

RÄDDA EKVATIONERNA!

Cecilia Christiansen

ASKUNGE

Innehåll

Introduktion.....	4
Innan du börjar.....	6
Lektion 1 – Vad är matematiska uttryck och hur förenklar man dem?	8
Lektion 2 – Ekvationsspelet – del 1.....	11
Lektion 3 – Ekvationsspelet – del 2.....	12
Lektion 4 – Ekvationer med subtraktion.....	15
Lektion 5 – Arbeta på egen hand	16
Lektion 6 – Repetera och befäst dina kunskaper	17
Lektion 7 – Skapa ekvationer med bråk	18
Lektion 8 – Lös ekvationer med bråk – laborativt	19
Lektion 9 – Olika sätt att lösa ekvationer med bråk	20
Lektion 10 – Att skriva en ekvation utifrån en lösning.....	24
Lektion 11 – Problemlösning med ekvationer	25
Lektion 12 – Förhållande och ekvationer.....	26
Lektion 13 – Pengar och ekvationer.....	27
Lektion 14 – Hur många lösningar kan en ekvation ha?.....	28
Lektion 15 – Hur kontrollerar du om en lösning är en lösning?	30
Lektion 16 – Ekvationer med parenteser	31
Lektion 17 – Ekvationer och geometri	32



Kopiering

Förenkla uttryck 1	34
Förenkla uttryck 2	35
Ekvationsspelet 1	36
Likhetstecken	37
Rita och lös din ekvation	38
Ekvationsspelet 2	39
Ekvationer från början 1.....	40
Ekvationer från början 2.....	41
Lös ekvationerna 1	42
Lös ekvationerna 2	43
Lös ekvationerna 3	44
Lös ekvationerna 4	45
Träna ekvationslösning.....	46
Efter lektion 8.....	47
Ekvationer med bråk 1.....	48
Ekvationer med bråk 2.....	49
Antag att 1	50
Antag att 2	51
Antag att 1 Facit.....	52
Antag att 2 Facit.....	53
Problem i fem steg – exempel	54
Problem i fem steg.....	55
Problemlösning med ekvationer	56
Förhållande och ekvationer.....	57
Pengar och ekvationer.....	58
Flera eller ingen lösning	59
Kontrollera en lösning	60
Ekvationer med parenteser 1	61
Ekvationer med parenteser 2	62
Ekvationer och geometri	63

Introduktion

Under ganska lång tid har jag intresserat mig för att hitta sätt att göra algebra begripligt för eleverna. Flera studier pekar på hur svår algebra upplevs av elever i grundskolan. Bokstäver och bokstavsuttryck känns ofta krångliga och meningslösa. Också i samtal med gymnasielärare har uppfattningen bekräftats, alla är överens om att det svåraste momentet för eleverna under A-kursen är just algebra. Många elever bestämmer sig för att *matematiken är inget för mig* när de börjar arbeta med algebra i skolan.

”Jag tror att alla lärare introducerar bråk med stöd av något slags konkret materiel. Vi går inte direkt på det matematiska symbolspråket utan låter eleverna arbeta laborativt och få konkret stöd.

På motsvarande sätt behandlar vi areabegreppet. Vid problemlösning uppmanar vi eleverna att rita bilder som stöd för sitt tänkande...

När det gäller variabelbegreppet är situationen annorlunda. Eleverna har ofta inte direkta konkreta erfarenheter som vi kan bygga på. Istället måste vi i skolan skapa tillfällen som ersätter vardagssituationer, som i andra sammanhang ger en grund för undervisningen...

...Givetvis kan det vara frestande att kortsiktigt spara tid genom att direkt använda symbolspråket men förr eller senare brukar det straffa sig...

...Det är inte alltid lätt för eleverna att inse att en del av matematikens styrka ligger i att vi kan arbeta med generella regler, samband och problemlösningsmetoder.”

Ronny Ahlström, Nämnaren nr 1 * 2001, sid. 27 ss

För några år sedan och i jakten på olika förklaringsmodeller för just ekvationer, kom jag i kontakt med Ekvationsspelet (Uppslagsboken, NCM). Spelet inspirerade till det material som idag kallas *Rädda ekvationerna!*, ett laborativt material för ekvationsinläring.

