21. Är följande påståenden korrekta? Motivera dina svar.

a) $F(x) = 3e^{x}$ är en primitiv funktion till $f(x) = e^{3x}$ (1/0/0)

b) Grafen till $f(x) = x^3 + ax$ har tre olika nollställen om konstanten $a \leq 0$ (0/2/1)

21. a) Nej, däremot är f en primitiv funktion till F.

b) $f(x) = x(x^2 + a)$

Nej, bara om $a < 0$. Om $a = 0 \Rightarrow f(x) = x^3$ som har ett nollställe i origo.

22. Karolina häller upp en kopp kaffe i ett rum där temperaturen är 20°C. Hon mäter kaffets temperatur direkt och därefter varje minut under de första 5 minuterna. Karolina anpassar sedan en matematisk modell till sina mätvärden:

$$T(t) = 95e^{-0{,}039t}$$

där T är kaffets temperatur i °C och t är tiden i minuter efter att Karolina startade sin mätning av temperaturen.

a) Bestäm temperaturen hos kaffet då Karolina startade sin mätning. (1/0/0)

b) Bestäm med hur många procent temperaturen hos kaffet minskar per minut. (0/1/0)

c) Karolinas modell stämmer väl överens med verkligheten i början. Utvärdera hur väl hennes modell stämmer överens med verkligheten över tid. (0/1/1)

22. a) $T(0) = \underline{95°C}$

b) $\frac{\Delta T(x)}{T(0)} = \frac{T(0)-T(1)}{T(0)} = \frac{95° - 91{,}37°}{95°} = \underline{3{,}8\%}$

c) $95e^{-0{,}039t} = 20 \Rightarrow$

$-0{,}039t = \ln\frac{20}{95}$

$t = -\frac{1}{0{,}039} \cdot \ln\frac{20}{95} = 39.95$

Efter 40 minuter ger formeln värden under rumstemperaturen 20°C vilket blir fel.

23.

Tartaglia (1500-1557)

Italienaren Tartaglia var en matematiker som levde på 1500-talet. Han anses ha formulerat följande matematiska problem, här återgivet i modern översättning:

Summan av två positiva tal är 8. Bestäm talen så att produkten av talens differens och talens produkt blir så stor som möjligt.

Din uppgift är att lösa Tartaglias matematiska problem. (0/0/3)

23. $x + y = 8$

$$f(x,y) = xy(x-y) = x^2y - xy^2$$

$$f(x) = x^2(8-x) - x(8-x)^2 =$$

$$= 8x^2 - x^3 - 64x + 16x^2 - x^3 = -2x^3 + 24x^2 - 64x$$

$$f'(x) = -6x^2 + 48x - 64$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + \frac{32}{3} = 0$$

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - \frac{32}{3}} = 4 \pm \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_1 = 1.69, \ x_2 = 6.31$$

