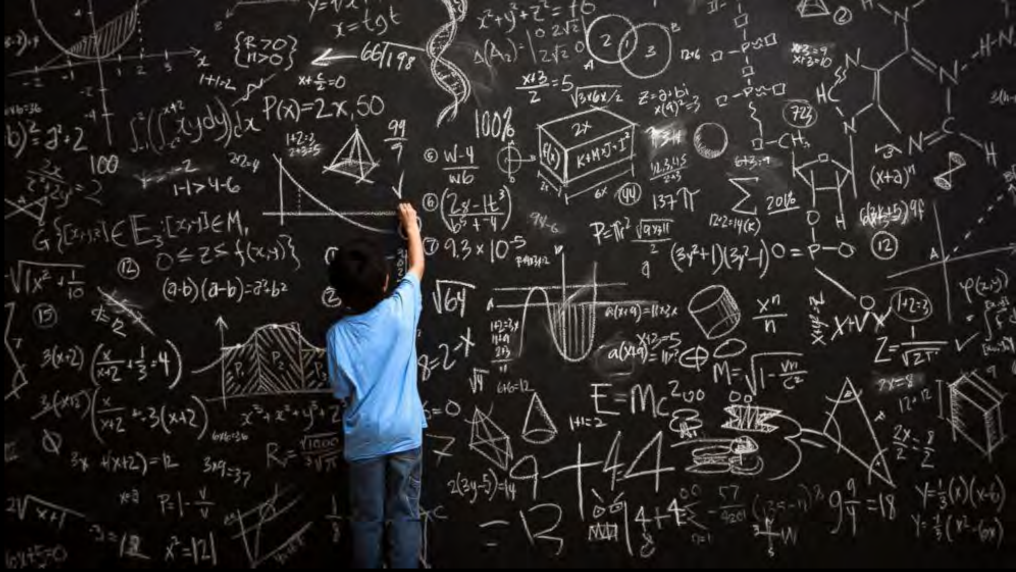


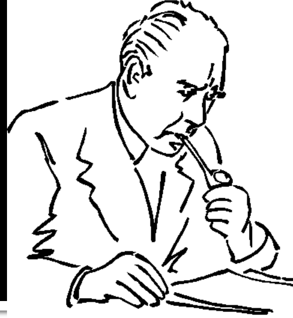
THOMAS KAAS (UCC & AU, DPU), WEBINAR, 31. JANUAR, 2018

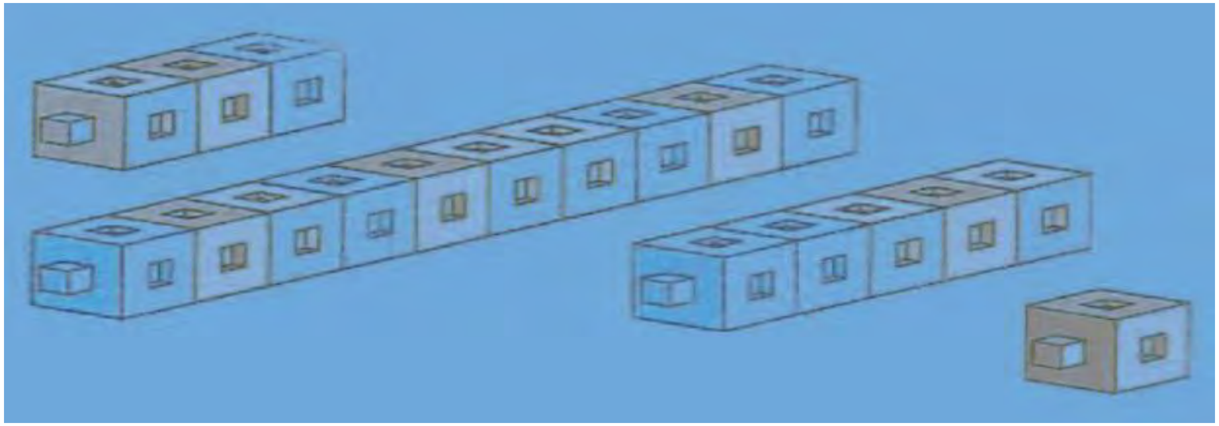
TIDLIG ALGEBRA

Plan

- Hvad er algebra i grundskolen, og hvorfor er det svært?
- Hvad er tidlig algebra, og hvorfor skulle det hjælpe?
- Undervisning med tidlig algebra – hvad kan matematikvejlederen gøre?

En opgave





Ide fra UVM (2014)

At generalisere

- Lav en stang af 5 centicubes. Hvor stort er overfladearealet? Hvad med en stang på 10 centicubes? 100?

