Katholieke Universiteit Leuven
Faculteit Bewegings- en Revalidatiewetenschappen
Faculteit Wetenschappen

Summerschool FaBeR

WISKUNDE

Sophie Raedts, Riet Callens, Kaat Zeeuwts, Annouk Van Vlierden, Christophe Smet, Jeroen Dehaene, Bart Bories

Augustus 2012

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Algebraïsch rekenen

Inleiding

In deze module worden een aantal basisrekentechnieken herhaald. De nadruk ligt vooral op het symbolisch rekenen. Het eerste deel behandelt het uitwerken van haakjes en het buiten haken brengen van factoren. Hier wordt ook ontbinden in factoren in het algemeen besproken. In het tweede deel wordt het rekenen met breuken herhaald. In het laatste deel tenslotte worden de rekenregels voor machten met reële exponenten terug ingeoefend. Dit pakket biedt eenvoudige oefeningen aan waarin heel duidelijk bepaalde rekenregels dienen toegepast te worden. Het is natuurlijk de bedoeling dat deze rekenregels ook in een andere context niet vergeten worden! Deze module is bedoeld als zelfstudie en kan ook gebruikt worden als leidraad bij het studeren tijdens het academiejaar.

1.1 Rekenen met haakjes

1.1.1 Uitwerken van haakjes en ontbinden in factoren

In dit deel herhalen we eerst de belangrijkste rekenregels voor het uitwerken van haakjes en het ontbinden in factoren. De daarop volgende voorbeeldoefeningen geven de kans om deze rekenregels nog eens in te oefenen.

Rekenregels

Zij $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Er geldt:

uitwerken van haakjes	(1)	$c(a+b) = (a+b)c = ac + bc$	distributiviteit van $\cdot$ t.o.v. $+$
	(2)	$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$	
	(3)	$-(a+b) = -a - b$	minteken voor de haken binnenbrengen
	(4)	$-(a-b) = -a + b$	
	(5)	$-(-a+b) = a - b$	
	(6)	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	kwadraat van een tweeterm
	(7)	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	derdemacht van een tweeterm
	(8)	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$	Binomium Van Newton[1]
ontbinden in factoren[2]	(9)	$ab + ac = a(b+c) = (b+c)a$	afzonderen van een gemeenschappelijke factor
	(10)	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	merkwaardig product: verschil van twee kwadraten
	(11)	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	merkwaardig product: som van twee derdemachten
	(12)	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	merkwaardig product: verschil van twee derdemachten
	(13)	$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1})$	merkwaardig product: verschil van twee n^{e} machten
	(14)	$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - ba^{n-2} + b^2a^{n-3} - \cdots - b^{n-2}a + b^{n-1})$	merkwaardig product: som v. twee n^{e} machten, n oneven

[1] Zie pakket Sommatieteken en faculteit.

[2] Rekenregels (6),(7) en (8) zijn, wanneer men ze in de omgekeerde richting toepast, tevens rekenregels voor het ontbinden in factoren.

Voorbeeldoefeningen

1. Werk de haakjes uit en vereenvoudig. $(x, y, p, q \in \mathbb{R})$

   (a) $1 - (x - y - 1) = 1 - x + y + 1 = -x + y + 2$

   (b) $1 - (p - q) + p = 1 - p + q + p = q + 1$

   (c) $p - (p + q) + 2q = p - p - q + 2q = q$

2. Breng zoveel mogelijk factoren buiten haakjes. $(a, b, c, d, x, y, p, q \in \mathbb{R})$

   (a) $18x + 24y + 30p = 6 \cdot 3x + 6 \cdot 4y + 6 \cdot 5p = 6\,(3x + 4y + 5p)$

   (b) $20ab^3 + 30bc + 25b^2c^3\sqrt{d} = 5b \cdot 4ab^2 + 5b \cdot 6c + 5b \cdot 5bc^3\sqrt{d} = 5b\left(4ab^2 + 6c + 5bc^3\sqrt{d}\right)$

   (c) $-9x^2y - 3xy = -3xy \cdot 3x - 3xy \cdot 1 = -3xy\,(3x + 1)$

   (d) $\dfrac{p^2q^3}{8} - \dfrac{p^2q}{2} + pq = \dfrac{pq}{2} \cdot \dfrac{pq^2}{4} - \dfrac{pq}{2} \cdot p + \dfrac{pq}{2} \cdot 2 = \dfrac{pq}{2}\left(\dfrac{pq^2}{4} - p + 2\right)$

   of $\dfrac{p^2q^3}{8} - \dfrac{p^2q}{2} + pq = pq \cdot \dfrac{pq^2}{8} - pq \cdot \dfrac{p}{2} + pq \cdot 1 = pq\left(\dfrac{pq^2}{8} - \dfrac{p}{2} + 1\right)$

3. Vul aan door de voorgestelde factor buiten haken te brengen. $(p, r, s, x \in \mathbb{R})$

   (a) $\left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 = \left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2 (\ldots)$

   <u>Oplossing:</u>

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \frac{(p+1)^3}{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2} \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{(p+1)^3}{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2}\right) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{4(p+1)^3}{(p+1)^2}\right) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4(p+1)) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4p + 4) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (4p + 5)\,.
\end{aligned}
$$

   (b) $(3p + 2)\dfrac{4r}{3} - 4r(p - 1) = \dfrac{4r}{3}(\ldots)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) &= \frac{4r}{3}(3p+2) - \frac{4r}{3}\,\frac{4r(p-1)}{\frac{4r}{3}} \\
&= \frac{4r}{3}(3p+2) - \frac{4r}{3}\,\frac{4r(p-1)\cdot 3}{4r} \\
&= \frac{4r}{3}(3p+2-(p-1)\cdot 3) \\
&= \frac{4r}{3}(3p+2-3p+3) \\
&= \frac{4r}{3}\cdot 5.
\end{aligned}$$

(c) $\dfrac{xs}{8} + \dfrac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 = \dfrac{xs}{8}(\ldots)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 &= \frac{xs}{8}\cdot 1 + \frac{xs}{8}\,\frac{\frac{xs^2}{4}}{\frac{xs}{8}} + \frac{xs}{8}\,\frac{3x^3s^3}{\frac{xs}{8}} \\
&= \frac{xs}{8}\left(1 + \frac{8xs^2}{4xs} + \frac{24x^3s^3}{xs}\right) \\
&= \frac{xs}{8}(1+2s+24x^2s^2).
\end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ *Maak nu Oefening 1 van Paragraaf 1.4.*

4. Ontbind volgende uitdrukkingen in factoren.

   (a) $81x^2y^2 - 25 = (9xy)^2 - 5^2 = (9xy+5)(9xy-5)$ (verschil van twee kwadraten)

   (b) $9r^2 - 24r + 16 = (3r)^2 - (2\cdot 3r\cdot 4) + 4^2 = (3r-4)^2$ (kwadraat van een verschil)

   Opmerking: als je hiermee vlot kan rekenen hoef je niet telkens alle tussenstappen op te schrijven.

$\hookrightarrow$ *Maak nu Oefening 2 van Paragraaf 1.4.*

1.2 Rekenen met breuken

In dit deel geven we heel bondig de rekenregels voor het werken met breuken. Deze zijn heel eenvoudig, de bedoeling is echter dat je deze rekenregels kan toepassen in moeilijkere berekeningen zoals de daaropvolgende voorbeeldoefeningen.

1.2.1 Rekenregels

Zij $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Er geldt:

$\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$	indien $c \neq 0$	breuken splitsen
$\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+cb}{bd}$	indien $b, d \neq 0$	breuken optellen
$\dfrac{ab}{ac} = \dfrac{b}{c}$	indien $a, c \neq 0$	breuken vereenvoudigen
$\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{bc}$	indien $b, c \neq 0$	rekenregels voor meerdere breukstrepen
$\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{ac}{b}$	indien $b, c \neq 0$	
$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$	indien $b, c, d \neq 0$	

1.2.2 Voorbeeldoefeningen

1. Numerieke voorbeelden
   (a) Breuk splitsen: $\dfrac{120+74}{2} = \dfrac{120}{2} + \dfrac{74}{2} = 60 + 37 = 97$
   (b) Breuken optellen: $\dfrac{1}{8} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{1 \cdot 6 + 5 \cdot 8}{48} = \dfrac{46}{48}$
   (c) Breuk vereenvoudigen: $\dfrac{125}{50} = \dfrac{25 \cdot 5}{25 \cdot 2} = \dfrac{5}{2}$
   (d) Rekenen met meerdere breukstrepen: $\dfrac{\frac{80}{2}}{10} = \dfrac{80}{2 \cdot 10} = \dfrac{80}{20} = 4$
2. Symbolisch rekenen $(x, y, p, q \in \mathbb{R})$
   (a) Rekenen met meerdere breukstrepen:
   Stel $x, y \neq 0$, dan is $\dfrac{x+y}{\frac{x}{y}} = \dfrac{(x+y)y}{x}$

(b) Rekenen met meerdere breukstrepen:
Stel $x, y \neq 0$, dan is $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$

(c) Breuk vereenvoudigen — verschil van twee kwadraten:
Stel $p - q \neq 0$, dan is $\dfrac{p^2 - q^2}{p - q} = \dfrac{(p+q)(p-q)}{p-q} = p + q$

(d) Breuk vereenvoudigen, rekenen met meerdere breukstrepen — factor afzonderen:
Stel $p, q \neq 0$, dan is $\dfrac{\frac{p+qp}{pq^2}}{\frac{p^2}{q}} = \dfrac{\frac{p(1+q)}{pq^2}}{\frac{p^2}{q}} = \dfrac{\frac{1+q}{q^2}}{\frac{p^2}{q}} = \dfrac{(1+q)q}{q^2p^2} = \dfrac{1+q}{qp^2}$

(e) Breuken splitsen, rekenen met meerdere breukstrepen:
Stel $x \neq 0$, dan is $\dfrac{-1}{1 - \frac{x+1}{x}} = \dfrac{-1}{1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \dfrac{-1}{1 - 1 - \frac{1}{x}} = \dfrac{-1}{\frac{-1}{x}} = \dfrac{-1x}{-1} = x$

$\hookrightarrow$ *Los nu Oefening 5 van Paragraaf 1.4 op.*

1.3 De machtsverheffing: definitie en rekenregels

1.3.1 Machtsverheffing met een reëel grondtal en een gehele exponent

1.3.1 Definitie (Machtsverheffing met reëel grondtal en gehele exponent)
Zij $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$. De *macht* a^n (spreek uit: a tot de macht n of a tot de n-de) met *grondtal* a en *exponent* n wordt als volgt gedefinieerd:

$$a^n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{als } n = 0 \\ \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factoren}} & \text{als } n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Zij $a \in \mathbb{R}_0$ en $n \in \mathbb{N}$. De macht a^{-n} met grondtal a en exponent $-n$ wordt als volgt gedefinieerd:

$$a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}.$$

1.3.2 Bijzondere gevallen

- $a^0 = 1$ *voor alle* $a \in \mathbb{R}_0$.
- $a^1 = a$ *voor alle* $a \in \mathbb{R}$
- $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ *voor alle* $a \in \mathbb{R}_0$
- $0^n = 0$ *voor alle* $n \in \mathbb{N}_0$.
- 0^z *is niet gedefinieerd voor* $z \in \mathbb{Z}^-$.
- $1^z = 1$ *voor alle* $z \in \mathbb{Z}$.

1.3.3 Rekenregels

Zij $x, y \in \mathbb{R}$ *en* $m, n \in \mathbb{N}$. *Er geldt:*

$x^m x^n = x^{m+n}$	
$\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	*als* $x \neq 0$
$(xy)^n = x^n y^n$	
$\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$	*als* $y \neq 0$
$(x^m)^n = x^{mn}$	

Zij $x, y \in \mathbb{R}_0$ *en* $m, n \in \mathbb{Z}$. *Er geldt:*

$x^m x^n = x^{m+n}$
$\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
$(xy)^n = x^n y^n$
$\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$
$(x^m)^n = x^{mn}$

1.3.2 Machtsverheffing met een strikt positief reëel grondtal en een reële exponent

1.3.4 Definitie (Machtsverheffing met grondtal in $\mathbb{R}^+$ en exponent in $\mathbb{Q}$)
Zij $a \in \mathbb{R}^+$ en $n \in \mathbb{N}_0$. De macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\dfrac{1}{n}$ wordt gedefinieerd als het uniek positief reëel getal waarvan de n-de macht gelijk is aan a:

$$\begin{cases} a^{\frac{1}{n}} \geq 0 \quad \text{en} \\ \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a. \end{cases}$$

De macht $a^{\frac{1}{n}}$ wordt ook wel genoteerd met $\sqrt[n]{a}$.
Zij $a \in \mathbb{R}_0^+$, $m \in \mathbb{Z}$ en $n \in \mathbb{N}_0$. De macht $a^{\frac{m}{n}}$ met grondtal a en exponent $\dfrac{m}{n}$ wordt als volgt gedefinieerd:

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

1.3.5 Bijzondere gevallen

- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ *voor alle* $a \in \mathbb{R}_0^+$ *en alle* $n \in \mathbb{N}_0$*, i.h.b. hebben we*
- $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ *voor alle* $a \in \mathbb{R}_0^+$*.*
- $a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}$ *voor alle* $a \in \mathbb{R}_0^+$ *en alle* $n \in \mathbb{N}_0$
- $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ *voor alle* $a \in \mathbb{R}_0^+$*, alle* $m \in \mathbb{Z}$ *en alle* $n \in \mathbb{N}_0$
- $1^q = 1$ *voor alle* $q \in \mathbb{Q}$*.*

Machtsverheffing met een strikt positief reëel grondtal en een reële exponent

We wensen tenslotte ook a^r te definiëren met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$. Dit is niet evident en we zullen de definitie hier ook niet in detail geven. Hiervoor verwijzen we naar de cursus wiskunde uit het eerste jaar waar dit zeker nog aan bod komt. Wel schets ik hier kort één mogelijke manier om zin te geven aan de uitdrukking a^r met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$.

