15 För vilka värden på x är tangenten till kurvan parallell med x-axeln?

a) $y = 5x^2 + 40x - 1$

b) $y = \frac{x^2}{6} - \frac{9}{x} + \frac{1}{2}$

15. Parallell med x-axeln $\Rightarrow y' = k = 0$

a) $y' = 10x + 40$

$y' = 0 \Rightarrow 10x + 40 = 0 \Rightarrow \underline{x = -4}$

b) $y' = \frac{1}{3}x + \frac{9}{x^2}$

$y' = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{9}{x^2} = 0 \; ; \; \frac{x^3}{3} + 9 = 0 \; ; \; x^3 = -27$

$x = (-27)^{1/3} \underline{= -3}$

---

16 Visa med hjälp av derivatans definition att om $f(x) = 15x$, så är $f'(x) = 15$.

16. $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x) = 15x \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{15(x+h) - 15x}{h} =$

$\lim_{h \to 0} \left(\frac{15h}{h}\right) = 15$

---

17 En funktion anges med funktionsuttrycket

$f(x) = x^3 + 4x^2 - x + 9$

Grafen till funktionen har en tangent för $x = -1$.
Bestäm tangentens ekvation.

17. $f'(x) = 3x^2 + 8x - 1$

$k = f'(-1) = 3 - 8 - 1 = -6$

$f(-1) = (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 - (-1) + 9 = -1 + 4 + 1 + 9 = 13$

Tangentens ekv: $g(x) = kx + m$

$g - g(-1) = k(x - (-1))$, $g(-1) = f(-1) \Rightarrow$

$g(x) = k(x+1) + 13 = -6(x+1) + 13$

$\underline{g(x) = -6x + 7}$

18 Låt $y = x^2$ för $x > 0$.

a) Bestäm $\frac{dy}{dx}$

b) Lös ut x ur $y = x^2$

c) Bestäm $\frac{dx}{dy}$

18. a) $\frac{dy}{dx} = 2x$

b) $x = \pm\sqrt{y} = \sqrt{y}$

c) $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

---

19 Bestäm y' med hjälp av deriveringsreglerna

a) $y = (x-3)^2$

b) $y = \sqrt{2x} - \sqrt{2}$

c) $y = 5e^{8x} + \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

19. a) $y' = 2(x-3) = 2x - 6$

b) $y' = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

c) $y' = 40e^{8x} + 1$

---

20 Gottfried säger till Wilhelm att om man bara deriverar en funktion tillräckligt många gånger efter varandra, så får man till slut alltid resultatet 0. Wilhelm säger att Gottfried har fel.

a) Har Wilhelm rätt och i så fall varför?

b) Hur kan Gottfried ha tänkt?

20 a) Han har rätt så länge det är ett polynom med heltalsexponenter.

b) ex.v $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$

$y' = x^2 + x + 1$; $y'' = 2x + 1$

$y''' = 2$; $y^{(4)} = 0$

---

21 Bestäm riktningskoefficienten k för tangenten till kurvan $y = 7e^{3x} + e$ där $y = 7 + e$.

21. $y' = 21e^{3x}$

$7 + e = 7e^{3x} + e \Rightarrow e^{3x} = 1 \Rightarrow$

$3x = \ln 1 = 0 \Rightarrow x = 0$

$k = y'(0) = 21e^{3 \cdot 0} = \underline{21}$

---

22 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x} + \frac{2}{3}$ i punkten $(1, 4)$.

$$y'(x) = \frac{1}{3} - \frac{3}{x^2}$$

22. Tangentens ekvation: $g(x) = kx + m$

$$g(x) - g(1) = k(x-1)$$

$$g(1) = y(1) = 4 \; ; \; k = y'(1) = \frac{1}{3} - \frac{3}{1} = \frac{1-9}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$\underline{g(x) = -\frac{8}{3}(x-1) + 4 = -\frac{8}{3}x + \frac{20}{3}}$$

---

23 Kurvan $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ har en tangent i punkten där $x = 1$. Bestäm tangentens ekvation.

23. $y = x^{1/2} - x^{-1/2}$

$$y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$y(1) = 0$$

Tangentens ekv: $g(x) = kx + m$

$$k = y'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$g - g(1) = k(x-1) \; , \; g(1) = y(1) \Rightarrow$$

$$\underline{g = x - 1}$$

---

24 Ge ett exempel på en ekvation på formen
ö $y = kx + m$ för en rät linje som är parallell med tangenten till $f(x) = \frac{x}{5} + e^{-x/5}$ i $x = 0$.

