Rados Sætning

Jonas Lindstrøm Jensen (jonas@imf.au.dk)

IMF, 2007

Indhold

1 Indledning

Vi vil antage at, Ramseys Sætning og van der Waerdens Sætning er kendt stof. Beviserne følger argumentationen fra kapitel 3 i Ramsey Theory af Graham, Rothchild og Spencer.

2 Schurs Sætning

Sætning 2.1 (Schur)**.** *Hvis* $\mathbb{N}$ *er endeligt farvet, så findes* $x, y, z \in \mathbb{N}$ *i samme farve således at*

$$x + y = z$$

Bevis. Antag at der er brugt r farver. Vi har altså en farvning $\chi : \mathbb{N} \to [r]$. Lad n være givet så

$$n + 1 = R(3; r). \tag{2.1}$$

Definér nu en r-farvning af kanterne i K_{n+1} ved

$$\chi^*(i, j) = \chi(|i - j|),$$

hvor vi har nummereret K_{n+1}'s hjørner ved $0, 1, 2, \ldots, n$, og hvor (i, j) angiver kanten givet ved hjørnerne i og j. Af (2.1) får vi at der findes en monokromatisk trekant i K_{n+1}. Dvs der findes $i > j > k$ så

$$\chi^*(i, j) = \chi^*(j, k) = \chi^*(k, i).$$

Sæt nu

$$\begin{aligned} x &= i - j \\ y &= j - k \\ z &= i - k. \end{aligned}$$

Så er og $x + y = z$, og per definition af χ^* fås at $\chi(x) = \chi(y) = \chi(z)$, som ønsket. □

Vi er nu ude på, at generalisere Schurs sætning. Beviset er ikke så nemt at generalisere, så vi skal have fat i nogle lidt andre metoder. Følgende sætning generaliserer både van der Waerdens Sætning og Shurs Sætning.

Sætning 2.2. *For alle $k, r, s \geq 1$ findes et $n = n(k, r, s)$ således at hvis $[n]$ er r-farvet, så findes $a, d \geq 1$ så*

$$\{a, a + d, a + 2d, \ldots, a + kd\} \cup \{sd\} \tag{2.2}$$

er monokromatisk.

Bemærkning 2.3. For $s = k = 1$ har vi Schurs Sætning.

Bevis. Vi viser sætningen ved induktion over r.

$\boldsymbol{r = 1}$ Sæt $n = \max(k + 1, s)$ og $a = d = 1$. Da der kun er en farve, er det ikke svært at finde noget som helst monokromatisk. Vi skal blot sikre os, at n er stor nok, til at (2.2) er indeholdt i $[n]$.

$\boldsymbol{r - 1 \Rightarrow r}$ Lad os definere $W(t, r)$ som det mindste W, sådan at hvis $[W]$ er r-farvet, så findes en monokromatisk aritmetisk progression af længde t. Af van der Waerdens Sætning får vi, at en sådan funktion er veldefineret.

Sæt så

$$n = sW(kn(k, r - 1, s), r).$$

Lad χ være en r-farvning på $[n]$. Af van der Waerdens Sætning kan vi nu finde a', d' så

$$\{a' + id' \mid 0 \leq i \leq k \cdot n(k, r - 1, s)\}$$

er monokromatisk og indeholdt i $[W(kn(k, r-1, s), r)]$. Lad os for nemheds skyld sige, at den er rød. Hvis der nu findes et j, $1 \leq j \leq n(k, r - 1, s)$, sådan at $sd'j$ er rød, er vi færdige, for så kan vi sætte $a = a'$ og $d = jd'$, og vi har dermed at (2.2) er rød.

