Fraktaler

Mandelbrots Mængde

Foredragsnoter

Af Jonas Lindstrøm Jensen

Institut For Matematiske Fag – Århus Universitet

Indhold

Kapitel 1

Indledning

Kaos er et begreb, der er blevet ekstremt udbredt inden for mange videnskaber de senere år – så forskellige videnskaber som matematik, geografi, samfundsfag og økonomi bruger begrebet. Inden for alle disse fag handler kaosteori om, at der findes situationer, hvor meget små ændringer kan give meget voldsomme konsekvenser. Set på med tradionelle videnskabelige briller, er sådanne situationer umiddelbart svære at forklare, idet de kan virke helt tilfældige. Her kan kaosteorien hjælpe, idet den prøver at finde mønstre i sådanne kaotiske situationer, så vi kan forklare, hvad der sker.

I matematik og økonomi bliver begrebet kaos bl.a. brugt om fraktaler og om såkaldt ikke-kontinuerte matematiske modeller, også kalder katastrofeteori. I disse noter vil vi primært se på Mandelbrots fraktal, mens vi til sidst vil se lidt på ikke-kontinuerte matematiske modeller.

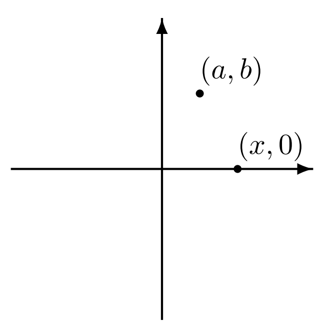
Kapitel 2

Komplekse tal

For at vi kan forstå matematikken bag fraktaler, skal vi først kigge lidt på et par matematiske begreber. Det første er komplekse tal.

2.1 Definition

Man kan forestille sig de reele tal som en uendelig lang linje med 0 i ”midten” (selvom det måske er lidt svært at afgøre, hvad der er midten af en uendelig lang linje). Forestil dig nu, at man istedet for at se på en linje, ser på et todimensionelt plan, altså punkter i et koordinatsystem. Dem kan man skrive som (a, b) hvor a, b er almindelige reele tal. Lad os kalde sådanne punkter for *komplekse tal* og lad os skrive $\mathbb{C}$ for at betegne mængden af dem.



Læg mærke til, at den linje der repræsenterede de reele tal stadig er med, nemlig som førsteaksen i vores koordinatsystem. Så et reelt tal x kan nu skrives som et komplekst tal, nemlig som $(x, 0)$ – vi vil dog oftest bare skrive x i sådan et tilfælde.

Hvordan kan man nu regne med disse punkter?

2.2 Aritmetik

Hvis vi nu beslutter, at man lægger to punkter sammen ved at sige

$$(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y).$$

Eksempel 2.2.1. Vi har at $(1,4)+(2,3) = (1+2, 4+3) = (3,7)$. Læg mærke til, at vi stadig regner med reele tal som vi plejer. Som bekendt er $3 + 5 = 8$ og

$$(3,0) + (5,0) = (8,0).$$

At man sægger sådan sammen kommer nok ikke den store overraskelse, det er nemlig også sådanman lægger vektorer sammen, hvis i allerede kender til det. Problemet kommer, når man skal lave multiplikation. Det gør vi på følgende måde:

$$(a,b) \cdot (x,y) = (ax - by, ay + bx).$$

Eksempel 2.2.2. Vi har at

$$(1,2) \cdot (3,4) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4, 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3) = (-5, 10).$$

Også her opfører de reele tal sig som de plejer, fx er $2 \cdot 3 = 6$ og

$$(2,0) \cdot (3,0) = (2 \cdot 3 - 0 \cdot 0, 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3) = (6,0)$$

Man kan også trække fra og dividere, men det vil vi ikke komme ind på her.