24. $f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}$

$k = f'(0) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{0} = \underline{0}$

ex. $y = 3$ (parallell med x-axeln)

---

25 Varför kan man inte beräkna derivatan av funktionen i $x = 0$?

a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{5}$ b) $g(x) = x^{-2} - 2x^{1,999}$

25. a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\Rightarrow$ <u>Noll i nämnaren</u>

b) $g(x) = \frac{1}{x^2} - 2x^{1,999}$ $\Rightarrow$ <u>Noll i nämnaren</u>

---

26 Nina och Johanna ska springa ett maratonlopp och sitter och gör upp planer för hur de ska löpa. Nina räknar med att springa snabbast i början och sedan successivt minska farten enligt modellen $f(t) = 14t - 0{,}70t^2$, där $f(t)$ är sträckan i kilometer som hon sprungit efter t timmar och $0 < t < 4$. Johanna räknar med att hålla samma hastighet, 11 km/h, hela loppet och sätter upp en modell där $s(t)$ är sträckan som hon sprungit efter t timmar.

a) Beräkna och tolka $f'(3)$

b) Beskriv Johannas modell $s(t)$

b) Beräkna och tolka ekvationen $f'(t) = s'(t)$

26. a) $f'(t) = 14 - 1{,}40t$

$f'(3) = 14 - 1{,}40 \cdot 3 = \underline{9{,}8 \text{ km/h}}$

$f'(3)$ = hastigheten vid tiden $t = 3$ h

b) $\underline{s(t) = 11t}$

c) $14 - 1{,}40t = 11 \Rightarrow t = \dfrac{3}{1{,}40} \approx 2{,}14$

Vid tiden $t = 2{,}14$ h springer de lika fort.

27 Värdet av en målning antas öka exponentiellt med tiden. Den köptes 1988 på en auktion för 110 000 kr och 2008 var den värd 240 000 kr.

a) Bestäm en exponentialfunktion med basen *e* som beskriver målningens värdeökning.

b) Hur många år efter köpet kommer värdet att öka med 15 000 kr per år?

27.

a) $y = 110000 \cdot e^{kx}$

$y(20) = 240000 \Rightarrow$

$110000e^{20k} = 240000$

$e^{20k} = \frac{24}{11} \Rightarrow \ln e^{20k} = \ln\left(\frac{24}{11}\right) = 20k \Rightarrow$

$k = \frac{\ln\left(\frac{24}{11}\right)}{20} = 0.039$

$y = 110000e^{0.039x}$

b) $y' = 4290e^{0.039x}$

$y'(x) = 15000 \Rightarrow 4290e^{0.039x} = 15000 \Rightarrow$

$e^{0.039x} = 3.497 \Rightarrow x = \frac{\ln 3.497}{0.039} = 32$ år

28 För funktionerna f och g gäller att $f(x) = 5x^2 + 3x$ och $g(x) = x^2 + 8x$

a) Bestäm det värde på x där grafen till f har lutningen 18.

b) Grafen till g har en tangent i den punkt där $x = 6$. Bestäm koordinaterna för tangentens skärningspunkt med x-axeln.

(Np Ma3b ht 2012)