$$y_1 = 8 - x_1 = 6.31, \ y_2 = 8 - x_2 = 6.31$$

Svar: De två talen är 1.69 och 6.31

24. För tredjegradsfunktionen f gäller att

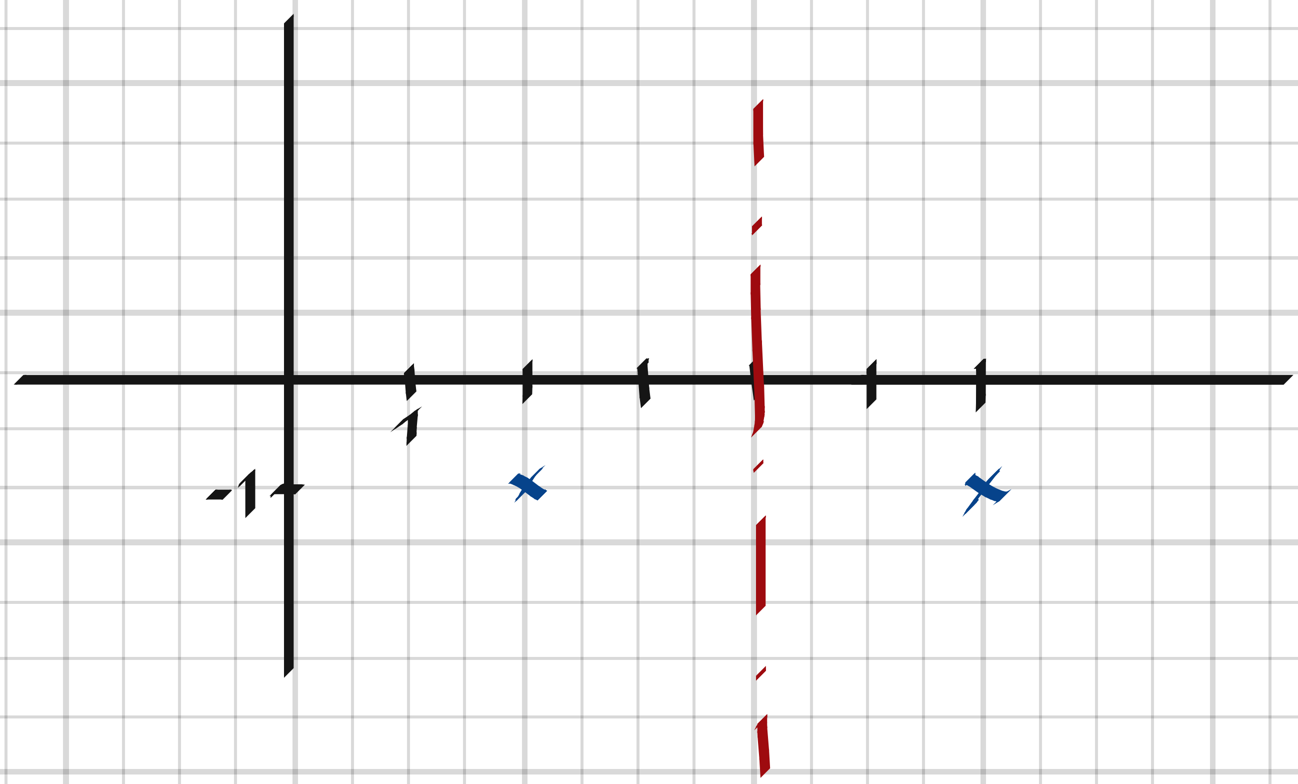
- $f'(2) = -1$
- $f''(4) = 0$

Bestäm $f'(6)$ (0/0/3)

24.

$f''(4) = 0 \Rightarrow f'(x)$ har extremvärde då $x = 4$

Parabel med symmetri $\Rightarrow \underline{f'(6) = f'(2) = -1}$



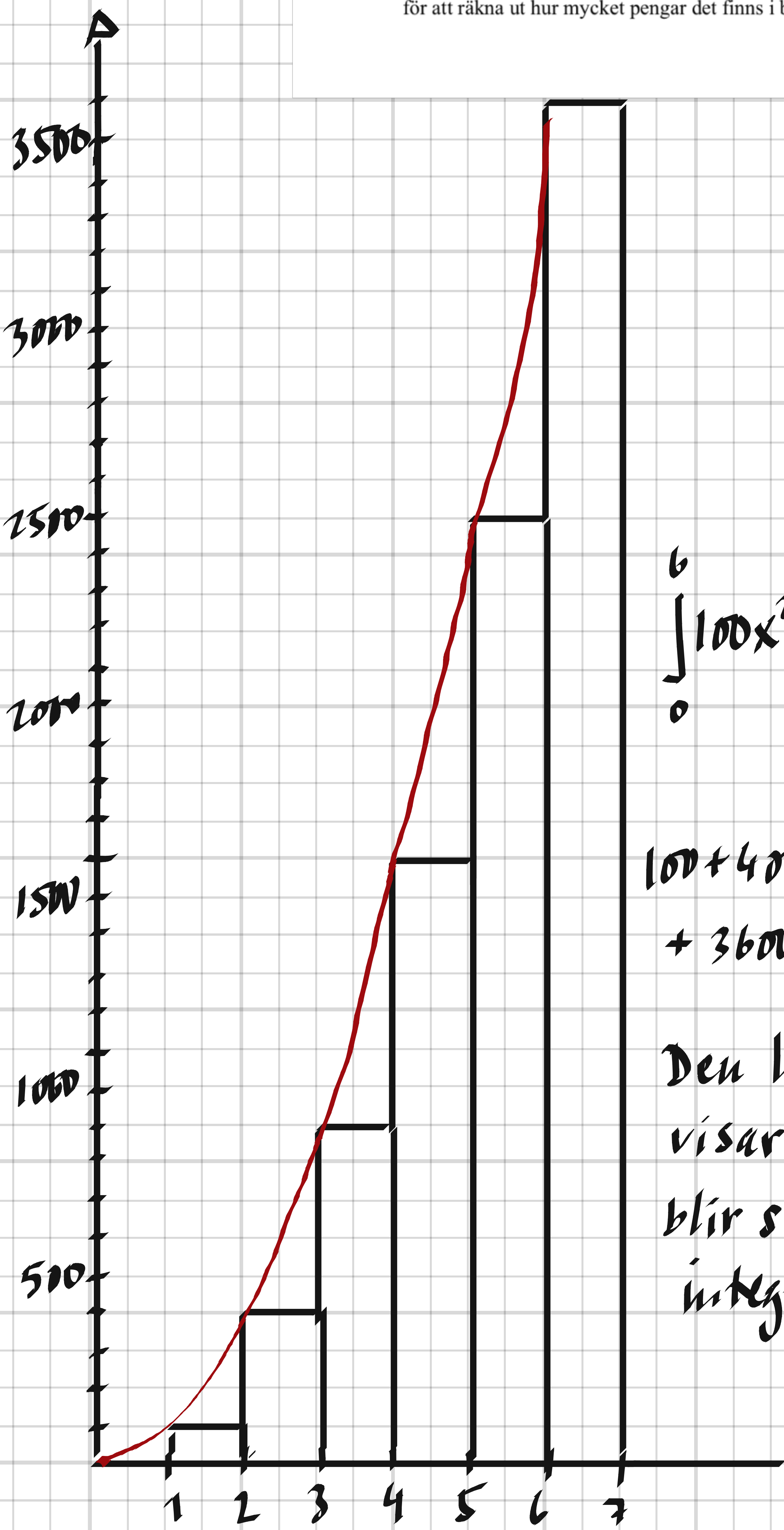
25. När Mario föds bestämmer sig hans mormor för att spara pengar åt honom i en burk. Mormor tänker lägga ett belopp som motsvarar kvadraten av Marios ålder multiplicerat med 100, varje gång han fyller år. Marios farbröder Sergio och Riccardo funderar över hur mycket pengar mormor kommer att ha i burken på Marios 6-årsdag.

