

Inhoudstafel

Inhoudsopgave

Opgaven.....	2
Opgave 2	2
Opgave 3	3
Opgave 4	4
Opgave 5	5
Opgave 6	6
Opgave 7	6
Opgave 8	7
Opgave 9	12
Opgave 10	13
 Oplossingen.....	 14
Oplossing 2	14
Oplossing 3	17
Oplossing 4	19
Oplossing 5	24
Oplossing 6	26
Oplossing 7	29
Oplossing 8	32
Oplossing 9	35
Oplossing 10.....	38
 Bijlage	 44
 Links naar video's	 45

Opgaven

Opgaven vraag 2:



video vragen 2,3 en 4

- 1) Twee cirkels, C_1 en C_2 zijn bepaald door de vergelijkingen:

$$C_1: x^2 + y^2 = 16a^2 + 8$$

$$C_2: x^2 + y^2 = 36a^2$$

Hierin is a een positief reëel getal. Voor welke waarde van a is de oppervlakte van C_1 de helft van de oppervlakte van C_2 .

- 2) Twee cirkels, C_1 en C_2 zijn bepaald door de vergelijkingen:

$$C_1: x^2 + y^2 = 16a^2$$

$$C_2: x^2 + y^2 = 25a^2$$

Hierin is a een positief reëel getal. Voor welke waarde van a is de oppervlakte van C_1 9π minder dan de oppervlakte van C_2 .

- 3) *Twee cirkels, C_1 en C_2 zijn bepaald door de vergelijkingen:

$$C_1: (x - 2)^2 + y^2 = a^2 + 4a$$

$$C_2: x^2 + y^2 + 4x - 6y = a^2$$

Hierin is a een positief reëel getal. Voor welke waarde van a is de oppervlakte van C_1 gelijk aan de oppervlakte van C_2 .

- 4) *Twee cirkels, C_1 en C_2 zijn bepaald door de vergelijkingen:

$$C_1: (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 3a^2$$

$$C_2: x^2 + y^2 + 2x - 2y = 2a^2$$

Hierin is a een positief reëel getal. Voor welke waarde van a is de oppervlakte van C_1 de helft van de oppervlakte van C_2 .

- 5) **Twee cirkels, C_1 en C_2 zijn bepaald door de vergelijkingen:

$$C_1: x^2 + y^2 + 2x - 8y = a^2$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 4y = 8a^2$$

Hierin is a een positief reëel getal. Voor welke waarde van a is de oppervlakte van C_1 een vierde van de oppervlakte van C_2 .

Opgaven vraag 3:

- 1) Beschouw de functie f met domein $] -\infty, +\infty[$ en met functievoorschrift:

$$f(x) = x + 2x^2$$

Voor elke x is $f(x - f(x))$ gelijk aan:

- 2) Beschouw de functie f met domein $] -\infty, +\infty[$ en met functievoorschrift:

$$f(x) = 5 + 2x^2$$

Voor elke x is $f(3 + f(x))$ gelijk aan:

- 3) *Beschouw de functie f met domein $]0, +\infty[$ en met functievoorschrift:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x}$$

Voor elke $x \in]0, +\infty[$ is $f(x + f(x))$ gelijk aan:

- 4) *Beschouw de functie f met domein $]0, +\infty[$ en met functievoorschrift:

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

Voor elke $x \in]0, +\infty[$ is $f(-f(x))$ gelijk aan:

- 5) **Beschouw de functie f met domein $]0, +\infty[$ en met functievoorschrift:

$$f(x) = x + \frac{3}{x^2}$$

Voor elke $x \in]0, +\infty[$ is $f(2x - f(x))$ gelijk aan:

Opgaven vraag 4:

- 1) Voor $d > 0$ beschouwen we de volgende drie figuren: een vierkant met zijde d , een cirkel met straal d en een rechthoek met lengte $2d$ en breedte d . Voor elke figuur bepalen we de verhouding $r = \frac{\text{oppervlakte}}{\text{omtrek}}$. Bepaal de volgorde van de verschillende verhoudingen.
- 2) *Voor $d > 0$ beschouwen we de volgende drie figuren: een vierkant met zijde d , een ruit S met zijde d en lengte kleine diagonaal d en een rechthoek met lengte $2d$ en breedte $3d$. Voor elke figuur bepalen we de verhouding $r = \frac{\text{oppervlakte}}{\text{omtrek}}$. Bepaal de volgorde van de verschillende verhoudingen.
- 3) *Voor $d > 0$ beschouwen we de volgende drie figuren: een vierkant met zijde d , een gelijkbenige driehoek met opstaande zijden $2d$ en basis d en een rechthoek met lengte d en breedte $3d$. Voor elke figuur bepalen we de verhouding $r = \frac{\text{oppervlakte}}{\text{omtrek}}$. Bepaal de volgorde van de verschillende verhoudingen.
- 4) *Voor $d > 0$ beschouwen we de volgende drie figuren: een vierkant met zijde d , een gelijkzijdige driehoek met zijden d en een rechthoek met lengte $2d$ en breedte $4d$. Voor elke figuur bepalen we de verhouding $r = \frac{\text{oppervlakte}}{\text{omtrek}}$. Bepaal de volgorde van de verschillende verhoudingen.
- 5) **Voor $d > 0$ beschouwen we de volgende drie figuren: een gelijkzijdige driehoek G met zijde d , een gelijkbenige driehoek met opstaande zijden d en basis $2d$ en een rechthoek met lengte d en breedte $10d$. Voor elke figuur bepalen we de verhouding $r = \frac{\text{oppervlakte}}{\text{omtrek}}$. Bepaal de volgorde van de verschillende verhoudingen.

Geen ster = makkelijker dan vraag toelatingsexamen
* = +- niveau vraag toelatingsexamen
** = moeilijker dan vraag toelatingsexamen

DISCLAIMER: Dit document bevat vertrouwelijke informatie die eigendom is van Wiskunne. Het is strikt verboden om dit document, geheel of gedeeltelijk, te verspreiden, te kopiëren of te delen met derden zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van Wiskunne.



video vragen 5, 6 en 7

Opgaven vraag 5:

- 1) *Een bedrijf maakt flessen frisdrank van 100 cl. Nu weet men uit voorgaande analyses dat de gevulde hoeveelheid normaal verdeeld is met een gemiddelde van 100 en een standaardafwijking van 5 cl is. De vulmachine vult dagelijks 8000 flessen, hiervan worden enkel de 7500 meest gevulde flessen behouden voor verkoop. Wat is de beste schatting voor het aantal flessen met minder dan 95 cl dat worden toegelaten voor verkoop?
- 2) *Een bedrijf maakt flessen frisdrank van 150 cl. Nu weet men uit voorgaande analyses dat de gevulde hoeveelheid normaal verdeeld is met een gemiddelde van 150 en een standaardafwijking van 3 cl is. De vulmachine vult dagelijks 10 000 flessen, hiervan worden enkel de 9900 meest gevulde flessen behouden voor verkoop. Wat is de beste schatting voor het aantal flessen met minder dan 144 cl dat worden toegelaten voor verkoop?
- 3) *Een bedrijf produceert voetballen. Men weet dat de hoeveelheid gram die een voetbal bevat normaal verdeeld is met gemiddelde 400 en standaardafwijking 25 gram. Op het EK worden enkel ballen toegelaten die minstens 375 gram en maximaal 450 gram wegen. Hoeveel procent van de ballen, die het bedrijf produceert, voldoet niet aan deze voorwaarde?
- 4) **Een bedrijf maakt flessen frisdrank van 150 cl. Nu weet men uit voorgaande analyses dat de gevulde hoeveelheid normaal verdeeld is met een gemiddelde van 150 en een standaardafwijking van 3 cl is. Er wordt in een winkel een lading gecontroleerd of de flessen wel voldoende vloeistof bevatten. Hiervoor geldt als voorwaarde dat ze minstens 147 cl moeten bevatten. Men pakt er 5 flessen uit. Als alle flessen voldoen aan de voorwaarde, wordt de lading goedgekeurd. Wat is de kans dat deze wordt goedgekeurd?
- 5) **Het IQ van de Vlamingen is normaal verdeeld met gemiddelde 100 en standaardafwijking 10. Er is geen verschil tussen de verdeling bij mannen of vrouwen. Er is een groep van 100 mensen waarvan 30 mannen en 70 vrouwen. Je kiest op aselechte wijze één personen eruit. Wat is de kans dat deze persoon een vrouw is met een IQ van minstens 110?

