

28 Ulf och Janne åker Vasaloppet. Ulf kan beskriva den sträcka i kilometer, som han har kvar till målet med uttrycket

$s_U(t) = 90 - 11t + 0,08t^2$ , där  $t$  är tiden i timmar efter starten. Motsvarande uttryck för Janne är  $s_J(t) = 90 - 10t - 0,05t^2$ .

De angivna funktionsuttrycken är förenklade matematiska modeller som inte tar hänsyn till t.ex. uppehåll, uppforsbackar och utförslopor.

- Använd något av funktionsuttrycken för att bestämma hur långt Vasaloppet är.
- Beräkna  $s_U(4) - s_J(4)$  och tala om vad du beräknat.
- Vilken tid åkte Janne på?

28. a)  $s_{max} = s_U(0) = s_J(0) = \underline{90 \text{ km}}$

b)  $s_U(t) - s_J(t) = -t + 0,13t^2$

$s_U(4) - s_J(4) = -4 + 0,13 \cdot 4^2 = \underline{-1,92 \text{ km}}$

Ulf leder med 1,92 km vid tiden  $t=4$  h.

c)  $s_J(t) = 0 \Rightarrow 0 = 90 - 10t - 0,05t^2 \Rightarrow$

$t^2 + 200t - 1800 = 0$

$t = -100 \pm (10000 + 1800)^{1/2} = 8,63 \text{ h} = \underline{8 \text{ h } 38 \text{ min}}$

---

29 Nedan ges några olika situationer som kan beskrivas med en funktion. Vilket av alternativen A–D beskrivs bäst med en diskret funktion?

- A Bensinförbrukningen hos en bil beror av hur långt bilen körs.
- B Volymen av en kub beror av sidans längd.
- C Intäkten beror av hur många stolar som tillverkas i företaget.
- D Kostnaden för bananer beror av vikten på bananerna.

(Np Ma3b ht 2012)

29. Alternativ C, då intäkten inte är kontinuerlig.

30 Lös ekvationen  $x^3 - x(8x - 16) = 0$

(Np MaC vt 2005)

$$30. \quad x^3 - 8x^2 + 16x = 0$$

$$x(x^2 - 8x + 16) = 0$$

$$x(x - 4)^2 = 0$$

$$\underline{x_1 = 0, x_{2,3} = 4}$$

31 Beräkna  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$  om  
 $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$  och  $h(x) = 5x - 3$ .

$$31. \quad f(x) = (3x^2 - 2x + 1)(5x - 3) = 15x^3 - 9x^2 - 10x^2 + 6x + 5x - 3 = \\ = \underline{15x^3 - 19x^2 + 11x - 3}$$

32 Grafen till ett andragradspolynom tangerar  $x$ -axeln i punkten  $(8, 0)$  och skär  $y$ -axeln i  $(0, -4)$ . Vilket är polynomet?

32.  $x$ -axeln tangeras  $\Rightarrow$  dubbelrot  $\Rightarrow$

$$y = k(x-8)^2$$

$$-4 = k(0-8)^2 = 64k \Rightarrow k = -\frac{4}{64} = -\frac{1}{16} \Rightarrow$$

$$\underline{y = -\frac{1}{16}(x-8)^2}$$

33 Ett polynom av grad 2 har sina nollställen i  $x = -4$  och  $x = 2$ . Polynomets minsta värde är  $-27$ . Vilket är polynomet?

33.  $y = k(x+4)(x-2)$

$$x\text{-värdet vid } y_{\min} = -1 \quad \left(\frac{-4+2}{2} = -1\right)$$

$$-27 = k(-1+4)(-1-2)$$

$$-27 = -9k \Rightarrow k = 3 \Rightarrow$$

$$y = 3(x+4)(x-2) = 3(x^2 + 2x - 8)$$

$$\underline{y = 3x^2 + 6x - 24}$$

34 Rita grafen till funktionen  $f(x) = \frac{2x+3}{x-5}$  och bestäm definitionsmängd och värdemängd.

$$\frac{2x+3}{x-5} = \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{5}{x}}$$

34.