Neem dus $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$. We weten reeds dat a^q goed gedefinieerd is voor elk rationaal getal q. Ook weet je wellicht nog dat je elke reëel getal r 'oneindig goed' kan benaderen d.m.v. rationale getallen. Concreet wil dit zeggen dat gegeven een reëel getal r er een oneindige rij $q_1, q_2, q_3, \ldots$ bestaat van rationale getallen die r met steeds hogere nauwkeurigheid benaderen, zodat uiteindelijk elke gewenste nauwkeurigheid vanaf een bepaald getal in de rij bereikt wordt. Men zegt in dit geval dat de rij $q_1, q_2, q_3, \ldots$ naar r *convergeert* en men noteert dit met '$q_n \to r$ als $n \to \infty$' of met $\lim_{n\to\infty} q_n = r$.

Stel nu dat $q_1, q_2, q_3, \ldots$ zo'n rij is die naar r convergeert. We kunnen dan voor elke q_n in die rij de macht a^{q_n} beschouwen. Op die manier bekomen we een nieuwe rij $a^{q_1}, a^{q_2}, a^{q_3}, \ldots$ Nu blijkt dat ook deze rij steeds zal convergeren naar een zeker reëel getal s en dat deze limiet niet afhangt van de keuze van de rij $q_1, q_2, q_3, \ldots$ die we gebruikt hebben om r te benaderen. Dit laat ons dan toe om de macht a^r te definiëren als dat getal s dat je op die manier bekomt en dat enkel afhangt van a en r.

Zelfs voor machten met reële exponenten (en dus i.h.b. voor machten met rationale exponenten) blijven de gebruikelijke rekenregels (zoals we die reeds zagen voor machten met gehele exponenten) gelden. We sommen ze hieronder nog eens op, (natuurlijk) zonder bewijs.

1.3.6 Rekenregels
Zij $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ en $r, s \in \mathbb{R}$. Er geldt:

$x^r x^s = x^{r+s}$
$\dfrac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$
$(xy)^r = x^r y^r$
$\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$
$(x^r)^s = x^{rs}$

1.3.3 Voorbeeldoefeningen

1. Numerieke voorbeelden

   (a) $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6 = 64$

   (b) $\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^2 = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \dfrac{1}{4} \cdot 9 = \dfrac{9}{4}$

   (c) $\dfrac{4}{\sqrt{8}} = \dfrac{2^2}{8^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2^2}{(2^3)^{\frac{1}{2}}} = 2^{2-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

   (d) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{64} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{8^2} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8 = 8^{\frac{1}{3}+1} = 8^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$

2. Stel $x, y \in \mathbb{R}_0$ dan geldt:

   (a) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x} = x^{\frac{3}{4}-1} = x^{\frac{-1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

   (b) $\left(x^3 \cdot \sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 = x^6 \cdot x^{\frac{2}{4}} = x^{6+\frac{1}{2}} = x^{\frac{13}{2}} = \sqrt{x^{13}}$

   (c) $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2 y}}{xy}\right)^4 = y^2 \cdot \dfrac{(x^2y)^{\frac{4}{2}}}{x^4y^4} = y^2 \cdot \dfrac{x^4y^2}{x^4y^4} = y^2 \cdot \dfrac{1}{y^2} = 1$

   (d) $\sqrt{48x^9y^4} = \sqrt{(16 \cdot 3)(x^8 \cdot x)y^4} = \sqrt{16 \cdot 3 \cdot (x^4)^2 \cdot x \cdot (y^2)^2} = 4x^4y^2\sqrt{3x} = 4x^4y^2\sqrt{3x}$

$\hookrightarrow$ *Los nu oefening 6 van paragraaf 1.4 op.*

1.4 Oefeningen

1 Oefening
Breng zoveel mogelijk factoren buiten haken of vul aan. Stel $u, s, t \in \mathbb{R}$

(a) $24st + 12t - 60ut =$

(b) $\dfrac{st^2}{8} + \dfrac{s^2t^2}{12} + s^2t =$

(c) $\dfrac{2s+3}{2} + (2s+3)^2 = \dfrac{2s+3}{2} \cdot [\ldots]$

(d) $\left(\dfrac{5s}{8}\right)(u-1) - 5s(3u+1) = \left(\dfrac{5s}{8}\right) \cdot [\ldots]$

2 Oefening
Ontbind in factoren.

(a) $x^3 - 1 =$

(b) $25x^2y^4 - 64 =$

(c) $4x^2 + 24xy + 36y^2 =$

3 Oefening
Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Stel $a, b, c \in \mathbb{R}_0$.

(a) $\dfrac{a-b}{c} - \dfrac{a-2b}{2c} =$

(b) $\dfrac{\frac{a-b}{b}}{1-\frac{a}{b}} =$

(c) $\dfrac{1-\frac{a+b}{b}}{\frac{a^2}{b}} =$

4 Oefening
Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Stel $x, y, a, b \in \mathbb{R}_0^+$.

(a) $\dfrac{\sqrt{a}}{a^5} =$

(b) $\left(x^6 y^8\right)^{-1/2} =$

(c) $a^4 b \left(\dfrac{\sqrt{a^2 b^4}}{ab}\right)^3 =$

5 Oefening
Vul aan.

(a) $\dfrac{4x^2}{5} - 3x = 4x \cdot [\ldots]$

(b) $(p+1)^2 + \dfrac{(p+1)^3}{2} + \dfrac{(p+1)^2}{6} = \dfrac{(p+1)^2}{2} \cdot [\ldots]$

(c) $\dfrac{(m+n)}{2} \cdot \dfrac{m^2}{(m+n)^2} - \dfrac{m}{2} = \dfrac{\ldots}{2(m+n)}$

(d) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} = \ldots \cdot \sqrt{2}$

(e) $\dfrac{4}{q} - \dfrac{8+q}{2q^2} = \dfrac{\ldots}{2q^2}$

(f) $\dfrac{-8}{2x} + \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{\ldots}{2x(x-1)^2}$

6 Oefening
Werk uit en vereenvoudig zo goed mogelijk.

(a) $\left(\sqrt{x^6 y^2}\right)^3 =$

(b) $\dfrac{\sqrt{(x+y)^4 y^3}}{y} =$

(c) $\sqrt{64x^5} =$

(d) $\left(\dfrac{y^{-4}y^6}{y\sqrt{y^4}}\right)^{-2} =$

(e) $\dfrac{9p^2-16}{9(3p+4)-1} - p =$

(f) $\dfrac{\frac{m+2}{2}}{1-\left(\frac{m-1}{2m+1}\right)} =$

Hoofdstuk 2

Oplossen van veeltermvergelijkingen van graad $\leqslant 2$ Stelsels eerstegraadsvergelijkingen

Inleiding – Terminologie

In dit deel zullen we het eerst hebben over het oplossen van veeltermvergelijkingen van graad kleiner of gelijk aan twee. Daarna behandelen we oplossingsmethoden voor eenvoudige stelsels van eerstegraadsvergelijkingen. We geven eerst wat meer uitleg bij al deze begrippen.

Zij $n \in \mathbb{N}$. Een (reële) *veelterm* van *graad* n in de *veranderlijke* x is een uitdrukking van de vorm

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

met $a_i \in \mathbb{R}$ voor $i = 0, \ldots, n$ en met $a_n \neq 0$. De reële getallen a_i heten de *coëfficiënten* van de veelterm en de coëfficiënt a_n, horende bij de hoogste voorkomende macht van x, heet de *leidende coëfficiënt* of de *hoogstegraadscoëfficiënt*. Deze is steeds verschillend van nul.

De *nulveelterm* 0 (een veelterm in de veranderlijke x waarvan alle coëfficiënten gelijk zijn aan nul) valt voorlopig niet onder deze definitie van veelterm, want in een veelterm van graad $n \in \mathbb{N}$ is er altijd minstens één coëfficiënt (vb. de leidende coëfficiënt) verschillend van nul. Toch beschouwen we 0 ook als veelterm. De nulveelterm heeft (per afspraak) graad $-\infty$.

De veeltermen van de laagste graden zijn in hun meest algemene vorm gegeven in onderstaande tabel ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$).

veelterm	opmerking	graad	naam
0		$-\infty$	nulveelterm
c	$c \neq 0$	0	constante veelterm
$ax+b$	$a \neq 0$	1	lineaire veelterm
ax^2+bx+c	$a \neq 0$	2	kwadratische veelterm

Een *nulpunt* van een (veelterm)functie f is een reëel getal x_0 waarvoor $f(x_0) = 0$. Zo is 3 een nulpunt van x^3-5x^2+4x+6, want $3^3-5*3^2+4*3+6 = 27-45+12+6 = 0$.

Als x_0 een nulpunt is van de veeltermfunctie f, dan betekent dit dat $(x-x_0)$ een factor is van deze veelterm: we zullen dan de veelterm kunnen ontbinden als

$$f(x) = (x - x_0)g(x)$$

waarbij g opnieuw een veelterm is. In bovenstaand voorbeeld kan je controleren dat inderdaad geldt dat

$$x^3 - 5x^2 + 4x + 6 = (x - 3)(x^2 - 2x - 2).$$

In wat volgt zullen we ons concentreren op veeltermen van graad 1 en 2: hoe ziet hun grafiek eruit, hoe vinden we de nulpunten, en hoe leidt dat tot een ontbinding in factoren.

2.1 Oplossen van veeltermvergelijkingen van graad 1 en 2.

2.1.1 Lineaire veeltermvergelijkingen

We bekijken eerst reële lineaire veeltermvergelijkingen in één onbekende x, of eenvoudiger gesteld, vergelijkingen van de vorm $ax + b = 0$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b \in \mathbb{R}$. Deze vergelijkingen zijn zeer eenvoudig op te lossen:

$$\begin{array}{rrcll} & ax+b & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & ax & = & -b & (\textit{beide leden verminderen met } b) \\ \Leftrightarrow & x & = & -\dfrac{b}{a} & (\textit{beide leden vermenigvuldigen met } 1/a,\ a \neq 0). \end{array}$$

We kunnen besluiten dat een vergelijking van de vorm $ax + b = 0$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b \in \mathbb{R}$ steeds juist één oplossing heeft, m.n. $x_1 = -b/a$. We kunnen de vergelijking ook herschrijven als

$$ax + b = a\left(x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right)^{\mathbf{1}} = a(x - x_1)^{\mathbf{1}}.$$

Zo kunnen we de oplossing $x_1 = -b/a$ gewoon aflezen. De bijhorende exponent 1 duidt op de multipliciteit van deze oplossing.

Voorbeeld Stel dat een getal x voldoet aan de volgende vergelijking:

$$3x + 7 = -2x + 1$$

Bepaal de getalwaarde van x.

$$\begin{array}{rrcll} & 3x+7 & = & -2x+1 & \\ \Leftrightarrow & 5x+7 & = & 1 & (\textit{Tel bij linker- en rechterlid } 2x \textit{ op}) \\ \Leftrightarrow & 5x & = & -6 & (\textit{Tel bij linker- en rechterlid -7 op}) \\ \Leftrightarrow & x & = & \frac{-6}{5} & (\textit{Deel linker- en rechterlid door 5}) \end{array}$$

Hiermee is in drie stappen het onbekende getal x gevonden. Ter controle kun je de gevonden waarde $x = -6/5$ in de oorspronkelijke vergelijking substitueren en constateren dat het klopt. We hebben gebruik gemaakt van de volgende algemene regels:

- *De geldigheid van een vergelijking verandert niet als je bij linker- en rechterlid hetzelfde getal optelt.*
- *De geldigheid van een vergelijking verandert niet als je linker- en rechterlid met hetzelfde getal vermenigvuldigt of door het hetzelfde getal deelt, mits dat getal niet nul is.*

De beide eerste stappen van de oplossing in het gegeven voorbeeld kun je ook zien als *het verplaatsen van een term van de ene kant van het gelijkheidsteken naar de andere kant waarbij die term van teken wisselt (van plus naar min en omgekeerd).*

Voorbeeld uit de fysica Twee treinwagons bewegen op hetzelfde spoor. De eerste heeft massa m_1 en beweegt met snelheid v_1, de tweede heeft massa m_2 en beweegt met snelheid v_2. Op een bepaald moment maken ze contact met elkaar en zo worden ze aan elkaar gekoppeld, om dan als één geheel verder te rijden met snelheid v_f. De vergelijking die de grootheden met elkaar verbindt is dan (zie James S. Walker p 268)

$$v_f = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Stel dat we alle grootheden kennen, behalve m_2, we willen de vergelijking dus oplossen naar m_2. Dit doen we als volgt: door beide leden te vermenigvuldigen met $m_1 + m_2$, verkrijgen we een eerstegraadsvergelijking:

$$v_f(m_1 + m_2) = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Dan werken we de haakjes uit, de verdere uitwerking verloopt als in het vorige voorbeeld:

$$\begin{aligned} & v_f m_1 + v_f m_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \Leftrightarrow\ & v_f m_2 - v_2 m_2 = m_1 v_1 - v_f m_1 \\ \Leftrightarrow\ & (v_f - v_2) m_2 = m_1 (v_1 - v_f) \\ \Leftrightarrow\ & m_2 = m_1 \frac{v_1 - v_f}{v_f - v_2} \end{aligned}$$

