

Matematikens grunder

kvalitativ kartläggning

Ann-Louise Ljungblad

ASKUNGE

Innehåll

Del I Matematikens grunder

Matematikens grunder	4
Ökade skillnader och minskad jämlikhet.....	5
Barnkonventionen och barns rättigheter	7
Aktuellt forskningsläge	9
Analys eller syntes.....	14
Elever i behov av särskilt didaktiskt stöd	17
Kvalitativ kartläggning.....	21

Del 2 Analysschema

Siffror och antal	23
Räkna med naturliga tal.....	23
Siffror.....	23
Taluppfattning 0-10.....	23
Taluppfattning 0-20.....	24
Ordningstal	25
Taluppfattning 0-100.....	25
Taluppfattning – upp mot tusentalen.....	26
Kommunikation och språk	27
Kunna kommunicera med matematik.....	27
Systematisera och gruppera.....	27
Matematikord	27
Symbolsäkerhet.....	28
Uppfatta matematikens budskap i vardagen och omvärlden	29
Matematiska mönster	30
Se, upptäcka och skapa mönster	30
Se och upptäcka matematikens mönster	30
Jämna och udda tal	31
Tiobasen	31
Positionssystemet.....	32
Positionssystemet med decimaler.....	32
Stora tal	33

Negativa tal	33
Räknelagar	33
Proportionalitet	34

Våra fyra räknesätt	35
Addition och subtraktion.....	35
Multiplikation.....	40
Division	41
Se mönstren i räknesätten.....	41

Avrundning	42
Tallinje	42
Avrunda till tiotal.....	42
Avrunda till hundratal.....	42
Avrunda till tusental	42
Avrunda till heltal	43
Avrunda till decimaler	43
Avrunda i affären.....	43

Våra fyra ”nya” räknesätt	44
Huvudräkning	45
Papper- och pennräkning	45
Miniräkneräkning.....	46
Överslagsräkning.....	46

Tidsbegreppet	48
Nutid, dåtid och framtid.....	49
Tidsbegreppet.....	49
Datum och personnummer.....	49
Analoga klockan.....	50
Digitala klockan.....	50
Räkna ut tiden mellan två klockslag.....	50
Räkna ut tiden mellan två årtal.....	50

Mätning och enheter	51
Mätning	51
Praktiskt kunna arbeta med enheter.....	51
Vilken enhet?.....	51

Längd	52	Bråk i relation till något.....	61
Volym.....	52	Förenkla bråk.....	61
Vikt.....	52	Förhållandet bråkform och decimalform	61
Pris	53	Procent	62
Temperatur	53	Förhållandet hundradel – procent.....	62
Problemlösning – problemhantering	54	Procentbegreppet.....	62
Konkret problemlösning	54	1% av något.....	62
Se sig själv som en problemlösare	54	Procentbegreppet vid förändring.....	62
Problemlösning av social karaktär.....	54	Räkna ut procenttalet.....	63
Planeringsförmåga.....	54	Bråkform – decimalform – procentform.....	63
Reflektera	55	Sök det okända – algebra	64
Ett-steps-problem	55	Sök det okända	64
Fler-steps-problem.....	55	Uttryck med flera räknesätt	64
Processproblem	55	Över nollgränsen mot negativa tal	64
Open ended questions	55	Uttryck med parenteser	65
Geometri	56	Förenkling av uttryck.....	65
Spatial förmåga	56	Värdet av ett uttryck	65
Geometriska figurer.....	56	Uttryck med parenteser och variabler	65
Geometriska ord	56	Ekvationer med flera x-termer	66
Omkrets av geometriska figurer	57	Lösa enklare ekvationer	66
Area av geometriska figurer.....	57	Problemlösning med ekvationer.....	66
Volym av geometriska figurer	57	Potenser.....	66
Vinklar	57	Formler	66
Skala	58	Diagram – tabeller – statistik	67
Skala – förminskning	58	Tabeller	67
Skala – förstoring.....	58	Göra en frekvenstabell	67
Karta.....	58	Diagram	67
Ritningar	58	Medelvärde.....	67
Bråk	59	Median.....	67
Matematikens språk inom bråkområdet.....	59	Typvärde	68
En hel kan delas i många delar.....	59	Koordinatsystem.....	68
En hel kan se ut på olika sätt	59	Sannolikhet.....	68
Se storleken av ett bråk	60	Kombinatorik.....	68
Bråk i blandad form.....	60	Personlig kommentar	69
Addition av bråk.....	60	Kopieringsunderlag	70
Subtraktion av bråk.....	60	Referenser	78