Opdage

- Hvor stort er overfladearealet af en stang med *n* centicubes?

Repræsentere

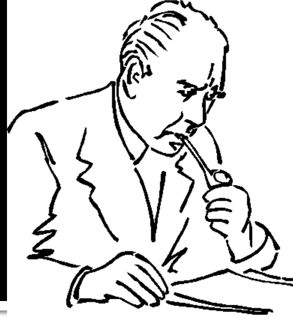
- Hvordan kan du være sikker?

Begrunde

- Hvilke stænger har et overfladeareal, der kan skrives som et ulige tal? Hvorfor?

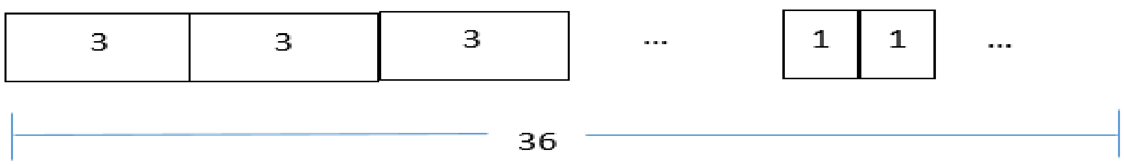
Ræsonnere

En anden opgave



Min kammerat siger, at han afleverede i alt 15 store og små flasker i automaten, og at han fik 36 kr. i pant for dem. Kan det passe, hvis store flasker giver 3 kr., og små flasker giver 1 kr.? Ide fra UVM (2014)

Antal store	Antal små	Antal i alt
1	33	34
2	30	32
3	27	30
4	24	28
5	21	26
6	18	24
7	15	22
8	12	20
9	9	18
10	6	16
11	3	14



At matematisere

$$n \cdot 3 + (15 - n) \cdot 1 = 36$$

Oversætte

$$n \cdot 3 + 15 - n = 36$$

Beregne/omskrive /ræsonnere

$$n \cdot 2 = 21$$

$$n = 10{,}5$$

Tolke

To beskrivelser af algebra

Algebra som fagligt stof:

Funktioner, ligninger, formler, algebraiske udtryk, bogstavregning…

I disse stofområder optræder bogstaver (gradvist) som pladsholdere for tal.

Algebra som aktiviteter:

Generalisere (opdage, repræsentere, begrunde, ræsonnere)

Matematisere (oversætte, beregne/omskrive/ræsonnere, tolke)

Disse aktiviteter udgør forskellige sider af ´algebraisk tænkning´.

Hvad er algebra i grundskolen?

ALGEBRA og ALGEBRAISK TÆNKNING	(Regning med) TAL	(Relationer mellem) KVANTITETER	(Sammenhænge og) FUNKTIONER
at generalisere • opdage • repræsentere • begrunde • ræsonnere			Eksempel 1 (centicubestænger)
at matematisere • oversætte • beregne/omskrive/ ræsonnere • tolke		Eksempel 2 (Flaskeaflevering)	

Brudstykker fra undersøgelser

$y = x + 5$ Hvad kan du sige, om *x* i forhold til *y*?

(I 9. kl. 6 ud af 22, Blomhøj, 1997)

David er 10 cm højere end Con. Con er *h* cm høj. Hvad kan du skrive om Davids højde?
(I 7. kl.: 50 %, i 9. kl. 75 % - Smith, 2003)

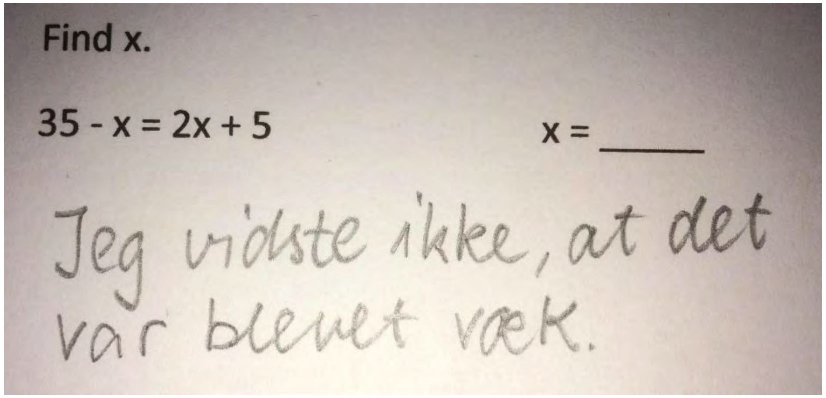
Hvis *m* er et positivt tal, hvilket udtryk er så det samme som *m*+*m*+*m*+*m*?