Opgaven vraag 6:

- 1) *Bepaal het aantal oplossingen in het gegeven interval:
 $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$ interval: $[0, 2\pi]$
- 2) *Bepaal het aantal oplossingen in het gegeven interval:
 $\sin 2x - \sin x = 0$ interval: $[-\pi, \pi]$
- 3) **Bepaal het aantal oplossingen in het gegeven interval:
 $3 \tan^2 x - \tan x - 2 = 0$ interval: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- 4) *Bepaal het aantal oplossingen in het gegeven interval:
 $2 \sin 2x - \cos x = 0$ interval: $[-\pi, \pi]$
- 5) *Bepaal het aantal oplossingen in het gegeven interval:
 $\cos 2x + \sin x = 0$ interval: $[0, 2\pi]$

Opgaven vraag 7:

- 1) $* \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}$ met $x, y \in \mathbb{R}^+$
- 2) $* \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & y \\ y & 2y \end{bmatrix}$
- 3) $* \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & x+1 \\ \sqrt{x-1}+2 & x^4-14 \end{bmatrix}$ met $x \in [1, +\infty[$
- 4) $* \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x^2 & x^3-1 \\ x^4-2 & x^5+3 \end{bmatrix}$
- 5) $* \begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+6 & 10 \\ 15 & 5y+2 \end{bmatrix}$

Geen ster = makkelijker dan vraag toelatingsexamen

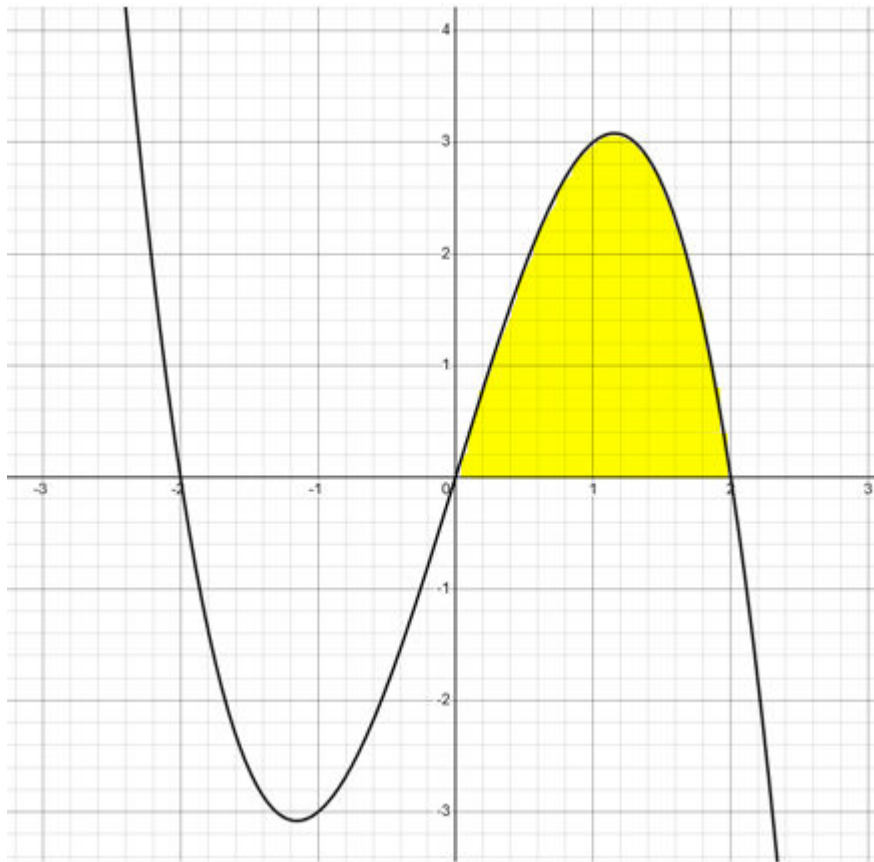
* = +- niveau vraag toelatingsexamen

** = moeilijker dan vraag toelatingsexamen

DISCLAIMER: Dit document bevat vertrouwelijke informatie die eigendom is van Wiskunne. Het is strikt verboden om dit document, geheel of gedeeltelijk, te verspreiden, te kopiëren of te delen met derden zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van Wiskunne.

Opgaven vraag 8:

1)



video vragen 8, 9 en 10

*De figuur toont de grafiek van de oneven functie $f(x)$.

Welke van de onderstaande integralen bepaalt de oppervlakte van het gekleurde gebied?

a) $\int_{-2}^0 f(x) dx$

b) $\frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx$

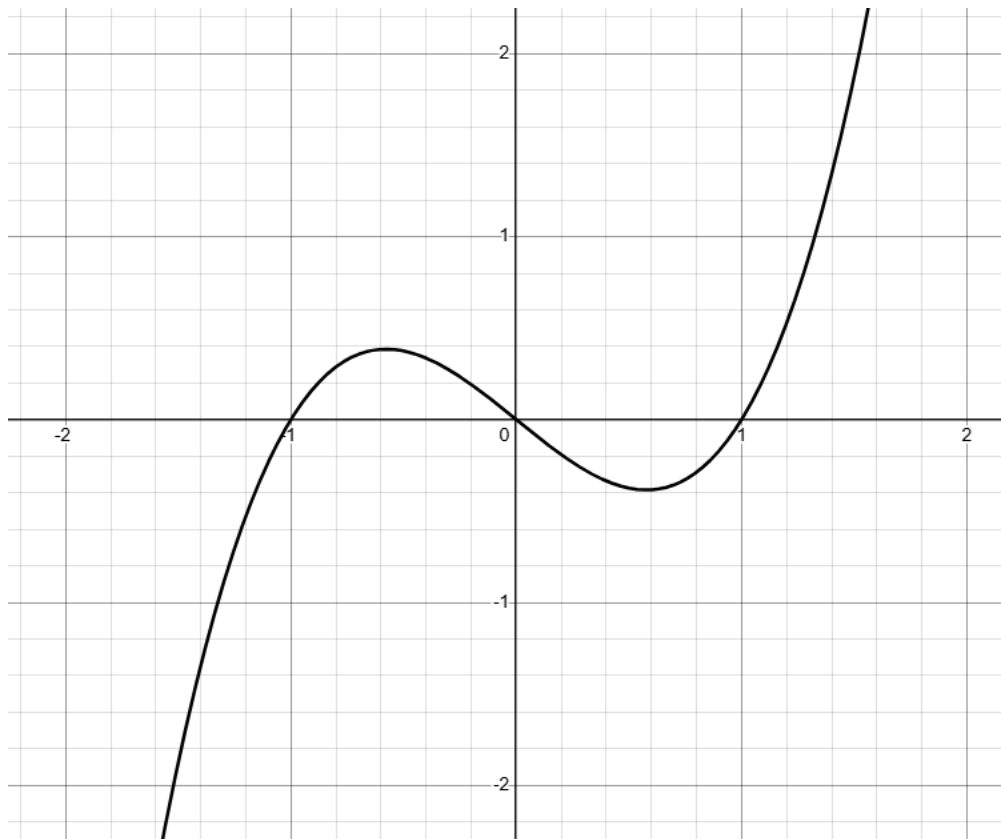
c) $-\int_{-2}^0 |f(x)| dx$

d) $\int_{-2}^0 |f(x)| dx$

Geen ster = makkelijker dan vraag toelatingsexamen
* = +- niveau vraag toelatingsexamen
** = moeilijker dan vraag toelatingsexamen

DISCLAIMER: Dit document bevat vertrouwelijke informatie die eigendom is van Wiskunne. Het is strikt verboden om dit document, geheel of gedeeltelijk, te verspreiden, te kopiëren of te delen met derden zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van Wiskunne.

2)



*De figuur toont de grafiek van de oneven functie $f(x)$.

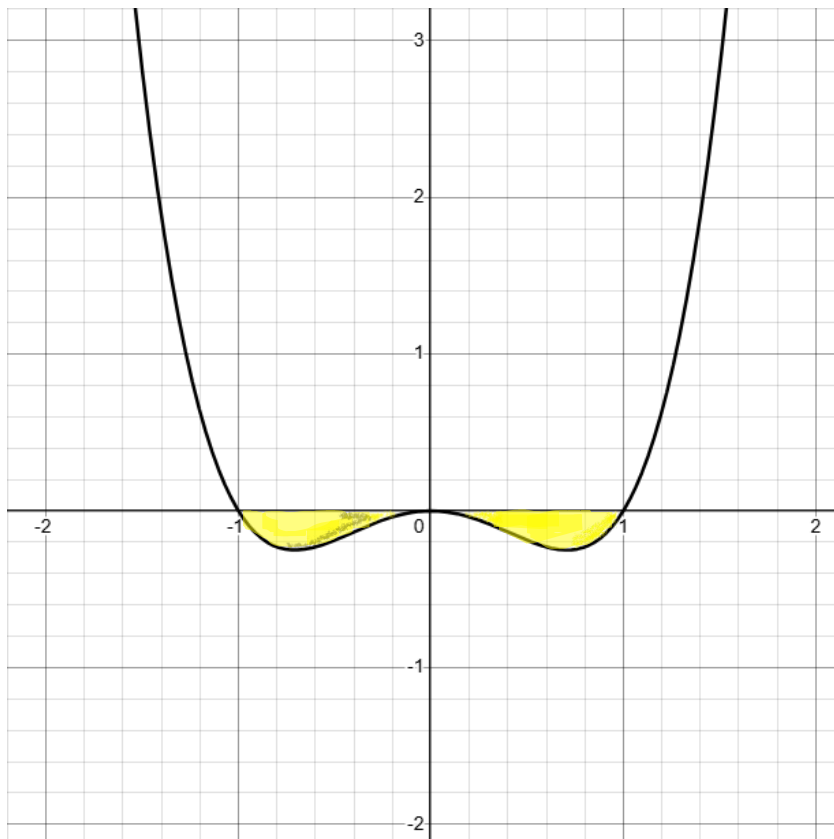
Welke van de onderstaande integralen bepaalt de oppervlakte tussen de grenzen $x = -1$ en $x = 1$?

