

Matematikens grunder

kvalitativ kartläggning

Ann-Louise Ljungblad

ASKUNGE

Innehåll

Del I Matematikens grunder

Matematikens grunder	4
Ökade skillnader och minskad jämlikhet.....	5
Barnkonventionen och barns rättigheter	7
Aktuellt forskningsläge	9
Analys eller syntes.....	14
Elever i behov av särskilt didaktiskt stöd	17
Kvalitativ kartläggning.....	21

Del 2 Analysschema

Siffror och antal	23
Räkna med naturliga tal.....	23
Siffror.....	23
Taluppfattning 0-10.....	23
Taluppfattning 0-20.....	24
Ordningstal	25
Taluppfattning 0-100.....	25
Taluppfattning – upp mot tusentalen.....	26
Kommunikation och språk	27
Kunna kommunicera med matematik.....	27
Systematisera och gruppera.....	27
Matematikord	27
Symbolsäkerhet.....	28
Uppfatta matematikens budskap i vardagen och omvärlden	29
Matematiska mönster	30
Se, upptäcka och skapa mönster	30
Se och upptäcka matematikens mönster	30
Jämna och udda tal	31
Tiobasen	31
Positionssystemet.....	32
Positionssystemet med decimaler.....	32
Stora tal	33

Negativa tal	33
Räknelagar	33
Proportionalitet	34

Våra fyra räknesätt	35
Addition och subtraktion.....	35
Multiplikation.....	40
Division	41
Se mönstren i räknesätten.....	41

Avrundning	42
Tallinje	42
Avrunda till tiotal.....	42
Avrunda till hundratal.....	42
Avrunda till tusental	42
Avrunda till heltal	43
Avrunda till decimaler	43
Avrunda i affären.....	43

Våra fyra ”nya” räknesätt	44
Huvudräkning	45
Papper- och pennräkning	45
Miniräkarräkning.....	46
Överslagsräkning.....	46

Tidsbegreppet	48
Nutid, dåtid och framtid.....	49
Tidsbegreppet.....	49
Datum och personnummer.....	49
Analoga klockan.....	50
Digitala klockan.....	50
Räkna ut tiden mellan två klockslag.....	50
Räkna ut tiden mellan två årtal.....	50

Mätning och enheter	51
Mätning	51
Praktiskt kunna arbeta med enheter.....	51
Vilken enhet?.....	51

Längd	52	Bråk i relation till något.....	61
Volym.....	52	Förenkla bråk.....	61
Vikt.....	52	Förhållandet bråkform och decimalform	61
Pris	53	Procent	62
Temperatur	53	Förhållandet hundradel – procent.....	62
Problemlösning – problemhantering	54	Procentbegreppet.....	62
Konkret problemlösning	54	1% av något.....	62
Se sig själv som en problemlösare	54	Procentbegreppet vid förändring.....	62
Problemlösning av social karaktär.....	54	Räkna ut procenttalet.....	63
Planeringsförmåga.....	54	Bråkform – decimalform – procentform.....	63
Reflektera	55	Sök det okända – algebra	64
Ett-steps-problem	55	Sök det okända	64
Fler-steps-problem.....	55	Uttryck med flera räknesätt	64
Processproblem	55	Över nollgränsen mot negativa tal	64
Open ended questions	55	Uttryck med parenteser	65
Geometri	56	Förenkling av uttryck.....	65
Spatial förmåga	56	Värdet av ett uttryck	65
Geometriska figurer.....	56	Uttryck med parenteser och variabler	65
Geometriska ord	56	Ekvationer med flera x-termer	66
Omkrets av geometriska figurer	57	Lösa enklare ekvationer	66
Area av geometriska figurer.....	57	Problemlösning med ekvationer.....	66
Volym av geometriska figurer	57	Potenser.....	66
Vinklar	57	Formler	66
Skala	58	Diagram – tabeller – statistik	67
Skala – förminskning	58	Tabeller	67
Skala – förstoring.....	58	Göra en frekvenstabell	67
Karta.....	58	Diagram	67
Ritningar	58	Medelvärde.....	67
Bråk	59	Median.....	67
Matematikens språk inom bråkområdet.....	59	Typvärde	68
En hel kan delas i många delar.....	59	Koordinatsystem.....	68
En hel kan se ut på olika sätt	59	Sannolikhet.....	68
Se storleken av ett bråk	60	Kombinatorik.....	68
Bråk i blandad form.....	60	Personlig kommentar	69
Addition av bråk.....	60	Kopieringsunderlag	70
Subtraktion av bråk.....	60	Referenser	78