Matematikens grunder

Vi lever i en föränderlig tid. Dagens informationssamhälle innebär utmaningar som är svåra att överblicka då arbetets och livets matematik går in i en ny sifferålder – där siffror och matematiska tal möter oss i nya sammanhang (Boaler, 2008). Samhället är rikt på information där en stor del är matematisk information som kräver grundläggande matematiska färdigheter. I boken *Den matematiska människan – siffrornas roll i vår kultur och historia* gör Butterworth (2000) en grov uppskattning att en människa en vanlig dag bearbetar 1 000 hänvisningar till matematiska tal under en timma. Det i sin tur ger cirka 16 000 matematiska tankar under en dag och 6 miljoner under ett år. En sådan generell bild av den kultur vi lever i skapar insikt om vikten av människors sifferhantering och bör samtidigt kopplas till en fördjupad förståelse för att olika yrken och fritidsintressen dessutom använder matematik i större utsträckning.

Att som elev under sin skoltid inte ges möjlighet att erövra siffrorna som matematiska tankeredskap (Vygotsky, 1999; Säljö, 2014) kan ge stora konsekvenser för den enskilda personen (Ljungblad, 2003a, 2003b, 2007). Det medför risker som framträder tydligt när forskare söker efter en nationell bild av problematiken. I en longitudinell studie från Storbritannien (Bynner & Parsons, 1997, 2000) studeras medborgare födda samma vecka under 1958 för att se hur deras grundläggande färdigheter ser ut som vuxna. Man finner att en fjärdedel uppvisar stora problem inom numeracy och grundläggande räknefärdigheter, vilket ger upphov till svårigheter i såväl yrkeslivet som i vardagen. Denna grupp är mer än tre gånger så stor som gruppen som uppvisar läs- och skrivsvårigheter och problem inom literacy. Ett sådant resultat menar jag bör inte tolkas som att gruppen som uppvisar svårigheter inom numeracy i praktiken är större, utan snarare att skolan lyckas stödja elever i läs- och skrivsvårigheter i större utsträckning än elever i matematiksvårigheter. De brittiska forskarna Parsons och Bynner (2005) gjorde uppföljande studier där resultatet visar att svårigheter inom grundläggande räknefärdigheter gör det komplicerat för personerna att få arbete, samtidigt som det påverkar deras hälsa, livskvalitet och ekonomi med risk för social exkludering.

I en svensk studie (Almenberg & Widmark, 2011) framträder ett liknande samband mellan vuxnas grundläggande räknefärdigheter och förmåga att hantera privatekonomi. Studien speglar stora skillnader i räknefärdigheter mellan olika åldersgrupper, inkomstklasser och utbildningsnivåer. Resultatet understryker hur kvantitativ information kan uppfattas på olika sätt av olika konsumenter. Dessutom lyfter studien fram att bristande räknefärdigheter kan leda till allvarliga konsekvenser för individens välbefinnande. Utifrån det nedslående resultatet understryker forskarna att det behövs folkbildande insatser för att stärka vuxnas grundkunskaper i matematik och privatekonomi. Det är ett alarmerande resultat som måste

ses i ljuset av att den enskilda medborgaren inte enbart ska hantera sin privatekonomi som man tidigare gjort. Samhället kräver dessutom idag att individen själv gör aktiva val i många skilda sammanhang såsom att välja sitt pensionssparande, telefon- och elabonnemang, eller förhandla om räntan med olika banker. Dessutom hamnar allt fler miljömässiga aspekter och hållbarhet i fokus i valet av olika varor och produkter. Komplexiteten blir allt större när många val samtidigt måste tas i beaktande.

Vi lever således i en tid där forskning visar på risker för enskilda medborgare om man inte lyckas erövra grundläggande räknefärdigheter. Samtidigt är det svårt att blicka framåt i tiden. Dagens unga generation går i pension runt 2070 och de matematiska förmågor som ungdomarna kommer att behöva i sina liv är svåra att greppa och få insikt om. I datorsamhället sker en ständig utveckling som till exempel att vi numera bär med oss mobiltelefoner, något som förändrat våra liv och ger såväl frihet som nya möjligheter. Parallellt med att samhället förändras omskapas ”the concept of what it is to be numerate” (Nunes & Bryant, 2004, s. 2). Utbildningssystemet behöver söka förståelse för hur framtidens arbetsplatser och livssituationer kommer att se ut, för att utveckla undervisningen i en sådan riktning.