- a) $\int_{-1}^1 f(x) dx$
- b) $2 \int_{-1}^0 f(x) dx$
- c) $-\int_{-1}^1 f(x) dx$
- d) $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (|f(x)| - f(x)) dx$

Geen ster = makkelijker dan vraag toelatingsexamen
* = +- niveau vraag toelatingsexamen
** = moeilijker dan vraag toelatingsexamen

DISCLAIMER: Dit document bevat vertrouwelijke informatie die eigendom is van Wiskunne. Het is strikt verboden om dit document, geheel of gedeeltelijk, te verspreiden, te kopiëren of te delen met derden zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van Wiskunne.

3)



*De figuur toont de grafiek van de even functie $f(x)$.

Welke van de onderstaande integralen bepaalt de oppervlakte van het gekleurde gebied?

- a) $\int_{-1}^1 f(x)dx$
- b) $2 \int_{-1}^0 f(x)dx$
- c) $-\int_{-1}^1 f(x)dx$
- d) $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (|f(x)| + f(x))dx$

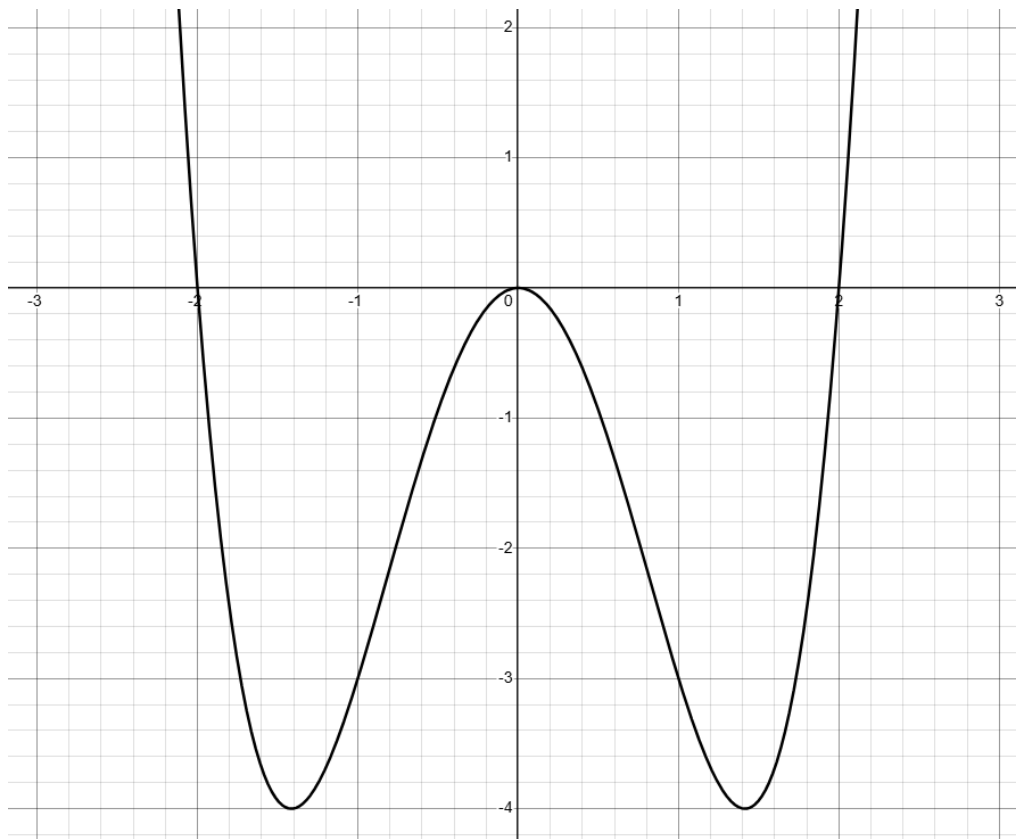
Geen ster = makkelijker dan vraag toelatingsexamen

* = +/- niveau vraag toelatingsexamen

** = moeilijker dan vraag toelatingsexamen

DISCLAIMER: Dit document bevat vertrouwelijke informatie die eigendom is van Wiskunne. Het is strikt verboden om dit document, geheel of gedeeltelijk, te verspreiden, te kopiëren of te delen met derden zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van Wiskunne.

4)



*De figuur toont de grafiek van de even functie $f(x)$.

Welke van de onderstaande integralen bepaalt de oppervlakte tussen de grenzen $x = -2$ en $x = 1$?

a) $\int_{-2}^1 f(x) dx$

b) $-2 \int_{-2}^{-0.5} f(x) dx$

c) $-\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 |f(x)| dx$

d) $\frac{1}{2} \int_{-2}^1 (|f(x)|) dx$

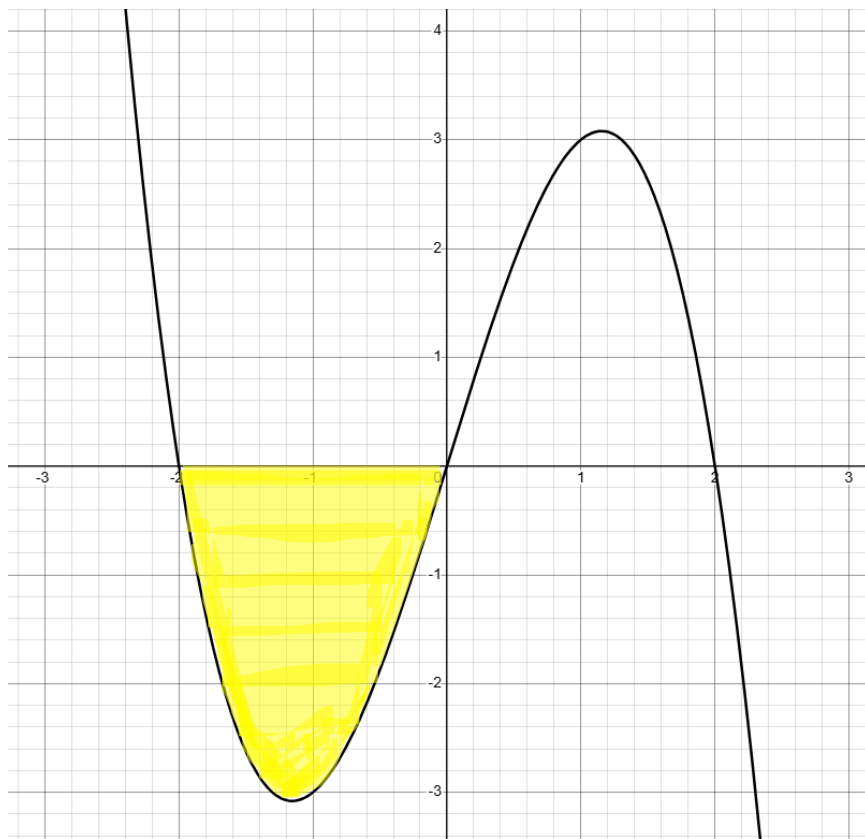
Geen ster = makkelijker dan vraag toelatingsexamen

* = +- niveau vraag toelatingsexamen

** = moeilijker dan vraag toelatingsexamen

DISCLAIMER: Dit document bevat vertrouwelijke informatie die eigendom is van Wiskunne. Het is strikt verboden om dit document, geheel of gedeeltelijk, te verspreiden, te kopiëren of te delen met derden zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van Wiskunne.

5)



*De figuur toont de grafiek van de oneven functie $f(x)$.

Welke van de onderstaande integralen bepaalt de gekleurde oppervlakte?

a) $\int_{-2}^0 f(x) dx$

b) $\frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx$

c) $-\int_{-2}^0 |f(x)| dx$

d) $\int_0^2 f(x) dx$

Geen ster = makkelijker dan vraag toelatingsexamen

* = +- niveau vraag toelatingsexamen

** = moeilijker dan vraag toelatingsexamen

DISCLAIMER: Dit document bevat vertrouwelijke informatie die eigendom is van Wiskunne. Het is strikt verboden om dit document, geheel of gedeeltelijk, te verspreiden, te kopiëren of te delen met derden zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van Wiskunne.

Opgaven vraag 9:

- 1) *Tom dice gooit met twee (eerlijke) dobbelstenen. Hoe groot is de kans dat de som van gegooide ogen deelbaar is door 7?
- 2) *Tom dice gooit met twee (eerlijke) dobbelstenen. Hoe groot is de kans dat de som van gegooide ogen deelbaar is door 6?
- 3) *Tom dice gooit met twee (eerlijke) dobbelstenen. Hoe groot is de kans dat de som van gegooide ogen een priemgetal is?
- 4) *Tom dice gooit met twee (eerlijke) dobbelstenen. Hoe groot is dat beide dobbelstenen hetzelfde aantal ogen hebben?
- 5) **Tom dice gooit met twee (eerlijke) dobbelstenen. Hoe groot is de kans dat de tweede dobbelsteen meer ogen heeft dan de eerste?

