeln $s_n = \dfrac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}$.

33.

$$s_n = a_1 + a_1k + a_1k^2 + \ldots + a_1k^{n-1}$$

$$ks_n = \underbrace{a_1k + a_1k^2 + \ldots + a_1k^{n-1}}_{s_n - a_1} + a_1k^n \quad \Rightarrow$$

$$ks_n = s_n - a_1 + a_1k^n$$

$$s_n - ks_n = a_1 - a_1k^n$$

$$s_n(1-k) = a_1(1-k^n)$$

$$\boxed{s_n = \frac{a_1(1-k^n)}{1-k} = \frac{a_1(k^n-1)}{k-1}}$$