Två av de metoder jag använt tidigare för att konkretisera ekvationer är gestaltning och användning av balansvåg. Metoderna illustrerar bra vad ekvationslösning är. Dessa metoder fungerar bra med duktiga elever men fungerar inte för de elever som behöver mer stöd. Flera av dessa elever lyckas inte förstå jämförelserna helt.

Balansvågsmetoden går ut på att jämföra en ekvation med en balansvåg. Man kan ta bort eller lägga till saker på båda sidor av vågen utan att visaren förändras. Metoden har nackdelen att de flesta elever inte är bekanta med en balansvåg och saknar därför en naturlig koppling till den. När jag använder balansvågen för att illustrera ekvationer måste jag börja med att

hämta en sådan från NO-salen, förklara för eleverna hur den fungerar och sedan dra parallellen till ekvationer och ekvationslösning. Duktiga elever får hjälp av bilden medan svaga elever fortfarande har svårt att förstå vad jag vill illustrera med vågen.

Gestaltning är roligt. De duktiga eleverna har glädje av den medan svaga elevernas uppmärksamhet bara räcker till att förstå och följa spelreglerna utan att kopplingen till ekvationerna sker.

Rädda ekvationerna! är ett material som hjälper eleverna att visualisera vad uttryck och ekvationer är. Det är utvecklat utifrån idéerna i *Ekvationspelet: Lika många tändstickor ska gömmas i varje ask*. Det finns lika många tändstickor på varje sida av likhetstecknet.

I denna handledning presenterar jag ett förslag på hur man kan arbeta med materialet. Jag har testat *Rädda ekvationerna!* i många klasser under flera års tid med mycket bra resultat.

Första året visade jag materialet för andra lärare på min egen skola. De ville testa lektionerna i sina klasser. Resultatet blev lyckat och jag fick förslaget att visa det för andra lärare i Sverige. Sedan dess har jag föreläst om *Rädda ekvationerna!* på flera olika orter i Sverige.

Lärohandledningen är ett svar på önskemål om skriftlig dokumentation från de lärare jag träffat under dessa kurser. Jag hoppas att denna handledning kan guida flera som vill prova metoden med sina elever.

Jag har valt att presentera materialet indelat i lektioner om 45 min. Hur många lektioner som används till varje steg beror förstås av vilken elevgrupp man har.

Till handledningen hör dessutom

- *Rädda ekvationerna! för interaktiva skrivtavlor*
- *Kopieringsunderlag* för spelet samt flera andra kopieringsunderlag som du kan använda när du och dina elever arbetar med ekvationer (se separat innehållsförteckning på föregående uppslag).

Jag hoppas att spelet hjälper dina elever att upptäcka glädjen av att arbeta, lära sig och förstå algebra och ekvationer.

Lycka till och Rädda ekvationerna!

Cecilia Christiansen

Innan du börjar

Paketet innehåller

- Lärarhandledning i fyrfärg med 17 färdiga lektioner
- Kopieringsblad som kan användas i skolan eller som hemuppgifter.
- Problemlösningssuppgifter
- 60 askar som motsvarar 1/1 (mörkblå)
- 20 askar som motsvarar 1/2 (gröna)
- 10 askar som motsvarar 1/3 (gula), 1/4 (cyanblå), 1/5 (orange), 2/3 (röd)
- ca 500 stickor
- 10 brickor med lock

Materialet är avpassat för en grupp på 20 elever. Meningen är att eleverna ska arbeta i par.

Det finns också lösa askar och stickor att komplettera med (ISBN 978-91-86611-27-9).

