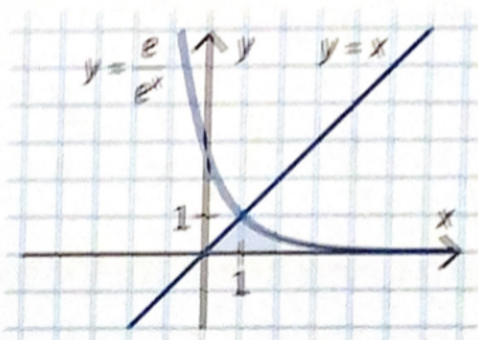
17 Ge exempel på två olika funktioner vars primitiva
ö funktioner i $x = 2$ antar värdet 1.

$$f(x) = 2x - 1{,}5 \quad ; \quad g(x) = 3x^2 - 3{,}5$$

---

18 Beräkna arean av det skuggade området med hjälp av primitiva funktioner.



18.

$$A = \int_0^1 x\,dx + e\int_1^2 e^{-x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - e\left[e^{-x}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{e} \quad \text{a.e}$$

---

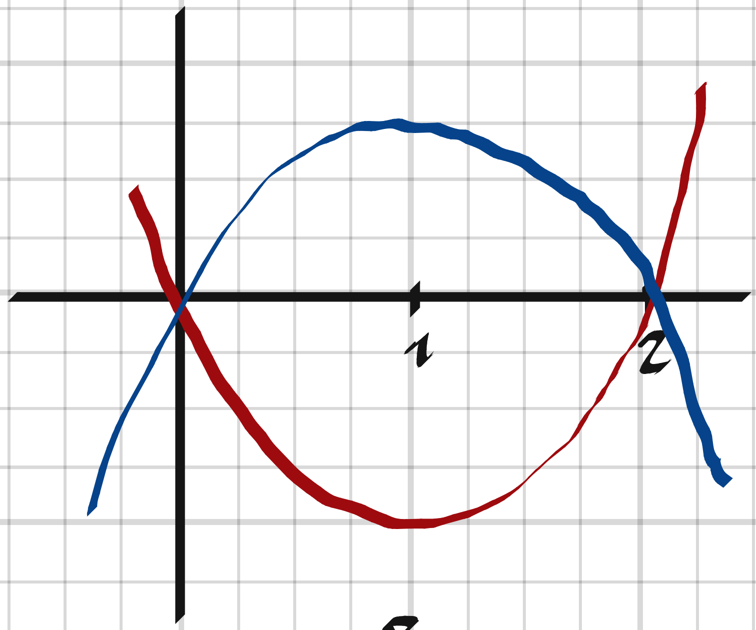
19 Bestäm arean av det område som begränsas av kurvorna $y = x^2 - 2x$ och $y = 2x - x^2$.

19. Skärningspunkter:

$$x^2 - 2x = 2x - x^2 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 4x = 2x(x-2)$$

$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = 2$$



$\frac{8}{3}$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (2x - x^2)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} (x^2 - 2x)\,dx = \int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx =$$

$$= \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} \text{ a.e}$$

---

20 Bestäm en primitiv funktion $F(x)$ till $f(x) = \frac{3}{x^2} + x$ där grafen till $F(x)$ går igenom punkten $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

20. $F(x) = -\frac{3}{x} + \frac{x^2}{2} + C$

$$F\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{\frac{1}{2}} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + C = 0 \ ; \ -6 + \frac{1}{8} + C = 0$$

$$\Rightarrow C = 6 - \frac{1}{8} = \frac{47}{8} \Rightarrow F(x) = -\frac{3}{x} + \frac{x^2}{2} + \frac{47}{8}$$

---

21 Bestäm $g(x)$ om $g''(x) = 3 - x^2$, $g(0) = 2$ och $g'(1) = 5$.

21. $g'(x) = 3x - \frac{x^3}{3} + C_1$

$g'(1) = 5 \Rightarrow 3 - \frac{1}{3} + C_1 = 5 \Rightarrow C_1 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$g(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{7x}{3} + C_2$