Hvis nu der ikke findes et sådant j, så er ingen af elementerne i $\{sd'j \mid 1 \leq j \leq n(k, r-1, s)\}$ røde, og dermed er mængden $(r-1)$-farvet. $(r-1)$-farvningen af $\{sd'j \mid 1 \leq j \leq n(k, r-1, s)\}$ svarer til en $(r - 1)$-farvning af $[n(k, r - 1, s)]$ – sæt $\chi^*(i) = \chi(sd'i)$ (det er blot en skalering med faktor sd'). Pr induktion ved vi så, at der findes $\hat{a}, \hat{d}$, så

$$\{\hat{a}, \hat{a} + \hat{d}, \hat{a} + 2\hat{d}, \ldots, \hat{a} + k\hat{d}\} \cup \{s\hat{d}\}$$

er χ^*-monokromatisk på $[n(k, r - 1, s)]$. Så hvis vi oversætter tilbage til vores oprindelige farvning χ ved at sætte $a = sd'\hat{a}$ og $d = sd'\hat{d}$ får vi en χ-monokromatisk (2.2). □

Dette kan udvides til følgende resultat, som vi skal bruge senere.

Korollar 2.4. *For alle $k, r, s \geq 1$ findes $n = n(k, r, s)$ således, at hvis $[n]$ er r-farvet, findes $a, d > 0$ så*

$$\{a + \lambda d \mid -k \leq \lambda \leq k\} \cup \{sd\}.$$

3 Rados Sætning for én lineær ligning

3.1 Regulære ligningssystemer

Definition 3.1 (Regulære ligningssystemer)**.** Et ligningssystem S på variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$ på en mængde A kaldes *r-regulær på A*, hvis der for alle r-farvninger af A findes en monokromatisk løsning til S. Hvis det gælder for alle r kaldes *S regulær på A*.

Eksempel 3.2. Schurs Sætning siger, at $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ er regulær på $\mathbb{N}$. Sætning 2.2 på forrige side siger at for alle k er

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + d \\ x_2 &= x_1 + d \\ &\vdots \\ x_k &= x_{k-1} + d \end{aligned}$$

på variablene $\{x_0, x_1, \ldots, x_k, d\}$ regulær på $\mathbb{N}$.

Vi vil nu forsøge at generalisere de resultater yderligere.

3.2 Super Modulo p farvningen

Vi får brug for følgende resultat

Lemma 3.3. *Lad $q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$, og lad p være et primtal. Så kan q skrives entydigt på formen*

$$q = \frac{p^j a}{b},$$

hvor $(a, b) = 1$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 0$ og p ikke går op i hverken a eller b.

Bemærkning 3.4. Det j vi får i opskriningen, kaldes *rangen* for q, og betegnes $\operatorname{rank}(q)$.

Bevis. Enhver brøk kan klart skrives på den form. Tilbage er entydigheden. Lad os antage at q er skrevet på to forskellige måder

$$\frac{p^j a}{b} = \frac{p^i c}{d}.$$

Så er $p^j ad = p^i cb$. Antag nu, at $i \neq j$. WLOG kan vi antage, at $i < j$. Så er

$$p^{j-i} ad = cb.$$

Da p ikke går op i hverken c eller b går p ikke op i HS. Det er en modstrid, da p går op i VS. Altså må $i = j$. Så er $ad = cb$. Dvs at

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Men da $(a, b) = (c, d) = 1$ er begge brøker uforkortelige og dermed ens. Sidste mulighed for problemer er, hvis $a = -c$ og $b = -d$, men den mulighed har vi udelukket, ved at kræve at nævnerne skal være positive. □

Dette giver os mulighed for at definere følgende farvning, der bliver vigtig i de følgende beviser.

Definition 3.5 (smod p farvningen)**.** For et primtal p definerer vi *Super Modulo p Farvningen* på $Q \setminus \{0\}$ ved

$$F_p(q) = \frac{a}{b} \pmod{p},$$

hvor a, b er som i Lemma 3.3 på foregående side. Division med b er veldefineret modulo p, da p ikke går op i b, der derfor har en mulitplikativ invers modulo p.

Proposition 3.6. *Smod p farvningen er multiplikativ, dvs*

$$F_p(xy) \equiv F_p(x)F_p(y) \pmod{p}.$$

Specielt gælder

$$F_p(x) = F_p(y) \Rightarrow F_p(\alpha x) = F_p(\alpha y)$$

for alle $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Bevis. Det er nok at vise, at F_p er multiplikativ. Lad x og y være skrevet som i Lemma 3.3 på forrige side. Dvs

$$x = \frac{p^j a}{b}, \qquad y = \frac{p^i c}{d}.$$

Så er

$$xy = \frac{p^{j+i} ac}{bd}.$$

Lad nu $g = \gcd(ac, bd)$, $m = ac/g$ og $n = bd/g$. Så har vi

$$xy = \frac{p^{j+i} m}{n}.$$

Den opskrivning opfylder alle krav Lemma 3.3 på foregående side, dvs. det er den entydige opskrivning af xy. Altså er

$$F_p(xy) = \frac{m}{n} \pmod{p}.$$

På den anden side har vi

$$F_p(x)F_p(y) \equiv \frac{a}{b}\frac{c}{d} \pmod{p},$$

Så da $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$, har vi den ønskede identitet. □