Opgaven vraag 10:

- 1) De functie f is bepaald door voorschrift: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ waarbij de coëfficiënten a , b , c en d reële getallen zijn. Bepaal deze coëfficiënten als je weet dat de functie de x -as snijdt in $(1,0)$, $(2,0)$ en $(3,0)$ en de y -as snijdt in $(0, -1)$.
- 2) *De functie f is bepaald door voorschrift: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ waarbij de coëfficiënten a , b , c en d reële getallen zijn. Bepaal deze coëfficiënten als je weet dat de functie de x -as snijdt in $(1,0)$ en de y -as snijdt in $(0,1)$. Voorts raakt het de x -as in $(2,0)$.
- 3) *De functie f is bepaald door voorschrift: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ waarbij de coëfficiënten a , b , c en d reële getallen zijn. Bepaal deze coëfficiënten als je weet dat de functie de x -as snijdt in $(-1,0)$ en raakt de x -as in $(3,0)$. Voorts behoort het punt $P(1,1)$ tot f .
- 4) **De functie f is bepaald door voorschrift: $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ waarbij de coëfficiënten b , c en d reële getallen zijn. Bepaal deze coëfficiënten als je weet dat de functie de x -as snijdt in $(0,0)$ en de punten $P(1,1)$ en $Q(-1,2)$ tot f behoren.
- 5) **De functie f is bepaald door voorschrift: $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ waarbij de coëfficiënten b , c en d reële getallen zijn. Bepaal deze coëfficiënten als je weet dat de som van de coëfficiënten 5 bedraagt en de functie de x -as raakt in $(-1,0)$.

Oplossingen

Oplossingen vraag 2:

1) Straal $C_1 = \sqrt{16a^2 + 8}$
Straal $C_2 = \sqrt{36a^2}$ ($= 6a$)

$$\begin{aligned}\text{Opp } C_1 &= \pi r^2 \\ \Rightarrow \text{Opp } C_1 &= \pi \cdot (16a^2 + 8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Opp } C_2 &= \pi r^2 \\ \Rightarrow \text{Opp } C_2 &= \pi \cdot 36a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Opp } C_1 &= \frac{1}{2} \cdot \text{Opp } C_2 \\ \Rightarrow \pi \cdot (16a^2 + 8) &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 36a^2 \\ \Leftrightarrow 16a^2 + 8 &= 18a^2 \\ \Leftrightarrow -2a^2 &= -8 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow a &= 2 \vee a = -2\end{aligned}$$

Antwoord: $a = 2$

2) Straal $C_1 = \sqrt{16a^2}$
Straal $C_2 = \sqrt{25a^2}$ ($= 5a$)

$$\begin{aligned}\text{Opp } C_1 &= \pi r^2 \\ \Rightarrow \text{Opp } C_1 &= \pi \cdot (16a^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Opp } C_2 &= \pi r^2 \\ \Rightarrow \text{Opp } C_2 &= \pi \cdot 25a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Opp } C_1 &= \text{Opp } C_2 - 9\pi \\ \Rightarrow \pi \cdot 16a^2 &= \pi \cdot 25a^2 - 9\pi \\ \Leftrightarrow 16a^2 &= 25a^2 - 9 \\ \Leftrightarrow -9a^2 &= -9 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow a &= 1 \vee a = -1\end{aligned}$$

Antwoord: $a = 1$

$$3) \quad C_1: (x-2)^2 + y^2 = a^2 + 4a$$

$$C_2: (x+2)^2 + (y-3)^2 = a^2 + 13$$

$$\text{Straal } C_1 = \sqrt{a^2 + 4a}$$

$$\text{Straal } C_2 = \sqrt{a^2 + 13}$$

$$\text{Opp } C_1 = \pi r^2$$

$$\Rightarrow \text{Opp } C_1 = \pi \cdot (a^2 + 4a)$$

$$\text{Opp } C_2 = \pi r^2$$

$$\Rightarrow \text{Opp } C_2 = \pi \cdot (a^2 + 13)$$

$$\text{Opp } C_1 = \text{Opp } C_2$$

$$\Rightarrow \pi \cdot (a^2 + 4a) = \pi \cdot (a^2 + 13)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a = a^2 + 13$$

$$\Leftrightarrow 4a = 13$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{13}{4}$$

Antwoord: $a = \frac{13}{4}$

$$4) \quad C_1: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 3a^2$$

$$C_2: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2a^2 + 2$$

$$\text{Straal } C_1 = \sqrt{3a^2}$$

$$\text{Straal } C_2 = \sqrt{2a^2 + 2}$$

$$\text{Opp } C_1 = \pi r^2$$

$$\Rightarrow \text{Opp } C_1 = \pi \cdot (3a^2)$$

$$\text{Opp } C_2 = \pi r^2$$

$$\Rightarrow \text{Opp } C_2 = \pi \cdot (2a^2 + 2)$$

$$\text{Opp } C_1 = \frac{1}{2} \cdot \text{Opp } C_2$$

$$\Rightarrow \pi \cdot (3a^2) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 = a^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Antwoord: $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$5) \quad C_1: (x+1)^2 + (y-4)^2 = a^2 + 17$$
$$C_2: x^2 + (y-2)^2 = 8a^2 + 4$$

$$\text{Straal } C_1 = \sqrt{a^2 + 17}$$

$$\text{Straal } C_2 = \sqrt{8a^2 + 4}$$

$$\text{Opp } C_1 = \pi r^2$$
$$\Rightarrow \text{Opp } C_1 = \pi \cdot (a^2 + 17)$$

$$\text{Opp } C_2 = \pi r^2$$
$$\Rightarrow \text{Opp } C_2 = \pi \cdot (8a^2 + 4)$$

$$\text{Opp } C_1 = \frac{1}{4} \cdot \text{Opp } C_2$$
$$\Rightarrow \pi \cdot (2a^2 + 17) = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (8a^2 + 4)$$
$$\Leftrightarrow a^2 + 17 = 2a^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow -a^2 = -16$$
$$\Leftrightarrow a = 4 \vee a = -4$$

Antwoord: $a = 4$

Oplossingen vraag 3:

1) $f(x) = x + 2x^2$ met $x \in]-\infty, +\infty[$

$$\begin{aligned} f(x - f(x)) &= f(x - (x + 2x^2)) \\ &= f(-2x^2) \\ &= -2x^2 + 2 \cdot (-2x^2)^2 \\ &= -2x^2 + 2 \cdot 4x^4 \\ &= -2x^2 + 8x^4 \end{aligned}$$

Antwoord: $f(x - f(x)) = -2x^2 + 8x^4$

2) $f(x) = 5 + 2x^2$ met $x \in]-\infty, +\infty[$

$$\begin{aligned} f(3 + f(x)) &= f(3 + (5 + 2x^2)) \\ &= f(8 + 2x^2) \\ &= 5 + 2(8 + 2x^2)^2 \\ &= 5 + 2(64 + 32x^2 + 4x^4) \\ &= 5 + 128 + 64x^2 + 8x^4 \\ &= 133 + 64x^2 + 8x^4 \end{aligned}$$

Antwoord: $f(3 + f(x)) = 133 + 64x^2 + 8x^4$

3) $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x}$ met $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f(x + f(x)) &= f\left(x + \left(x - 1 + \frac{2}{x}\right)\right) \\ &= f\left(2x - 1 + \frac{2}{x}\right) \\ &= \left(2x - 1 + \frac{2}{x}\right) - 1 + \frac{2}{2x - 1 + \frac{2}{x}} \\ &= 2x - 2 + \frac{2}{x} + \frac{2x}{2x^2 - x + 2} \end{aligned}$$

Antwoord: $f(x + f(x)) = 2x - 2 + \frac{2}{x} + \frac{2x}{2x^2 - x + 2}$

Geen ster = makkelijker dan vraag toelatingsexamen
 * = +- niveau vraag toelatingsexamen
 ** = moeilijker dan vraag toelatingsexamen

DISCLAIMER: Dit document bevat vertrouwelijke informatie die eigendom is van Wiskunne. Het is strikt verboden om dit document, geheel of gedeeltelijk, te verspreiden, te kopiëren of te delen met derden zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van Wiskunne.

4) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ met $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} & f(-f(x)) \\ &= f\left(-\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\right) \\ &= f\left(-x^2 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \left(-x^2 + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{-x^2 + \frac{1}{x}} \\ &= x^4 - 2x + \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^3 - 1} \end{aligned}$$

Antwoord: $f(-f(x)) = x^4 - 2x + \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^3 - 1}$

5) $f(x) = x + \frac{3}{x^2}$ met $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} & f(2x - f(x)) \\ &= f\left(2x - \left(x + \frac{3}{x^2}\right)\right) \\ &= f\left(x - \frac{3}{x^2}\right) \\ &= \left(x - \frac{3}{x^2}\right) + \frac{3}{\left(x - \frac{3}{x^2}\right)^2} \\ &= x - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^2 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^4}} \\ &= x - \frac{3}{x^2} + \frac{3x^4}{x^6 - 6x^3 + 9} \end{aligned}$$

Antwoord: $f(2x - f(x)) = x - \frac{3}{x^2} + \frac{3x^4}{x^6 - 6x^3 + 9}$

Oplossingen vraag 4:

$$\begin{aligned} 1) \quad \text{Opp}_v &= z^2 \\ \Rightarrow \text{Opp}_v &= d^2 \\ \text{Omtrek}_v &= 4z \\ \Rightarrow \text{Omtrek}_v &= 4d \end{aligned}$$

$$r_v = \frac{d^2}{4d} = \frac{d}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Opp}_c &= \pi r^2 \\ \Rightarrow \text{Opp}_c &= \pi d^2 \\ \text{Omtrek}_c &= 2\pi r \\ \Rightarrow \text{Omtrek}_c &= 2\pi d \end{aligned}$$

$$r_c = \frac{\pi d^2}{2\pi d} = \frac{d}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Opp}_r &= l \cdot b \\ \Rightarrow \text{Opp}_r &= 2d \cdot d = 2d^2 \\ \text{Omtrek}_r &= 2l + 2b \\ \Rightarrow \text{Omtrek}_r &= 6d \end{aligned}$$

$$r_r = \frac{2d^2}{6d} = \frac{d}{3}$$

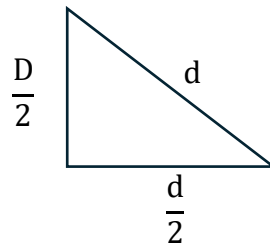
Antwoord: $r_v < r_c < r_r$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Opp}_v &= z^2 \\ \Rightarrow \text{Opp}_v &= d^2 \\ \text{Omtrek}_v &= 4z \\ \Rightarrow \text{Omtrek}_v &= 4d \end{aligned}$$

$$r_v = \frac{d^2}{4d} = \frac{d}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Opp}_s &= \frac{d \cdot D}{2} \\ \Rightarrow \text{Opp}_s &= \frac{d \cdot \sqrt{3}d}{2} \\ \Leftrightarrow \text{Opp}_s &= \frac{\sqrt{3}d^2}{2} \\ \text{Omtrek}_s &= 4z \\ \Rightarrow \text{Omtrek}_s &= 4d \end{aligned}$$

$$r_s = \frac{\frac{\sqrt{3}d^2}{2}}{4d} = \frac{\sqrt{3}d}{8}$$



$$\begin{aligned} d^2 &= \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow d^2 &= \frac{D^2}{4} + \frac{d^2}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{3d^2}{4} &= \frac{D^2}{4} \\ \Leftrightarrow 3d^2 &= D^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}d &= D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Opp}_r &= l \cdot b \\ \Rightarrow \text{Opp}_r &= 2d \cdot 3d = 6d^2 \\ \text{Omtrek}_r &= 2l + 2b \\ \Rightarrow \text{Omtrek}_r &= 10d \end{aligned}$$

$$r_r = \frac{6d^2}{10d} = \frac{3d}{5}$$

Antwoord: $r_s < r_v < r_r$

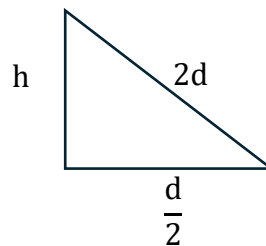
$$\begin{aligned} 3) \text{ Opp}_v &= z^2 \\ \Rightarrow \text{Opp}_v &= d^2 \\ \text{Omtrek}_v &= 4z \\ \Rightarrow \text{Omtrek}_v &= 4d \end{aligned}$$

$$r_v = \frac{d^2}{4d} = \frac{d}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Opp}_d &= \frac{b \cdot h}{2} \\ \Rightarrow \text{Opp}_d &= \frac{d \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} d}{2} \\ \Leftrightarrow \text{Opp}_d &= \frac{\frac{\sqrt{15}}{2} d^2}{2} \\ \Leftrightarrow \text{Opp}_d &= \frac{\sqrt{15}}{4} d^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Omtrek}_d &= b + 2z \\ \Rightarrow \text{Omtrek}_d &= 5d \end{aligned}$$

$$r_d = \frac{\frac{\sqrt{15}d^2}{4}}{5d} = \frac{\sqrt{15}d}{20}$$



$$\begin{aligned} (2d)^2 &= h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow 4d^2 &= h^2 + \frac{d^2}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{15d^2}{4} &= h^2 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{15}d}{2} &= h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Opp}_r &= l \cdot b \\ \Rightarrow \text{Opp}_r &= d \cdot 3d = 3d^2 \\ \text{Omtrek}_r &= 2l + 2b \\ \Rightarrow \text{Omtrek}_r &= 8d \end{aligned}$$

$$r_r = \frac{3d^2}{8d} = \frac{3d}{8}$$

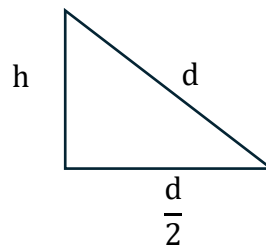
Antwoord: $r_d < r_v < r_r$

$$\begin{aligned} 4) \text{ Opp}_v &= z^2 \\ \Rightarrow \text{Opp}_v &= d^2 \\ \text{Omtrek}_v &= 4z \\ \Rightarrow \text{Omtrek}_v &= 4d \end{aligned}$$

$$r_v = \frac{d^2}{4d} = \frac{d}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Opp}_d &= \frac{b \cdot h}{2} \\ \Rightarrow \text{Opp}_d &= \frac{d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}d}{2} \\ \Leftrightarrow \text{Opp}_d &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}d^2}{2} \\ \Leftrightarrow \text{Opp}_d &= \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 \\ \text{Omtrek}_d &= 3z \\ \Rightarrow \text{Omtrek}_d &= 3d \end{aligned}$$

$$r_d = \frac{\frac{\sqrt{3}d^2}{4}}{3d} = \frac{\sqrt{3}d}{12}$$



$$\begin{aligned} d^2 &= h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow d^2 &= h^2 + \frac{d^2}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{3d^2}{4} &= h^2 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}d}{2} &= h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Opp}_r &= l \cdot b \\ \Rightarrow \text{Opp}_r &= 2d \cdot 4d = 8d^2 \\ \text{Omtrek}_r &= 2l + 2b \\ \Rightarrow \text{Omtrek}_r &= 12d \end{aligned}$$

$$r_r = \frac{8d^2}{12d} = \frac{2d}{3}$$

Antwoord: $r_d < r_v < r_r$

$$5) \text{Opp}_g = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Opp}_g = \frac{d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} d}{2}$$

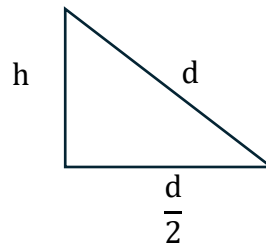
$$\Leftrightarrow \text{Opp}_g = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} d^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{Opp}_g = \frac{\sqrt{3}}{4} d^2$$

$$\text{Omtrek}_g = 3z$$

$$\Rightarrow \text{Omtrek}_g = 3d$$

$$r_g = \frac{\frac{\sqrt{3}d^2}{4}}{3d} = \frac{\sqrt{3}d}{12}$$



$$\begin{aligned} d^2 &= h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow d^2 &= h^2 + \frac{d^2}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{3d^2}{4} &= h^2 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}d}{2} &= h \end{aligned}$$

$$\text{Opp}_d = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Opp}_d = \frac{d \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} d}{2}$$

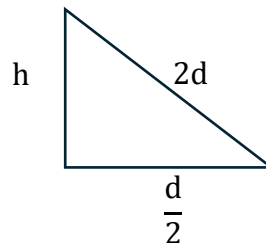
$$\Leftrightarrow \text{Opp}_d = \frac{\frac{\sqrt{15}}{2} d^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{Opp}_d = \frac{\sqrt{15}}{4} d^2$$

$$\text{Omtrek}_d = b + 2z$$

$$\Rightarrow \text{Omtrek}_d = 5d$$

$$r_d = \frac{\frac{\sqrt{15}d^2}{4}}{5d} = \frac{\sqrt{15}d}{20}$$



$$\begin{aligned} (2d)^2 &= h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow 4d^2 &= h^2 + \frac{d^2}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{15d^2}{4} &= h^2 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{15}d}{2} &= h \end{aligned}$$

$$\text{Opp}_r = l \cdot b$$

$$\Rightarrow \text{Opp}_r = d \cdot 10d = 10d^2$$

$$\text{Omtrek}_r = 2l + 2b$$

$$\Rightarrow \text{Omtrek}_r = 22d$$

$$r_r = \frac{10d^2}{22d} = \frac{5d}{11}$$

Antwoord: $r_g < r_d < r_r$

Oplossingen vraag 5:

- 1) $\mu = 100$ (gemiddelde)
 $\sigma = 5$ (standaardafwijking)

We berekenen eerst het percentage flessen dat minder dan 95 cl bevat:

$$[0,95] = [0, \mu - \sigma]^1 = 16\%^2$$

$$0,16 \cdot 8000 = 1280$$
$$\Rightarrow 1280 - 500 = 780$$

Antwoord: Er worden 780 flessen van minder dan 95 cl toegelaten voor verkoop.