2.1.2 Kwadratische veeltermvergelijkingen

Nu bekijken we reële kwadratische veeltermvergelijkingen in één onbekende x of vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b, c \in \mathbb{R}$. Een dergelijke vergelijking kunnen we als volgt oplossen:

$$\begin{array}{lrcll} & ax^2 + bx + c & = & 0 & (\star) \\ \Leftrightarrow & ax^2 + bx & = & -c & (\textit{beide leden verminderen met } c) \\ \Leftrightarrow & x^2 + \dfrac{b}{a}x & = & -\dfrac{c}{a} & (\textit{beide leden vermenigvuldigen met } 1/a,\ \ a \neq 0) \\ \Leftrightarrow & x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2} & = & -\dfrac{c}{a} + \dfrac{b^2}{4a^2} & (\textit{beide leden vermeerderen met } b^2/4a^2,\ \ a \neq 0) \\ \Leftrightarrow & \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 & = & \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} & (\textit{volkomen kwadraat, op gelijke noemer brengen})\ (\star\star) \\ \Leftrightarrow & \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 & = & \dfrac{D}{4a^2} & (D \stackrel{\text{def}}{=} b^2 - 4ac)\ (\star\star\star). \end{array}$$

De term $b^2 - 4ac$ die optreedt in de teller van het rechterlid van ($\star\star$), speelt een cruciale rol in het oplossen van kwadratische vergelijkingen. Deze term wordt de *discriminant* van de vergelijking genoemd en wordt genoteerd met D. We zien bijvoorbeeld dat wanneer $D < 0$, ook $D/4a^2 < 0$ en bijgevolg Vergelijking ($\star$) geen reële oplossingen zal hebben, want het linkerlid van ($\star\star\star$) is een kwadraat en dit kan nooit strikt negatief zijn. Wanneer $D \geqslant 0$ echter, zijn er wel oplossingen mogelijk. We moeten dus een gevalsonderscheid maken naargelang het teken van de discriminant D. Veronderstellen we nu dat $D \geqslant 0$, dan kan Vergelijking $(\star\star\star)$ als volgt verder worden opgelost:

$$
\begin{array}{rrcll}
 & \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 & = & \dfrac{D}{4a^2} & \\
\Leftrightarrow & x+\dfrac{b}{2a} & = & \pm\sqrt{\dfrac{D}{4a^2}} \quad = \quad \pm\dfrac{\sqrt{D}}{2a} & (D \geqslant 0) \\
\Leftrightarrow & x & = & \pm\dfrac{\sqrt{D}}{2a}-\dfrac{b}{2a} \quad = \quad \dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} & (\textit{beide leden verminderen met } b/2a) \\
\Leftrightarrow & & & \boxed{x = x_1 \overset{\text{def}}{=} \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} \qquad \text{of} \qquad x = x_2 \overset{\text{def}}{=} \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}}\,. &
\end{array}
$$

Als $D \geqslant 0$ heeft $(\star)$ dus twee reële oplossingen, nl. $x_1 = (-b+\sqrt{D})/2a$ en $x_2 = (-b-\sqrt{D})/2a$. Als $D > 0$ zijn dit twee verschillende oplossingen. Als $D = 0$ vallen beide oplossingen samen: $x_1 = x_2 = -b/2a$. Daarom spreken we in dit laatste geval van 'twee samenvallende oplossingen' of van een oplossing met multipliciteit 2.

Als $D > 0$ kan de veelterm $ax^2 + bx + c$ als volgt geschreven worden:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) \qquad (2.1)\\
&= a(x-x_1)^{\mathbf{1}}(x-x_2)^{\mathbf{1}}.
\end{aligned}
$$

Men kan dit gemakkelijk nagaan door het rechterlid van (2.1) via distributiviteit uit te werken. Op deze manier kunnen we de oplossingen x_1 en x_2 gewoon aflezen. Bovendien is $x_1 \neq x_2$. Beide oplossingen x_1 en x_2 hebben bijgevolg elk multipliciteit 1.

Als $D = 0$ kan $ax^2 + bx + c$ ontbonden worden als

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad (2.2)\\
&= a(x-x_{1,2})^{\mathbf{2}}.
\end{aligned}
$$

Men kan dit nagaan door het rechterlid van (2.2) uit te werken en in rekening te brengen dat $D = 0$ en dus dat $b^2 = 4ac$. De unieke reële oplossing $x_{1,2} \overset{\text{def}}{=} x_1 = x_2$ heeft dus multipliciteit 2 (of twee samenvallende oplossingen).

Onderstaande tabel vat onze bevindingen samen.

Discriminant $D = b^2 - 4ac$	Oplossingen van $ax^2 + bx + c = 0$
$D < 0$	geen reële oplossingen
$D = 0$	twee samenvallende reële oplossingen = één reële oplossing met multipliciteit 2: $x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$
$D > 0$	twee verschillende reële oplossingen, elk met multipliciteit 1: $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ en $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

Voorbeelden

- De vergelijking $x^2 + 1 = 0$ heeft geen oplossingen, want het linkerlid is voor elke keuze van x groter dan of gelijk aan 1 (een kwadraat is altijd groter dan of gelijk aan 0). De discriminant van deze vergelijking is $D = -4 < 0$.
- De vergelijking $x^2 + 2x + 1 = 0$ heeft één oplossing, want het linkerlid kan geschreven worden als $(x + 1)^2$, en dat is alleen maar gelijk aan 0 als $x + 1 = 0$ is, dat wil zeggen als $x = -1$. De discriminant van deze vergelijking is $D = 0$.
- De vergelijking $x^2 - 1 = 0$ heeft twee oplossingen. Het linkerlid kan geschreven worden als $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$. Deze uitdrukking wordt nul als $x = 1$ of $x = -1$. De discriminant van deze vergelijking is $D = 4 > 0$.

In sommige gevallen vereist het oplossen van een tweedegraadsvergelijking geen speciale techniek. Als voorbeeld nemen we $x^2 - 3x = 0$. Door deze vergelijking te herschrijven als $x(x - 3) = 0$ en op te merken dat een product van twee getallen 0 is, als en alleen als één van die getallen 0 is, zien we dat $x = 0$ of $x - 3 = 0$ moet zijn. De oplossingen zijn dus $x = 0$ en $x = 3$. Bekijk in die sfeer ook volgend voorbeeld:

Voorbeeld uit de fysica Een bolvormig object met straal r, massa m en traagheidsmoment I rolt van een hellend vlak met beginhoogte h. Uit het behoud van mechanische energie kan de eindsnelheid v bepaald worden (zie James S. Walker p

318).

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{I}{mr^2}\right) \\ \Leftrightarrow \quad v^2 &= \frac{2mgh}{m\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)} \\ \Leftrightarrow \quad v &= \sqrt{\frac{2gh}{\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)}} \end{aligned}$$

Dus alhoewel dit een tweedegraadsvergelijking in de onbekende v was (want v^2 stond in de vergelijking), hebben we de formule met de discriminant niet nodig gehad. Aangezien er wel een term met v^2 stond, maar geen term met v, konden we oplossen naar $v^2 = \ldots$, waaruit we meteen v konden halen.

2.2 Tekenverloop van veeltermfuncties van graad 1 en 2

2.2.0 Werkwijze

We zullen het in deze sectie hebben over het tekenverloop van veeltermfuncties van graad 1 en 2. We starten in deze paragraaf met het uitleggen van een werkwijze om tot zo'n tekenverloop te komen. Deze werkwijze is geldig voor veeltermfuncties van om het even welke graad en we zullen dan ook het algemene geval behandelen. Pas in de volgende drie paragrafen hebben we het dan specifiek over veeltermfuncties van graad 1 en 2.

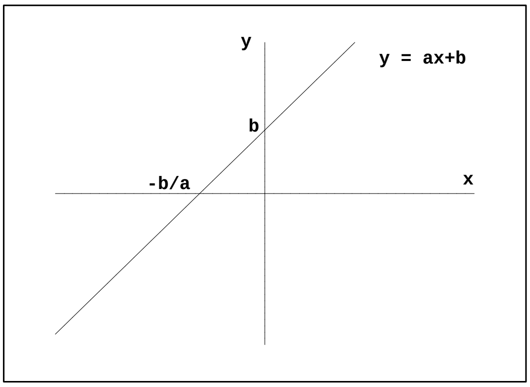
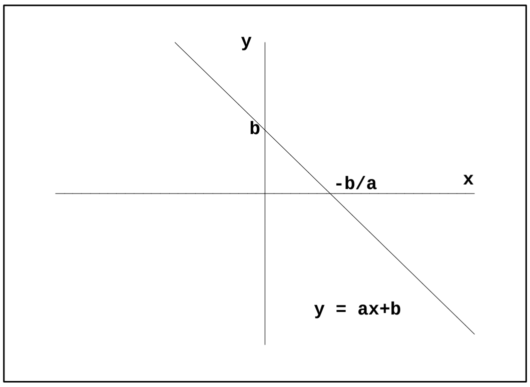
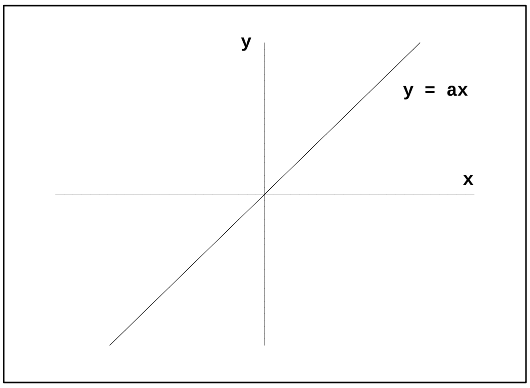
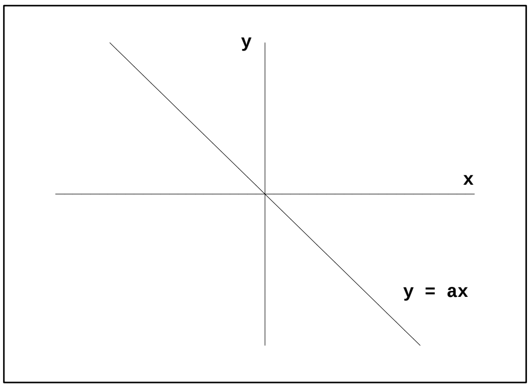
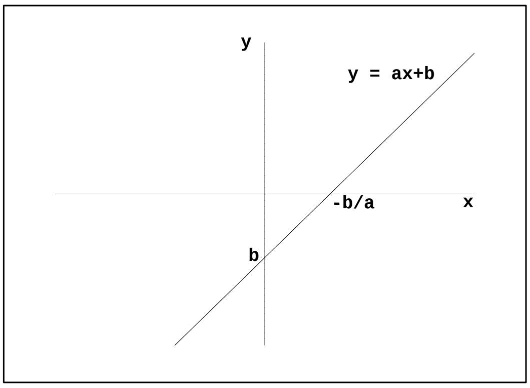
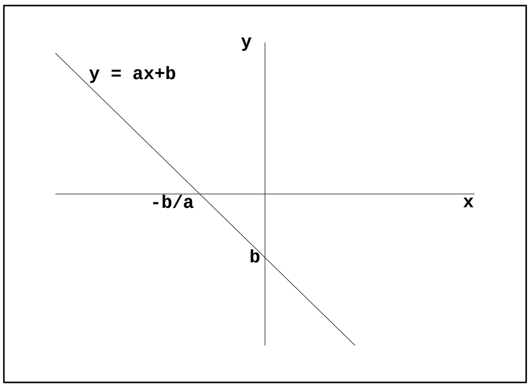
We trachten dus na te gaan waar (voor welke x-waarden) een gegeven veeltermfunctie positieve waarden aanneemt, waar ze negatieve waarden aanneemt en waar ze nul wordt. Hoe pakken we dit nu aan? Vooreerst is het belangrijk op te merken dat een veeltermfunctie steeds *continu* is. Intuïtief kan je je bij dit begrip voorstellen dat de grafiek van een dergelijke functie een ononderbroken kromme is. Natuurlijk is dit geen voldoende karakterisatie van continuïteit, maar het maakt wel een belangrijke eigenschap van continue functies duidelijk. Namelijk dat een continue functie nooit van positieve functiewaarden kan overgaan in negatieve functiewaarden (of omgekeerd) zonder eerst nul te worden. Iets exacter geformuleerd klinkt dit als volgt: als f een veeltermfunctie is en $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $f(a) \cdot f(b) < 0$ (d.w.z. dat $f(a)$ en $f(b)$ niet 0 zijn en een verschillend teken hebben), dan bestaat er een $c \in]a, b[$ waarvoor $f(c) = 0$. Men noemt dit resultaat uit de analyse *'De tussenwaardestelling voor continue functies'*. Deze stelling impliceert dus dat tussen twee naburige nulpunten, het teken van een veeltermfunctie niet verandert.

Het eerste dat we dus moeten doen indien we een tekenverloop willen opstellen, is op zoek gaan naar alle nulpunten van de beschouwde veeltermfunctie. Hierbij weten we uit de algebra dat een veeltermfunctie van graad $n \in \mathbb{N}$ ten hoogste n reële nulpunten kan hebben. Om de nulpunten van veeltermfuncties van graad 1 en 2 te kunnen bepalen, hebben we het nodige gedaan in de eerste sectie van dit pakket. Immers, het zoeken van de nulpunten van een veeltermfunctie is niets anders dan het oplossen van een veeltermvergelijking van dezelfde graad. Eens we de nulpunten kennen, moeten we nog het juiste teken zien te bepalen van de functiewaarden tussen elk paar naburige nulpunten, vóór het eerste nulpunt en na het laatste nulpunt. Hiervoor bestaat een eenvoudige regel die gebruik maakt van de *multipliciteiten* van de nulpunten. Deze multipliciteiten moeten we dus ook bepalen samen met de nulpunten zelf. We zullen hier echter niet verder ingaan op het bewijs van deze regel.