Matematikens grunder

Vi lever i en föränderlig tid. Dagens informationssamhälle innebär utmaningar som är svåra att överblicka då arbetets och livets matematik går in i en ny sifferålder – där siffror och matematiska tal möter oss i nya sammanhang (Boaler, 2008). Samhället är rikt på information där en stor del är matematisk information som kräver grundläggande matematiska färdigheter. I boken *Den matematiska människan – siffrornas roll i vår kultur och historia* gör Butterworth (2000) en grov uppskattning att en människa en vanlig dag bearbetar 1 000 hänvisningar till matematiska tal under en timma. Det i sin tur ger cirka 16 000 matematiska tankar under en dag och 6 miljoner under ett år. En sådan generell bild av den kultur vi lever i skapar insikt om vikten av människors sifferhantering och bör samtidigt kopplas till en fördjupad förståelse för att olika yrken och fritidsintressen dessutom använder matematik i större utsträckning.

Att som elev under sin skoltid inte ges möjlighet att erövra siffrorna som matematiska tankeredskap (Vygotsky, 1999; Säljö, 2014) kan ge stora konsekvenser för den enskilda personen (Ljungblad, 2003a, 2003b, 2007). Det medför risker som framträder tydligt när forskare söker efter en nationell bild av problematiken. I en longitudinell studie från Storbritannien (Bynner & Parsons, 1997, 2000) studeras medborgare födda samma vecka under 1958 för att se hur deras grundläggande färdigheter ser ut som vuxna. Man finner att en fjärdedel uppvisar stora problem inom numeracy och grundläggande räknefärdigheter, vilket ger upphov till svårigheter i såväl yrkeslivet som i vardagen. Denna grupp är mer än tre gånger så stor som gruppen som uppvisar läs- och skrivsvårigheter och problem inom literacy. Ett sådant resultat menar jag bör inte tolkas som att gruppen som uppvisar svårigheter inom numeracy i praktiken är större, utan snarare att skolan lyckas stödja elever i läs- och skrivsvårigheter i större utsträckning än elever i matematiksvårigheter. De brittiska forskarna Parsons och Bynner (2005) gjorde uppföljande studier där resultatet visar att svårigheter inom grundläggande räknefärdigheter gör det komplicerat för personerna att få arbete, samtidigt som det påverkar deras hälsa, livskvalitet och ekonomi med risk för social exkludering.

I en svensk studie (Almenberg & Widmark, 2011) framträder ett liknande samband mellan vuxnas grundläggande räknefärdigheter och förmåga att hantera privatekonomi. Studien speglar stora skillnader i räknefärdigheter mellan olika åldersgrupper, inkomstklasser och utbildningsnivåer. Resultatet understryker hur kvantitativ information kan uppfattas på olika sätt av olika konsumenter. Dessutom lyfter studien fram att bristande räknefärdigheter kan leda till allvarliga konsekvenser för individens välbefinnande. Utifrån det nedslående resultatet understryker forskarna att det behövs folkbildande insatser för att stärka vuxnas grundkunskaper i matematik och privatekonomi. Det är ett alarmerande resultat som måste

ses i ljuset av att den enskilda medborgaren inte enbart ska hantera sin privatekonomi som man tidigare gjort. Samhället kräver dessutom idag att individen själv gör aktiva val i många skilda sammanhang såsom att välja sitt pensionssparande, telefon- och elabonnemang, eller förhandla om räntan med olika banker. Dessutom hamnar allt fler miljömässiga aspekter och hållbarhet i fokus i valet av olika varor och produkter. Komplexiteten blir allt större när många val samtidigt måste tas i beaktande.