2.3 Kvadratroden af -1

Vi har bemærket, at de reele tal stadig er med i de komplekse tal, og at de opfører sig som de plejer, så de komplekse tal er altså en *udvidelse* af de reele tal. Læg nu mærke til, hvad der sker hvis vi udregner produktet af $(0,1)$ med sig selv.

$$(0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

Men $(-1,0)$ er jo det reele tal -1. Altså har vi fundet et tal $(0,1)$, der ganget med sig selv giver -1 – det er det, vi kalder kvadratroden af -1! Den er ikke mulig at finde med de tal i allerede kender, og det en af de vigtigste grunde til, at de komplekse tal er smarte at have. Nu har alle tal, både positive og negative, en kvadratrod. Det har nogle spændende matematiske konsekvenser, fx vil en andengradslingning nu altid have løsninger. Vi kalder som regel tallet $(0,1)$ for i, og skriver $a + bi$ isteder for (a,b).

Bemærk at når vi har et ubekendt komplekst tal, vil vi ofte bare betegne det med ét bogstav, som regel c eller z, for overskuelighedens skyld.

2.4 Opgaver

Opgave 1. Udregn $(3,1) \cdot (5,8)$.

Opgave 2. Udregn $(\frac{1}{2}, 0) \cdot (\frac{\pi}{3}, 0)$.

Opgave 3. Find en kvadratrod af -9.

Opgave 4. Hvorfor giver det mening at skrive $a + bi$ istedet for (a,b), når nu $i = (0,1)$?

Opgave 5. Bevis multiplikation med komplekse tal er kommutativ, dvs at det er ligemeget i hvilken rækkefølge man ganger to tal sammen.

Kapitel 3

Begrænsede og ubegrænsede talfølger

3.1 Hvad er en talfølge?

En *talfølge* er en uendelig lang følge af komplekse tal $z_1, z_2, \ldots$, altså har vi for hvert helt positivt tal n et tilsvarende z_n.

Vi siger nu at en talfølge $z_1, z_2, \ldots$ er begrænset, hvis der findes en cirkel med radius M og centrum i nul, således at *alle* tallene $z_1, z_2, \ldots$ ligger inde i cirklen. Bemærk at M kan være så stor vi vil, men den må ikke være *uendeligt* stor. En talfølge der ikke er begrænset, kalder vi sjovt nok for ubegrænset.

Eksempel 3.1.1. Talfølgen $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), \ldots$ er ubegrænset, for hvis vi nu leger at vi har en cirkel med radius M, så vil (M, M) ligge udenfor cirklen.

Talfølgen $(1,0), (1,0), (1,0), \ldots$ er begrænset, idet en cirkel med radius 2 vil indeholde alle tallene.

3.2 Opgaver

Opgave 6. Er talfølgen $(1,0), (2,0), (3,0), \ldots$ begrænset?

Opgave 7. Er talfølgen $(10000000, 256123234), (10000000, 256123234), (10000000, 256123234), \ldots$?

Opgave 8. Hvad med talfølgen $(1/100, 0), (2/100, 0), (3/100, 0), \ldots$?

Opgave 9. Eller hvad med $(1,0), (-1,0), (1,0), (-1,0), \ldots$?

Opgave 10. I de af opgaverne ovenfor, hvor du fandt at talfølgen var begrænset, hvor stor skal vi vælge vores radius M, for at hele talfølgen kan være i cirklen?

Kapitel 4

Mandelbrot Mængden

4.1 Definition

Lad os definere en familie af funktioner $f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}$ ved

$$f_c(z) = z^2 + c.$$

Altså tager funktionen et komplekst tal som input, og giver et komplekst tal som output. Ydermere afhænger funktionen af det valgte komplekse tal c. Lad os prøve at regne et eksempel, nemlig $f_2(3)$. Bemærk at vi har valgt reele tal, men da de jo også er komplekse tal, og opfører sig som de plejer, er det helt okay.

$$f_2(3) = 3^2 + 2 = 11.$$

For $n \in \mathbb{N}$ lader vi nu f_c^n betegne sammensætningen af f_c med sig selv n gange

$$\underbrace{f_c \circ f_c \circ f_c \cdots \circ f_c}_{n},$$

dvs at vi fx har $f_c^3(z) = f_c(f_c(f_c(z)))$.