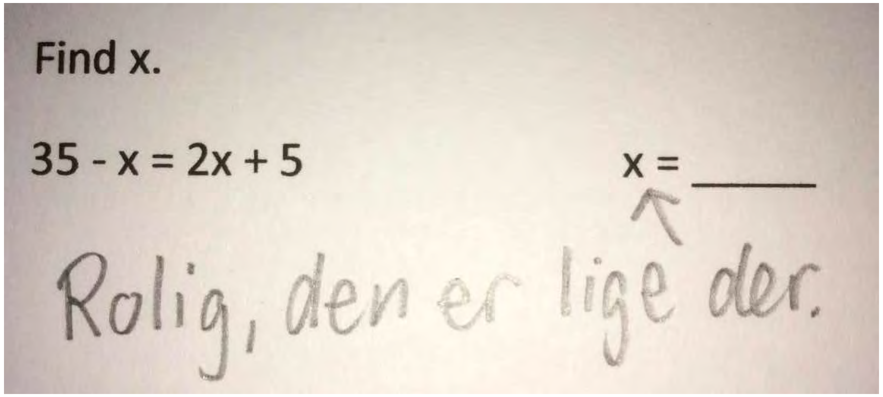
A) *m*+4 B) 4*m* C) m^4 D) 4(*m* + 1)

(6. kl.: hver tredje, 8 kl.: hver anden – *Timms 1996 i Beck. m.fl., 2009)*

Hvad er svært?

At skabe mening, hvis algebra betragtes som et snævert fagområde (bogstavmanipulation), der optræder isoleret fra de øvrige fagområder.





Hvad er svært?

At skabe mening i algebraisk symbolsprog på baggrund af sine tidligere erfaringer med symbolsprog.

Eksempler:

- Hvordan skal 4*m* forstås (når man ved, hvad 4½ betyder)?
- Hvorfor er $\frac{2+a}{a}$ ikke 2, når $\frac{a \cdot b}{a} = b$?
- Hvorfor er $(a+b)^2$ ikke $a^2 + b^2$, når $2 \cdot (a+b) = 2a + 2b$?
- Lighedstegnet plejer at betyde "gør noget" (fx 5+3 = _____). Hvad betyder det, når der står 5+x=10?

Hvad er svært?

At skabe mening i symbolsproget.

Eksempler:

$$5 + x = 10$$
$$a + b = b + a$$
$$y = ax + b$$

Anbefalinger fra forskning

Fokus på at koble den mere færdighedsprægede del med fundamentale forståelser, fx

- Aktiviteter der søger at udfordre elevers begrebsforståelse med henblik på at støtte tilegnelsen af begrebernes betydninger – sideløbende med, at eleverne opbygger færdigheder.

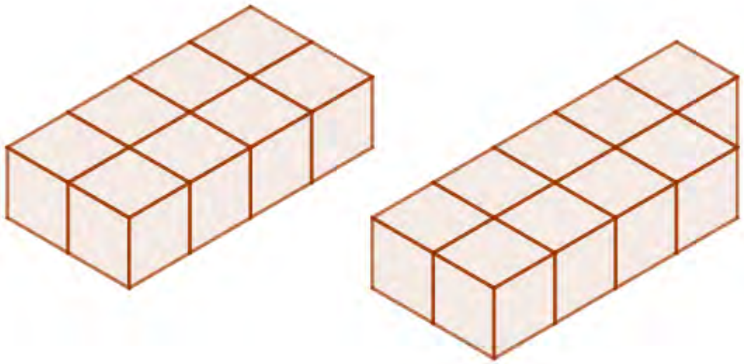
Anbefalinger fra forskning

- Fokus på at skabe sammenhæng og dybde i algebra og algebraisk tænkning ved at udbrede undervisningen til hele skoleforløbet.

- Hold fast i en bred forståelse af, hvad algebra og algebraisk tænkning omfatter og integrer det gerne med de øvrige fagområder (det handler altså ikke bare om at begynde på ´det traditionelle´ tidligere – men om en ny tilgang til undervisning i algebra).

Tidlig algebra - eksempler

Lige og ulige tal (1)



Eleverne undersøger først
lige og ulige tal ved at repræsentere
dem med centicubes.

Byg tal med centicubes,
og udfyld tabellen.

Hvad lægger I mærke til?
Hvilke tal har overskydende kuber?

Skriv en sætning om dine opdagelser.

(opdage en generalisering)

Tal	Antal par	Antal overskydende
3		
4		
5		
6		
7		

Tidlig algebra - eksempler

Lige og ulige tal (2)

Eleverne undersøger summer af lige og ulige tal ved at arbejde med opgaven til højre.