Het eenvoudigst te bepalen teken is dat van de functiewaarden voorbij het laatste nulpunt. Het teken daar is altijd het teken van de hoogstegraadscoëfficiënt, van a dus als we de notaties gebruiken uit Sectie 1. Een manier om dit in te zien is als volgt. Als f een veeltermfunctie is met leidende coëfficiënt a is de limiet van $f(x)$ voor x gaande naar $+\infty$ steeds $+\infty$ als $a > 0$ en steeds $-\infty$ als $a < 0$. Voor het vinden van het teken van f over de andere intervals gaan we na of dat teken al dan niet verandert wanneer we over een nulpunt 'springen'. Nu is het zo dat het teken van een veeltermfunctie bij het springen over een nulpunt, wijzigt voor elke multipliciteit van dat nulpunt. D.w.z. dat het teken verandert wanneer we springen over een nulpunt van oneven multipliciteit en niet verandert wanneer we springen over een nulpunt van even multipliciteit. Een andere manier om dit te onthouden is door te stellen dat het teken van de functiewaarden bij het springen over een nulpunt altijd wijzigt, tenminste als we de nulpunten tellen 'met hun multipliciteit'. Dus als we over een nulpunt springen met multipliciteit 3, springen we eigenlijk over drie nulpunten tegelijk en voor elk nulpunt wijzigt het teken van de functiewaarden. Op die manier vinden we het juiste teken van f over de gehele reële rechte.

2.2.1 Tekenverloop en grafieken van lineaire functies

Een lineaire functie f met als voorschrift $f(x) = ax + b$ waarbij $a \in \mathbb{R}_0$ en $b \in \mathbb{R}$, heeft steeds juist één nulpunt, nl. $x_1 = -b/a$. De multipliciteit van dit nulpunt is bovendien steeds 1. Dit wil zeggen dat het teken van f rechts van $x_1 = -b/a$ gelijk is aan het teken van a, terwijl het teken van f links van dit nulpunt steeds gelijk is aan het teken van $-a$. Wat betreft het tekenverloop zijn er dus eigenlijk twee mogelijkheden afhankelijk van het teken van de leidende coëfficiënt a. Als we ook nog het teken $(-/0/+)$ van b in rekening brengen, kunnen we in totaal zes gevallen onderscheiden. De tabel op de volgende bladzijde geeft voor elk van deze zes gevallen een mogelijke grafiek met bijhorend tekenverloop.

<table>
<tr><th></th><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>$b > 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$b = 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$b < 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$b \in \mathbb{R}$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -b/a & & +\infty \\ \hline ax+b & & - & 0 & + & \end{array}$</td><td>$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -b/a & & +\infty \\ \hline ax+b & & + & 0 & - & \end{array}$</td></tr>
</table>

2.2.2 Tekenverloop en grafieken van kwadratische functies

We beschouwen de functie f met functievoorschrift

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

waarbij $a \in \mathbb{R}_0$ en $b, c \in \mathbb{R}$. Voor het aantal en de multipliciteiten van de nulpunten van f zijn er drie mogelijkheden:

(a) twee verschillende reële nulpunten, elk met multipliciteit 1 ($D > 0$)

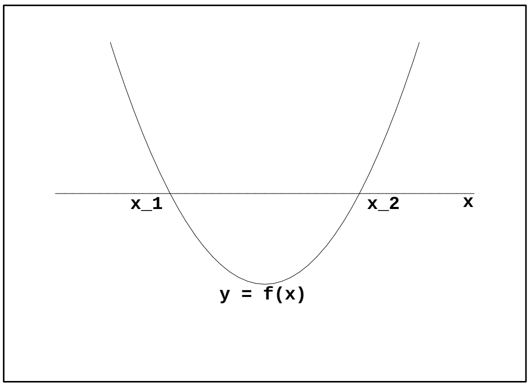
(b) één reëel nulpunt met multipliciteit 2 ($D = 0$)

(c) geen reële nulpunten ($D < 0$).

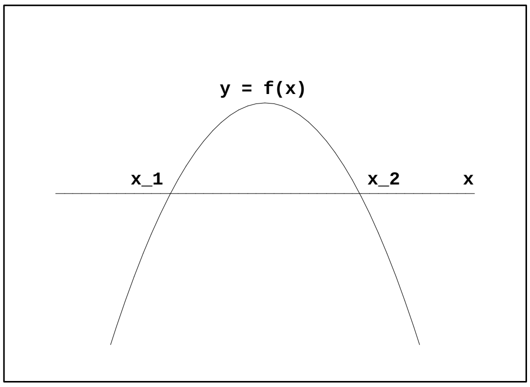
In elk van de drie gevallen hangt het tekenverloop ook nog eens af van het teken van a. Er zijn dus in totaal zes verschillende tekenverlopen mogelijk. De tabel op de volgende bladzijde geeft hiervan een samenvattend overzicht.

	$a > 0$	$a < 0$

$D > 0$

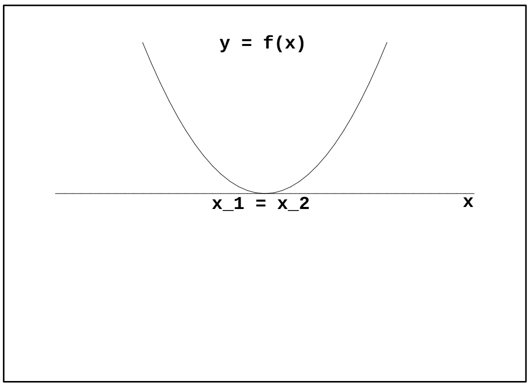


$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$$

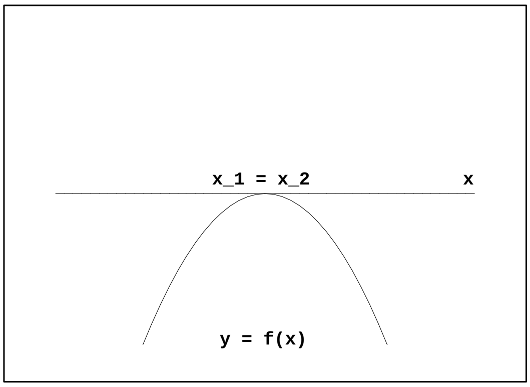


$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$$

$D = 0$

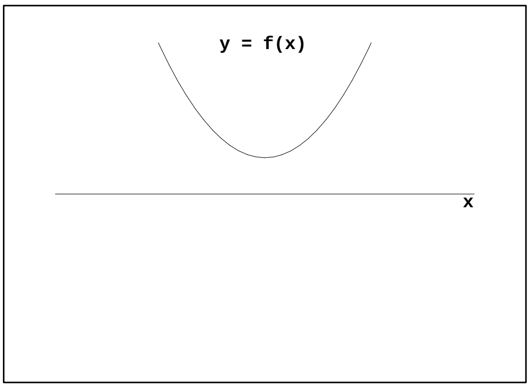


$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & x_1 = x_2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & + & \end{array}$$

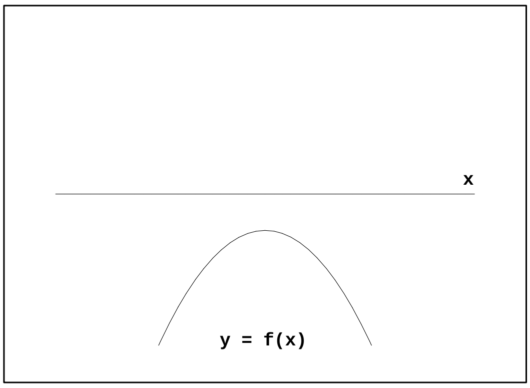


$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & x_1 = x_2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & - & \end{array}$$

$D < 0$



$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & \end{array}$$



$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & \end{array}$$

2.3 Oplossen van stelsels eerstegraadsvergelijkingen.

In tegenstelling tot vorige paragraaf waar veeltermvergelijkingen in één onbekende werden behandeld, bekijken we nu vergelijkingen met meerdere onbekenden. We beperken ons tot lineaire- of eerstegraadsvergelijkingen. De vergelijking $3x - 4y + 5z = 7$ noemt men een lineaire vergelijking in de onbekenden x, y, z. De getallen 3, -4, 5 en 7 heten de coëfficiënten van deze vergelijking; het getal 7 wordt ook wel het rechterlid genoemd. Oplossen van deze vergelijking betekent het zoeken van alle waarden die de onbekenden x, y, z kunnen aannemen als ze aan de genoemde betrekking voldoen.

De algemene vorm van een lineaire vergelijking is $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m = b$, waarin $x_1, \ldots, x_m$ de onbekenden zijn en $a_1, \ldots, a_m, b$ de (bekende) reële coëfficiënten; b is het rechterlid en $m \in \mathbb{N}$. Als we eisen dat de onbekenden aan meerdere vergelijkingen moeten voldoen, spreken we van een *stelsel lineaire vergelijkingen.* We bekijken hier twee methoden om stelsels van lineaire vergelijkingen op te lossen: de *subsitutie- en combinatiemethode.*

Een lineaire vergelijking met slechts één onbekende kan eenvoudig opgelost worden (zie paragraaf 2.1.1). Als we een lineaire vergelijking hebben in twee onbekenden x en y kunnen we de getalwaarden hiervan niet bepalen, bijvoorbeeld $x + y = 0$ kan zowel voor $x = 1, y = -1$ als voor $x = 2, y = -2$, enz. Als we echter evenveel vergelijkingen hebben als onbekenden kunnen we de getalwaarden wel bepalen. Dit noemen we het oplossen van een stelsel van vergelijkingen.

Een voorbeeld van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen in twee onbekenden x en y:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 & (1) \\ 3x - 4y = 2 & (2) \end{cases}$$

Om de oplossingen van een stelsel lineaire vergelijkingen te vinden, gaan we op een systematische manier variabelen elimineren.

$$\begin{array}{rrcll} & 2x + 5y & = & 9 & \\ \Leftrightarrow & 2x & = & 9 - 5y & (\textit{beide leden van (1) verminderen met } 5y) \\ \Leftrightarrow & x & = & \dfrac{9 - 5y}{2} & (\textit{beide leden delen door 2}) \end{array}$$

In vergelijking (2) vervangen we x door deze uitdrukking (*substitutie*). Dit wordt:

$$
\begin{aligned}
& 3\left(\frac{9-5y}{2}\right) - 4y &=& \; 2 \\
\Leftrightarrow \; & 3\left(\frac{9}{2} - \frac{5}{2}y\right) - 4y &=& \; 2 \\
\Leftrightarrow \; & \frac{27}{2} - \frac{15}{2}y - 4y &=& \; 2 & \qquad (\textit{haakjes uitwerken}) \\
\Leftrightarrow \; & \frac{27}{2} - \left(\frac{15}{2} + 4\right) y &=& \; 2 & \qquad (\textit{y buiten haken brengen }) \\
\Leftrightarrow \; & \frac{27}{2} - \left(\frac{15+8}{2}\right) y &=& \; 2 & \qquad (\textit{op dezelfde noemer brengen }) \\
\Leftrightarrow \; & \frac{27}{2} - \frac{23}{2}y &=& \; 2 \\
\Leftrightarrow \; & -\frac{23}{2}y &=& \; 2 - \frac{27}{2} & \qquad (\textit{beide leden - } \tfrac{27}{2}\text{ }) \\
\Leftrightarrow \; & y &=& \; \left(2 - \frac{27}{2}\right)\frac{-2}{23} & \qquad (\textit{beide leden } \times \frac{-2}{23}\text{ }) \\
\Leftrightarrow \; & y &=& \; \frac{-23}{2}\frac{-2}{23} = 1
\end{aligned}
$$

Substitutie van $y = 1$ in een van beide oorspronkelijke vergelijkingen (1) of (2) geeft een vergelijking waaruit x kan worden opgelost. We kiezen de eerste vergelijking:

$$
\begin{aligned}
2x + 5 \times 1 &= 9 \\
2x &= 9 - 5 \quad (\textit{beide leden } -5) \\
2x &= 4 \\
\\
x &= 2 \qquad (\textit{beide leden delen door } 2)
\end{aligned}
$$

Een tweede methode om dit stelsel op te lossen kan m.b.v. *combinatie*. Vermenigvuldig in vergelijking (1) het linker- en rechterlid met 3, en in vergelijking (2) het linker- en rechterlid met 2, zodat de coëfficiënten van x in beide vergelijkingen hetzelfde worden:

$$6x + 15y = 27$$

$$6x - 8y = 4$$

Trek vervolgens de tweede vergelijking van de eerste af. Je houdt dan een vergelijking over waarin alleen nog maar de onbekende y voorkomt.

$$23y = 23$$

met als oplossing $y = 1$. Substitutie van deze waarde in een van beide oorspronkelijke vergelijkingen (1) of (2) geeft op een analoge manier als hierboven uitgelegd $x = 2$.