Vi lever således i en tid där forskning visar på risker för enskilda medborgare om man inte lyckas erövra grundläggande räknefärdigheter. Samtidigt är det svårt att blicka framåt i tiden. Dagens unga generation går i pension runt 2070 och de matematiska förmågor som ungdomarna kommer att behöva i sina liv är svåra att greppa och få insikt om. I datorsamhället sker en ständig utveckling som till exempel att vi numera bär med oss mobiltelefoner, något som förändrat våra liv och ger såväl frihet som nya möjligheter. Parallellt med att samhället förändras omskapas ”the concept of what it is to be numerate” (Nunes & Bryant, 2004, s. 2). Utbildningssystemet behöver söka förståelse för hur framtidens arbetsplatser och livssituationer kommer att se ut, för att utveckla undervisningen i en sådan riktning.

Ökade skillnader och minskad jämlikhet

Matematikundervisningen har under lång tid brottats med problem. På grund av den långvariga negativa situationen skapades redan i början på millenniet en Matematikdelegation som betonar matematikens roll för medborgarna i sitt betänkande *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens* (SOU, 2004:97):

Få människor förhåller sig neutrala till matematikämnet: en del älskar det, andra inser i alla fall dess nytta, men många har blockeringar och ångest inför ämnet. Ett misslyckande i matematik blir ofta avgörande för en ung människas möjligheter till yrkeskarriär. Ämnets roll som sorteringsinstrument kan vara en förklaring till ungdomars blockeringar och ångest. När de blir vuxna tar sig dessa negativa attityder ibland uttryck i bristande självförtroende, självcensur vad gäller vuxenstudier och skrinlagda framtidsdrömmar.

(SOU, 2004:97, s. 102)

Matematikdelegationen lade fram en handlingsplan för en femårig matematiksatsning i Sverige, men trots satsningar för att utveckla matematikundervisningen visar TIMSS 2007 och 2011 (Skolverket, 2008, 2012) en nedåtgående trend i matematik jämfört med tidigare studier. Ett liknande negativt mönster i matematikundervisningen framträder i PISA 2009 (Skolverket, 2010) där såväl andelen högpresterande elever i Sverige sedan 2003 blivit signifikant lägre och andelen lågpresterande elever signifikant högre. Inom utbildningssystemet kunde nu en minskad likvärdighet skönjas när Sverige för första gången låg under OECD:s

Våra fyra ”nya” räknesätt

35. 36. 37. 38.

Diskussion

Grundläggande inom matematikundervisning är att tid prioriteras för arbete med att utveckla elevernas antalsuppfattning. Antalsuppfattningen är primär, fundamental och grundläggande för problemlösning (Ma, 1999). För att utveckla en god antalsuppfattning behövs laborativt arbete som kopplas till våra fyra ”nya” räknesätt: huvudräkning, papper- och pennräkning, miniräknarräkning, överslagsräkning.

När det gäller område 36. *Papper- och pennräkning* är skriftlig huvudräkning med mellanled inte att rekommendera till elever i behov av särskilt didaktiskt stöd i matematik. Även för många andra elever är det en svår metod att hantera (Bentley & Bentley, 2016). Algoritmer å andra sidan är en uppfinning där talen presenteras på samma sätt inom positions-systemet. För elever i primära räknesvårigheter stödjer det utvecklingen av deras antalsuppfattning. Inom detta område måste undervisningen vara flexibel. I en klass behöver inte alla elever arbeta med samma saker vid samma tillfälle. Det kan exempelvis gälla komplicerade multiplikationsuppställningar som vanligtvis introduceras i läroböcker tidigt under mellanåren. Elever i primära räknesvårigheter kan pröva att arbeta med uppställningar som:

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$$

När det gäller mer komplexa algoritmer kan de använda miniräknare:

$$\begin{array}{r} 78 \\ \times 56 \\ \hline \end{array}$$

En elev Maria, i primära räknesvårigheter, som jag arbetade med under många år (Ljungblad, 2003b) lärde sig under mellanåren additions- och subtraktionsalgoritmer samt kort division. Hon lärde sig dessutom multiplikationsuppställning som den enklare varianten ovan beskriven. Vid de mer komplexa uppgifterna tog hon miniräknare. En dag under

skolår sju fick Maria syn på att kamraterna arbetade med svåra multiplikationsuppställningar och sa till mig:

– Det vill jag också kunna!

Jag visade Maria en gång hur man gjorde och hon förstod direkt! Vi hade provat det under mellanåren med det fungerade inte – då la vi tid på annat. Det gäller att hitta en balans kring hur mycket tid man ska träna på algoritmer. Det som en elev ibland sliter med i månader under de tidigare skolåren kan samma elev lära sig på en eller ett par lektioner några år senare. Det är tänkvärt! Målet är att eleven erövrar olika förmågor i slutet av sin utbildning.

35. Huvudräkning

Att ha en *fungerande huvudräkningsmetod* i addition, subtraktion, multiplikation och division. Det gäller både uppgifter inom lägre och högre talområden, men av inte alltför komplicerad svårighetsgrad.

I huvudräkning tar man oftast de stora talen först. Låt oss ta en uppgift som $205+107$. Här kan eleven först ta hundratalen $200+100=300$ och sedan entalen $7+5=12$ och klarar i tanken att lösa uppgiften $300+12=312$.

Man kan också tänka: $205+100=305$ och från 305 lägger jag till 7 och svaret blir 312.

Vid mer komplicerade uppgifter kan man istället för huvudräkning använda nedanstående modeller för problemlösning.

36. Papper- och pennräkning

Algoritm och/eller skriftlig huvudräkning med mellanled.

Algoritmer är fantastiska uppfinningar som också kan ge förståelse för positionssystemet.

Addition

$$785 + 435 =$$

$$2\ 089 + 3\ 756 =$$

$$15,2 + 12,37 =$$

$$82 + 6,45 =$$

Subtraktion

$$489 - 327 =$$

$$2\ 094 - 1\ 287 =$$

$$4,6 - 3,25 =$$

$$44 - 2,50 =$$

Matematikens grunder är ett kvalitativt kartläggningsmaterial. Analys-schemat består av 110 matematiska områden och stödjer läraren att utvärdera sin undervisning.

Forskning visar att det är komplicerat för läraren att fånga hur elever i matematiksvårigheter utvecklar sina förmågor och färdigheter. *Matematikens grunder* är framtaget för att hantera problematiken kring hur lärare kan dokumentera elevernas utveckling. Det kvalitativa kartläggningsmaterialet är tänkt att följa elever på såväl grundskolan som sarskolan och vidare till gymnasieskolan. *Matematikens grunder* ger således en möjlighet för lärare att samverka och gemensamt dokumentera elevernas matematiska bildningsresa.

Boken vänder sig till såväl lärarstudenter på grundnivå, speciallärare och specialpedagoger på avancerad nivå som till yrkesverksamma lärare.



Ann-Louise Ljungblad har mångårig lärarerfarenhet av att arbeta med elever i matematiksvårigheter. Hon är författare och har skrivit flera böcker inom fältet.

I sin avhandling *Takt och hållning – en relationell studie om det oberäkneliga i matematikundervisningen* utforskar hon komplexiteten i mötet med unika barn. Idag arbetar Ann-Louise Ljungblad inom speciallärarprogrammet och specialpedagogprogrammet vid Göteborgs universitet.