# Der findes transcendente tal

Jonas Lindstrøm Jensen (jonas@imf.au.dk)

December 2011

## 1 Indledning

**Definition 1.** Et tal $\alpha \in \mathbb{R}$ kaldes *algebraisk*, hvis der findes et polynomium $f(x) = a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ med $a_0 \neq 0$ og $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ så $f(\alpha) = 0$. Vi siger at graden af $\alpha$ er $n \in \mathbb{N}$, hvis der ikke findes noget polynomium af lavere grad, der har $\alpha$ som rod. Et tal der ikke er algebraisk kaldes *transcendent*.

I denne note vil vi vise eksistensen af transcendente tal. Idéen er at definere de såkaldte *Liouville-tal*, vise at et der findes et Liouville-tal, og derefter vise, at Liouville-tal ikke kan være algebraiske. Lad os først definere hvad det vil siger at være et Liouville-tal.

**Definition 2.** Et tal $\alpha \in \mathbb{R}$ kaldes et *Liouville-tal*, hvis der for alle $n \in \mathbb{N}$ findes $p, q \in \mathbb{Z}$ med $q \geq 2$ således at

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}. \tag{1}$$

Altså kan et Liouville-tal approksimeres utrolig godt af brøker – mere om det i en anden note.

## 2 Der findes et Liouville-tal

Lad os nu vise, at der findes Liouville-tal. Vi påstår at Liouvilles konstant

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!}$$

er et Liouville-tal. For hvert $n \in \mathbb{N}$ skal vi nu kunne finde $p, q \in \mathbb{Z}$ så (1) er opfyldet. Vi påstår at

$$p = \sum_{j=1}^{n} 10^{n!-j} \qquad q = 10^{n!}$$

opfylder det ønskede. For så er

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \sum_{j=n+1}^{\infty} 10^{-j!} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} + \frac{1}{10^{(n+2)!}} + \frac{1}{10^{(n+3)!}} + \cdots,$$

og dette er lig med $0,0\cdots010\cdots010\cdots010\cdots$, hvor det første et-tal er på den $(n+1)!$'te plads, det næste er på den $(n+2)!$'te plads osv. Det er nu skarpt mindre end $\frac{10}{10^{(n+1)!}} = 10\cdot(10^{-n!})^{n+1}$, idet det jo er et tal på formen $0,0\cdots010\cdots$, hvor det eneste et-tal er på den $((n+1)!-1)$'te plads. Det tal er mindre end $(10^{-n!})^n = \frac{1}{q^n}$, og dermed har vi vist, at $\alpha$ er et Liouville tal.

# 3 Liouville-tal er transcendente

Vi vil nu vise, at algebraiske tal *ikke* kan være Liouville-tal, for i så fald må ovenstående $\alpha$ jo være transcendent, hvilket vi gerne ville vise. Vi viser nu følgende sætning.

**Theorem 3.** *Hvis $\alpha \in \mathbb{R}$ er algebraisk af grad $n > 0$, så findes $c > 0$ således at for alle $p, q \in \mathbb{Z}$ med $q \neq 0$ gælder at*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}.$$

*Proof.* Lad $f$ være et polynomium af grad $n$ med $f(\alpha) = 0$. Lad nu

$$M = \max_{x\in[\alpha-1,\alpha+1]} |f'(x)|,$$

og lad $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ være de rødder $f$ har, der er forskellige fra $\alpha$. Vælg nu et positivt $c \in \mathbb{R}$ så

$$c < \min\left\{1, \frac{1}{M}, |\alpha - \alpha_1|, \ldots, |\alpha - \alpha_m|\right\}.$$

Antag for modstrid, at der findes $p, q \in \mathbb{Z}$ så

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{c}{q^n}. \tag{2}$$

Vi kan ydermere antage at $q > 0$. Så er

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq c < \min\left\{1, \frac{1}{M}, |\alpha - \alpha_1|, \ldots, |\alpha - \alpha_m|\right\}.$$

Dermed må det gælde at

$$\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1],$$

men $p/q$ er ikke et af tallene $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, og der er heller ikke nogen af disse, der ligger i intervallet mellem $\frac{p}{q}$ og $\alpha$. Af Middelværdisætningen[1] findes nu $x_0$ i intervallet mellem $\alpha$ og $\frac{p}{q}$ så

$$f'(x_0) = \frac{f(\alpha) - f(p/q)}{\alpha - p/q},$$

[1] Se fx *http://da.wikipedia.com/middelværdisætningen*

og altså

$$\left|\frac{f(p/q)}{f'(x_0)}\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|. \tag{3}$$

Da $f$ er et polynomium med heltalskoefficienter findes er der $c_0, \cdots, c_n \in \mathbb{Z}$ så

$$\begin{aligned}|f(p/q)| &= \left|c_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + c_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\frac{p}{q} + c_n\right| \\ &= \frac{1}{q^n}\left|c_0p^n + c_1p^{n-1}q + \cdots + c_{n-1}pq^{n-1} + c_nq^n\right| \\ &\geq \frac{1}{q^n}\end{aligned} \tag{4}$$

idet $|c_0p^n + c_1p^{n-1}q + \cdots + c_{n-1}pq^{n-1} + c_nq^n| \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, da $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$ og $f(p/q) \neq 0$. Men da

$$|f'(x_0)| \leq M \tag{5}$$

og

$$\frac{1}{M} > c \tag{6}$$

må

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \overset{(3)}{=} \left|\frac{f(p/q)}{f'(x_0)}\right| \overset{(4)+(5)}{\geq} \frac{1}{q^nM} \overset{(6)}{>} \frac{c}{q^n} \overset{(2)}{\geq} \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

hvilket er en modstrid, og sætningen er da bevist. □

Nu mangler vi blot det følgende lemma, for at færdiggøre vores bevis.

**Lemma 4.** *Et Liouville-tal er transcendent.*

*Proof.* Lad $\alpha \in \mathbb{R}$ være et Liouville-tal. Antag for modstrid, at $\alpha$ er algebraisk. Af theorem 3 findes der så et $n \in N$ og $c > 0$ således at

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n} \tag{7}$$

for alle $p, q \in \mathbb{Z}$. Vælg nu $k \in \mathbb{N}$ således at

$$\frac{1}{2^k} \leq c$$

og lad $m = k + n$. Da $\alpha$ er et Liouville-tal, findes $a, b \in \mathbb{Z}$ med $b \geq 2$ således at

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^m}.$$

Men

$$\frac{1}{b^m} = \frac{1}{b^kb^n} \leq \frac{1}{2^k}\frac{1}{b^n} \leq \frac{c}{b^n}$$

hvilket er i modstrid mod (7). □

Det afslutter vores bevis, idet Liouvilles konstant må være et eksempel på et transcendent tal. Kommentarer og rettelser kan sendes til jonas@imf.au.dk.