3.3 Bevis for Rados Sætning for én lineær ligning

Sætning 3.7 (Rados Sætning for én lineær ligning)**.** *Lad S være givet ved*

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0, \qquad c_i \in \mathbb{Z}. \tag{3.1}$$

Så gælder, at S er regulær på $\mathbb{N}$ *hvis og kun hvis en ikke tom delmængde af* c_i*'erne summer til nul.*

Bevis. Lad os først antage, at der findes en ikke tom delmængde af c_i'erne der summer til nul. Lad en farvning være givet. Vi vil nu finde en monokromatisk løsning til (3.1). Ved passende nummerering har vi

$$c_1 + \cdots + c_k = 0.$$

Lad os antage, at ingen af c_i'erne er nul for $i \leq k$. Hvis $k = n$ kan vi sætte $x_1 = \ldots = x_n = 1$, hvilket løser (3.1). Vi kan derfor nu antage, at $k < n$. Vi definerer

$$\begin{aligned} A &= \gcd(c_1, \ldots, c_k), \\ B &= c_{k+1} + \cdots + c_n, \\ s &= \frac{A}{\gcd(A, B)}. \end{aligned}$$

Hvis $A = 0$ eller $B = 0$ ville s ikke være veldefineret. Men da ingen af c_i'erne er nul for $i \leq k$ må $A > 0$. Hvis $B = 0$ måtte $c_1 + \cdots c_n = 0$, og dermed er $x_1 = \cdots = x_n = 1$ en løsning til (3.1). Det er desuden klart, at s er et helt tal. Sæt nu

$$t = \frac{Bs}{A}.$$

Så er t et helt tal, og vi har ligheden

$$At + Bs = 0. \tag{3.2}$$

Lad $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{Z}$ være givet så $\mu_1 c_1 + \cdots + \mu_k c_k = A$. Sæt $\lambda_i = t\mu_i$ for $i = 1, \ldots, k$. Vi har altså

$$\lambda_1 c_1 + \cdots \lambda_k c_k = At. \tag{3.3}$$

Definér $\lambda = \max_i |\lambda_i|$. Af Korollar 2.4 på side 3 får vi, at der findes $a, d > 0$ så $\{a + jd \mid |j| \leq \lambda\} \cup \{sd\}$ er monokromatisk. Hvis vi så definerer

$$x_i = \begin{cases} a + \lambda_i d & \text{for } i \leq k \\ sd & \text{for } i > k \end{cases}$$

løser x_i'erne (3.1). Det ses ved direkte udregning:

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = a(c_1 + \cdots + c_k) + d(c_1\lambda_1 + \cdots c_k\lambda_k) + sd(c_{k+1} + \cdots + c_n) = d(At + Bs) = 0$$

som ønsket.

Lad os vise den anden implikation ved modstrid. Antag at *ingen* ikke tomme delmængder af c_i'erne summer til nul. Vi vil nu finde en farvning af $\mathbb{N}$ således at (3.1) *ikke* har nogen monokromatiske løsninger. Dette fås af følgende påstand.

Påstand. Hvis p er et primtal, der *ikke* går op i nogen ikke-tomme delsummer af c_i'erne, så har (3.1) ikke nogen monokromatiske løsninger mht super modulo p farvningen.

Da der kun er endeligt mange c_i'er, og ingen af deres delsummer er nul, kan vi sagtens finde et primtal der ikke går op i nogen af delsummerne – man kan fx bare vælge et, der er meget stort. Det p giver os en farvning, nemlig smod p farvningen, så (3.1) ikke har nogen monokromatiske løsninger. Altså giver påstanden det ønskede.