$g(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2 \Rightarrow$

$g(x) = \underline{\frac{3x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{7x}{3} + 2 = \frac{-x^4 + 18x^2 + 28x + 24}{12}}$

---

22 Beräkna integralen $\int_0^1 (1 - x)^3\,dx$

22. $\int_0^1 (1-x)^3\,dx = -\frac{1}{4}\left[(1-x)^4\right]_0^1 = -\frac{1}{4}(0-1) = \underline{\frac{1}{4}}$

---

23 Beskriv vad är det som man räknar ut med följande integraler.

a) $I = \int_3^7 v(t)\,dt$, där v m/s^2 är en drakflygares hastighet t sekunder efter starten.

b) $I = \int_0^{25} A(t)\,dt$, där A invånare per år är hastigheten som befolkningen minskar med vid tiden t år.

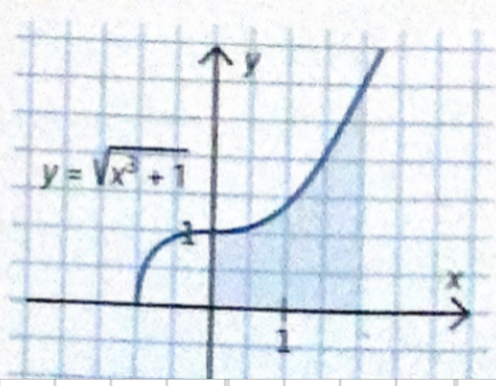
23.

a) Tillryggalagd sträcka mellan tiden 3 och 7 sekunder.

b) Minskningen i antalet invånare över 25 år

---

24 Uppskatta arean av det skuggade området genom att dela in intervallet längs x-axeln i minst fyra delintervall. Jämför resultatet av din uppskattning med räknarens resultat.



24.

$A = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 1/2 = 3{,}25$ a.e

Geogebra: Integral$((x^3+1)^{1/2}, 0, 2) = 3{,}2413$ a.e

---

25 Lös ekvationen

$$\int_0^x e^t\,dt = 7$$

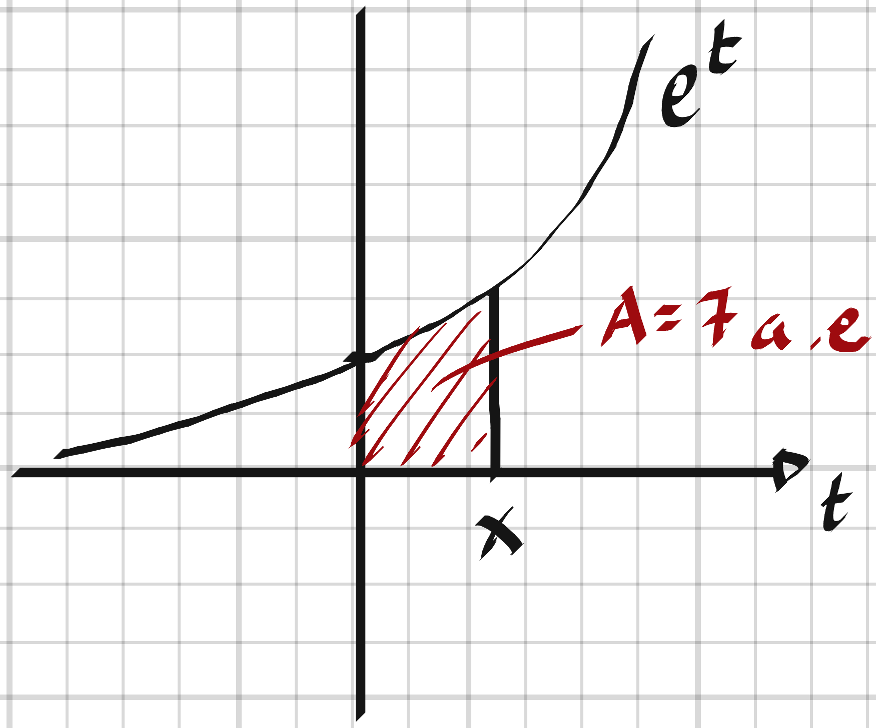
25.

$$\int_0^x e^t\,dt = 7$$

$$\left[e^t\right]_0^x = 7$$

$$e^x - 1 = 7$$

$$\underline{x = \ln 8}$$



---

26 Accelerationen av en motorbåt kan under en tidsperiod beskrivas med $a(t) = 1{,}8t - 5$, där t är tiden i sekunder räknat från accelerationens början. I början av tidsperioden är båtens hastighet $v(0) = 11$ m/s och båtens position är $s(0) = 280$ m. Bestäm funktionsuttrycket $s(t)$ som beskriver båtens läge under accelerationen.