Hiermee zijn de getallen x en y gevonden. Je kunt ter controle nagaan dat de combinatie $x = 2$ en $y = 1$ inderdaad aan beide oorspronkelijke vergelijkingen (1) en (2) voldoet. Men kan een stelsel ook grafisch oplossen. De oplossing vindt men door het snijpunt te zoeken van de twee rechten die door de vergelijkingen beschreven worden.

Tenslotte een kort 'lineair raadseltje'. De leeftijden van Jan en zijn moeder zijn samen 71 jaar, terwijl de moeder vorig jaar twee keer zo oud was als Jan toen was. Hoe oud zijn Jan en zijn moeder? Noem de leeftijd van Jan x, die van zijn moeder y, dan zegt het eerste gegeven dat $x + y = 71$, terwijl het tweede gegeven zich vertaalt in $y - 1 = 2(x - 1)$. We krijgen de twee vergelijkingen:

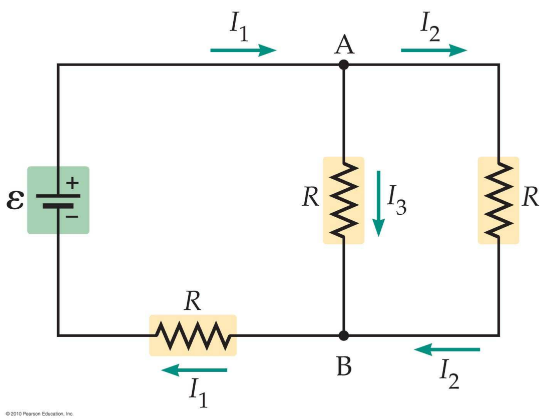
$$\begin{cases} x + y = 71 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Het is niet moeilijk hieruit af te leiden dat $x = 24$ en $y = 47$ (tel bijvoorbeeld de twee vergelijkingen op, je elimineert dan de onbekende y). Grafisch is de oplossing in dit eenvoudige voorbeeld ook te bepalen. Beide vergelijkingen stellen immers een rechte in het x, y - vlak voor. Oplossen van het stelsel correspondeert met het vinden van het snijpunt van de twee rechten. Overigens zoeken we in dit probleem slechts geheeltallige oplossingen.

2.3.1 Voorbeelden uit de fysica en chemie

In de fysica komen talloze problemen voor waarin een aantal onbekenden moeten gezocht worden aan de hand van een aantal vergelijkingen. We beperken ons hier tot enkele uitgewerkte eenvoudige voorbeelden van stelsels lineaire eerstegraadsvergelijkingen die rechtstreeks uit de cursus fysica (Pearson International Edition James S. Walker) van het 1^{ste} jaar komen.

- Bij het uitwerken van het elektrisch netwerk bestaande uit een spanningsbron en drie dezelfde weerstanden voorgesteld in fig.2.1 zijn de spanning $U = 15$ V en de weerstand $R = 100$ Ohm gegeven. Bereken nu de stromen I_1, I_2 en I_3 doorheen het circuit. Aan de hand van de wetten van Kirchhoff, kunnen de volgende vergelijkingen opgesteld worden:



Figuur 2.1: Een eenvoudig elektrisch netwerk dat m.b.v. de wetten van Kirchhoff kan uitgerekend worden.

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 & = & 0 & (1) \\ U - I_3R - I_1R & = & 0 & (2) \\ I_3R - I_2R & = & 0 & (3) \end{cases}$$

Uit vergelijking (3) volgt dat:

$$I_3R = I_2R \Rightarrow I_3 = I_2$$

Door substitutie van I_3 door I_2 volgt uit vergelijking (1) dat:

$$I_1 - I_2 - I_3 = I_1 - 2I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = 2I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{I_1}{2} = I_3$$

Uit vergelijking (2) tenslotte volgt dat:

$$U - \frac{I_1}{2}R - I_1R = 0 \Rightarrow U - I_1\left(\frac{R}{2} + R\right) = 0 \Rightarrow U - I_1\frac{3R}{2} = 0 \Rightarrow U = I_1\frac{3R}{2}$$

Hieruit volgt dat:

$$I_1 = \frac{U}{\frac{3R}{2}} = \frac{2U}{3R} = \frac{30}{300} = 0.1A$$
$$I_2 = I_3 = 0.05A$$

- Onderstaand stelsel gelijkheden vindt zijn oorsprong in de Newtonmechanica (James S. Walker p 167).

$$\begin{cases} T & = & m_1a & \textit{(1)} \\ m_2g - T & = & m_2a & \textit{(2)} \end{cases}$$

Hierin stellen m_1 en m_2 de respectievelijke massa's voor van twee objecten A en B, de constante g is de valversnelling en de variabelen T en a staan respectievelijk voor de spankracht en de versnelling. Veronderstel dat m_1, m_2 en g gekend zijn. Bepaal T en a.

$$\begin{aligned}
m_2 g &= m_1 a + m_2 a && (\textit{Vergelijkingen (1) en (2) optellen en zo } T \textit{ elimineren}) \\
m_2 g &= (m_1 + m_2) a && (a \textit{ buiten haken brengen}) \\
a &= \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} && (\textit{Beide leden delen door } (m_1 + m_2))
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat:

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2} \\ T = m_1 a = \dfrac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

- Ook in de Chemie wordt het oplossen van stelsels gebruikt in bijvoorbeeld chemische reacties : In welke verhouding worden waterstof en zuurstof verbruikt bij de reactie tot water? Concreter, de reactievergelijking

$$xH_2 + yO_2 \to zH_2O$$

voert tot de getallen $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$ (ook $x = 4$, $y = 2$ en $z = 4$ leveren een oplossing), d.w.z. twee moleculen waterstof combineren met *één* molecule zuurstof tot twee moleculen water. Deze oplossing kan je vinden door uit reactievergelijking twee (wiskundige) vergelijkingen te halen. Door de aantallen atomen waterstof links en rechts van de pijl in de reactievergelijking te vergelijken krijgen we $2x = 2z$. Vergelijken van de aantallen atomen zuurstof levert de vergelijking $2y = z$.

We krijgen dus twee vergelijkingen waarin drie onbekenden x, y en z moeten voldoen. We leiden makkelijk af dat

$$\begin{cases} x = z \\ z = 2y \end{cases}$$

Bij elke keuze van y liggen x en z vast, er zijn dus oneindig veel oplossingen mogelijk. Voor de chemie zijn echter alleen gehele getallen als oplossing relevant, en zelfs alleen de meest zuinige oplossing ($x = 2, y = 1, z = 2$).

Hoofdstuk 3

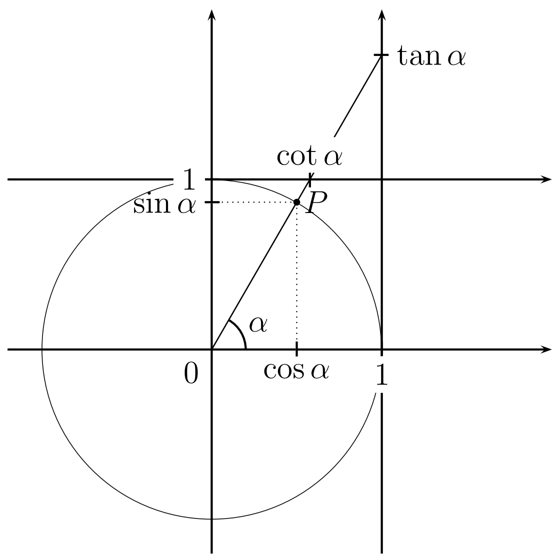
Goniometrie en vlakke meetkunde

Rekenen met vectoren is een basisvaardigheid voor vakken natuurkunde. Bij het vectorrekenen maken we gebruik van goniometrie en vlakke meetkunde. In deze module willen we de belangrijkste definities en eigenschappen herhalen en toepassen in oefeningen.

3.1 Goniometrie

3.1.1 Goniometrische cirkel

Een goniometrische cirkel is een cirkel met als middelpunt de oorsprong van een cartesiaans assenstelsel en met straal 1. Met elke hoek α kan een punt P van de goniometrische cirkel geassocieerd worden. Hiertoe laat men het eerste been van de hoek samenvallen met de positieve x-as. Het tweede been snijdt de goniometrische cirkel in het punt P. De lengte van de cirkelboog tussen de twee benen geeft ons de hoek in radialen. De hoek is positief indien die in tegenwijzerzin gemeten wordt vanaf de x-as. Merk op dat een hoek gemeten in radialen eigenlijk dimensieloos is, en dat je de eenheid radialen mag weglaten. Aangezien de omtrek van een eenheidscirkel 2π is, vinden we dat het verband tussen een hoek gemeten in graden en



radialen gegeven is door $360° = 2\pi$. We vinden dus: $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{3\pi}{4} = 135°$, $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{3\pi}{2} = 270° = -90°$, ...
De hoeken worden ingedeeld in 4 kwadranten:

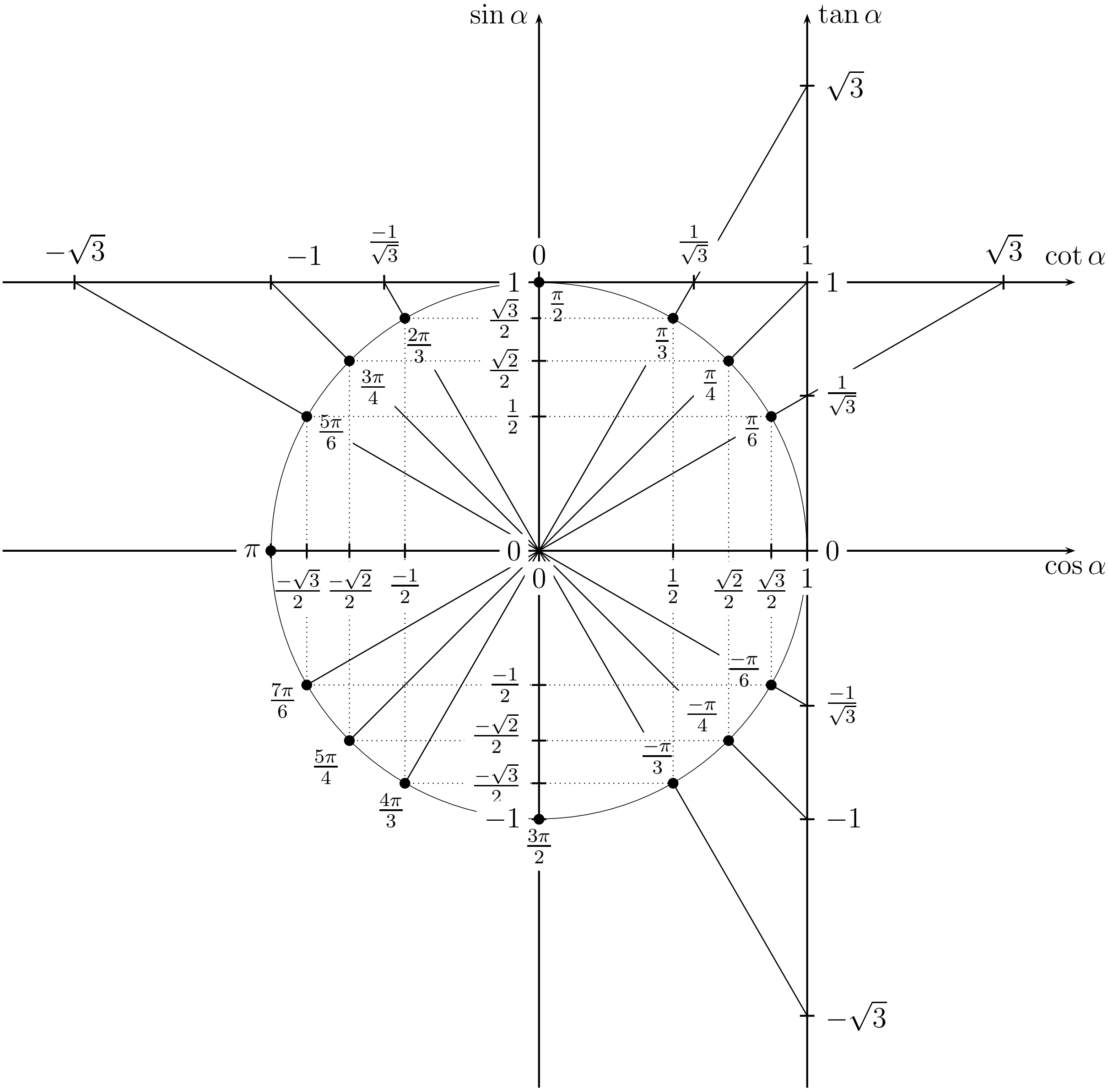
- eerste kwadrante: hoeken tussen 0 en $\pi/2$
- tweede kwadrante: hoeken tussen $\pi/2$ en π
- derde kwadrante: hoeken tussen π en $3\pi/2$
- vierde kwadrante: hoeken tussen $3\pi/2$ en 2π

De cosinus en sinus van de hoek α zijn gedefinieerd via de coördinaten van het punt $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$. De tangens (afgekort tan of tg) en de cotangens (afgekort cot of cotg) zijn gedefinieerd als

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad\qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

en kunnen eveneens aangeduid worden op de goniometrische cirkel.

Enkele veelvoorkomende hoeken en hun goniometrische getallen zijn gegeven in onderstaande figuur.