28. $f'(x) = 10x + 3$

a) $k = 18 \Rightarrow 10x + 3 = 18 \Rightarrow \underline{x = 1.5}$

b) $g(6) = 6^2 + 8 \cdot 6 = 36 + 48 = 84$

$g'(x) = 2x + 8$

Tangentens ekv: $h(x) = kx + m$

$k = g'(6) = 2 \cdot 6 + 8 = 20$

$h(6) = g(6) = 84$

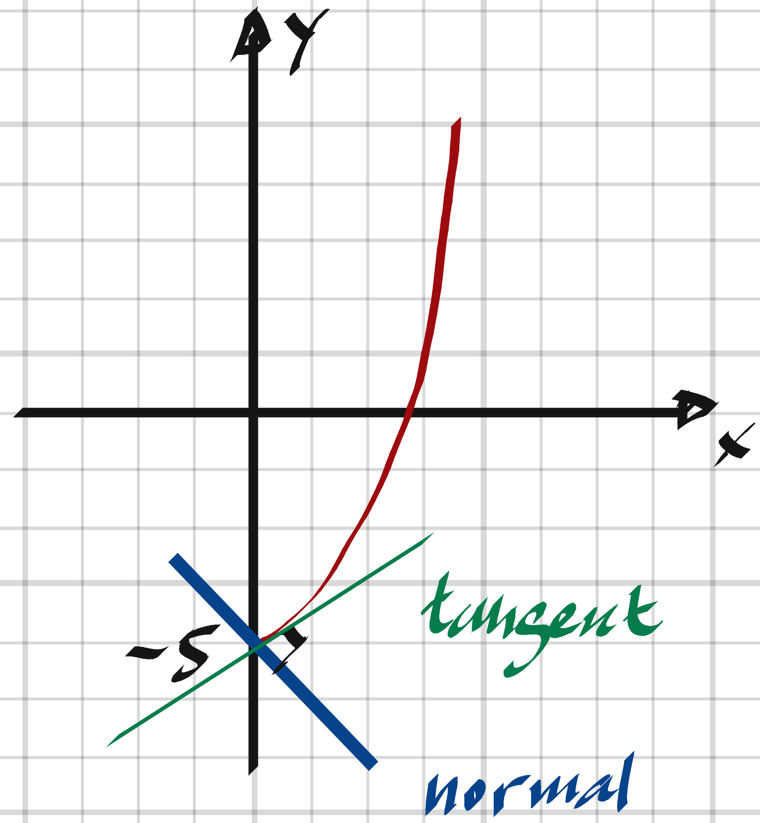
$g(x) - g(6) = k(x - 6)$

$g(x) = 20(x - 6) + 84 = 20x - 36$

$g(x) = 0 \Rightarrow 20x - 36 = 0 \Rightarrow x = 1.8$

Tangentens skärning med x-axeln: $(1.8, 0)$

29 Bestäm ekvationen för normalen till kurvan $y = 6^x - 6$ i $x = 0$.



29.

$y(0) = 6^0 - 6 = -5$

$6 = e^{\ln 6} \Rightarrow$

$y = e^{x \ln 6} - 6$

$y' = \ln 6 \cdot e^{x \ln 6}$

Tangentens ekvation: $g(x) = kx - 5$

$k_1 = y'(0) = \ln 6 \Rightarrow g(x) = x \cdot \ln 6 - 5$

Normalens ekvation: $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{\ln 6} \Rightarrow$

$h(x) = -\frac{x}{\ln 6} - 5$

---

30 I vilken punkt på kurvan $y = 11x - e^x$ är $y' = 10$?

30.

$y' = 11 - e^x$

$y' = 10 \Rightarrow 11 - e^x = 10 \; ; \; e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$y(0) = 11 \cdot 0 - e^0 = -1$

Punkten $= (0, -1)$

31 Hur kaffet svalnar i en mugg kan beskrivas med funktionen $T(t) = 20 + 75 \cdot e^{-0,0354t}$, där $T(t)$ är temperaturen i grader och t är tiden i minuter efter det att man hällt upp kaffet. Bestäm avsvalningshastigheten då kaffets temperatur är 50 °C.

31. $50 = 20 + 75 \cdot e^{-0,0354t}$; $e^{-0.035t} = \frac{30}{75} = 0,4 \Rightarrow$

$-0.035t = \ln 0.4$

$t = \frac{\ln 0.4}{-0.0354} = 25,9$ min

$T'(t) = -0.0354 \cdot 75\, e^{-0,0354t} = 2,66\, e^{-0,0354t}$

$T'(25.9) = 2.66\, e^{-0.0354 \cdot 25.9} = 1.06$ °c/min

32 Kerstin och Katarina har haft matematikprov. En av uppgifterna löd: "En funktion f har derivatan $f'(x) = 3x^2 + 5$. Bestäm $f(x)$." När de får tillbaka provet ser de att båda har löst uppgiften rätt. Ändå har de inte angett riktigt samma svar. Ge en förklaring till vad som kan ha inträffat.

32. $f(x) = x^3 + 5x + c$

De kan ha valt olika vården på C.

33 Ange *alla* funktioner som har egenskapen att $f(x) = f'(x)$ där $f(x) \neq 0$

(*Np Ma3b ht 2012*)

33. $f(x) = ke^x$, k = godtycklig konstant

34 Tangenten till kurvan $y = ae^{2x} + bx$ i punkten $(0, 4)$ har lutningen $k = 3$. Bestäm talen a och b.

34.

$$y' = 2ae^{2x} + b$$

$$y(0) = 4 \Rightarrow ae^{0} + 0 = 4 \Rightarrow \underline{a = 4}$$

$$y'(0) = 3 \Rightarrow 2ae^{0} + b = 3 \Rightarrow b = 3 - 8 = \underline{-5}$$

---

35 Temperaturen av en stek som sätts in i ugnen kan beskrivas med

$T(x) = 175 - 153e^{-kx}$

där $T(x)$ är temperaturen i °C x minuter efter att steken satts in i ugnen. Efter 30 minuter är stekens temperatur 50 °C. Med vilken hastighet ändras temperaturen då?