25.

$$v(t) = 0.9t^2 - 5t + C_1$$

$$v(0) = 11 \Rightarrow C_1 = 11$$

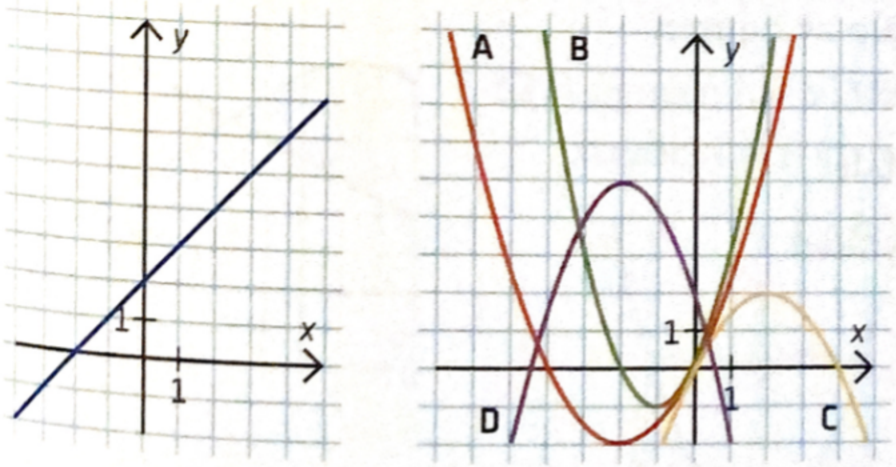
$$s(t) = 0.3t^3 - 2.5t^2 + 11t + C_2$$

$$s(0) = 280 \Rightarrow C_2 = 280$$

$$\underline{s(t) = 0.3t^2 - 2.5t^2 + 11t + 280}$$

---

27 Grafen till vänster hör till funktionen *f*. Vilken av graferna A, B, C eller D hör till funktionens primitiva funktion? Motivera ditt svar.



27. $f=0$ vid $x=-2 \Rightarrow$ minpunkt i $x=2 \Rightarrow$ A

---

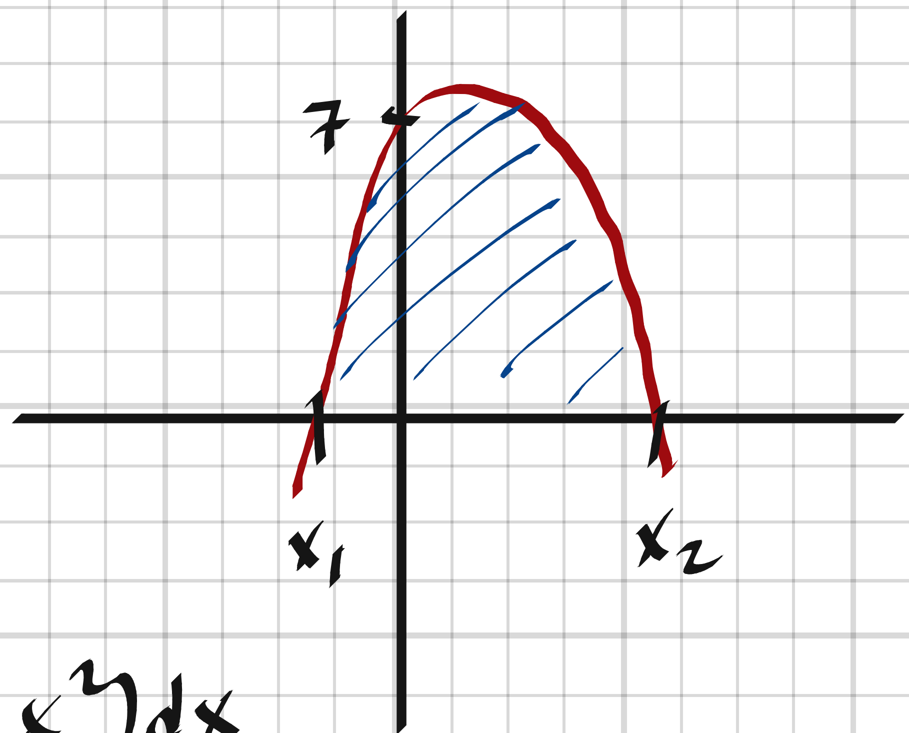
28 $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x) = 15 - 3x$. Har $F(x)$ någon lokal extrempunkt i intervallet $0 < x < 6$? Motivera ditt svar.