For at gøre forvirringen komplet, vil vi vise påstanden ved modstrid. Så lad os antage, at vi for et primtal p har en monokromatisk løsning mht. smod p farvningen. Hvis vi nu kan vise, at p går op i en ikke tom delsum af c_i'erne er vi færdige.

Lad $x_1, \dots, x_n$ være en monokromatisk løsning til (3.1). Lad nu d være givet så $x_i d \in \mathbb{Z}$ for alle i. Sæt nu

$$\mu = \frac{d}{\mathrm{gcd}_i(x_i d)},$$

så af Lemma 3.6 på side 4 får vi, at $\mu x_1, \dots, \mu x_n$ også er monokromatisk. Det er også klart en løsning til (3.1), og tilmed er den heltallig og opfylder $\mathrm{gcd}_i(\mu x_i) = 1$. Lad os for nemheds skyld kalde denne løsning for x_i.

Lad os nu nummerere x_i'erne efter hvorvidt p går op i dem eller ej. Sæt de x_i'er p *ikke* går op i på de første k pladser, og sæt resten på de sidste $n - k$ pladser. Da $\mathrm{gcd}_i(x_i) = 1$ kan p ikke dele dem allesammen, så $k \geq 1$.

Da x_i'erne løser (3.1) løser de specielt ligningen, hvis vi betragter den modulo p,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \equiv 0 \pmod{p}.$$

De sidste $n - k$ af x_i'erne er delelige med p, så når vi regner modulo p er de nul, dvs at

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i \equiv 0 \pmod{p}.$$

Da p ikke går op x_i for $i \leq k$, og da x_i'erne har samme farve mht. smod p farvningen, må $x_i \equiv x_j \pmod{p}$ for $i, j \leq k$, per definition af smod p farvningen. Dvs at

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_k \pmod{p}.$$

Kald den fælles værdi for y. Vi har altså at

$$0 \equiv \sum_{i=1}^{k} c_i x_i \equiv \left(\sum_{i=1}^{k} c_i\right) y \pmod{p}.$$

Dvs at p går op i $\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\right) y$. Da y netop var defineret som den fælles værdi modulo p af de første k x_i'er, der jo netop ikke kunne deles med p, går p ikke op i y. Da p er et primtal, må det derfor gælde, at p går op i $\sum_{i=1}^{k} c_i$, og vi har derfor vores ønskede modstrid. $\square$

4 Rados Sætning for et lineært ligningssystem

Vi vil nu generalisere Rados Sætning til at gælde for lineære ligningssystemer med flere ligninger. Alle linearkombinationer i det følgende er over $\mathbb{Q}$.

4.1 Søjlebetingelsen

Definition 4.1 (Søjlebetingelsen)**.** Lad C være en matrix med søjler $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n$. C siges at opfylde *søjlebetingelsen* hvis søjlerne kan nummereres således at vi kan finde $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n = n$, sådan at hvis vi sætter

$$A_i = \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} \underline{c}_j$$

er følgende opfyldt

- $A_1 = 0$.
- A_i kan skrives som en linearkombination af $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{i-1}$ for $i > 1$.

4.2 Regulære lineære ligningssystemer opfylder søjlebetingelsen

Sætning 4.2 (Rados Sætning for lineære ligningssystemer)**.** *Lad C være en heltallig matrix. Ligningssystemet $C\underline{x} = 0$ er regulært på $\mathbb{N}$ $\iff$ C opfylder søjlebetingelsen.*

Lad os først vise $\Rightarrow$. Vi får brug for følgende definition.

Definition 4.3. Lad C være en matrix. Lad $\{\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_k\}$ være en delmængde af C's søjler således at $\underline{c}_1 + \cdots + \underline{c}_k \neq 0$. Definér nu

$$E(\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_k) = \{p \mid \underline{c}_1 + \cdots + \underline{c}_k \equiv 0 \pmod p\}.$$

Hvis nu A er en sum af nogle andre af C's søjlevektorer (ikke nogen fra $\{\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_k\}$) således at A ikke er en linearkombination af $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_k$ sætter vi

$$E(\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_k; A) = \{p \mid Ap^m \text{ er en linearkombination af } \underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_k \text{ modulo } p^{m+1} \text{ for et } m \geq 0\}.$$

Vi sætter nu E til at være foreningen af alle sådanne $E(\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_k)$'ere og $E(\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_k; A)$'ere.