Hvis vi udregner ovenstående med $z = 1$, $c = 2$ og $n = 3$ får vi

$$f_2^3(1) = f_2(f_2(1^2 + 2)) = f_2(f_2(3)) = f_2(3^2 + 2) = f_2(11) = 11^2 + 2 = 123$$

Definition 4.1.1 (Mandelbrotmængden)**.** Et komplekst tal (a, b) ligger i Mandelbrotmængden fraktal M hvis vi for for $c = (a, b)$ har at talfølgen $f_c^1(0), f_c^2(0), f_c^3(0), \ldots$ er begrænset.

Eksempel 4.1.2. Fx vil $c = (2, 0) = 2$ ikke ligge i Mandelbrotmængden, idet den tilsvarende talfølge klart vil være ubegrænset. De første par tal i talfølgen er udregnet her

$$\begin{aligned}
f_2^1(0) &= f_2(0) = 0^2 + 2 = 2 \\
f_2^2(0) &= f_2(f_2^1(0)) = 2^2 + 2 = 4 \\
f_2^3(0) &= f_2(f_2^2(0)) = 4^2 + 2 = 18 \\
f_2^4(0) &= f_2(f_2^3(0)) = 18^2 + 2 = 326 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Vi kan se at $f_2^n(0)$ bliver ret stor når n bliver stor – faktisk lige så stor vi vil have den. Derfor er talfølgen ubegrænset.

Så hvis vi skal tjekke om et givet komplekst tal $c \in \mathbb{C}$ ligger i Mandelbrotmængden, skal vi tjekke hvordan $f_c(f_c(f_c(\cdots f_c(f_c(0))\cdots)))$ udvikler sig, når vi smider flere og flere f_c'er på. Hvis tallene bevæger sig uendeligt langt væk fra $(0,0)$, må talfølgen være ubegrænset.

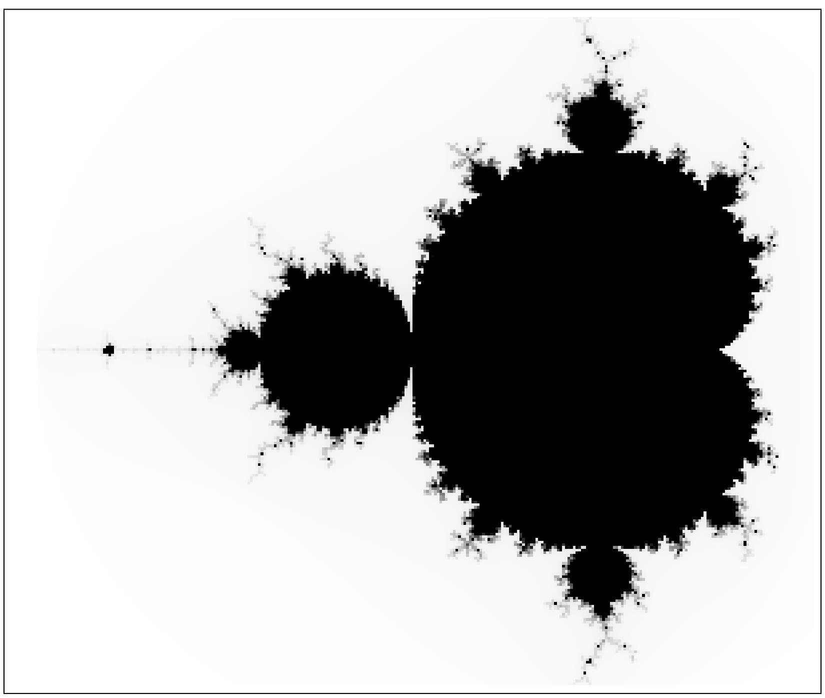
Problemet er nu, at vi jo kun kan tjekke endeligt mange tal i en talføgle. Vi vil nu se lidt på, hvordan vi alligevel kan tjekke, om et tal ligger i M. Følgende sætning siger, at hvis $f_c^n(0)$ har afstand større end 2 ned til $(0,0)$, så vil talfølgen være ubegrænset. Dvs at vi kan konkludere at det givne tal c ikke ligger i M.