Sergio säger: *Man får reda på hur mycket pengar som finns i burken genom att beräkna integralen* $\int_0^6 100x^2\,dx$

Riccardo funderar ett tag och svarar: *Nej, den ger ett för litet värde.*

Förklara varför integralen ovan ger ett för litet värde om man använder den för att räkna ut hur mycket pengar det finns i burken på Marios 6-årsdag. (0/1/3)

25.



$$\int_0^6 100x^2 = \frac{100 \cdot 6^3}{3} = 7200 \text{ kr}$$

$100 + 400 + 900 + 1600 + 2500 +$
$+ 3600 = 9100$ kr

Den högsta stapeln visar att dess area blir större än integralens värde.

22. För polynomfunktionen f gäller att $f'(x) > 0$ för alla x.
Undersök hur många reella lösningar ekvationen $f(x) = 0$ har. (0/0/2)

22.

$f'(x) > 0$ för alla x $\Rightarrow$ $f(x)$ saknar

både max, min och terasspunkter.

Av det följer att $f(x)$ måste vara linjär

med endast 1 nollställe.

23. Albins vikt kan beskrivas med funktionen $V(t) = 0{,}10t^3 - 1{,}23t^2 + 6{,}51t + 3{,}72$ där vikten V kg är en funktion av tiden t år efter födseln. Funktionen gäller under hans åtta första levnadsår.

Den hastighet som Albins vikt ökar med varierar. Bestäm vilka värden hastigheten kan anta under Albins åtta första levnadsår. (0/0/2)

23. $v = V'(t) = 0.3t^2 - 2{,}46t + 6.51$

$V''(t) = 0.6t - 2{,}46$

$V''(t) = 0 \Rightarrow t = 4.1$

$V'(t)$ är en parabel med minimum vid tiden $t = 4{,}1$ år. Maximum måste således ligga vid något av parabelns ändlägen.

$V'(0) = 6.51 \leftarrow$ max

$V'(8) = 0.3 \cdot 8^2 - 2.46 \cdot 8 + 6.51 = 6.03$

$V'(4.1) = 0.3 \cdot 4.1^2 - 2.46 \cdot 4{,}1 + 6.51 = 1.47 \leftarrow$ min

Svar: $1{,}5 \leq v \leq 6{,}5$ kg/år

24. Anton och Amanda har fått i uppdrag att baka bullar och kakor som de ska sälja för att få pengar till en skolresa. De skriver upp de två recepten på ett papper och bestämmer att vinsten ska vara 4 kr per bulle och 2 kr per kaka.