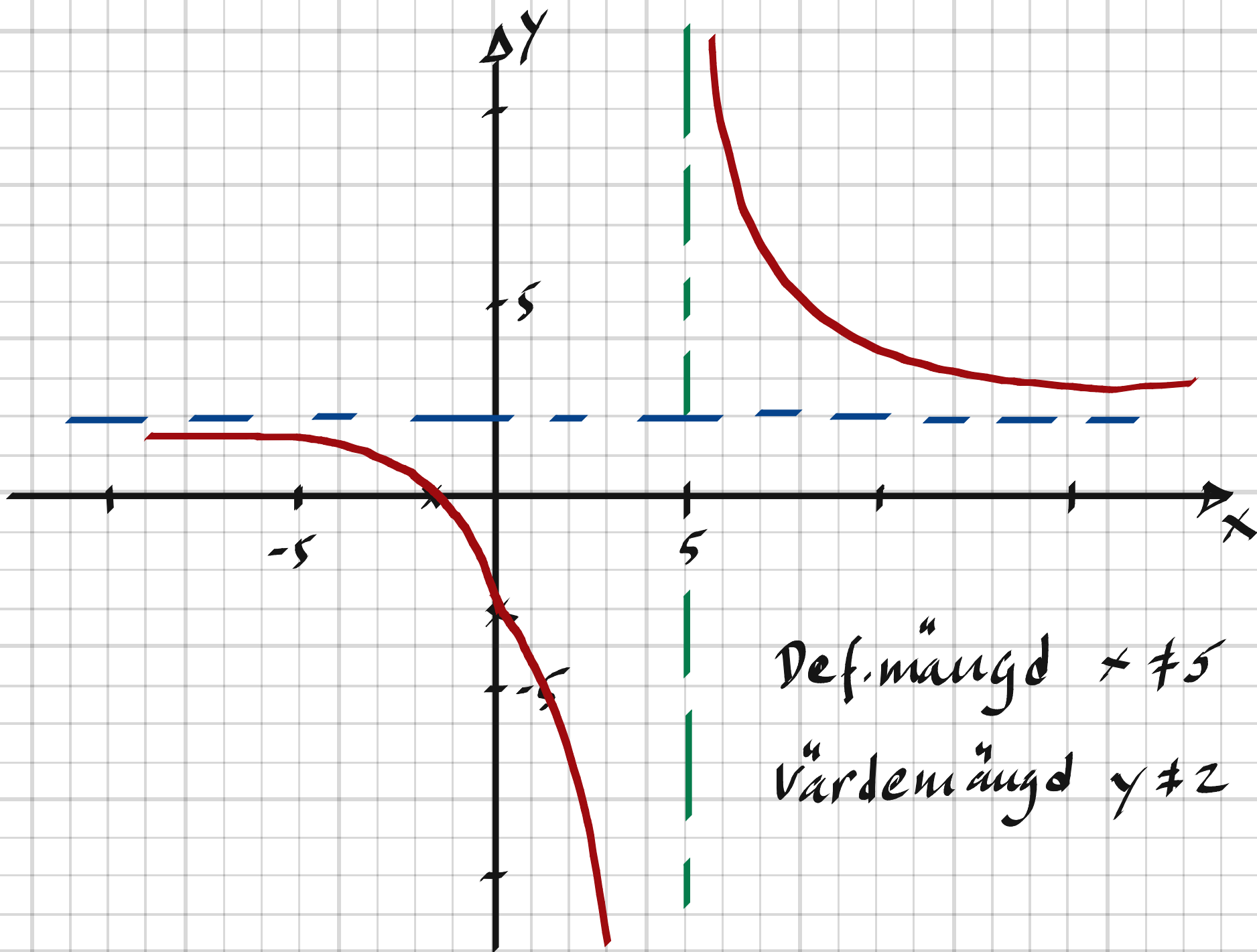
$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x+3=0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$f(0) = -\frac{3}{5}$$

Nämnaren 0 då  $x=5 \Rightarrow x=5$  asymptot

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+3}{x-5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{5}{x}} = 2 \Rightarrow$$

$f(x) = 2$  asymptot



Def. mängd  $x \neq 5$   
Värdemängd  $y \neq 2$



35 Förklara varför uttrycket  $\frac{x+1}{x^2+1}$  är definierat för alla  $x$ .

35. Nämnumaren kan aldrig bli 0.

---

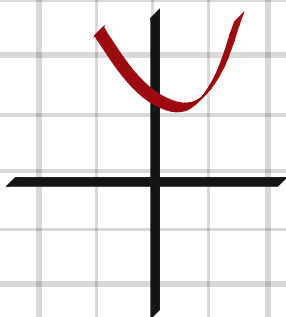
36 Faktorisera polynomet  $p(x) = 3x^2 + 3x - 18$

36.  $p(x) = 3(x^2 + x - 6) = 3(x + 3)(x - 2)$

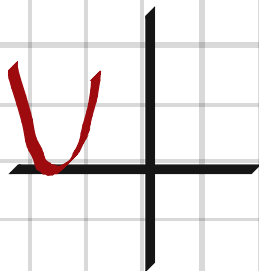
---

37 Hur många nollställen har en polynomfunktion av andra graden? Motivera genom att ge exempel.

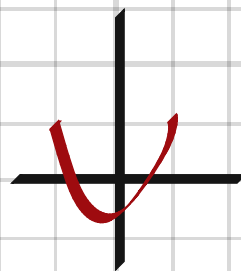
37. 0, 1 eller 2



ex.  $y = x^2 - x + 5$



$y = x^2 + 2x + 1$



$y = x^2 + x - 3$

---

38 Ange en rationell funktion där nämnaren inte är ett konstant polynom, men där den rationella funktionen är definierad för alla  $x$ .