- 2) $\mu = 150$ (gemiddelde)
 $\sigma = 3$ (standaardafwijking)

We berekenen eerst het percentage flessen dat minder dan 144 cl bevat:

$$[0,144] = [0, \mu - 2\sigma] = 2,5\%^2$$

$$0,025 \cdot 10\,000 = 250$$
$$\Rightarrow 250 - 100 = 150$$

Antwoord: Er worden 150 flessen van minder dan 144 cl toegelaten voor verkoop.

- 3) $\mu = 400$ (gemiddelde)
 $\sigma = 25$ (standaardafwijking)

We berekenen eerst welk percentage wel voldoet aan de eisen:

$$[375,450] = [\mu - \sigma, \mu + 2\sigma] = 81,5\%^2$$

We gebruiken de complementregel:

$$\Rightarrow 100 - 81,5\% = 18,5\%$$

Antwoord: De kans dat een bal niet voldoet aan de voorwaarden, is 18,5%.

¹ Er staat minder dan 95 cl en toch is het haakje naar binnen. Dit komt omdat de kans op één specifieke hoeveelheid 0% is. Het maakt dus niet uit of het minder of hoogstens 95 cl is.

² Zie bijlage (helemaal achteraan)

- 4) $\mu = 150$ (gemiddelde)
 $\sigma = 3$ (standaardafwijking)

We berekenen eerst de kans dat één fles minstens 147 cl bevat:

$$[147, +\infty] = [\mu - \sigma, +\infty] = 84\%^2$$

$$\Rightarrow 0,84^5 = 41,82\%$$

Antwoord: De kans dat een lading wordt goedgekeurd is 41,82%.

- 5) $\mu = 100$ (gemiddelde)
 $\sigma = 10$ (standaardafwijking)

We berekenen eerst de kans dat iemand een IQ van minstens 110 heeft:

$$[110, +\infty] = [\mu + \sigma, +\infty] = 16\%^2$$

$$P(V \cap IQ \geq 110) = P(V) \cdot P(IQ \geq 110 | V) = \frac{70}{100} \cdot 0,16 = 0,112^3$$

Antwoord: De kans dat de persoon een vrouw is met IQ van minstens 110 is 11,2%.

Oplossingen vraag 6:

$$1) t = \cos x$$

$$\Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow D = 1$$

$$t = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee t = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$\Rightarrow t = \frac{3 + 1}{2} \vee t = \frac{3 - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = 2 \vee t = 1$$

$$\Rightarrow \cos x = 2 \vee \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 + k \cdot 2\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z}$$

Antwoord: Twee oplossingen (0 en 2π)

$$2) \sin(2x) - \sin(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x)(2\cos(x) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = 0 \vee 2\cos(x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z}$$

Antwoord: Vijf oplossingen $(-\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi)$

³ Som en product kan ook bij deze oefening.

⁴ Verdubbelingsformule sinus

⁵ De cosinus van tegengestelde hoeken is gelijk.

3) $t = \tan x$

$$\Rightarrow 3t^2 - t - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)$$

$$\Leftrightarrow D = 25$$

$$t = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee t = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1 + 5}{6} \vee t = \frac{1 - 5}{6}$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \tan x = 1 \vee \tan x = -\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z}^6 \vee \tan x = -\frac{2}{3}$$

We weten de specifieke oplossing niet van $\tan x = -\frac{2}{3}$, maar dat hoeft niet. We weten dat het een hoek is die in het 2^{de} of 4^{de} kwadrant ligt aangezien de tangens negatief moet zijn. Hierdoor weten we dat deze vergelijking maar één oplossing heeft.

Antwoord: Twee oplossingen ($\frac{\pi}{4}$ en de hoek die in het 4^{de} kwadrant ligt)

4) $2\sin(2x) - \cos(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 4\sin(x)\cos(x) - \cos(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x)(4\sin(x) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = 0 \vee 4\sin(x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \sin(x) = \frac{1}{4} \text{ met } k \in \mathbb{Z}$$

We weten de specifieke oplossing niet van $\sin(x) = \frac{1}{4}$, maar dat hoeft niet. We weten dat het een hoek is die in het 1^{ste} of 2^{de} kwadrant ligt aangezien de sinus positief moet zijn. Hierdoor weten we dat deze vergelijking twee oplossingen heeft.

Antwoord: Vier oplossingen ($\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, hoek in 1^{ste} kwadrant en hoek in 2^{de} kwadrant)

⁶ Tangens blijft gelijk bij anti supplementaire hoeken en daarom schrijf je $k\pi$ ipv $k2\pi$.

$$5) \cos 2x + \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 x + \sin x = 0^7$$

$$t = \sin x$$

$$\Rightarrow -2t^2 + t + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow D = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow D = 9$$

$$t = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee t = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$\Rightarrow t = \frac{-1 + 3}{-4} \vee t = \frac{-1 - 3}{-4}$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \vee t = 1$$

$$\Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \vee \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ met }^8 k \in \mathbb{Z}$$

Antwoord: Drie oplossingen $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \text{ en } \frac{7\pi}{6})$

⁷ Verdubbelingsformule cosinus. We kiezen $1 - 2 \sin^2 x$ zodat we een tweedegraadsvergelijking krijgen die we kunnen oplossen met gepaste substitutie.

⁸ Sinus blijft bij supplementaire hoeken gelijk.

Oplossingen vraag 7:

$$\begin{aligned}
 1) \text{ LL: } & \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & x+y \\ 0 & y^2 \end{bmatrix} \\
 & \Rightarrow \begin{bmatrix} x^2 & x+y \\ 0 & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 0 & 2y \end{bmatrix} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x \\ x+y = 3 \\ 0 = 0 \\ y^2 = 2y \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x+y = 3 \\ y^2 - 2y = 0 \end{cases} \text{ (we houden enkele de nuttige vergelijkingen)} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot (x-1) = 0 \\ x+y = 3 \\ y \cdot (y-2) = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 1 \\ x+y = 3 \\ y = 0 \vee y = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Antwoord: De oplossing bedraagt $x = 1$ en $y = 2$.

$$\begin{aligned}
 2) \text{ LL: } & \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+1 & x+3 \\ x+3 & 10 \end{bmatrix} \\
 & \Rightarrow \begin{bmatrix} x^2+1 & x+3 \\ x+3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & y \\ y & 2y \end{bmatrix} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 = y \\ x+3 = y \\ x+3 = y \\ 10 = 2y \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = y \\ 5 = y \end{cases} \text{ (we houden enkel de "simpelste" vergelijkingen)} \\
 & \Rightarrow \begin{cases} x+3 = 5 \\ 5 = y \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Antwoord: De oplossing bedraagt $x = 2$ en $y = 5$.

$$\begin{aligned}
 3) \text{ LL: } & \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+1 & x^2-x+1 \\ x+1 & x \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} x^2+1 & x^2-x+1 \\ x+1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & x+1 \\ \sqrt{x-1}+2 & x^4-14 \end{bmatrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2+1=5 \\ x^2-x+1=x+1 \\ x+1=\sqrt{x-1}+2 \\ x=x^4-14 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2+1=5 \\ x^2-2x=0 \end{cases} \text{ (we houden enkel de "simpelste" vergelijkingen)} \\
 \Rightarrow & \begin{cases} x^2=4 \\ x \cdot (x-2)=0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x=2 \vee x=-2 \\ x=0 \vee x=2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Antwoord: De oplossing bedraagt $x = 2$ ⁹.

$$\begin{aligned}
 4) \text{ LL: } & \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 & 3x^3-3 \\ 3x^4-6 & 3x^5+9 \end{bmatrix} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 3=3x^2 \\ -6=3x^3-3 \\ -3=3x^4-6 \\ 6=3x^5+6 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \{-6=3x^3-3 \quad 10 \\
 \Leftrightarrow & \{-3=3x^3 \\
 \Leftrightarrow & \{-1=x^3 \\
 \Leftrightarrow & \{x=-1
 \end{aligned}$$

Antwoord: De oplossing bedraagt $x = -1$.

⁹ Invullen bij de twee "niet simpele" vergelijkingen is noodzakelijk om te zien of het daar ook klopt, wat hier het geval is.

¹⁰ We houden enkel deze vergelijking omdat het slechts één oplossing zal hebben omdat het een derdegraadsvergelijking is. Ook hier is de oplossing invullen in de andere vergelijkingen noodzakelijk om de correctheid van de oplossing te controleren.

$$5) \text{ LL: } \begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + 6 & 2x + 2y \\ 3x + 3y & 6 + y^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x^2 + 6 & 2x + 2y \\ 3x + 3y & 6 + y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 6 & 10 \\ 15 & 5y + 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6 = x + 6 \\ 2x + 2y = 10 \\ 3x + 3y = 15 \\ 6 + y^2 = 5y + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x + y = 5 \\ y^2 - 5y + 4 = 0 \end{cases} \quad (\text{vgl 2 is een veelvoud van vgl 3})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot (x - 1) = 0 \\ x + y = 5 \\ y = 4 \vee y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 1 \\ x + y = 5 \\ y = 4 \vee y = 1 \end{cases}$$

Antwoord: De oplossing bedraagt $x = 1$ en $y = 4$.