35.

$$175 - 153e^{-30k} = 50 \Rightarrow$$

$$e^{-30k} = \frac{175 - 50}{153} = 0{,}817$$

$$-30k = \ln 0{,}817 \Rightarrow k = 0{,}0067$$

$$T(x) = 175 - 153e^{-0{,}0067x}$$

$$T'(x) = 1{,}031\, e^{-0{,}0067x}$$

$$T'(30) = 1{,}031\, e^{-0{,}0067 \cdot 30} = \underline{0{,}84 \text{ °C/min}}$$

---

36 Två tangenter till $y = 3x^2 - 2x + 3$ skär varandra i en punkt. Bestäm skärningspunktens koordinater om tangenterna tangerar kurvan i $x = -1$ och $x = 2$.

36. $y(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1) + 3 = 8$

$y(2) = 3\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 3 = 11$

$y'(x) = 6x - 2$

<u>Tangent 1</u>: $g(x) = kx + m = y'(-1)x + m$

$y'(-1) = -8$; $g(-1) = y(-1) = 8$

$g(x) - g(-1) = y'(-1)(x-(-1)) \Rightarrow$

$g(x) = -8(x+1) + 8 = -8x$

<u>Tangent 2</u>: $h(x) = kx + m = y'(2)x + m$

$y'(2) = 10$; $h(2) = y(2) = 11$

$h(x) - h(2) = y'(2)(x-2) \Rightarrow$

$h(x) = 10(x-2) + 11 = 10x - 9$

$g(x) = h(x) \Rightarrow -8x = 10x - 9 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Skärningspunkten $= \left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, -4\right)$

37 För en funktion $f(x)$ gäller att $f(0) = -2$ och $f'(x) = 0{,}63 \cdot e^{0{,}09x}$. Bestäm funktionen f.

37.

$$f(x) = \frac{0.63}{0.09} \cdot e^{0.09x} + C = 7e^{0.09x} + C$$

$$f(0) = -2 \Rightarrow 7e^{0} + C = -2 \Rightarrow C = -9$$

$$\underline{f(x) = 7e^{0,09x} - 9}$$

38 Tangenten till kurvan $y = 3^x$ i punkten $(2, 9)$ bildar en triangel tillsammans med x-axeln och y-axeln. Beräkna triangelns area. Ange svaret exakt.

38.

$$3 = e^{\ln 3} \Rightarrow y = (e^{\ln 3})^x = e^{x \cdot \ln 3}$$

$$y' = \ln 3 \cdot e^{x \cdot \ln 3}$$

<u>Tangenten</u>: $g(x) = kx + m = y'(2)x + m$

$$g(2) = y(2) = 3^2 = 9$$

$$y'(2) = \ln 3 \cdot e^{2\ln 3}$$

$$g(x) - g(2) = y'(2)(x-2)$$

$$g(x) = \ln 3 \cdot e^{2 \cdot \ln 3}(x-2) + 9 = 9 \cdot \ln 3 \cdot x - 18 \cdot \ln 3 + 9$$

$$g(0) = -18 \ln 3 + 9$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow 9 \cdot \ln 3 \cdot x - 18 \cdot \ln 3 + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{2\ln 3 - 1}{\ln 3}$$

$$A = \left| \frac{g(0) \cdot x}{2} \right| = \left| \frac{(-18 \cdot \ln 3 + 9) \cdot (2\ln 3 - 1)}{2\ln 3} \right| =$$

$$= \left| \frac{-9(2\ln 3 - 1)(2\ln 3 - 1)}{2\ln 3} \right| = \underline{\frac{9(2\ln 3 - 1)^2}{2\ln 3}}$$

22 Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan
$y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x} + \frac{2}{3}$ i punkten (1, 4).

23 Kurvan $y = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ har en tangent i punkten där $x = 1$. Bestäm tangentens ekvation.

24 **ö** Ge ett exempel på en ekvation på formen $y = kx + m$ för en rät linje som är parallell med tangenten till $f(x) = \frac{x}{5} + e^{-x/5}$ i $x = 0$.

25 Varför kan man inte beräkna derivatan av funktionen i $x = 0$?

a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{5}$ b) $g(x) = x^{-2} - 2x^{1,999}$

26 Nina och Johanna ska springa ett maratonlopp och sitter och gör upp planer för hur de ska löpa. Nina räknar med att springa snabbast i

29 Bestäm ek
$y = 6^x - 6$

30 I vilken p

31 Hur kaffet
funktione
temperatu
det att ma
hastighete

32 Kerstin oc
av uppgif
$f'(x) = 3x$
provet se
Ändå har
förklaring

33 Ange *alla*