38. ex.  $f(x) = \frac{3+2x}{x^2+1}$

---

39 Har uttrycken något gränsvärde när  $x \rightarrow -3$ ?

a)  $\frac{x^2 + 3}{x + 3}$

b)  $\frac{x^2 - 9}{x + 3}$

c)  $\frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$

d)  $\frac{x^2 - 6x + 9}{3 - x}$

39. a) Nämnaren = 0  $\Rightarrow$  Nej

b)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) = \underline{-6}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x + 3) = \underline{0}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 6x + 9}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow -3} (3 - x) = \underline{6}$

40 Bestäm följande gränsvärden:

a)  $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + x)$

b)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 3h}{h}$

40 a)  $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + x) = \underline{30}$

b)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 3) = \underline{3}$

41 Summan av längden och bredden i en rektangel är 18,00 cm. Beräkna längden om arean är 74,75 cm<sup>2</sup>.

$$41. \quad \begin{cases} l + b = 18,00 \\ l \cdot b = 74,75 \end{cases}$$

$$l + \frac{74,75}{l} = 18,00$$

$$l^2 - 18,00l + 74,75 = 0$$

$$l = 9,00 \pm \sqrt{81 - 74,75} = 9,00 \pm 2,50$$

längden är 6,5 cm eller 11,5 cm

42 Maja köper potatis, som kostar  $x$  kr/kg och morötter som kostar 3 kr mer per kg. Hon betalar 36 kr för potatisen och 27 kr för morötterna. Tillsammans väger potatisen och morötterna 9 kg. Hur mycket kostar potatisen per kg?

$$m_p = \frac{36}{x} ; m_m = \frac{27}{x+3}$$

$$m_p + m_m = 9$$

$$42. \quad \frac{36}{x} + \frac{27}{x+3} = 9 ; 36(x+3) + 27x = 9x(x+3)$$

$$36x + 108 + 27x = 9x^2 + 27x$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4+12} = 2+4 = 6 \text{ kr/kg}$$

6 kr/kg

**43** En möbeltillverkare beskriver kostnaden  $K$  kronor för en serie stolar med formeln  $K(x) = 900 + 2x + 0,08x^2$ , där  $x$  är antalet stolar och  $100 \leq x \leq 500$ . Hur många stolar finns i serien om han beräknar att varje stol i genomsnitt kostar 20 kr att tillverka?

43,

$$20x = 900 + 2x + 0,08x^2$$

$$x^2 - 225x + 11250 = 0$$

$$x = 112,5 \pm \sqrt{12656 - 11250} = 112,5 + 37,5 = \underline{150}$$

**44** Låt  $f(x) = x^2 + 3x$  och förenkla  $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$$44. \frac{(2+h)^2 + 3(2+h) - (2^2 + 3 \cdot 2)}{h} = \frac{4h + h^2 + 6 + 3h - 6}{h} = \underline{h + 7}$$



45 Ett polynom  $p(x)$  av tredje graden har endast två nollställena,  $x = 2$  och  $x = -1$ . Det gäller också att  $p(0) = 2$ . Det finns två polynom som stämmer in på detta. Vilka?

$$45. \quad p_1(x) = k_1(x-2)^2(x+1)$$

$$p_2(x) = k_2(x+1)^2(x-2)$$

$$p_1(0) = 2 \Rightarrow 2 = 4k_1 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}$$

$$p_2(0) = 2 \Rightarrow 2 = -2k_2 \Rightarrow k_2 = -1$$

$$\begin{cases} p_1(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2(x+1) \\ p_2(x) = -(x+1)^2(x-2) \end{cases}$$

46 Faktorisera polynomet  $p(x) = 2x^4 - 8x^2 - 24$  genom att först sätta  $x^2 = t$ .

$$46. \quad p(t) = 2t^2 - 8t - 24 = 2(t^2 - 4t - 12) = \\ = 2(t-6)(t+2) \Rightarrow$$

$$p(x) = 2(x^2-6)(x^2+2) = 2(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x^2+2)$$