28. $F(x)$ har extrempunkt där dess derivata är noll, dvs där $f(x)=0$

$f(x)=0 \Rightarrow x=5$. Svar: Ja.

Motivera ditt svar.

29 För vilka värden på a och b ($a < b$) är värdet av integralen $\int_a^b (7 + 6x - x^2)\,dx$ som störst?



29.

$$g(x) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (7+6x-x^2)\,dx$$

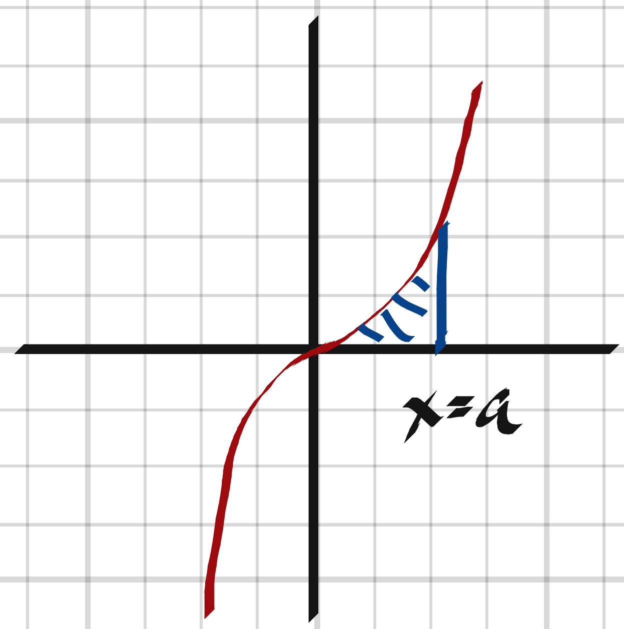
$$g'(x) = f(x) = 7+6x-x^2$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \quad x = 3 \pm \sqrt{9+7} = 3 \pm 4$$

$$x_1 = -1 \quad , \quad x_2 = 7$$

Integralen blir som störst då $a = x_1 = -1$ och $b = x_2 = 7$

30 Kurvan $y = x^3 + x$ begränsar tillsammans med x-axeln och linjen $x = a$ ett område i första kvadranten. Bestäm a om arean av området är $\frac{21}{16}$ a.e.



30. $A = \int_0^a y\,dx = \int_0^a (x^3+x)\,dx = \frac{21}{16}$

$$\frac{a^4+2a^2}{4} = \frac{21}{16}$$

$$a^4+2a^2-\frac{21}{4} = 0$$

$$t = a^2 \Rightarrow t^2+2t-\frac{21}{4} = 0$$

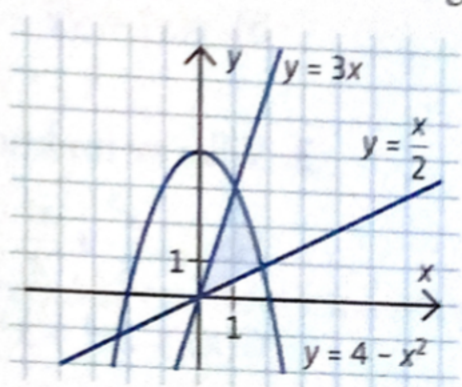
$$t = -1 \pm \sqrt{\frac{4+21}{4}} = -1 \pm \frac{5}{2} = \frac{-2\pm 5}{2}$$

$$t_1 = -\frac{7}{2}, \quad t_2 = \frac{3}{2}$$

$a^2 = -\frac{7}{2}$ går ej!