Recept för 100 bullar

2400 gram mjöl
500 gram smör
----
180 gram socker
2,5 paket jäst
1,5 liter mjölk
1 tesked salt

Vinst: 4 kr per bulle

Recept för 100 kakor

600 gram mjöl
500 gram smör
----
170 gram socker
4 teskedar bakpulver
6 teskedar vaniljsocker

Vinst: 2 kr per kaka

Anton och Amanda vill göra så stor vinst som möjligt samtidigt som de funderar på om de ska baka av båda sorterna eller om det räcker med att bara baka en av sorterna. De räknar med att sälja allt de bakar.

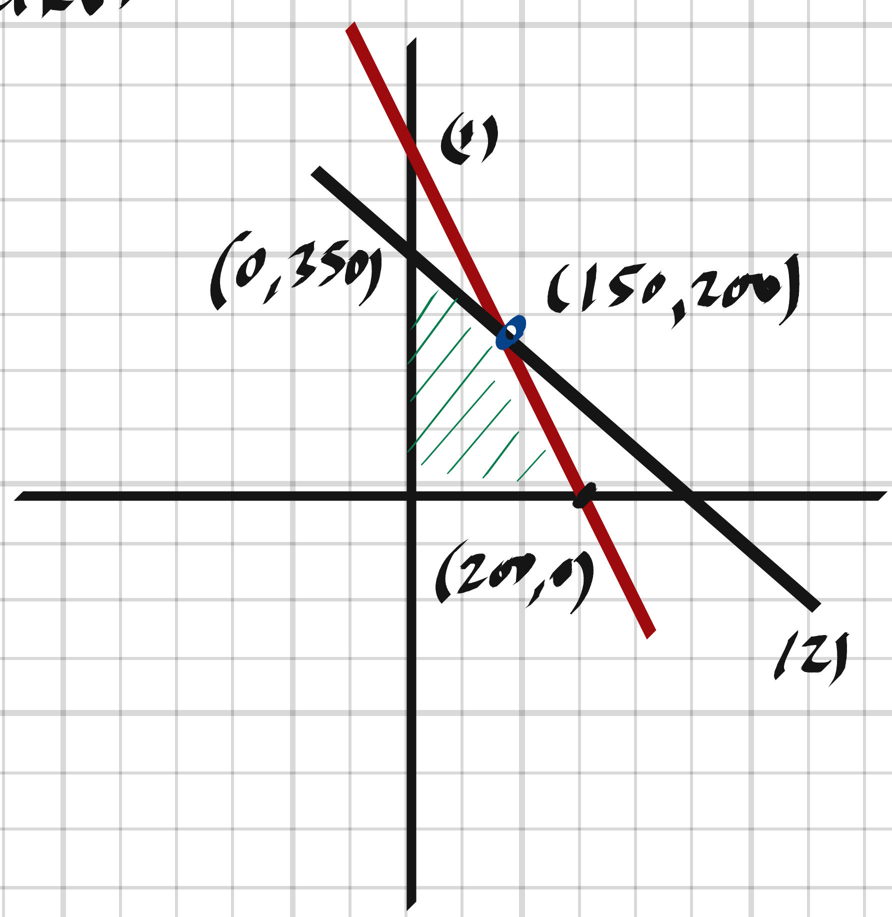
För att veta hur mycket de kan baka tar de reda på hur mycket smör och mjöl de har hemma. Tillsammans har de 4800 gram mjöl och 1750 gram smör.

Bestäm den maximala vinst som Anton och Amanda kan göra på sin bakning. Du behöver bara ta hänsyn till hur mycket mjöl och smör som går åt. (0/0/4)

24. x = antal bullar, y = antal kakor

$$\begin{cases} \frac{2400}{100} \cdot x + \frac{600}{100} \cdot y \leq 4800 \\ \frac{500}{100} \cdot x + \frac{500}{100} \cdot y \leq 1750 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} 24x + 6y \leq 4800 \\ 5x + 5y \leq 1750 \end{cases}$$



$V_1 = 0 + 350 \cdot 2 = 700$ kr

$V_2 = 200 \cdot 4 + 0 = 800$ kr

$V_3 = 150 \cdot 4 + 200 \cdot 2 = 1000$ kr

Svar: Maxvinsten = 1000 kr (150 bullar och 200 kakor)

23. Fredrik och Gustav deltar i samma cykellopp. Loppet är 90 km långt. Fredrik håller jämn fart hela loppet medan Gustavs fart varierar. Man kan förenklat beskriva den sträcka (i km) de har cyklat med funktionerna:

$f(t) = 30t$ och $g(t) = t^3 - 6t^2 + 37{,}8t$

där t är tiden i timmar efter start.