Lemma 4.4. *E er en endelig mængde.*

Bevis. Hvis vi kan vise, at $E(\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_k)$ og $E(\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_k; A)$ er en endelige mængder for alle forskellige $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$ og A er vi færdige, for E er en endelig forening af disse, og vil derfor selv være endelig.

$E(\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_k)$ er klart en endelig mængde, idet tilpas store p ikke kan gå op i $\underline{c}_1 + \cdots + \underline{c}_k$. Så lad $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_k$ være givet, og lad A være en sum af nogen af de resterende søjler. Da A ikke er en linearkombination af $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_k$ findes en vektor $\underline{u}$ der er ortogonal på alle $\underline{c}_i$'erne, men ikke på A, dvs. $\underline{u} \cdot \underline{c}_i = 0$ for alle i, men $\underline{u} \cdot A \neq 0$. $\underline{u}$ er rationel, men vi kan skalere den med en passende konstant så både $\underline{u}$ og $\underline{u} \cdot A$ er heltallig. Antag nu, at Ap^m er en linearkombination af $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_k$ for et m modulo p^{m+1}, dvs.

$$Ap^m \equiv \underline{c}_1 x_1 + \cdots + \underline{c}_k x_k \pmod{p^{m+1}},$$

hvor vi regner modulo p^{m+1} koordinatvis. Hvis vi nu tager prikprodukt med $\underline{u}$ på begge sider får vi $(\underline{u} \cdot A)p^m$ på VS og

$$u \cdot (\underline{c}_1 x_1 + \cdots + \underline{c}_n x_k) = (\underline{u} \cdot \underline{c}_1)x_1 + \cdots (\underline{u} \cdot \underline{c}_k)x_k = 0$$

på HS. Så alt i alt har vi at

$$(\underline{u} \cdot A)p^m \equiv 0 \pmod{p^{m+1}},$$

altså at $p|(\underline{u} \cdot A)$. Men det kan højst lade sig gøre for endeligt mange primtal p, som ønsket. □

Vi er nu klar til at vise $\Rightarrow$ i Sætning 4.2. Antag at vi har et ligningssystem $Cx = 0$, der er regulært. Lad p være et primtal. Da E er en endelig mængde, kan vi vælge p således at $p \notin E$. Da $Cx = 0$ er regulær, findes specielt en monokromatisk løsning $x_1, \ldots, x_n$ mht. smod p farvningen.

Vi kan ordne x_i'erne efter rang. Søjlerne i C skal selvfølgelig permuteres tilsvarende. Se bemærkningen til Lemma 3.3 på side 3 for definitionen af rank. Vi finder $k_i, m_i, i = 1, 2, \ldots, t$ så

$$\operatorname{rank}(x_i) = \begin{cases} m_1 & \text{for } 1 \le i \le k_1 \\ m_2 & \text{for } k_1 < i \le k_2 \\ \vdots & \vdots \\ m_t & \text{for } k_{t-1} < i \le k_t \end{cases}$$

og $m_1 < m_2 < \cdots < m_t$. Lad a betegne den fælles farve mht. smod p farvningen. Så hvis vi skriver x_i som et polynomium af p er a koefficienten til det led, der har den mindste grad, altså er

$$x_i = ap^{\operatorname{rank}(x_i)} + \text{ led at højere grad.}$$

Vi erstatter nu alle x_i'er med $x_i p^{-m_1}$. Vi har stadig en monokromatisk løsning, men nu er den mindste rang m_1 lig med nul.