Sætning 4.1.3. *Lad $c \in \mathbb{C}$. Hvis $|f_c^n(0)| \geq 2$ for et n, så vil talfølgen $z_1, z_2, \ldots$ være ubegrænset.*[1]

Eksempel 4.1.4. Af ovenstånde sætning får vi, ligesom vi bestluttede i Eksempel 4.1.2 på forrige side, at 2 ikke er i M, da $f_2^n(0)$ allerede er større end 2 for $n = 1$.

4.2 Billeder af Mandelbrots Mængde

Nu er vi i stand til at kunne tjekke, om et tal ligger i M. Det vi gør er, at vi ser på det komplekse plan lige omkring 0. Så løber vi en masse punkter (komplekse tal) igennem, hvor vi for hver af dem får en computer til at tjekke om de ligger i M eller ej, Hvis punktet ligger i M farver vi punktet sort, og hvis ikke farver vi det hvidt. Så får vi følgende billede:



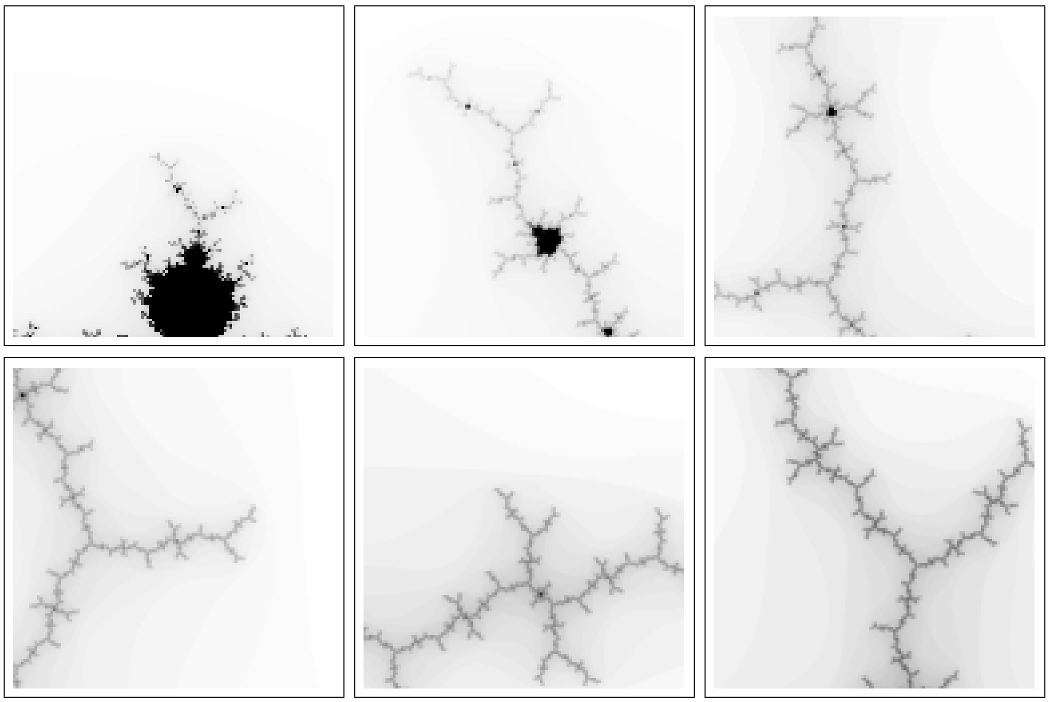
Mandelbrotmængden. Billedet er fra http://astronomy.swin.edu.au/ pbourke/fractals/mandelbrot/

De forskellige nuancer kommer ved, at man lader farven af punkt c afhænge af, hvor hurtigt $f_c^n(0)$ bliver større. Det kommer nok som noget af en overraskelse, at punkterne er fordelt i

[1] Læg mærke til at vi skriver $|(a,b)|$ for afstanden fra (a,b) ned til nul. Ifølge Pythagoras kan den udregnes ved $|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$.