Fredrik och Gustav startar samtidigt. Fredrik går i mål först. Han passerar mållinjen precis 3 timmar efter start.

Hur lång tid efter start är avståndet mellan Fredrik och Gustav störst och hur långt är avståndet mellan dem då? (0/0/4)

23. Avståndet, $|h(t)| = |f(t) - g(t)|$

$h(t) = |-t^3 + 6t^2 - 7{,}8t|$

$h'(t) = -3t^2 + 12t - 7{,}8$

$h'(t) = 0 \Rightarrow t^3 - 4t + 2{,}6 = 0 \Rightarrow t = 2 (\pm) 1{,}18 = 0{,}817$ h

$h(0{,}817) = |-0{,}817^3 + 6 \cdot 0{,}817^2 - 7{,}8 \cdot 0{,}817| = 2{,}91$ (extremp)

$h(3) = |-3^3 + 6 \cdot 3^2 - 7{,}8 \cdot 3| = 3{,}6$ (rand)

Svar: Maxavståndet = 3,6 km vid tiden 3h

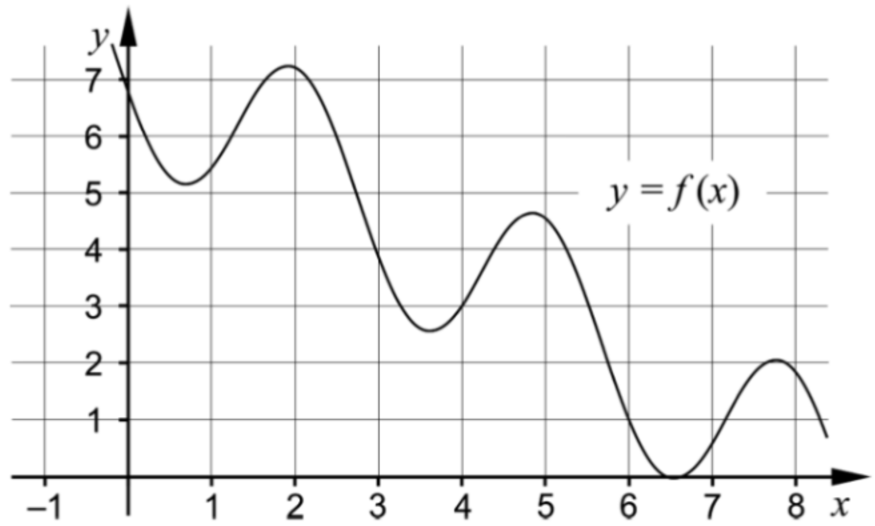
24. S är en kontinuerlig funktion som är definierad för alla x.
Bestäm $S'(4)$ då $S(x+h)=S(x)+h$ (0/0/3)

24. $h = S(x+h) - S(x)$

$$S'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{S'(4) = 1}$$

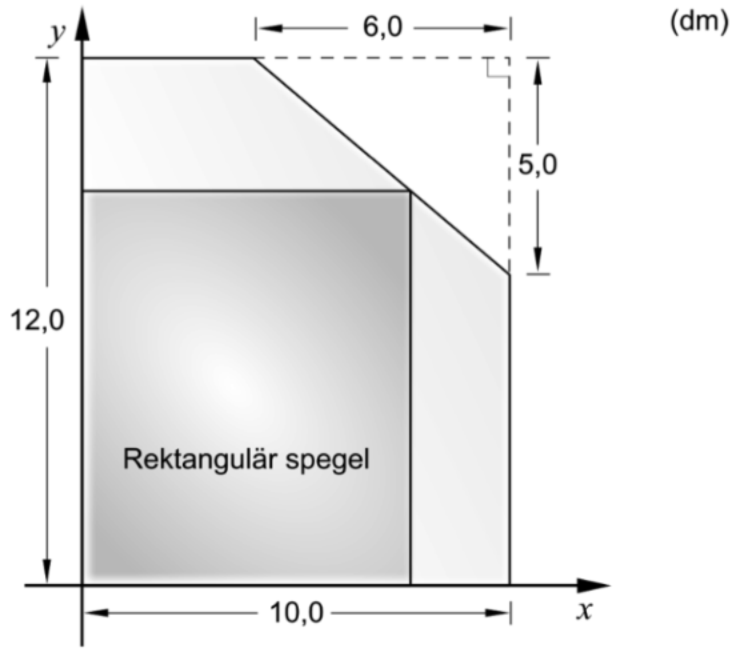
24. Figuren visar grafen till funktionen f. Beräkna $\int_4^6 f'(x)\,dx$ (0/0/2)



24.