Förberedelse

För att göra det så enkelt som möjligt för dig som ska arbeta med Rädde ekvationerna behöver du förbereda följande:

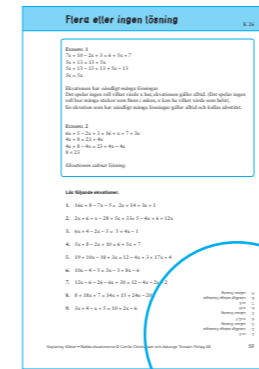
- Förstansade askar måste limmas. Använd lim som håller bra, eftersom lådorna används mycket. De mindre kan vara lite trixiga. Det kan behövas en pincett för att hålla ihop asken som motsvarar en femtedel under tiden som limmet torkar. Lådan som hör till asken som motsvarar en hel (x) måste hållas in ordentligt när den limmas. Annars kan det vara svårt att skjuta in den i hylsan.
- I brickorna med lock förvarar du ekvationerna eller materialet till varje elevpar.
- Stickorna delas upp så att varje grupp har ett visst antal.
- Pappret med likhetstecken (sidan 37) kopieras i flera exemplar.

Annat som kan vara bra att ha

- En större kartong att förvara allt i, t.ex. en tom A4-papperslåda eller en finare låda (samarbete med slöjden).
- Ett paket 2-liters plastpåsar (att förvara överblivet material eller färdiga ekvationer)

Du behöver

De flesta lektionerna i lärarhandledningen inleds med **Du behöver**. Där listas materialet som ska användas under lektionen. Där anges också vilket kopieringsblad som hör till lektionen. Kopieringsbladen får kopieras fritt inom skolan.



Facit

Facit finns i anslutning till varje kopieringsblad (där det är relevant). Detta för att underlätta för dig som lärare. Viktigt är att eleverna förstår att de inte vinner på att läsa av facit. Samtidigt är det en belöning för dem att direkt kunna se att de löst uppgifterna rätt. Klipp bort facit före kopiering om du tror att eleverna kommer att skriva av det.

Interaktiva skrivtavlor

Till lärarhandledningen finns det ett material för interaktiva skrivtavlor, som förkortas IWB i lärarhandledningen. Detta finns att ladda ner från www.askunge.se

Fortbildning

När du använder materialet *Rädde ekvationerna!* upptäcker du snart att det går att bredda din undervisning. Elever som aldrig tidigare arbetat med ekvationer är kreativa och kommer på andra typer av lösningar än dem vi lärare tänker på eller är vana vid. Ta vara på deras sätt att lösa ekvationer och använd dessa lösningar till diskussioner i klassen. På det sättet blir materialet en fortbildning i sig.

Filma

Ha gärna en videokamera eller mobiltelefon till hands för att filma kreativa elevlösningar.

Problemlösning i fem steg

Det underlättar för eleverna om de får följa en given struktur när de arbetar med ett problem. Vi föreslår att arbeta i fem steg: **antagande, ekvation, lösning, svar och kontroll**.

Använd kopieringsbladet *Problemlösning i fem steg*, sidan 54. Kopiera och klipp ut ett problem i taget (eller låt eleverna klippa själva) och klistra därefter in det överst i rutan *Problem* på kopieringsbladet eller klistra in problemet på kopieringsbladet innan du kopierar till alla elever.

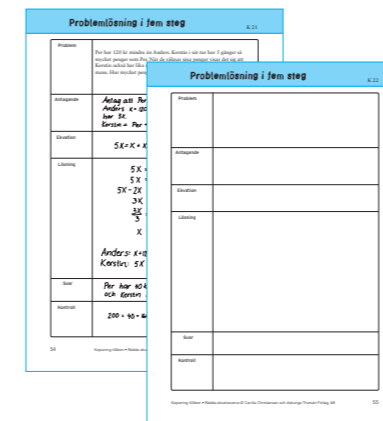
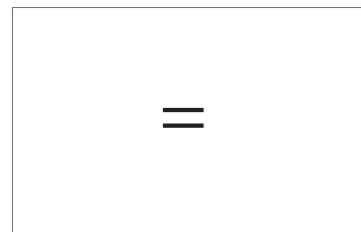
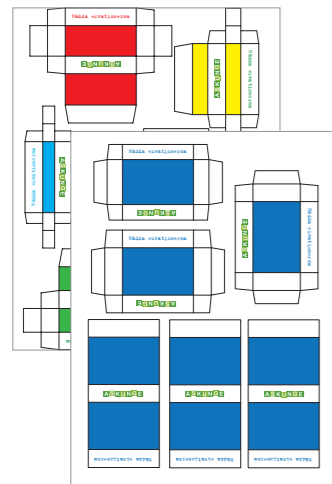
Lgr11

Årskurs 4–6

- Obekanta tal och deras egenskaper samt situationer där det finns behov av att beteckna ett obekant tal med en symbol.
- Enkla algebraiska uttryck och ekvationer som är relevanta för eleven.
- Metoder för enkel ekvationslösning.