Ökade skillnader och minskad jämlikhet

Matematikundervisningen har under lång tid brottats med problem. På grund av den långvariga negativa situationen skapades redan i början på millenniet en Matematikdelegation som betonar matematikens roll för medborgarna i sitt betänkande *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens* (SOU, 2004:97):

Få människor förhåller sig neutrala till matematikämnet: en del älskar det, andra inser i alla fall dess nytta, men många har blockeringar och ångest inför ämnet. Ett misslyckande i matematik blir ofta avgörande för en ung människas möjligheter till yrkeskarriär. Ämnets roll som sorteringsinstrument kan vara en förklaring till ungdomars blockeringar och ångest. När de blir vuxna tar sig dessa negativa attityder ibland uttryck i bristande självförtroende, självcensur vad gäller vuxenstudier och skrinlagda framtidsdrömmar.

(SOU, 2004:97, s. 102)

Matematikdelegationen lade fram en handlingsplan för en femårig matematiksatsning i Sverige, men trots satsningar för att utveckla matematikundervisningen visar TIMSS 2007 och 2011 (Skolverket, 2008, 2012) en nedåtgående trend i matematik jämfört med tidigare studier. Ett liknande negativt mönster i matematikundervisningen framträder i PISA 2009 (Skolverket, 2010) där såväl andelen högpresterande elever i Sverige sedan 2003 blivit signifikant lägre och andelen lågpresterande elever signifikant högre. Inom utbildningssystemet kunde nu en minskad likvärdighet skönjas när Sverige för första gången låg under OECD:s

Siffror och antal

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

1. Räkna med naturliga tal

Att med *ramsräkning kunna räkna upp till och med ett hundra*, vilket inte är samma sak som att eleven har en säker taluppfattning.

Att *pekräkna* i betydelsen att kunna koordinera ord-rörelse-objekt. Här innebär det också att kunna jämföra antal, som när det finns fyra bullar i en korg och fyra kakor på ett fat. Det är något som eleven kan räkna sig fram till med ramsräkning.

Att ha en *stabil räkneramsa* och inte hoppa över något tal, är en av grunderna för taluppfattning.

Det är också viktigt att eleven upptäcker och förstår *varför man räknar*. Syftet med räkning är att uppfatta det räknade antalet i en mängd.

Dessutom förstå hur *räkneord och siffror används i olika situationer*. Ibland beskriver räkneord och siffror antalet objekt och ibland berättar de om ett antal enheter som mäts upp.

2. Siffror

Att *känna igen siffrorna 0–9* och kunna *skriva* dem.

3. Taluppfattning 0–10

Eleven utvecklar en *säker antalsuppfattning till och med 10*. Att veta vad som kommer före, mellan och efter talen upp till och med 10. Det innebär att man *förstår talens storlek och deras inbördes relationer*. För att komma så här långt har eleven gått igenom flera steg på vägen, men inte nödvändigtvis i den ordning som beskrivs nedan.

- *symbolförståelse* – känna igen symbolen för siffran, kunna dess namn och kombinera räkneord med rätt siffra.
- *principen om den naturliga ordningen* – att förstå och inse att räkneorden i den ramsa man använder alltid måste vara desamma. Räkneorden kommer i en bestämd ordning och inget ord får utelämnas.

- *ett till ett-principen* – att jämföra föremål från två olika mängder, och para ihop ett föremål från den ena mängden med ett annat föremål från den andra mängden. Att inse att man i räkning *knyter ett räkneord till varje räknat objekt*.
- *principen om godtycklig ordning* – att förstå att man räknar varje sak i mängden en gång, men det har ingen betydelse var man börjar i mängden.
- *antalskonstans* – att inse att 9 pennor som ligger utspridda i en lång rad med mellanrum mellan pennorna, är lika många pennor till antalet om du för ihop pennorna tätt bredvid varandra.
- *antalsprincipen eller kardinalitetsprincipen* – att förstå att det sist uppräknade räkneordet betecknar antalet för alla räknade föremål i en mängd.
- *räkna framåt och bakåt från vilket räkneord som helst*. Det finns en styrka i att kunna starta från olika tal utan att behöva räkna upp från talet 1. Det är en grundförutsättning för att kunna addera eller subtrahera, med 1 från olika tal, exempelvis $5+1$ eller $5-1$.