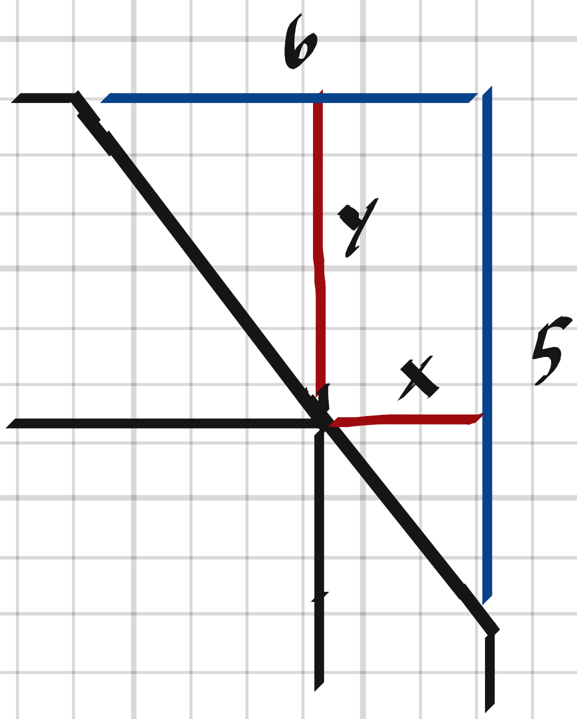
$$\int_4^6 f'(x)\,dx = f(6) - f(4) = 1 - 3 = \underline{-2}$$

25. En glasmästare har av misstag skurit av ett hörn på ett rektangulärt spegelglas som hade måtten 12,0 dm × 10,0 dm. Den avskurna biten har formen av en rätvinklig triangel där de vinkelräta sidorna är 6,0 dm respektive 5,0 dm. Se figur.



Glasmästaren vill använda det kvarvarande spegelglaset till en rektangulär spegel som har sitt ena hörn på den avskurna kanten. Glasmästaren vill också att spegeln ska få så stor area som möjligt.

Beräkna det mått på bredden som ger spegelns största area. (0/0/4)



$$\frac{6-x}{y} = \frac{6}{5} \Rightarrow y = 5 - \frac{5}{6}x$$

$$A = (10-x)(12-y) =$$

$$= (10-x)\left(12-\left(5-\frac{5}{6}x\right)\right) =$$

$$= (10-x)\left(7+\frac{5}{6}x\right) = 70 + \frac{50}{6}x - 7x - \frac{5}{6}x^2 =$$

$$= 70 + \frac{8}{6}x - \frac{5}{6}x^2$$

$A'(x) = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}x$; $A'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.8$; $A(0.8) = 70.5$

$A(x)$ är en parabel med negativ x^2-term $\Rightarrow$ maximum

$A(0) = 10 \cdot 7 = 70$; $A(4) = 6 \cdot \frac{31}{3} = 51,7$

Svar: Bredden $= (10 - 0,8) = 9,2$ dm

26. En geometrisk summa består av fem termer där den andra termen är $\frac{27}{n}$ och den femte termen är $\frac{1}{n}$.

Skriv ett uttryck för summan på enklaste form. (0/0/3)

26.

$$S = \frac{a(1-k^4)}{1-k}$$

$$a + k \cdot \frac{27}{kn} + \ldots + \ldots + k^4 \cdot \frac{1}{k^4 \cdot n} \Rightarrow$$

$$\frac{27}{kn} = \frac{1}{k^4 n} \Rightarrow k^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$a = \frac{27}{\frac{1}{3}n} = \frac{3 \cdot 27}{n} = \frac{81}{n}$$

$$S = \frac{81}{n} \cdot \frac{(1-k^5)}{1-k} = \frac{81}{n} \cdot \frac{1-\frac{1}{3^5}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{81}{n} \cdot \frac{\frac{243-1}{243}}{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{121}{n}}}$$