$$a^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \underline{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

31 Beräkna arean av det skuggade området i figuren.



31. $3x = 4 - x^2$; $x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x-1)(x+4) = 0$

$x_1 = 1$, $(x_2 = -4)$

$\frac{x}{2} = 4 - x^2$; $x^2 + \frac{x}{2} - 4 = 0$

$x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1+64}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{65}}{4}$

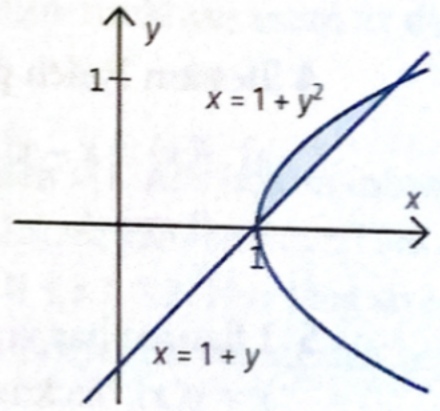
$\left(x_1 = \frac{-1-\sqrt{65}}{4}\right)$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{65}}{4} \approx 1{,}77$

$$A = \int_0^1 \left(3x - \frac{x}{2}\right)dx + \int_1^{1{,}77} \left(4 - x^2 - \frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_0^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4}\right]_1^{1{,}77} = 1{,}25 + 4{,}45 - 3{,}42 =$$

$$= 2{,}28 \text{ a.e}$$

32 Beräkna arean av det skuggade området i figuren.



32.

$$1+y^2=1+y \; ; \; y^2-y=0$$

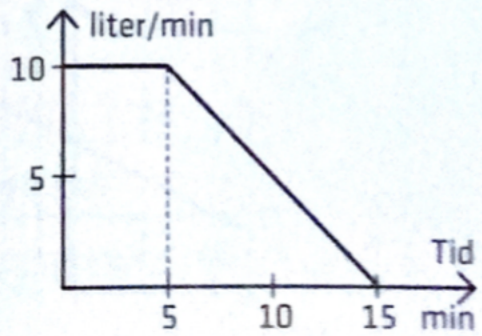
$$y(y-1)=0$$

$$y_1=0 \, , \, y_2=1 \implies x_1=1 \, , \, x_2=2$$

$$A=\int_1^2 \left((x-1)^{1/2}-(x-1)\right)dx=\left[\frac{2(x-1)^{3/2}}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2=$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{6}{3}+\frac{6}{3}-0+\frac{1}{2}-\frac{2}{2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{6}\text{ a.e}}$$

33 I en stor vattenbehållare rinner vattnet in genom ett rör. Vid tiden t min innehåller behållaren $f(t)$ liter vatten. Vid $t = 0$ är behållaren tom. Figuren visar för $0 \le t \le 15$ den hastighet med vilken vattnet rinner in i behållaren. Hastigheten är konstant 10 liter/min i intervallet $0 \le t \le 5$ och minskar sedan linjärt till 0 då $t = 15$. Bestäm funktionen f.



(*Cp NT3*, 1994)

$$f'(t) = \begin{cases} 10 & , \quad 0 \le t \le 5 \\ -t + m & , \quad t > 5 \end{cases}$$

$$f'(0) = 15 \Rightarrow m = 15$$

$$f(t) = \begin{cases} 10t + c_1 & , \quad 0 \le t \le 5 \\ -\frac{t^2}{2} + 15t + c_2 & , \quad t > 5 \end{cases}$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$f(5) = 10t = 50 \Rightarrow -\frac{5^2}{2} + 15 \cdot 5 + c_2 = 50 \Rightarrow c_2 = -12{,}5$$

$$f(t) = \begin{cases} 10t & , \quad 0 \le t \le 5 \\ -\frac{t^2}{2} + 15t - 12{,}5 \end{cases}$$