De x_i'er, der ikke har rang nul, dvs for $i > k_1$, er delelige med p. Så da

$$\underline{c}_1 x_1 + \cdots + \underline{c}_n x_n = 0,$$

er

$$\underline{c}_1 x_1 + \cdots + \underline{c}_{k_1} x_{k_1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

For $i \le k_1$ er $x_i \equiv a \pmod{p}$, så alt i alt har vi

$$(\underline{c}_1 + \cdots + \underline{c}_{k_1})a \equiv 0 \pmod{p}.$$

Det er klart, at p ikke deler a, så p må dele $\underline{c}_1 + \cdots + \underline{c}_{k_1}$, dvs. at $\underline{c}_1 + \cdots \underline{c}_{k_1} \equiv 0 \pmod{p}$. Antag nu for modstrid, at $\underline{c}_1 + \cdots + \underline{c}_{k_1} \neq 0$. Så ville $p \in E(\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{k_1}) \subseteq E$, men det er modstrid mod antagelsen om, at $p \notin E$, så derfor må vi have, at

$$\underline{c}_1 + \cdots + \underline{c}_{k_1} = 0,$$

hvilket præcis er første betingelse i søjlebetingelsen. Lad nu

$$A_j = \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} \underline{c}_i,$$

for $j > 1$. Vi har, at $Cx = 0$, så specielt er

$$\sum_{i=1}^{k_{j-1}} \underline{c}_i x_i + A_j p^{m_j} a \equiv 0 \pmod{p^{m_j+1}}.$$

Da p ikke deler a har a en invers modulo p^{m_j+1}, lad os kalde den b. Ved at gange med b på begge sider og flytte lidt rundt får vi nu

$$A_j p^{m_j} \equiv \sum_{i=1}^{k_{j-1}} (-b)\underline{c}_i x_i \pmod{p^{m_j+1}}.$$

Så $A_j p^{m_j}$ er altså skrevet som en linearkombination af $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{k_{j-1}} \pmod{p^{m_j+1}}$. Antag nu, at A_j ikke er en linearkombination af $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{k_{j-1}}$. Så ville $p \in E(\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{k_{j-1}}; A_j) \subseteq E$, men det har vi jo netop antaget at p ikke er. Dvs at A_j *er* en linearkombination af $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{k_{j-1}}$. Dette gælder for alle $1 < j \le t$, hvilket præcis er anden betingelse i søjlebetingelsen. Søjlebetingelsen er altså opfyldt, hvilket viser $\Rightarrow$ i Rados Sætning.

4.3 Homogene og regulære mængdefamilier

Vi får brug for følgende definition, for at kunne vise den anden implikation.

Definition 4.5. Lad $\mathscr{A}$ være en familie af endelige delmænger af $\mathbb{N}$. $\mathscr{A}$ kaldes *homogen*, hvis

$$A \in \mathscr{A}, a \in \mathbb{N} \Rightarrow aA \in \mathscr{A}.$$

Definition 4.6. $\mathscr{A}$ kaldes *regulær*, hvis der for alle endelige farvninger af $\mathbb{N}$ findes en monokromatisk $A \in \mathscr{A}$.

Sætning 4.7. *Lad $\mathscr{A}$ være homogen og regulær, og lad $M > 0$. Hvis $\mathbb{N}$ er endeligt farvet, findes $A \in \mathscr{A}, d > 0$ så*

$$a + \lambda d, \quad a \in A, |\lambda| \leq M,$$

alle har samme farve.

Bevis. Lad r være antallet af farver. Af kompakthedsprincippet ved vi, at der findes et R således at enhver r-farvning af $[R]$ giver en monokromatisk $A \in \mathscr{A}$ så $A \subseteq [R]$.

Lad χ være en r-farvning. Vi definerer nu en r^R-farvning χ^* ved

$$\chi^*(\alpha) = \chi^*(\beta) \iff \chi(\alpha i) = \chi(\beta i) \quad \forall\, 1 \leq i \leq R.$$

Vi har brug for netop r^R farver. Det kan ses ved at betragte $\chi^*(\alpha)$ som en R-dimensional vektor, hvor den i'te indgang er αi. Hver af indgangene kan have r forskellige farver, og der er R af dem.

Sæt nu $T = MR^{R-1}$ (big one...). Af van der Waerdens sætning ved vi, at vi kan finde en aritmetisk progression af længde $2T + 1$, der er monokromatisk under χ^*. Dvs der findes b, e således at

$$\chi^*(c + \mu e), \quad |\mu| \leq T$$

alle har samme farve. Hvis vi nu betragter $c[R]$ som værende farvet med χ, får vi, at der findes en $A' \in \mathscr{A}$ således at cA' er χ-monokromatisk. Det gælder, da en r-farvning af $c[R]$ blot svarer til en r-farvning af $[R]$, og der ved vi, at der altid findes en monokromatisk $A' \in \mathscr{A}$. Lad nu $A = cA'$. Per homogenitet af $\mathscr{A}$ har vi, at $A \in \mathscr{A}$.