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow D = 25 - 16$$

$$\Leftrightarrow D = 9$$

$$y = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \vee y = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5 + 3}{2} \vee y = \frac{5 - 3}{2}$$

Oplossingen vraag 8:

1)

a) $\int_{-2}^0 \cancel{f(x)} dx \rightarrow -\int_{-2}^0 f(x) dx$ (ligt onder de x-as dus moet min voor)

b) $\frac{1}{2} \int_{-2}^2 \cancel{f(x)} dx \rightarrow \frac{1}{2} \int_{-2}^2 |f(x)| dx$ (het negatieve en positieve deel zouden elkaar

compenseren waardoor de uitkomst 0 wordt, dit lossen we op door absolute

waarden te nemen. Een andere mogelijkheid (komt op hetzelfde neer):

$$\frac{1}{2} \left(-\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \right)$$

c) $-\int_{-2}^0 \cancel{|f(x)|} dx \rightarrow -\int_{-2}^0 f(x) dx$ of $\int_{-2}^0 |f(x)| dx$ (zowel min als absolute waarde

zorgt ervoor dat het totaal terug negatief wordt)

d) Antwoord: $\int_{-2}^0 |f(x)| dx$

2)

- a) $\int_{-1}^1 f(x) dx \rightarrow \int_{-1}^1 |f(x)| dx$ of $\int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$
 (het negatieve en positieve deel zouden elkaar compenseren waardoor de uitkomst 0 werd)

- b) Antwoord: $2 \int_{-1}^0 f(x) dx$

- c) $-\int_{-1}^1 f(x) dx \rightarrow \int_{-1}^1 |f(x)| dx$ of $\int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$ (het negatieve en positieve deel zouden elkaar compenseren waardoor de uitkomst 0 werd)

- d) $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (|f(x)| - f(x)) dx \rightarrow \int_{-1}^1 (|f(x)| - f(x)) dx$. (Van -1 tot 0 zal deze integraal 0 zijn. Van 0 tot 1 is het gelijk aan $-2 \int_0^1 f(x) dx$ wat ook een juiste oplossing zou zijn)

3)

- a) $\int_{-1}^1 f(x) dx \rightarrow -\int_{-1}^1 f(x) dx$ (ligt de hele tijd onder de x-as dus moet min voor)

- b) $2 \int_{-1}^0 f(x) dx \rightarrow -2 \int_{-1}^0 f(x) dx$ (ligt onder de x-as dus moet min voor)

- c) Antwoord: $-\int_{-1}^1 f(x) dx$

- d) $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (|f(x)| + f(x)) dx \rightarrow \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (|f(x)| - f(x)) dx$ (oorspronkelijk ging de uitkomst 0 zijn aangezien de absolute waarde positief is en $f(x)$ negatief is. Dit kunnen we oplossen door $f(x)$ een min te zetten)

4)

a) $\int_{-2}^1 \cancel{f(x)} dx \rightarrow -\int_{-2}^1 f(x) dx$ (ligt de hele tijd onder de x-as dus moet min voor)

b) $-2 \int_{-2}^{-0,5} \cancel{f(x)} dx$ (even wilt zeggen symmetrisch rond de y-as en dus is van -2 tot $-0,5$ niet even groot als $-0,5$ tot 1 .)

c) Antwoord: $-\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 |f(x)| dx$

d) $\frac{1}{2} \int_{-2}^1 \cancel{|f(x)|} dx \rightarrow \int_{-2}^1 |f(x)| dx$ (de helft nemen zorgt voor de helft van de oplossing aangezien je niets dubbel telt)

5)

a) $\int_{-2}^0 \cancel{f(x)} dx \rightarrow -\int_{-2}^0 f(x) dx$ (ligt onder de x-as dus er moet een min voor)

b) $\frac{1}{2} \int_{-2}^2 \cancel{f(x)} dx \rightarrow \frac{1}{2} \int_{-2}^2 |f(x)| dx$ of $\frac{1}{2} \left(-\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \right)$

(nu zijn ze beiden positief waardoor je de helft kan nemen, oorspronkelijk was er de helft negatief en de helft positief waardoor de oorspronkelijke uitkomst 0 was)

c) $-\int_{-2}^0 \cancel{|f(x)|} dx \rightarrow -\int_{-2}^0 f(x) dx$ of $\int_{-2}^0 |f(x)| dx$

(Zowel de absolute waarden als een min ervoor zorgen dat het positief wordt. Als je beide combineert, blijft het negatief)

d) Antwoord: $\int_0^2 f(x) dx$

Oplossingen vraag 9:

- 1) Bij deelbaar door 7 is er maar één optie: 7. We gebruiken de formule van Laplace¹¹.

We bekijken de opties om aan 7 te geraken:

Dobbelsteen 1	Dobbelsteen 2
4	3
3	4
5	2
2	5
6	1
1	6

Antwoord: De kans is $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

- 2) Bij deelbaar door 6 zijn er twee opties: 6 en 12. We gebruiken de formule van Laplace. We bekijken de opties om aan 6 te geraken:

Dobbelsteen 1	Dobbelsteen 2
4	2
2	4
5	1
1	5
3	3

Voor 12 is er maar één mogelijkheid: 6 en 6.

Antwoord: De kans is $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

¹¹ Formule van Laplace: gunstige mogelijkheden gedeeld door totaal aantal mogelijkheden.

Vb: 2 of 4 gooien met een dobbelsteen, heeft een kans van $\frac{2}{6}$.

3) De priemgetallen, die bereikt kunnen worden, zijn: 2, 3, 5, 7 en 11.

Voor 2 is er maar één mogelijkheid: 1 en 1.

Voor 3 zijn er twee mogelijkheden: 2 en 1 of 1 en 2.

Voor 5:

Dobbelsteen 1	Dobbelsteen 2
4	1
1	4
3	2
2	3

Voor 7:

Dobbelsteen 1	Dobbelsteen 2
4	3
3	4
5	2
2	5
6	1
1	6

Voor 11 zijn er twee mogelijkheden: 6 en 5 of 5 en 6.

Totaal gunstige mogelijkheden: $1 + 2 + 4 + 6 + 2 = 15$

Antwoord: De kans is $\frac{15}{36}$.

4) De gunstige mogelijkheden zijn: 1 en 1, 2 en 2, 3 en 3, 4 en 4, 5 en 5 of 6 en 6.

Antwoord: De kans is $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

- 5) Je kan bij deze oefeningen met voorwaardelijke kans werken of met tellen van gunstige mogelijkheden. We kiezen de tweede optie omdat deze iets makkelijker te begrijpen is.

We starten met eerste dobbelsteen 1:

Dobbelsteen 1	Dobbelsteen 2
1	2
1	3
1	4
1	5
1	6

Vervolgens eerste dobbelsteen 2:

Dobbelsteen 1	Dobbelsteen 2
2	3
2	4
2	5
2	6

We merken een patroon op¹², het totaal gunstig aantal mogelijkheden is:

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 15$$

Antwoord: De kans is $\frac{15}{36}$.

¹² Indien je dit patroon nog niet ziet, kan je dezelfde oefening doen voor 3, 4, 5 en 6.

Oplossingen vraag 10:

- 1) Als we de 3 nulpunten gegeven hebben bij een derdegraadsfunctie, gaan we het functievoorschrift opbouwen door gebruik te maken van:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \text{ met } x_1, x_2 \text{ en } x_3 \text{ de nulwaarden.}$$

$$\Rightarrow f(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

$$\Rightarrow -1 = a \cdot (0 - 1) \cdot (0 - 2) \cdot (0 - 3) \quad \text{punt } (0, -1) \text{ invullen}$$

$$\Leftrightarrow -1 = -6a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} = a$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{6} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{6} \cdot (x^2 - 3x + 2) \cdot (x - 3)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x - 3x^2 + 9x - 6)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{6} \cdot (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{11}{6}x - 1$$

Antwoord: De coëfficiënten zijn respectievelijk $\frac{1}{6}$, -1 , $\frac{11}{6}$ en -1 .

- 2) Als we de 3 nulpunten gegeven hebben bij een derdegraadsfunctie, gaan we het functievoorschrift opbouwen door gebruik te maken van:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \text{ met } x_1, x_2 \text{ en } x_3 \text{ de nulwaarden.}^{13}$$

$$\Rightarrow f(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2)$$

$$\Rightarrow 1 = a \cdot (0 - 1) \cdot (0 - 2) \cdot (0 - 2) \quad \text{punt (0,1) invullen}$$

$$\Leftrightarrow 1 = -4a$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} = a$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x^2 - 3x + 2) \cdot (x - 2)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x - 2x^2 + 6x - 4)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - 2x + 1$$

Antwoord: De coëfficiënten zijn respectievelijk $-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, -2$ en 1 .

¹³ We weten hier de 3 nulpunten omdat de grafiek de x-as eens raakt en snijdt. Raakt duidt erop dat het nulpunt een even aantal keer voorkomt, snijdt duidt op een oneven aantal keer. Dit wil zeggen dat in dit geval bij raken, is het 2 keer een nulpunt en bij snijden, is het één keer een nulpunt.