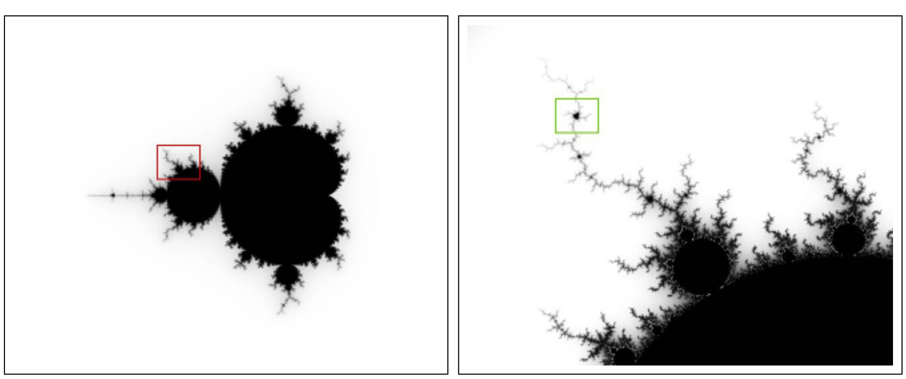
et sådant smukt mønster. Umiddelbart skulle man tro, at de sorte punkter ville lægge sig i en cirkel eller lignende; men vi får dette fantastiske mønster.

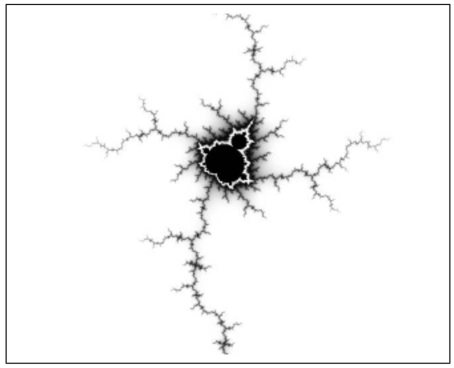
Noget endnu mere fantastisk sker, hvis vi zoomer rigtig meget ind. Det viser nedenstående billeder, hvor vi zoomer gradvist mere ind på den klump der er øverst på det store billede:



Her zoomer vi ind på $(-0.170337, -1.06506)$. *Billederne er fra http://astronomy.swin.edu.au/∼pbourke/fractals/mandelbrot/*

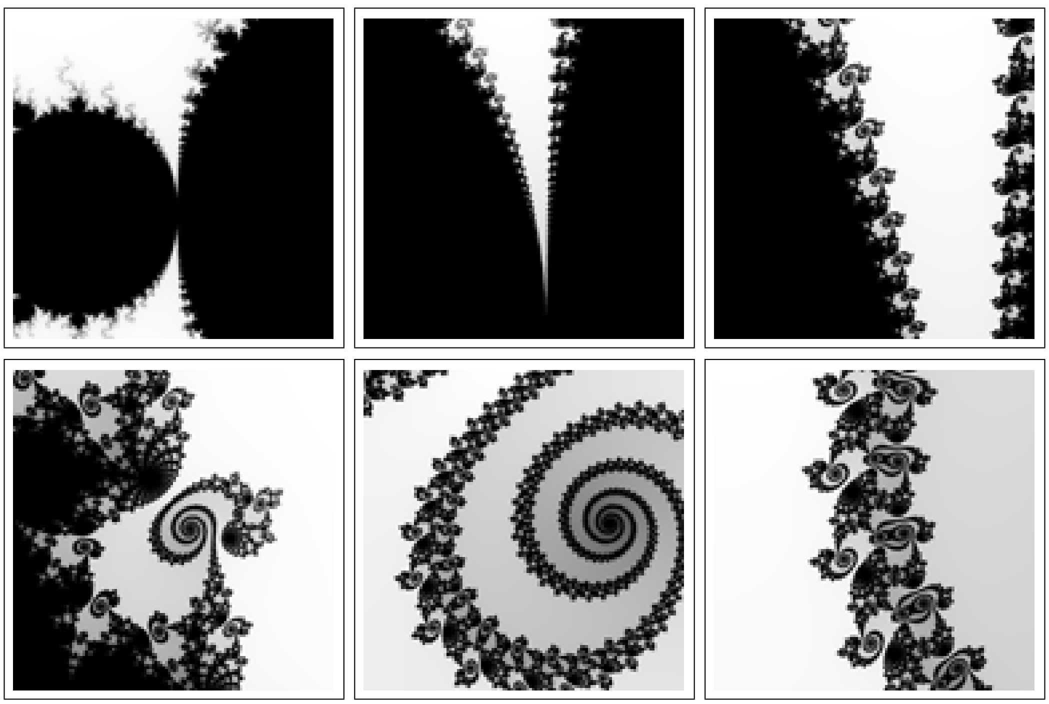
I de ovenstående billeder kan man se noget af det, der kendetegner fraktaler. Når man zoomer ind, vil figurer man har set før gentage sig. I dette tilfælde er det "lynene" der gentager sig igen og igen. Den lidt spøjse form mandelbrotmængden har, gentager sig også, når man zoomer ind, som man kan se på nedenstående billeder.