Lad nu $a \in A$ være givet. Så findes et $a' \in A'$ så $a = a'c$. Lad nu

$$m = \operatorname{lcm} A', \quad d = em.$$

For $|\lambda| \leq M$ har vi nu

$$a + \lambda d = a'c + e\lambda m = a'\left(c + e\lambda \frac{m}{a'}\right).$$

Vi har at $A' \subseteq [R]$, så $\left|\frac{m}{a'}\right| \leq R^{R-1}$. Altså har vi, at

$$\left|\lambda \frac{m}{a'}\right| \leq MR^{R-1} = T,$$

så $c + e\lambda \frac{m}{a'}$ er altså i vores χ^*-monokromatiske aritmetiske progression. Så

$$\chi^*\left(c + e\lambda \frac{m}{a'}\right) = \chi^*(c).$$

Per definition af χ^* betyder det specielt, da $a' \leq R$, at

$$\chi\left(a'\left(c + e\lambda\frac{m}{a'}\right)\right) = \chi(a'c).$$

Altså at

$$\chi(a + \lambda d) = \chi(a).$$

Dette gælder for alle $a \in A, |\lambda| \leq M$. Vi ved, at A er χ-monokromatisk, dvs. at $\chi(a)$ er den samme for alle a. Så vi får altså, at $\chi(a + \lambda d)$ har samme farve for alle $a \in A, |\lambda| \leq M$, som ønsket. □

Korollar 4.8. *Lad $\mathscr{A}$ være homogen og regulær, og lad $M, c > 0$. Hvis $\mathbb{N}$ er endeligt farvet, findes $A \in \mathscr{A}, d > 0$ så*

$$a + \lambda d, \quad a \in A, |\lambda| \leq M$$

og

$$cd$$

alle har samme farve.

Bevis. Dette vises ved induktion over antallet af farver, nøjagtigt ligesom vi viste Sætning 2.2 på side 2 ud fra van der Waerdens sætning. □

4.4 $N_{m,p,c}$-mængder

Til at afslute beviset, får vi brug for følgende lidt mystiske definition

Definition 4.9. Lad $m, p, c > 0$ være hele tal. Vi definerer

$$N_{m,p,c} = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}) \mid \text{nogen } \lambda_i \neq 0, \text{ den første ikke-nul } \lambda_i = c, \text{ alle andre } |\lambda_i| \leq p\}.$$

En mængde $S \subseteq \mathbb{N}$ kaldes en (m, p, c)-mængde, hvis der findes $y_1, \ldots, y_{m+1} \in \mathbb{Q}$ så

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i y_i \mid (\lambda_1, \ldots \lambda_{m+1}) \in N_{m,p,c} \right\}.$$

Sætning 4.10. *Lad $m, p, c > 0$. Hvis $\mathbb{N}$ er endeligt farvet, findes en monokromatisk (m, p, c)-mængde S.*

Bevis. Vi vil vise dette ved induktion over m.

$\boldsymbol{m = 1}$ Vi har

$$N_{1,p,c} = \{(0, c)\} \cup \{(c, \lambda) \mid |\lambda| \leq p\}.$$

Vi vil bruge Korollar 2.4 på side 3. Sæt i korollaret $k = p, s = c$. Så får, vi at der findes et a så

$$\{a + \lambda d \mid |\lambda| \leq p\} \cup \{cd\}$$

er monokromatisk. Sæt $y_1 = \frac{a}{c}, y_2 = d$, så er $(1, p, c)$-mængden

$$S = \{cd\} \cup \{a + \lambda d \mid |\lambda| \leq p\},$$

hvilket vi jo netop viste, var monokromatisk.

$\boldsymbol{m \Rightarrow m+1}$ En $(m+1,p,c)$-mængde er en (m,p,c)-mængde, hvor der til alle elementer er lagt et ekstra $\lambda_{m+2}y_{m+2}$ til, hvor $|\lambda_{m+2}| \leq p$, og hvor der er tilføjet det tilfælde, hvor $\lambda_{m+2} = c$ og $\lambda_i = 0$ for $i \leq m+1$.