Årskurs 7–9

- Innebörden av variabelbegreppet och dess användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer.
- Algebraiska uttryck, formler och ekvationer i situationer som är relevanta för eleven.
- Metoder för ekvationslösning.



I läroplanen Lgr11 poängteras vikten av att arbeta med algebra tidigt. Under **Centralt innehåll** står följande:

Lektion 1

Förenkla uttryck 1

Att förenkla ett matematiskt uttryck betyder att man sätter ihop variabeltermerna för sig och de konstanta termerna för sig.

Uttrycket kan förenklas på följande sätt:

$$-10 + 2x + 11 + 6x - 2 = 8x + 7$$

Följande uttryck:

- $6x + 4 - 5 + 4x + 6$
- $10x - 4 - 4 - 3x - 3 + 8x - 6$
- $16 - 5x - 18x + 10 - 8 + 24x + 2x + 10$
- $6 - 28 + 7x - 5 - 4x + 6$
- $12x - 6 - 5 - 6x + 30 + 9 - 4x - 2x - 2$
- $3x + 1 + 12 - 3x + 2$
- $6 - 12x - 8x + 5 - 1 - 4x - 2x + 10$
- $9x + 3 + 5x - 8 - x + 12$
- $20x - 5 + 3x + 2 - 13x + 4 + 5x$
- $34x + 6x - 4x + 6 - 8 - 20x + 7x$

Vad är matematiska uttryck och hur förenklar man dem?

Du behöver:

- Rädga ekvationerna för interaktiv skrivtavla eller OH-projektor.
- 10 askar och ca 20 stickor.
- Kopieringsbladen *Förenkla uttryck 1 och 2* (s. 34–35)

Innan man introducerar spelet *Rädga ekvationerna!* måste eleverna veta vad som menas med **matematiska uttryck** och hur man förenklar dessa. Inled därför med att berätta vad ett matematiskt uttryck är.

Ett matematiskt uttryck är ett uttryck som består av siffror, tecken och bokstäver. Uttryck används för att beskriva händelser på ett matematiskt språk. Termer som bara innehåller siffror kallas konstanta termer. Termer som innehåller bokstäver eller bokstäver och siffror kallas variabeltermer.

◆ **Skriv följande på tavlan:**
 $4x + 6 + 2x + 8 + 3x$

Fråga eleverna hur många termer det finns.

$4x + 6 + 2x + 8 + 3x$ är ett matematiskt uttryck som innehåller fem termer. Två konstanta termer och tre variabeltermer:

Fråga eleverna vilka termer som är konstanta och vilka termer som är variabeltermer.

+6 och +8 är konstanta termer och +4x, +2x och +3x är variabeltermer.

◆ **Skriv följande på tavlan:**
 $5x - 8$

Fråga eleverna hur många termer och vilka olika det finns:

$5x - 8$ är ett matematiskt uttryck som innehåller två termer. En konstant term och en variabelterm.

+5x är variabeltermen och -8 är den konstanta termen.

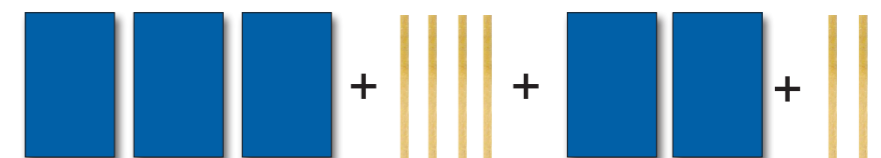
Poängtera för eleverna att plustecknet respektive minustecknet alltid hör ihop med efterföljande tal!

Förbered följande:

Placera ett visst antal stickor i askarna, lika många i varje ask. Placera sedan askarna och några lösa stickor på OH-projektorn alt. använd askarna och stickorna på den interaktiva skrivtavlan.