3.1.2 Goniometrische formules

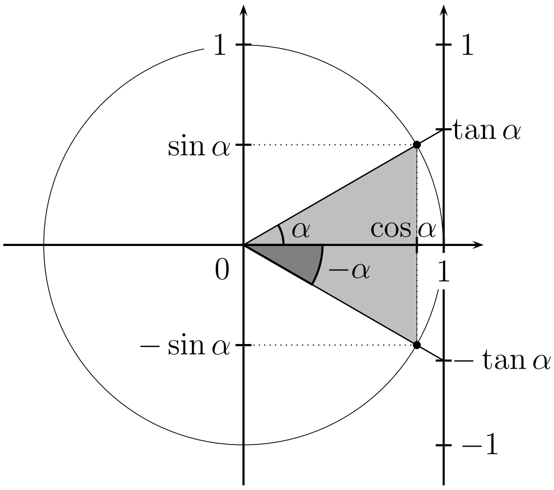
Hieronder wordt een overzicht gegeven van de belangrijkste verbanden tussen de goniometrische getallen van hoeken.

Verwante hoeken

Om verbanden te zien tussen goniometrische getallen van verwante hoeken, teken je best steeds de goniometrische eenheidscirkel. Verwante hoeken zijn:

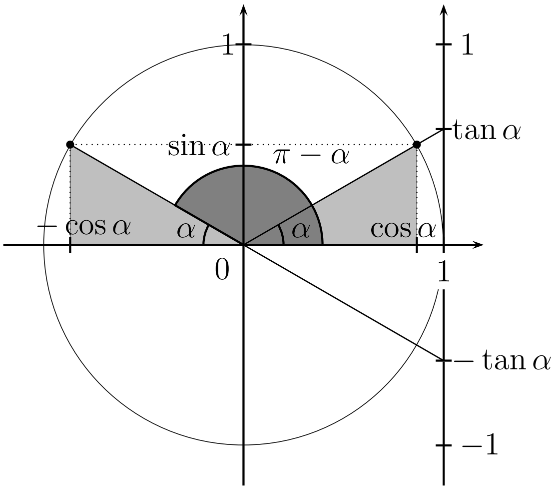
Tegengestelde hoeken: α en $-\alpha$

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos\alpha\\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$



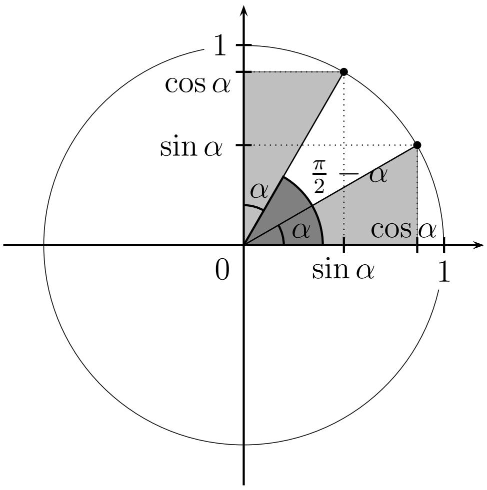
Supplementaire hoeken: hoeken waarvan de som 180° of π is.

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(\pi-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$



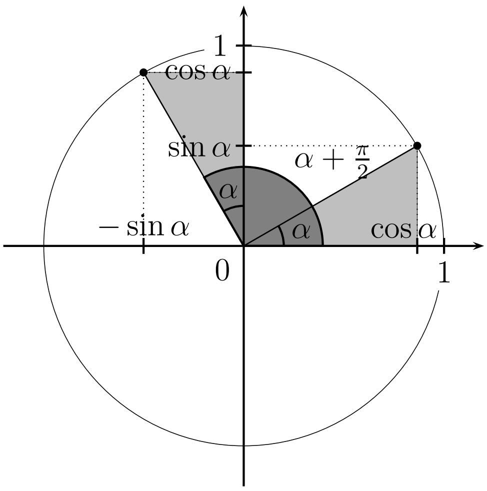
Complementaire hoeken: hoeken waarvan de som 90° of $\frac{\pi}{2}$ is.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha\\
\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cot\alpha\\
\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \tan\alpha
\end{aligned}$$



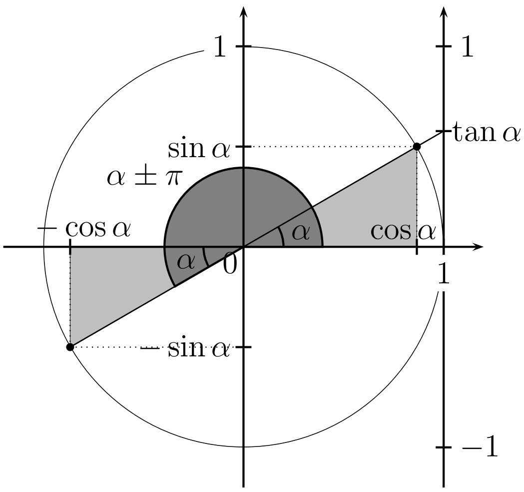
Anticomplementaire hoeken: hoeken waarvan het verschil 90° of $\frac{\pi}{2}$ is.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\alpha\\
\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\alpha\\
\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\cot\alpha\\
\cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\tan\alpha
\end{aligned}$$



Antisupplementaire hoeken: hoeken waarvan het verschil 180° of π is.

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha\pm\pi) &= -\sin\alpha\\
\cos(\alpha\pm\pi) &= -\cos\alpha\\
\tan(\alpha\pm\pi) &= \tan\alpha\\
\cot(\alpha\pm\pi) &= \cot\alpha
\end{aligned}$$



Grondformule en afgeleide formules

$$
\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1\\
\sin^2\alpha &= 1-\cos^2\alpha\\
\cos^2\alpha &= 1-\sin^2\alpha\\
\tan^2\alpha + 1 &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ als } \cos^2\alpha \neq 0\\
1+\cot^2\alpha &= \frac{1}{\sin^2\alpha} \text{ als } \sin^2\alpha \neq 0
\end{aligned}
$$

Som-en verschilformules

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

Formules voor de dubbele/ halve hoek

$$
\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\
\cos 2\alpha &= 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1\\
\cos 2\alpha &= \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\
\sin 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}
\end{aligned}
$$

Formules van Simpson

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\\
-2\sin\alpha\sin\beta &= \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

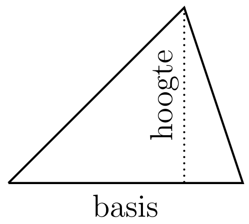
3.2 Vlakke meetkunde

In deze sectie vatten we de belangrijkste eigenschappen van driehoeken, de cirkel en rechten samen.

3.2.1 Driehoeken

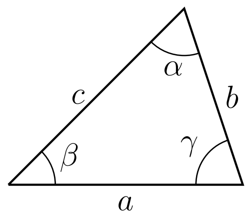
3.2.1 Eigenschappen (Willekeurige driehoeken)

(a) *De oppervlakte van een driehoek is*
$$\frac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2}$$



(b) *De som van de hoeken in een driehoek is* $180°$ *of* π*:*
$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

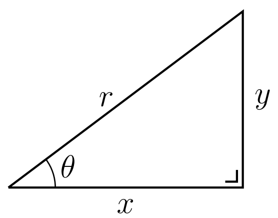
(c) *Sinusregel*
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



(d) *Cosinusregel*
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$

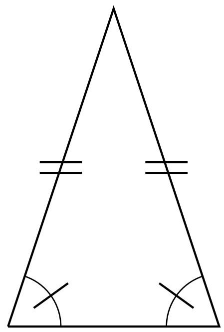
3.2.2 Eigenschappen (Rechthoekige driehoeken)
Voor een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden x *en* y*, schuine zijde* r *en* θ *de hoek ingesloten tussen* x *en* r*, geldt:*

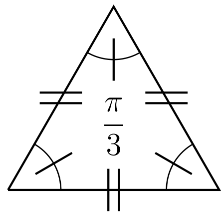
$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 =& r^2 \text{ (\textit{Stelling van Pythagoras})}\\
\cos\theta =& \frac{x}{r} \left(= \frac{\textit{aanliggende rechthoekszijde}}{\textit{schuine zijde}} \right)\\
\sin\theta =& \frac{y}{r} \left(= \frac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{schuine zijde}} \right)\\
\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} =& \frac{y}{x} \left(= \frac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} \right)
\end{aligned}$$



3.2.3 Eigenschap (gelijkbenige driehoek)

- *Bij een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.*
- *Gevolg: de hoeken van een gelijkzijdige driehoek meten* 60° *of* $\frac{\pi}{3}$





3.2.2 De cirkel

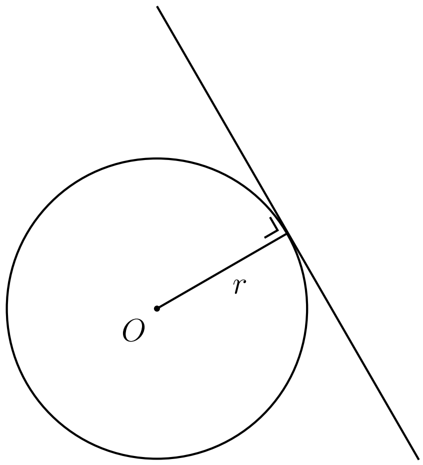
Een cirkel met middelpunt O en straal r is de verzameling van alle punten die op een afstand r van het punt O liggen. De belangrijkste eigenschappen van een cirkel zijn:

3.2.4 Eigenschappen (cirkel)

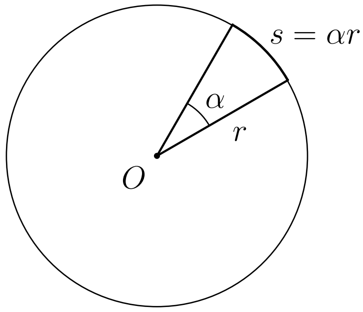
(a) *De omtrek is* $2\pi r$.

(b) *De oppervlakte is* πr^2.

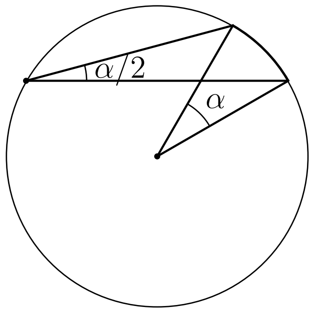
(c) *De raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.*



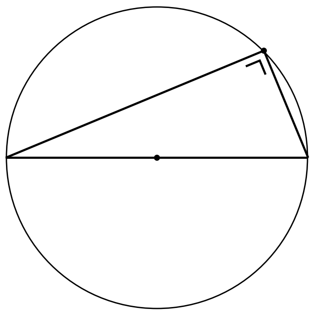
(d) *Als je op een cirkel met straal* r *een boog* s *tekent die vanuit het middelpunt* O *onder een hoek* α *wordt gezien, dan is de booglengte* s *gegeven door* αr, *met de hoek* α *uitgedrukt in radialen.*



(e) *Een omtrekshoek meet de helft van de middelpuntshoek op dezelfde boog.*

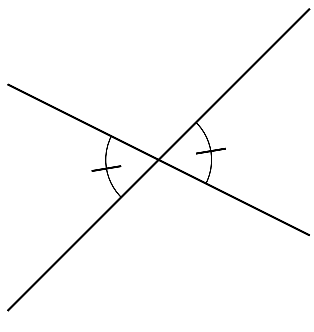


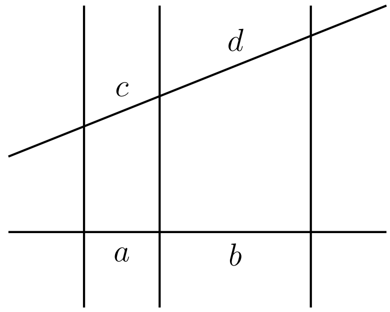
speciaal geval: de omtrekshoek op een halve cirkel is $90°$ *of* $\dfrac{\pi}{2}$



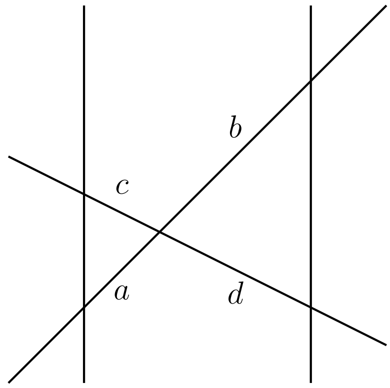
3.2.3 Rechten

3.2.5 Eigenschap (Overstaande hoeken)
Overstaande hoeken bij twee snijdende rechten zijn gelijk.



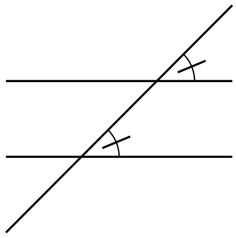


3.2.6 Eigenschap (Stelling van Thales)
De evenwijdige projectie behoudt de verhouding van evenwijdige lijnstukken: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

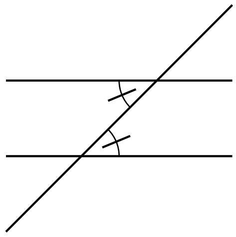


3.2.7 Eigenschappen (Twee evenwijdige rechten en een snijlijn)
Als twee evenwijdige rechten gesneden worden door een derde rechte dan zijn:

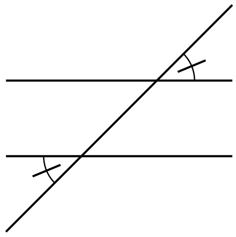
- *elke twee overeenkomstige hoeken gelijk*



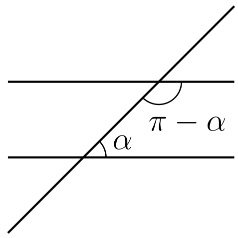
- *elke twee verwisselende binnenhoeken gelijk*



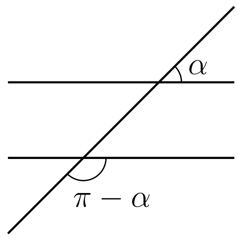
- *elke twee verwisselende buitenhoeken gelijk*



- *elke twee binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn supplementair*



- *elke twee buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn supplementair*



3.3 Oefeningen

7 Oefening
Bepaal $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ en $\cot\alpha$ en het kwadrant waarin α ligt (zonder gebruik te maken van een rekenmachine) indien

(a) $\cos\alpha = \sqrt{6}/6$ en $\sin\alpha < 0$

(b) $\tan\alpha = -3/4$ en $\sin\alpha > 0$

8 Oefening
Duid op een tekening de vectoren $\vec{a} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ en $\vec{b} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$ aan. Duid ook de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a}$ en $-\vec{b}$ aan.