3) Als we de 3 nulpunten gegeven hebben bij een derdegraadsfunctie, gaan we het functievoorschrift opbouwen door gebruik te maken van:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \text{ met } x_1, x_2 \text{ en } x_3 \text{ de nulwaarden.}^{13}$$

$$\Rightarrow f(x) = a \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 3)$$

$$\Rightarrow 1 = a \cdot (1 + 1) \cdot (1 - 3) \cdot (1 - 3) \quad \text{punt (1,1) invullen}$$

$$\Leftrightarrow 1 = 8a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} = a$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x + 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 3)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x^2 - 2x - 3) \cdot (x - 3)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x^3 - 2x^2 - 3x - 3x^2 + 6x + 9)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x^3 - 5x^2 + 3x + 9)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{9}{8}$$

Antwoord: De coëfficiënten zijn respectievelijk $\frac{1}{8}$, $-\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$ en $\frac{9}{8}$.

¹³ We weten hier de 3 nulpunten omdat de grafiek de x-as eens raakt en snijdt. Raakt duidt erop dat het nulpunt een even aantal keer voorkomt, snijdt duidt op een oneven aantal keer. Dit wil zeggen dat in dit geval bij raken, is het 2 keer een nulpunt en bij snijden, is het één keer een nulpunt.

4) Aangezien we slechts één nulpunt hebben, gebruiken we het voorschrift:

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ waarbij de coëfficiënten b , c en d reële getallen zijn.

We zullen deze coëfficiënten bepalen door de punten in te vullen en het stelsel op te lossen.

Bepaal deze coëfficiënten als je weet dat de functie de x -as snijdt in $(0,0)$ en de punten $P(1,1)$ en $Q(-1,2)$ tot f behoren.

$$\begin{cases} 0 = 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \\ 1 = 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d \\ 2 = (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = d \\ 1 = 1 + b + c + d \\ 2 = -1 + b - c + d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = d \\ 0 = b + c \\ 3 = b - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = d \\ -c = b \quad (\text{substitutiemethode}) \\ 3 = -c - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = d \\ -c = b \\ 3 = -2c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = d \\ -c = b \\ \frac{3}{-2} = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = d \\ \frac{3}{2} = b \\ -\frac{3}{2} = c \end{cases}$$

Antwoord: De coëfficiënten zijn respectievelijk $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$ en 0 .

5) Aangezien we slechts één nulpunt hebben, gebruiken we het voorschrift:

$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ waarbij de coëfficiënten b, c en d reële getallen zijn.

We zullen deze coëfficiënten bepalen door horner te gebruiken en gebruik te maken van een stelsel.¹⁴

-1	1	b	c	d
		-1	$-b + 1$	$b - c - 1$
-1	1	$b - 1$	$-b + c + 1$	$b - c + d - 1$
	1	-1	$-b + 2$	0
	1	$b - 2$	$-2b + c + 3$	0

$$\begin{cases} b - c + d - 1 = 0 \\ -2b + c + 3 = 0 \\ 1 + b + c + d = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - c + d = 1 \\ -2b + c = -3 \\ b + c + d = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2c = -3 \\ -2b + c = -3 \\ b + c + d = 4 \end{cases} \quad (\text{vgl1} - \text{vgl3})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{3}{2} \\ -2b + \frac{3}{2} = -3 \\ b + \frac{3}{2} + d = 4 \end{cases}$$

¹⁴ Aangezien de functie de x-as raakt, is het een dubbel nulpunt. Met het punt in te vullen, maken we geen gebruik van het feit dat het een dubbel nulpunt is. Vandaar dat we 2 keer horner zullen toepassen en de rest gelijk zullen stellen aan 0.

Geen ster = makkelijker dan vraag toelatingsexamen

* = +- niveau vraag toelatingsexamen

** = moeilijker dan vraag toelatingsexamen

DISCLAIMER: Dit document bevat vertrouwelijke informatie die eigendom is van Wiskunne. Het is strikt verboden om dit document, geheel of gedeeltelijk, te verspreiden, te kopiëren of te delen met derden zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van Wiskunne.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{3}{2} \\ -2b = -3 - \frac{3}{2} \\ b + \frac{3}{2} + d = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{3}{2} \\ -2b = -\frac{9}{2} \\ b + \frac{3}{2} + d = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{3}{2} \\ b = \frac{9}{4} \\ \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + d = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{3}{2} \\ b = \frac{9}{4} \\ d = 4 - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} \end{cases}$$

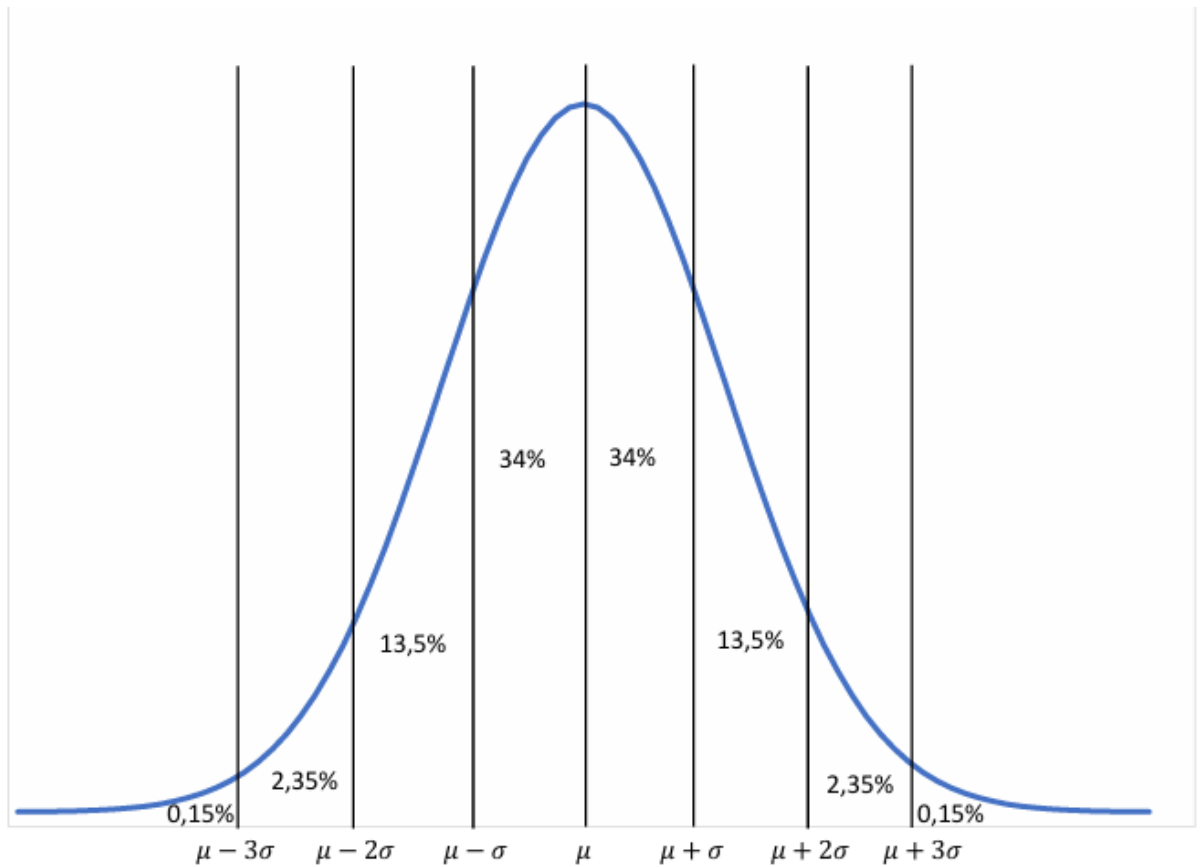
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{3}{2} \\ b = \frac{9}{4} \\ d = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Antwoord: De waarden van b, c en d bedragen respectievelijk $\frac{9}{4}$, $\frac{3}{2}$ en $\frac{1}{4}$.

Geen ster = makkelijker dan vraag toelatingsexamen
* = +/- niveau vraag toelatingsexamen
** = moeilijker dan vraag toelatingsexamen

DISCLAIMER: Dit document bevat vertrouwelijke informatie die eigendom is van Wiskunne. Het is strikt verboden om dit document, geheel of gedeeltelijk, te verspreiden, te kopiëren of te delen met derden zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van Wiskunne.

Bijlage:



Geen ster = makkelijker dan vraag toelatingsexamen

* = +- niveau vraag toelatingsexamen

** = moeilijker dan vraag toelatingsexamen

DISCLAIMER: Dit document bevat vertrouwelijke informatie die eigendom is van Wiskunne. Het is strikt verboden om dit document, geheel of gedeeltelijk, te verspreiden, te kopiëren of te delen met derden zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van Wiskunne.

Links naar video's:

Vraag 1:

- a) [Vergelijking van een cirkel](#)
- b) [Onvolledige tweedegraadsvergelijkingen](#)

Vraag 6:

- a) [Volledige tweedegraadsvergelijkingen](#)

Vraag 7:

- a) [Product van matrices](#)

Vraag 10:

- a) [Stelsels substitutiemethode](#)
- b) [Stelsels combinatiemethode](#)