Viktigt! Var noggrann med att påpeka för eleverna att x står för det okända antalet stickor i asken och inte för asken!

◆ **Lägg upp följande:**



Be eleverna att översätta det till matematiskt språk.
 $3x + 4 + 2x + 3$

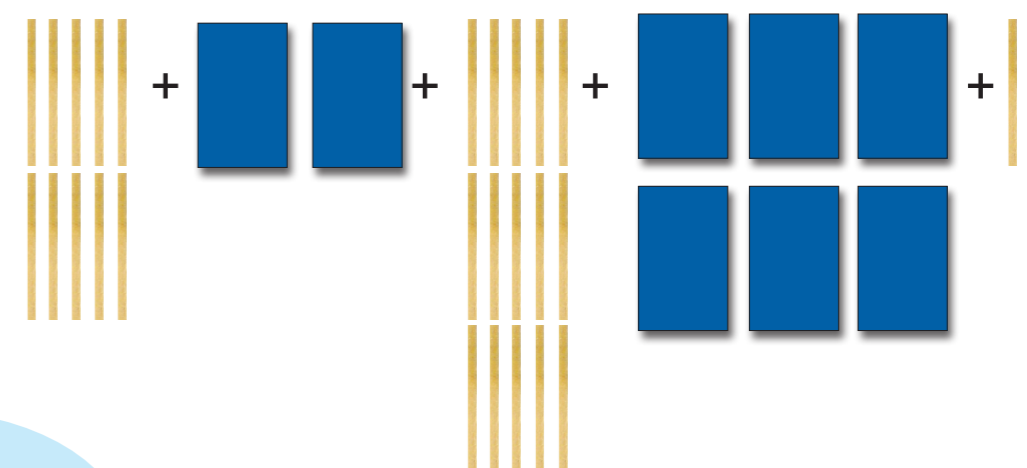
Säg och visa följande, helst med olika färger:
Uttrycket ovan kan förenklas till $5x + 7$.

Att förenkla ett matematiskt uttryck betyder att man lägger ihop variabeltermerna för sig och de konstanta termerna för sig.

I exemplet ovan har vi:

$$3x + 4 + 2x + 3 = 5x + 7$$

◆ **Lägg upp följande:**



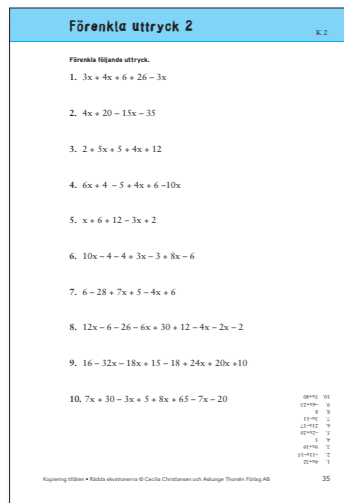
Be eleverna översätta det till matematiskt språk.
 $10 + 2x + 15 + 6x + 2$

Säg och visa följande, helst med olika färger:
Uttrycket kan förenklas på följande sätt:

$$10 + 2x + 15 + 6x + 2 = 8x + 27$$



Lägg ihop 10, 15 och 2.
Då får du 27.
Lägg ihop 2x och 6x.
Då får du 8x.



♦ Arbeta med förenkling av matematiska uttryck innan du går in på ekvationslösning. Använd gärna olika färger för att markera *variabeltermerna* och de *konstanta termerna*. Många elever behöver detta visuella hjälpmedel för att lättare kunna lägga ihop dessa termer och framför allt hålla reda på vilket tecken som hör ihop med vilket tal.

Gör *flera olika exempel* tillsammans med eleverna tills du känner att alla har fått in begreppen *konstant term* och *variabelterm* och att alla förstår hur man förenklar ett matematiskt uttryck.

♦ Därefter arbetar eleverna med arbetsbladen *Förenkla uttryck*.

Likhetstecknet

Här kan det vara på sin plats att göra klart för eleverna vad som menas med och vad skillnaden är mellan det statiska och det dynamiska likhetstecknet. Många elever har för det mesta tidigare enbart arbetat med det dynamiska likhetstecknet.