9 Oefening
Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \vec{e_x} + 2\vec{e_y}$, $\vec{b} = -2\vec{e_x} + 3\vec{e_y}$ en $\vec{c} = \vec{e_x} - \vec{e_y}$. Teken deze vectoren. Bereken en construeer de vectoren $\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ en $\vec{t} = -\vec{a} + \dfrac{1}{2}(\vec{b} - 2\vec{c})$.

10 Oefening
Bereken de norm van de vector $\vec{a} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y$ en bereken de afstand tussen de vectoren $\vec{a} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y$ en $\vec{b} = -\vec{e}_x + \vec{e}_y$.

11 Oefening
Bereken de hoek tussen de vectoren

(a) $\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$ en $2\vec{e}_x - 6\vec{e}_y$

(b) $4\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$

(c) $2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ en $6\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$

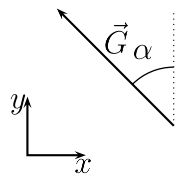
12 Oefening
Een vector $\vec{a}$ met lengte 10 maakt een hoek van 225° met de x-as. Bereken de vectorcomponenten volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$.

13 Oefening
Wat is de grootte van de vector $\vec{c} = \vec{e}_x - 3\vec{e}_y$ en welke hoek maakt deze vector met de x-as?

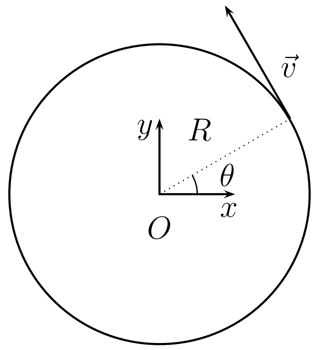
14 Oefening
Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = 3\vec{e_x} + 2\vec{e_y}$ en $\vec{b} = 4\vec{e_x} - 3\vec{e_y}$. (a) Bereken de grootte van beide vectoren. Bereken hun (b) scalair product en (c) de hoek tussen beide.

15 Oefening
Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \vec{e_x} - \vec{e_y} + \vec{e_z}$ en $\vec{b} = 3\vec{e_x} + 3\vec{e_y} - 2\vec{e_z}$. Bereken de hoek tussen de vectoren $\vec{a} - \vec{b}$ en $\vec{a} + \vec{b}$.

16 Oefening
Ontbind de vector $\vec{G}$ uit nevenstaande figuur in zijn componenten volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. Schrijf het resultaat als functie van $G = \|\vec{G}\|$ en de hoek α.



17 Oefening
De vector $\vec{v}$ raakt aan de cirkel met middelpunt O en straal R. Ontbind deze vector in zijn componenten volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. Schrijf het resultaat als functie van $v = \|\vec{v}\|$ en de hoek θ.



3.4 Oplossingen

7 (a) $\cos\alpha = \sqrt{6}/6$; $\sin\alpha = -\sqrt{30}/6$; $\tan\alpha = \sqrt{5}$; $\cot\alpha = \sqrt{5}/5$; vierde kwadrant

(b) $\cos\alpha = -4/5$; $\sin\alpha = 3/5$; $\tan\alpha = -3/4$; $\cot\alpha = -4/3$; tweede kwadrant

8 $\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{e}_x$; $2\vec{a} = 4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$; $-\vec{b} = -\vec{e}_x + \vec{e}_y$.

9 $\vec{s} = 5\vec{e}_x$; $\vec{t} = -3\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y$.

10 $\sqrt{10}$; $\sqrt{8}$

11 (a) 143°; (b) 90°; (c) 0°.

12 $\vec{a}_x = -7\vec{e}_x$, $\vec{a}_y = -7\vec{e}_y$.

13 $c = \sqrt{10}$, $\theta = -72°$ of $\theta = 288°$.

14 (a) $a = \sqrt{13}$; $b = 5$; (b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$; (c) $\phi = 70,5°$.

15 $\phi = 140°$

16 $\vec{G} = -G\sin\alpha\ \vec{e}_x + G\cos\alpha\ \vec{e}_y$

17 $\vec{v} = -v\sin\theta\ \vec{e}_x + v\cos\theta\ \vec{e}_y$

Bibliografie

[1] Georges Van der Perre, Luc Labey, *Toegepaste Mechanica 1, cursustekst K.U.Leuven*, 2006.

[2] R. Silverans, *Algemene natuurkunde, cursustekst K.U.Leuven*, 2007.

[3] Formularium usolvit, *www.usolvit.be/usolvit/formularium*, versie 24/01/2008.

[4] Remediëringspakket K.U.Leuven Faculteit wetenschappen, *Goniometrie*, 2007.

[5] Remediëringspakket K.U.Leuven Faculteit wetenschappen, *Vectoren in* $\mathbb{R}^2$ *en vlakke meetkunde*, 2007.

[6] *Prisma, Vademecum van de wiskunde*, Uitgeverij Het Spectrum B.V., 15de druk, 1998

Hoofdstuk 4

De afgeleide functie: Rekenregels en Toepassingen

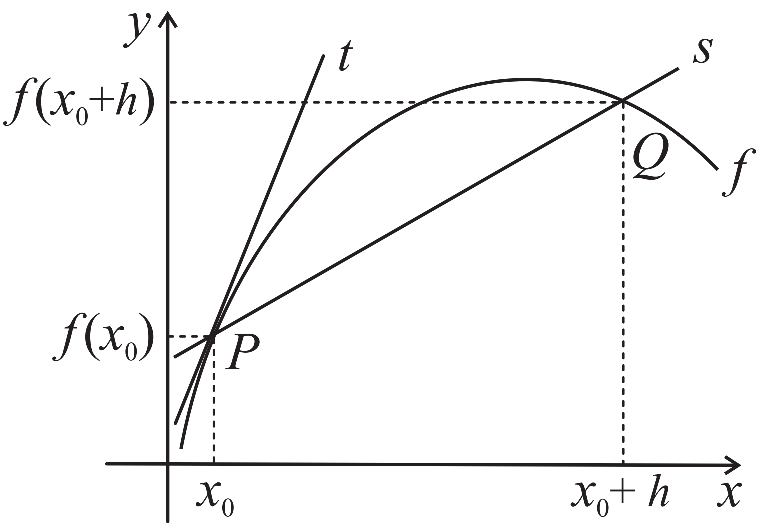
Inleiding

De afgeleide van een functie f in een punt $a \in \mathbb{R}$ geeft aan hoe de functiewaarde $f(x)$ verandert in de buurt van a. Het teken van de afgeleide in een punt a geeft aan of de functie stijgend of dalend is in de omgeving van a. De functie die met een reëel getal x de afgeleide van een functie f in het punt x associeert, heet de afgeleide functie (of kortweg de afgeleide) van f. Deze functie wordt meestal genoteerd met f' of $\frac{df}{dx}$. Het bepalen van de afgeleide van een functie heet differentiëren of afleiden. Het concept van afgeleide van een functie werd in de 17^{e} eeuw vrijwel tegelijkertijd uitgevonden door *Isaac Newton* en *Gottfried Leibniz*.
In deze module wordt de (grafische) betekenis van afgeleide samen met de definitie kort herhaald. De nadruk ligt op de standaardafgeleiden en de rekenregels. Deze worden herhaald (zonder bewijs) en verwerkt in een aantal voorbeeldoefeningen en toepassingen. Daarnaast is er een uitgebreid gamma aan oefeningen.

4.1 Definitie — Betekenis van de afgeleide

Een rechte heeft de eigenschap dat de helling in elk punt dezelfde is. Maar bij de meeste grafieken van functies is de helling van punt tot punt verschillend. De afgeleide van een functie is een maat voor die *lokale helling* van de grafiek in elk punt en levert bijgevolg informatie over het verloop van de functie. Beschouw de functie f waarvan de grafiek getekend is in Figuur 4.1 en s de rechte (koorde) door de punten P en Q op de grafiek van f. De richtingscoëfficiënt van de rechte s is gegeven door het *differentiequotiënt*[1]

$$\operatorname{rc}(s) \;=\; \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} \;=\; \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{4.1}$$



Figuur 4.1: Raaklijn als limietstand van koorden — Afgeleide als limiet van differentiequotiënten

De raaklijn t aan de grafiek van f in het punt $P(a, f(a))$ is de limietstand van de koorde s voor $Q \to P$ of nog voor $h \to 0$. De richtingscoëfficiënt van t is bijgevolg ook de limiet voor $h \to 0$ van het differentiequotiënt (4.1):

$$\operatorname{rc}(t) \;=\; \lim_{h\to 0} \operatorname{rc}(s) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

De richtingscoëfficiënt van t bepaalt precies de lokale helling van de grafiek van f in het punt $P(a, f(a))$ en wordt daarom als definitie genomen van de afgeleide $f'(a)$ van de functie f in het punt a:

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

We komen op deze manier tot onderstaande definitie van afleidbaarheid van een functie en afgeleide van een functie.

[1]De toename h (tussen de x-coördinaat van P en die van Q) wordt soms ook genoteerd als Δx en heet de differentie van x. De bijhorende toename van f nl. $f(a+h)-f(a)$ noteert men dan als $\Delta f(a)$ en heet de differentie van f. Het quotiënt $\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$ wordt dan het differentiequotiënt of Newtonquotiënt genoemd.

4.1.1 Definitie (Afleidbaarheid en afgeleide van een functie)
Zij f een functie en $a \in \mathbb{R}$. Indien de limiet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

bestaat en eindig is, heet f *afleidbaar* of *differentieerbaar* in het punt $a \in \mathbb{R}$. De waarde van deze limiet wordt dan de *afgeleide* van f in a genoemd en wordt genoteerd met

$$f'(a) \qquad \text{of} \qquad \frac{df}{dx}(a).$$

Dus

$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df}{dx}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

De functie die x afbeeldt op $f'(x)$ noemt men dan de *afgeleide functie* (of kortweg de *afgeleide*) van f. Ze wordt genoteerd met

$$f' \qquad \text{of} \qquad \frac{df}{dx}.$$

4.1.2 Opmerkingen

(a) Een andere veel gebruikte definitie voor afgeleide vind je door substitutie van $a + h$ voor x zodat $h = x - a$. We bekomen dan als alternatieve en volledig gelijkwaardige definitie

$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

(b) De tweede afgeleide van een functie f is de afgeleide functie van de afgeleide functie, ze wordt genoteerd met f'' of $\dfrac{d^2 f}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right)$.

4.2 Standaardafgeleiden en rekenregels

Hieronder zien we twee tabellen met de afgeleiden van enkele belangrijke functies. In de linkerkolom vinden we telkens het functievoorschrift van de oorspronkelijke functie, rechts dat van de afgeleide functie. In de functievoorschriften stellen $a > 0$, c en n

reëele constanten voor, $e \approx 2,7182818$ is de constante van *Euler*.

$f(x)$	$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$ $= -1 - \cot^2 x$
$\operatorname{Bgsin} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Bgcos} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{Bgtan} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

4.2.1 Rekenregels

Zij f en g twee functies die beide afleidbaar zijn in $x \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

1. Afgeleide van een veelvoud van een functie

Voor elke $c \in \mathbb{R}$ is de functie cf afleidbaar in x, met afgeleide

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

2. Afgeleide van som en verschil van functies

De som $f+g$ en het verschil $f-g$ zijn beide afleidbaar in x, met als afgeleiden

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x).$$

3. Afgeleide van een product van functies

Het product fg is afleidbaar in x, met als afgeleide

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

4. Afgeleide van het omgekeerde van een functie

Indien $g(x) \neq 0$, dan is $1/g$ afleidbaar in x, met als afgeleide

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

5. Afgeleide van een quotiënt van functies
Indien $g(x) \neq 0$, dan is het quotiënt f/g afleidbaar in x, met als afgeleide

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

6. Afgeleide van een samengestelde functie: kettingregel
De samengestelde functie $g \circ f$ is afleidbaar in x, met als afgeleide

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

In woorden: *de afgeleide van $g \circ f$ in $x \in \mathbb{R}$ vind je door de laatst toegepaste functie g af te leiden en te evalueren in $f(x)$ en vervolgens te vermenigvuldigen met de afgeleide van f in x.*

7. Afgeleide van de inverse van een functie
Indien $f'(x) \neq 0$, dan is de inverse functie f^{-1} afleidbaar in $y = f(x)$, met als afgeleide

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}.$$

4.3 Voorbeeldoefeningen

In deze paragraaf worden enkele voorbeelden uitgebreid uitgewerkt om te illustreren hoe bovenstaande rekenregels en standaardafgeleiden toegepast worden.

(a) Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = x$. Het gaat hier om een standaardafgeleide, nl. van de functie $f(x) = x^n$ met $n = 1$. We bekomen

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \overset{n=1}{=} 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Dus de afgeleide van de functie $f(x) = x$ is de functie $f'(x) = 1$. Men noteert dit ook als $\frac{d}{dx}[x] = 1$.