Av stor vikt är att eleven får arbeta med *talanalys* och se hur ett antal kan delas upp på olika sätt. Att få insikt om *talens inbördes relationer* såsom att $7=4+3$, $7=3+4$, $7=6+1$, $7=1+6$, $7=5+2$, $7=2+5$.

4. Taluppfattning 0–20

Att eleven utvecklar en *säker antalsuppfattning till och med 20*. Här kan det vara svårt med vissa räkneord som inte auditivt ger någon ”ledtråd” såsom elva, tolv, fjorton och arton.

Vad kommer *efter* femton? Vad kommer *före* tjugo? Observera att begreppen före och efter ställer till problem för elever i primära räknesvårigheter som kan ha svårt att vandra mellan en matematisk kontext och andra kontexter (Ljungblad, 2003b).

Det är också av betydelse att kunna *talraden baklänges*.

Av stor vikt är att eleven får arbeta med *talanalys* och se hur ett antal kan delas upp på olika sätt. Att få insikt om *talens inbördes relationer*.

Exempel:

$14=10+4$, $14=4+10$, $14=13+1$, $14=1+13$, $14=12+2$, $14=2+12$, $14=11+3$,
 $14=3+11$, $14=9+5$, $14=5+9$, $14=8+6$, $14=6+8$, $14=7+7$

Använd gärna det laborativa materialet Numicon (Liber) i kartläggningen av elevens antalsuppfattning mellan 1–20.

5. Ordningstal

Att kunna *ordningstalen* och relatera ordningstalet till rätt siffra på talraden. Här ligger ofta svårigheten på ordningstal som låter olika mot siffran som de syftar till som exempelvis första, andra, fjärde och sjätte.

Förstå *samband* och *skillnad mellan ordningstal och antal*. Ordningstal betecknar ett objekt medan kardinaltal betecknar ett antal objekt.

6. Taluppfattning 0–100

När eleven har utvecklat *en säker taluppfattning till och med 100*.

Att få *insikt om talens inbördes relationer* och *förstå positionerna ental, tiotal och hundratal*.

Dessutom kunna *talraden baklänges*, vilket inte behöver ske så snabbt utan med eftertanke.

Få en förståelse för hur ett *antal kan se olika ut* beroende på vilka föremål som representeras – om det är 100 sandkorn, 100 papper, 100 människor eller 100 hus. Att 100 sandkorn är *lika många till antalet* som 100 hus, är en abstrakt tanke. Forskning visar att alla förskolebarn inte spontant fokuserar på antal, en del barn visar istället intresse för föremålens utseende, form och färg (Hannula & Lehtinen, 2005). Dessa barn riskerar att senare i grundskolan hamna i matematiksvårigheter. Det är ett forskningsresultat som stämmer väl med äldre elever i behov av särskilt didaktiskt stöd i matematik (Ljungblad, 2003a). Även under mellanstadietiden visar denna grupp elever att de inte alltid på egen hand fokuserar på antalsaspekten när de jämför olika föremål i två skilda kontexter. När vi exempelvis diskuterar likheter och olikheter mellan 3 karameller på bordet med en bild på 3 skyskrapor i en storstad, beskriver eleverna en mängd olika aspekter men lyfter inte spontant fram antal som en aspekt. Det innebär att läraren i undervisningen måste lyfta fram antalsaspekten som en viktig aspekt att diskutera kring för just denna grupp elever.

7. Taluppfattning – upp mot tusentalen...

När eleven har utvecklat en *säker taluppfattning upp mot tusentalen*.
Att kunna *läsa och skriva ut stora tal*.

”Skriv femtusen nitton med siffror och lägg det med pengar.”

”Skriv 2 101 med bokstäver.”

Det handlar om att *förstå tusentalets position*.

”Vad kommer *efter* 999? Vad kommer *före* 2 000?

Vad kommer *mellan* 2 999 och 3 004? ”

Dessutom med miniräknarens hjälp kunna göra om 999 till 1000.

Viktigt är att kunna sortera tal i *storleksordning*, från det minsta till det största eller tvärtom – och förstå deras *inbördes relationer*.

”Skriv följande tal i storleksordning, börja med det minsta – 864, 468, 684, 648 och 846.”