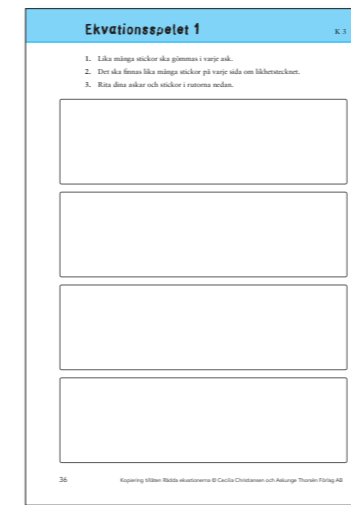
Det **dynamiska likhetstecknet** är det likhetstecknet vi använder vid beräkningar och algebraiska förenklingar. Det som finns till vänster om likhetstecknet *blir* det som står på högersidan. Uppgiften finns och du skriver likhetstecknet för att sedan skriva svaret.

Vid ekvationslösning har vi istället det **statiska likhetstecknet** där det som står i ena ledet *är lika med* det som står i andra ledet och tvärtom.

$$10 + 3 =$$

$$x + 4 = 10$$

Lektion 2



Ekvationsspelet - del 1

Du behöver:

- 6–8 hela askar per par
- ca 40 stickor per par
- En bricka per par
- Kopieringsbladet *Ekvationsspelet 1* (s. 36)
- Kopieringsbladet *Likhetstecken* (s. 37)

Eleverna arbetar i par.

♦ **Förklara för eleverna** vad ekvationsspelet går ut på:

Lika många stickor ska gömmas i varje ask. Det ska finnas lika många stickor på varje sida av likhetstecknet.

♦ **Gör så här:**

1. Töm alla askar.
2. Kom överens med din kamrat om ett hemligt antal stickor som ska gömmas i varje ask. Ni behöver inte använda alla stickor eller askar.
3. *Varje* ask måste innehålla lika många stickor.
4. Placera en eller flera askar på pappret med likhetstecknet. Komplettera med lösa stickor på varje sida, men se till att det sammantaget är lika många stickor på varje sida om likhetstecknet (bild 1).
5. Rita den ekvation som ni har skapat på arbetsbladet *Ekvationsspelet 1* (bild 2).

♦ Eleverna skapar fler ekvationer på samma sätt och ritas även dessa på arbetsbladet.

♦ När du märker att alla elever har ritat åtminstone en ekvation och förstår vad de gör ber du dem att välja den ekvation från det egna arbetsbladet som de tycker bäst om och placera den på brickan. Kontrollera att varje ask innehåller lika många stickor.

♦ Be eleverna att skriva hur många askar och lösa stickor som finns på varje sida om likhetstecknet. Det underlättar när eleverna ska göra i ordning brickan för att lämna vidare till nästa par (bild 3).

♦ Samla in brickorna och spara dem till nästa lektion. Om du behöver brickorna till en annan klass eller grupp kan du spara varje ekvation med tillhörande papper och askar och stickor i en plastpåse.

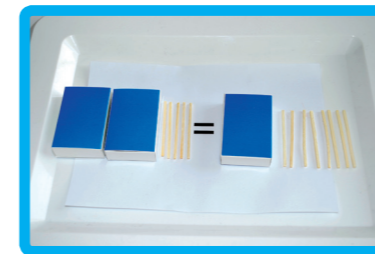


bild 1

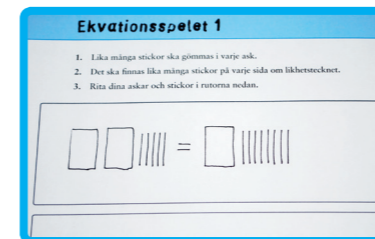


bild 2

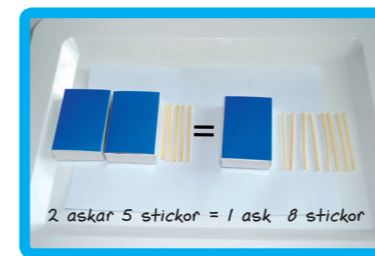


bild 3