For hvert billede zoomer vi 10 gange ind. Firkanterne viser hvor det er vi zoomer ind. Billederne er fra http://www.3dartprints.com/Morgen/about/zoom.html

Hvis vi nu zoomer ind et andet sted, får vi følgende billedserie.



Her zoomer vi ind på $(0.761574 - 0.0847596)$. *Billederne er fra http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/fractals/mandelbrot/*

I både denne og den første billedserie har vi i det sidste billede zoomet 15625 gange længere ind end i det første!

Hvis du selv vil lege med at zoome rundt i Mandelbrotmængden, kan du gå ind på *http://www.fractalcenter.de/zoom.php?zoom=3*.

4.3 Kaos

Hvad er sammenhængen mellem disse fraktaler og kaosteori? Vi så, da vi zoomede ekstremt langt ind på fraktalen, at der stadig er et mønster. Der var både punkter der var i M og punkter der ikke var i M. Det betyder at hvis vi bevæger os bare ganske lidt rundt, vil vi gå fra punkter der er i M til punkter der ikke er i M ekstremt mange gange. Det vil være ganske *kaotisk*. Men ikke desto mindre er der et mønster – det kan vi jo se! Og det er netop på den måde, at Mandelbrots fraktalen er kaotisk.

4.4 Opgaver

Opgave 11. Beregn $f_3^4(0)$.

Opgave 12. Er $(1,0) = 1$ i M?

Opgave 13. Er $(0,1)$ i M?

Kapitel 5

Ikke-kontinuerte matematiske modeller

5.1 Matematisk modellering

På Århus Universitet har vi i flere gange haft besøg af kronprinsesse Marys far, John Donaldson, der bl.a beskæftiger sig med kaosteori. Hans felt hedder matematisk modellering, og det går ud på at lave matematiske modeller (altså at finde en slags formler) for ting fra virkeligheden. Et eksempel kan være, at man kan lave modeller for aktiemarkedet, vejret etc. Som regel er disse modeller *kontinuerte*, dvs at en lille ændring har små konsekvenser i modellen, og en stor ændring har store konsekvenser i modellen. Inden for vejret vil en lille temperaturstigning fx kun ændre vejret lidt.

Nogle gange har man dog matematiske modeller, der ikke opfører sig så pænt. Af og til har man eksempler på, at en meget lille ændring kan foresage meget voldsomme konsekvenser. Et eksempel er, hvis en bil rammer en mur. Indtil bilen rammer muren, er modellen pæn og kontinuert, men i det øjeblik bilen rammer muren, sker der ekstremt mange ting i løbet af meget kort tid – kaos.

Man kalder det *sommerfugleeffekten*, når meget små ændringer giver store konsekvenser.

Kapitel 6

Afsluttende bemærkninger

Videre studier af Mandelbrot og andre fraktaler er bedst gjort på internettet. Her er et par links:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set – *En god introduktion til matematikken bag Mandelbrotmængden*
- http://xaos.sourceforge.net/ – *Et program, der gør det muligt at zoome ind på Mandelbrotfraktalen.*
- http://www.ibiblio.org/e-notes/MSet/Contents.htm – *En lidt anden og noget grundigere indførelse i Mandelbrotmængden.*
- http://www.cs.princeton.edu/ wayne/mandel/gallery/ – *En masse billeder.*
- http://javaboutique.internet.com/Mandelbrot/ – *Et online-program til at zoome ind på fraktalen.*

Kommentarer og rettelser kan sendes til jonas@imf.au.dk.