Verbetering toets extremumproblemen

Los volgende oefeningen op:

a) Maximaliseer de oppervlakte van een rechthoek waarbij
$\mathrm{l} + 2\mathrm{b} = 30$

De oppervlakte van een rechthoek is: l.b

Dit zijn twee onbekenden, maar als we kijken naar het gegeven kunnen we er één onbekende van maken. Bijvoorbeeld $\mathrm{l} = 30 - 2\mathrm{b}$. Dan krijgen we:

$(30 - 2\mathrm{b}).\mathrm{b} = 30\mathrm{b} - 2\mathrm{b}^2 = \mathrm{f(x)}$

Om een maximum of minimum te vinden, nemen we de afgeleide en stellen die gelijk aan nul.

$\mathrm{f'(x)} = 30 - 4\mathrm{b}$

$30 - 4\mathrm{b} = 0 => \mathrm{b} = 7{,}5$

Vervolgens maken we een tekenschema ter controle.

x		7,5	
y	+	0	-

Voor de tekens. Je kan een getal kleiner dan 7,5 invullen in f'(x). Bijvoorbeeld f'(0): 30 – 4.0 = 30 > 0. Hetzelfde kan voor een getal groter dan 7,5 en dan zal je zien dat het een negatief getal is. Nu + wil zeggen dat het stijgt en daarna daalt het. Dit wil zeggen dat het een maximum is.

We hebben dus b = 7,5 => $\mathrm{l} = 30 - 2\mathrm{b}$ = 30 – 15 = 15.

De oppervlakte wordt dan: 7,5.15 = 112,5.

Maximaliseer het product van twee getallen als $x + 3y = 12$ met x = getal 1 en y = getal 2

b) Het product van de twee getallen is: x.y

Dit zijn twee onbekenden, maar als we kijken naar het gegeven kunnen we er één onbekende van maken. Bijvoorbeeld $\mathrm{x} = 12 - 3\mathrm{y}$. Dan krijgen we:

$(12 - 3\mathrm{y}).\mathrm{y} = 12\mathrm{y} - 3y^2 = \mathrm{f(x)}$

Om een maximum of minimum te vinden, nemen we de afgeleide en stellen die gelijk aan nul.

$\mathrm{f'(x)} = 12 - 6\mathrm{y}$

$12 - 6\mathrm{y} = 0 => \mathrm{y} = 2$

Vervolgens maken we een tekenschema ter controle.

x		2	
y	+	0	-

Voor de tekens. Je kan een getal kleiner dan 2 invullen in f'(x). Bijvoorbeeld f'(0): 12 – 6.0 = 12 > 0. Hetzelfde kan voor een getal groter dan 2 en dan zal je zien dat het een negatief getal is. Nu + wil zeggen dat het stijgt en daarna daalt het. Dit wil zeggen dat het een maximum is.

We hebben dus y = 2 => $x = 12 - 3y$ = 12 – 6 = 6.

Het product wordt dan: 6.2 = 12.

c) Minimaliseer volgende functie $y = 10x^2 - 50x + 80$

We moeten de afgeleide nemen. Dit wordt:

$f'(x) = 20x - 50$

$20x - 50 = 0 \Rightarrow x = 2{,}5$

x		2,5	
Y	-	0	+

Voor de tekens. Je kan een getal kleiner dan 2,5 invullen in f'(x). Bijvoorbeeld f'(0): 20.0 – 50 = -50 < 0. Hetzelfde kan voor een getal groter dan 2,5 en dan zal je zien dat het een positief getal is. Nu - wil zeggen dat het daalt en daarna stijgt het. Dit wil zeggen dat het een minimum is.

Het minimum is:

$y = 10(2{,}5)^2 - 50.2{,}5 + 80 = 17{,}5$

d) Maximaliseer de inhoud van een balk als je weet dat:
$l = 2b$

$l + b + h = 40$

De inhoud van een balk is: $l. b. h$

We hebben drie onbekenden, maar we kunnen l vervangen door 2b. Dan krijgen we:

$2b. b. h$

Nu kunnen we h schrijven als: $h = 40 - b - l$ of $h = 40 - b - 2b$. Dus krijgen we:

$2b. b. (40 - 3b) = 80b^2 - 6b^3$

We leiden dit af voor een maximum:

$f'(x) = 160b - 18b^2$

$160b - 12b^2 = 0 <=> b(160 - 18b) = 0 => b = 0 \vee b = 8{,}89$

We stellen een tekenschema op om het maximum te vinden

x		0		8,89	
Y	-	0	+	0	-

$x = 8{,}89$ is het maximum. We gaan van + naar -.

De inhoud is dan: $80. 8{,}89^2 - 6. 8{,}89^3 = 2107$

e) Maximaliseer de oppervlakte van een rechthoekige driehoek als
Opstaande rechthoekszijde + platte rechthoekszijde = 9

De oppervlakte van een driehoek is: $\frac{b.h}{2}$. Nu de basis bij een rechthoekige driehoek is de platte rechthoekszijde. De hoogte is de opstaande rechthoekszijde. We kunnen dus schrijven dat $b + h = 9$ of $b = 9 - h$.

$\frac{(9-h).h}{2} = \frac{9h-h^2}{2}$

Dit gaan we afleiden om te maximaliseren:

$f'(x) = 4{,}5 - h$

$4{,}5 - h = 0 => h = 4{,}5$

We maken een tekenschema ter controle:

x		4,5	
Y	+	0	-

Voor de tekens. Je kan een getal kleiner dan 4,5 invullen in f'(x). Bijvoorbeeld f'(0): 4,5 – 0 = 4,5 > 0. Hetzelfde kan voor een getal groter dan 4,5 en dan zal je zien dat het een negatief getal is. Nu + wil zeggen dat het stijgt en daarna daalt het. Dit wil zeggen dat het een maximum is.

We vullen h in om de maximale oppervlakte te weten:

$$\frac{9(4{,}5) - (4{,}5)^2}{2} = 10{,}125$$

f) Minimaliseer volgende functie $(x + 120).3x$

We kunnen deze functie ook schrijven als: $3x^2 + 360x$. We gaan deze functie afleiden:

$$f'(x) = 6x + 360 => x = -60$$

We maken een tekenschema ter controle:

x		-60	
Y	-	0	+

We hebben een minimum. We gaan van – naar +. -60 invullen in f(x) levert:

$$3(-60)^2 + 360.(-60) = -10800$$