De skal skrive, tegne eller fortælle, hvad de finder ud af.

(repræsentere en generalisering)

Ole lægger to lige tal sammen. Tror du, at resultatet bliver et lige eller et ulige tal?

Heidi lægger to ulige tal sammen. Tror du, at resultatet bliver et lige eller et ulige tal?

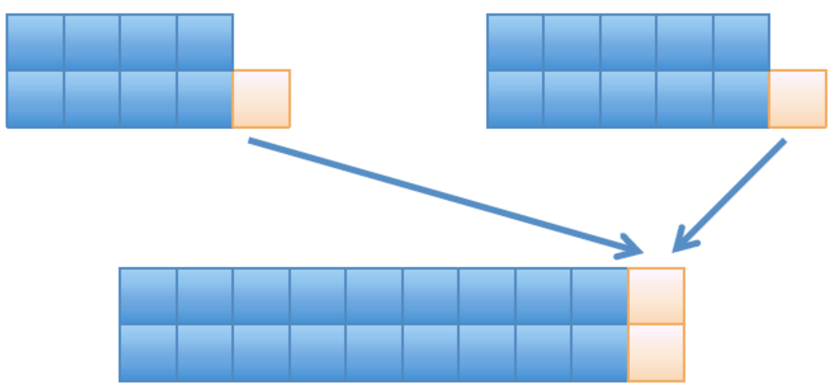
Stine lægger et lige og et ulige tal sammen. Tror du, at resultatet bliver et lige eller et ulige tal?

Tidlig algebra - eksempler

Lige og ulige tal (3)

Eleverne argumenterer gennem samtale i klasse for, at deres generaliseringer om summer af lige og ulige tal er holdbare.

Hvordan kan I vide, om jeres opdagelse gælder for alle lige og ulige tal?



(begrunde en generalisering)

Tidlig algebra - eksempler

Lige og ulige tal (4)

Eleverne kan bruge deres generaliseringer til at løse nye problemer.

Eksempel:
Bliver summen af tre ulige tal et lige tal eller et ulige tal? Hvorfor?

(ræsonnere med en generalisering)

Pointe (fra ´lige og ulige´)

- Algebraisk tænkning kan foregå med og uden bogstaver som pladsholdere for tal.

Tidlig algebra - eksempler

Generelle regnestrategier (1)

Albert: ´Jeg skulle regne 6+8. Jeg ved, at 7 + 7 er 14. Så jeg tog 1 fra de 8 og lagde over på de 6. Så havde jeg 7+7. Så 6+8 bliver også 14.´

Lucca: ´29+18. Jeg tog 1 fra 18, så jeg kom op på 30. Så var der 17 tilbage, som jeg skulle lægge til 30. Nu er stykket nemmere: 30+17=47.´

Lærer: Lagde I mærke til,
at der var noget ens ved
den måde Albert og Lucca regnede på?

Kan I fortælle, hvad det var? …

Kan man altid gøre sådan?

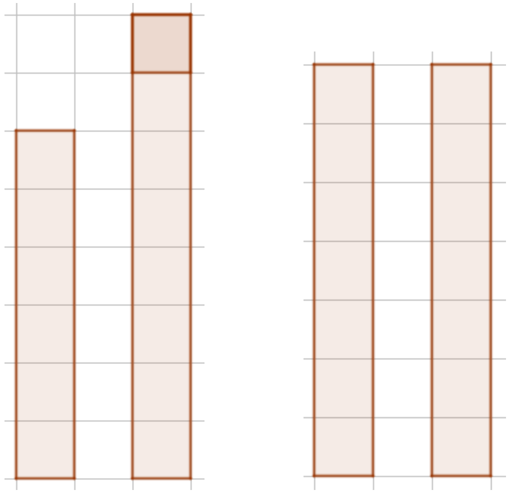
(Opdage en generalisering)

Når man adderer to tal,
kan man trække ´noget´
fra den ene addend, hvis
man lægger det samme
til den anden addend.

$a + b = (a - x) + (b + x)$

Tidlig algebra - eksempler

Generelle regnestrategier (2)



$6 + 8 = 7 + 7$

Kan I vise med centicubes, hvordan Albert regnede?