Induktionsantagelsen betyder specielt, at mængden af (m,p,c)-mængder er regulær. Den er også klart homogen. Altså kan vi bruge Korollar 4.8 på forrige side. Hvis vi bruger korollaret med $M = p$ og vælger $y_{m+2} = d$ hvor d'et kommer fra korollaret, så får vi netop, at vi kan lægge det ønskede ekstra led til alt i vores (m,p,c)-mængde, og hver gang få noget i samme farve.

Korollaret giver også, at $cd = cy_{m+2}$ har samme farve som resten, hvilket præcis er det vil skal bruge, for at klare det tilfælde hvor $\lambda_{m+2} = c$ og $\lambda_i = 0$ for $i \leq m+1$. Så per induktion er sætningen bevist. □

Vi er nu klar til at vise, at hvis en matrix C opfylder søjlebetingelsen, så er $Cx = 0$ regulær. Vi vil finde en løsning på formen

$$x_i = \lambda_{i1}y_1 + \cdots \lambda_{it}y_t,$$

hvor $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}$ og y_i'erne kan vælges frit. Hvis vi så kan vise, at vi kan finde $m,p,c > 0$ så

$$(\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{it}) \in N_{m,p,c}$$

for alle i, må alle x_i ligge i den samme (m,p,c)-mængde, som vi ifølge sætningen ovenfor kan vælge monokromatisk.

4.5 Afslutning af beviset for Rados Sætning

Antag at C opfylder søjlebetingelsen. For $j > 1$ kan A_j skrives som en linearkombination af $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_{k_j-1}$. Sæt nu

$$\begin{aligned}
\underline{z}_1 &= \underline{c}_1 + \cdots + \underline{c}_{k_1} \\
\underline{z}_2 &= -A_2 + \underline{c}_{k_1+1} + \cdots + \underline{c}_{k_2} \\
&\vdots \\
\underline{z}_t &= -A_t + \underline{c}_{k_{t-1}+1} + \cdots + \underline{c}_n
\end{aligned}$$

Så er $\underline{z}_j = 0$ for alle j, og de er alle skrevet som en linearkombination af $\underline{c}_i$'er. Lad os nu skrive $\underline{z}_i$'erne som vektorer i basen $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$ ($\underline{c}_i$'erne udgør ikke nødvendigvis en basis, men det betyder ikke noget). De får følgende form

$$\begin{array}{rccccc}
\underline{w}_1 = & 1,\ldots,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\underline{w}_2 = & - & 1,\ldots,1 & 0 & 0 & 0 \\
\underline{w}_3 = & - & - & 1,\ldots,1 & 0 & 0 \\
\vdots & - & - & - & \ddots & 0 \\
\underline{w}_t = & - & - & - & - & 1,\ldots,1
\end{array}$$

De vandrette streger er de indgange der kommer fra $-A_j$'erne. Vi ved blot, at de er rationelle. Alle disse $\underline{w}_i$'ere er løsninger til $C\underline{x} = 0$. Hvis vi nu ganger dem allesammen med den samme passende konstant, så alle indgange bliver hele tal, er de stadig løsninger til $C\underline{x} = 0$. Kald denne konstant c.

Lad os nu betegne den i'te indgang i $\underline{w}_j$ med w_{ji}. Sæt nu

$$\lambda_{ij} = w_{ji}.$$

Hvis vi nu definerer $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ved

$$x_i = \lambda_{i1} y_1 + \cdots \lambda_{it} y_t,$$

er $\underline{x}$ en linearkombination af w_j'erne, og dermed er $\underline{x}$ en løsning til $C\underline{x} = 0$. Vi mangler nu blot at vise, at vi kan finde $m, p, c > 0$ så

$$(\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{it}) \in N_{m,p,c}$$

for alle i. Vi har defineret c. Den første ikke-nul indgang i $(\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{it})$ er netop c, som ønsket. For at dimensionen skal passe, må $m = t-1$. Hvis vi så sætter $p = \max |\lambda_{ij}|$ har vi det ønskede, og vi har dermed vist Rados Sætning.