Kan I vise et andet eksempel?
(repræsentere)

Kan man altid gøre noget med at ´flytte´ rundt på tallene, når man regner med plus? Hvorfor? Hvorfor ikke?
(begrunde)

Kan man også gøre sådan, hvis det er et minusstykke? Hvorfor? Hvorfor ikke?
(ræsonnere)

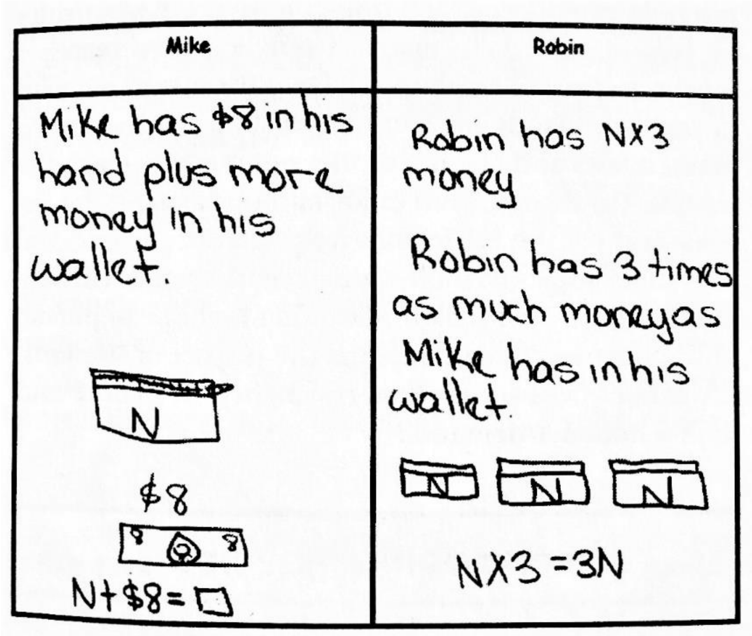
Pointer (fra ´regnestrategier´)

- Algebraisk tænkning kan integreres i bl.a. arbejdet med tal og regnestrategier ved at ´twiste´ en ´almindelig´ opgave.
- Det er læreren, der skaber mulighederne, gennem sine spørgsmål og ´håndtering´ af dialogen (ikke opgaven i sig selv).

Tidlig algebra - eksempler

Mike og Robin har hver nogle penge.
Mike har $8 i sin hånd og resten af pengene i sin pung.
Robin har i alt nøjagtig tre gange så mange penge, som Mike har i sin pung.

- Skriv eller tegn, hvor mange penge Mike og Robin har hver.
  (oversætte)
- Hvor mange penge kan der være i Mikes pung?
  (tolke)
- Hvem har flest penge?
  (beregne/omskrive/ræsonnere)



Carraher & Schliemann, 2007

Pointer (fra ´pengeopgaven´)

- Det er et åbent spørgsmål, hvor meget bogstavsymboler som pladsholdere for tal skal fylde i tidlig algebra. Hvad er kernen?
- … men vi ved fra forskning, at det er muligt for helt almindelige børn i helt almindelige klasser at anvende bogstaver som variable allerede fra 1. klasse (hvis tilgangen er ´tidlig algebra´- undervisning).

Matematikvejleder og TA?

Kaput og Blanton (2001) om, hvad lærere skal kunne for ´algebraisere´ dele af undervisningen i indskolingen:

- Kunne skabe muligheder for algebraisk tænkning, specielt muligheder for at generalisere og matematisere, ud fra de læremidler man har, ved at ´algebraisere´ opgaver. Det vil fx sige: ændre dem fra et-svars regneproblemer til muligheder for at opdage mønstre, komme med hypoteser og generalisere.

- Kunne stille spørgsmål og skubbe eleverne i retning af at opdage, repræsentere, begrunde og ræsonnere med generaliseringer og at matematisere, dvs. oversætte til og fra, beregne/omskrive og tolke algebraiske udtryk).

- Kunne skabe en klasserumskultur, der opmuntrer og understøtter elever i at generalisere, formalisere, komme med hypoteser og argumentere.

Referencer

Beck, H.J., Jørgensen, A., Kaas, T., Petersen, L. Ø. (2009). *Matematik for lærere. Arbejdskort 1A.* København: Gyldendal.

Blomhøj, M. (1997). Funktionsbegrebet og 9. klasse elevers begrebsforståelse. In *Nordisk matematikkdidaktikk, Vol. 5, No. 1, 1997*, 7-32.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. (2007). Early Algebra. In F. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning. Charlotte, NC: Information Age; Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary experience: Part I. Transforming task structures. In H. Cick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of te 12th ICMI Study Conference* (Vol. 1, pp. 344-351). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Smith, E. (2003). Stasis and Change: Integrating Patterns, Functions, and Algebra In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 136-150). Reston, VA: NCTM.

UVM, 2014. *Vejledning for faget matematik*. https://www.emu.dk/modul/vejledning-faget-matematik