(b) Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = \sqrt{x}$. Het gaat hier om een standaardafgeleide, nl. van de functie $f(x) = x^n$ met $n = 1/2$. We bekomen dus

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \overset{n=1/2}{=} \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Dus de afgeleide van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ is de functie $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Men noteert dit ook als $\frac{d}{dx}[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(c) Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = x^4 \ln x$. Omdat het hier om een product van twee functies gaat, moeten we gebruik maken van de *productregel*. We bekomen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}[f(x)] \\ &= \frac{d}{dx}\left[x^4 \ln x\right] \\ &= \ln x \cdot \frac{d}{dx}\left[x^4\right] + x^4 \cdot \frac{d}{dx}[\ln x] \\ &= \ln x \cdot 4x^3 + x^4 \cdot \frac{1}{x} \\ &= x^3 (4 \ln x + 1). \end{aligned}$$

(d) Bereken de afgeleide van de functie

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sin x}.$$

Omdat het hier om een quotiënt van twee functies gaat, moeten we gebruik maken van de *quotiëntregel*. We bekomen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}[f(x)] \\ &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln x}{\sin x}\right] \\ &= \frac{\sin x \cdot \frac{d}{dx}[\ln x] - \ln x \cdot \frac{d}{dx}[\sin x]}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\frac{\sin x}{x} - \ln x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{x \sin x} - \frac{\ln x \cos x}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Soms kunnen we een quotiënt van functies ook afleiden zonder de quotiëntregel te gebruiken, zoals blijkt uit volgend voorbeeld.

(e) We berekenen de afgeleide van de functie $f(x) = \dfrac{-2}{5x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\,[f(x)] \\ &= \frac{d}{dx}\left[\frac{-2}{5x}\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left[-\frac{2}{5}\,x^{-1}\right] \\ &= -\frac{2}{5}\,\frac{d}{dx}\left[x^{-1}\right] \\ &= -\frac{2}{5}\,(-1)\,x^{-2} \\ &= \frac{2}{5x^2}. \end{aligned}$$

(f) Bereken de afgeleide van de functie

$$f(x) = \sqrt[3]{\left(x^2+3\right)^4}.$$

Om het berekenen van de afgeleide te vereenvoudigen, kunnen we het functievoorschrift van f best herschrijven tot

$$f(x) = \left(x^2+3\right)^{4/3}.$$

De functie f is een samenstelling van twee andere functies. D.w.z. dat $f(x)$ te schrijven is als $f(x) = h(g(x))$ met $g(x) = x^2+3$ en $h(x) = x^{4/3}$. De afgeleiden van g en h zijn gegeven door respectievelijk $g'(x) = 2x$ en $h'(x) = (4/3)\,x^{1/3}$. Met behulp van de *kettingregel* voor het afleiden van samengestelde functies bekomen we dan voor f',

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\,[f(x)] \\ &= \frac{d}{dx}\,[h\,(g(x))] \\ &= h'\,(g(x)) \cdot \frac{d}{dx}\,[g(x)] \\ &= \frac{4}{3}(x^2+3)^{1/3} \cdot \frac{d}{dx}\left[x^2+3\right] \\ &= \frac{4}{3}(x^2+3)^{1/3} \cdot 2x \\ &= \frac{8x\sqrt[3]{x^2+3}}{3}. \end{aligned}$$

Bij het afleiden van een samengestelde functie hoeft men natuurlijk niet steeds de samenstellende functies expliciet te benoemen en af te leiden, men mag rechtstreeks de afgeleide van de samengestelde functie neerschrijven zoals in het voorbeeld hieronder.

(g) Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = 5^{x^2}$. Het gaat hier opnieuw om een samengestelde functie. De afgeleide vinden we dus met behulp van de *kettingregel*:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[f(x)\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left[5^{x^2}\right] \\ &= 5^{x^2}\ln 5 \cdot \frac{d}{dx}\left[x^2\right] \\ &= 5^{x^2}\ln 5 \cdot 2x \\ &= (2\ln 5)\, x\, 5^{x^2}. \end{aligned}$$

(h) Bereken de afgeleide van de functie

$$f(x) = \left(\frac{x}{1+2x}\right)^4.$$

Gebruikmakend van de *kettingregel* en de *quotiëntregel* bekomen we

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] && = 4\left(\frac{x}{1+2x}\right)^3 \frac{(1+2x)\cdot\frac{d}{dx}[x] - x\cdot\frac{d}{dx}[1+2x]}{(1+2x)^2} \\ &= \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{x}{1+2x}\right)^4\right] && = 4\left(\frac{x}{1+2x}\right)^3 \frac{(1+2x)\cdot 1 - x\cdot 2}{(1+2x)^2} \\ &= 4\left(\frac{x}{1+2x}\right)^3 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+2x}\right) && = \frac{4x^3}{(1+2x)^5}. \end{aligned}$$

(i) Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie f in termen van de afgeleide van de functie g als f bepaald wordt door het functievoorschrift

$$f(x) = \ln g(x).$$

We vinden

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\ln g(x)\right] = \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left[g(x)\right] = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

4.4 Toepassingen

4.4.1 Belang van afgeleiden in het bepalen van het verloop van functies

Als de afgeleide strikt positief is in een bepaald punt, zal de functie stijgen in de omgeving van dat punt. Als de afgeleide strikt negatief is in een bepaald punt, zal de functie dalen in de omgeving van dat punt. Als $f'(a) = 0$ voor een zekere $a \in \mathbb{R}$ zal

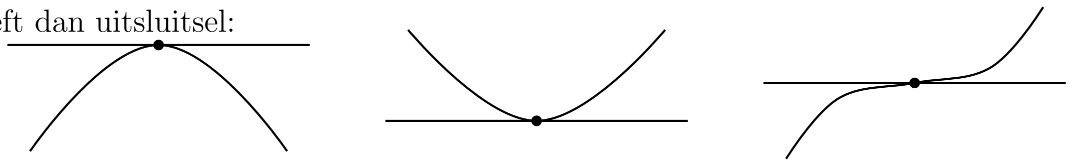
de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ horizontaal zijn. We vermelden nog dat wanneer een afleidbare functie f een lokaal maximum of een lokaal minimum bereikt in een punt $a \in \mathbb{R}$, de afgeleide $f'(a)$ in dat punt steeds nul zal zijn. Men kan dus verwachten dat bij het bepalen van het verloop van een functie afgeleiden een belangrijke rol spelen.
Een maximum of een minimum noemen we ook een *extremum.* Bij het zoeken naar de extrema van een functie f speelt de afgeleide f' een belangrijke rol.

4.4.1 Eigenschap
Stel f is continu op $[a, b]$ en afleidbaar op $]a, b[$. Dan geldt:

- *Als $f'(x) > 0$ voor elke $x \in]a, b[$, dan is f strikt stijgend in $[a, b]$*
- *Als $f'(x) < 0$ voor elke $x \in]a, b[$, dan is f strikt dalend in $[a, b]$*

Als in een punt c geldt dat $f'(c) = 0$ dan is de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(c, f(c))$ horizontaal. Het punt c wordt dan een *kritiek punt* van f genoemd.

De eerste afgeleide f' geeft ons dus heel wat informatie over het verloop van f.
Onder de punten van het interval $]a, b[$ waar de functie f een afgeleide heeft zijn de kritieke punten de enige kandidaat-extrema. Maar niet alle kritieke punten zijn relatieve minima of maxima, het kunnen ook buigpunten zijn. Het teken van de tweede afgeleide geeft dan uitsluitsel:



$f'(c) = 0$	$f'(c) = 0$	$f'(c) = 0$
$f''(c) < 0$	$f''(c) > 0$	$f''(c) = 0$
maximum	minimum	buigpunt

We moeten dus meer informatie hebben over deze kritieke punten.

4.4.2 Toepassingen uit de fysica

De harmonische oscillator

In de cursus fysica (Walker p 421-423) zullen we zien dat wanneer een massa aan een veer een trillende beweging uitvoert (in het verlengde van de veer), de uitwijking x van de massa t.o.v. haar rusttoestand, in functie van de tijd t, beschreven wordt door

$$x(t) = A \cos \omega t.$$

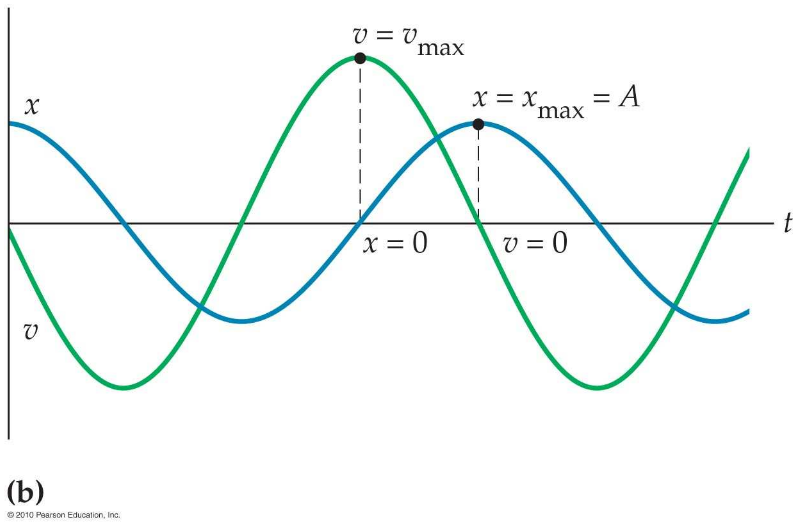
$f'(c)$	$f''(c)$	Verloop van de functie in de omgeving van c
$+$		stijgend
$-$		dalend
0	$-$	maximum
0	$+$	minimum
$+$	0	stijgend en buigpunt
$-$	0	dalend en buigpunt
0	0	horizontale raaklijn, geen verdere info

Tabel 4.1: Verloop van een functie in de omgeving van een punt.

Hierin zijn de amplitude $A > 0$ en de hoeksnelheid $\omega > 0$ reële constanten. De snelheid v waarmee de massa trilt (in functie van de tijd) kunnen we bepalen door de uitwijking x af te leiden naar de tijd t. Met de *kettingregel* vinden we

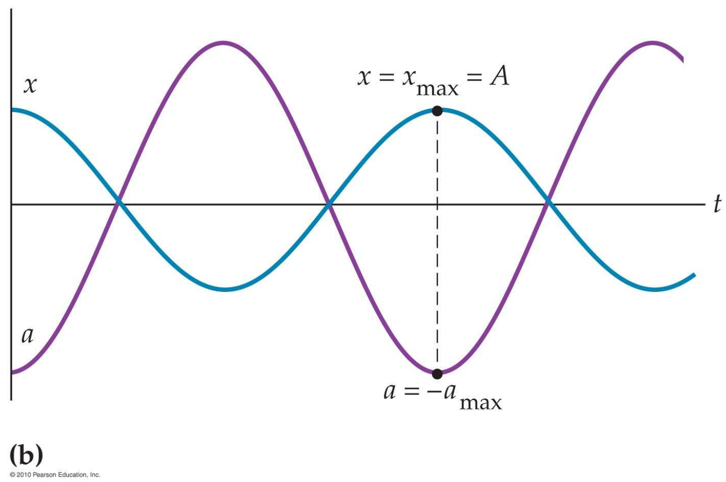
$$\begin{aligned} v(t) = \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(A\cos\omega t\right) \\ &= A(-\sin\omega t)\frac{d}{dt}(\omega t) \\ &= -\,\omega A\sin\omega t. \end{aligned}$$

In Figuur 4.2 worden de positie x en de snelheid v uitgezet als functie van de tijd. Merk op dat de snelheid nul is op momenten dat de uitwijking maximaal is. Inderdaad, als $x = A$ of $x = -A$ is het object aan het keerpunt van de oscillatie en staat het momentaan even stil. Omgekeerd, is de snelheid maximaal als de verplaatsing uit de evenwichtspositie nul is (bv. een massa aan een oscillerende veer heeft de grootste snelheid wanneer ze door de evenwichtspositie gaat).
Op analoge manier wordt de versnelling a (zie Figuur 4.3) van de massa in functie van de tijd gevonden door de snelheid v op haar beurt af te leiden naar de tijd:



Figuur 4.2: Positie x en snelheid v als functie van de tijd t voor een harmonische oscillatie (Pearson, James S. Walker).

$$
\begin{aligned}
a(t) = \frac{dv(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(-\omega A \sin \omega t\right) \\
&= -\omega^2 A \cos \omega t.
\end{aligned}
$$



Figuur 4.3: Positie x en versnelling a als functie van de tijd t voor een harmonische oscillatie (Pearson, James S. Walker).

Snelheid als afgeleide van de verplaatsing naar de tijd

Wanneer een massa een éénparig versnelde rechtlijnige beweging uitvoert (bijvoorbeeld een auto die versnelt van 0 naar 50 km/u) hangt zijn positie als volgt af van de tijd :

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Hierbij zijn de constanten x_0 en v_0 respectievelijk de beginpositie en de beginsnelheid, a is de constante versnelling. Deze $x(t)$-functie is een kwadratische functie, deze heeft als grafiek een parabool (zie Figuur 4.4). Hoe de snelheid van de auto verandert in de tijd kunnen we bepalen door de afgeleide te nemen van de verplaatsing (positie) naar de tijd.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

Dit is een lineaire functie met als grafiek een rechte (zie Figuur 4.4). De versnelling van de auto is de verandering van de snelheid per tijdseenheid of de afgeleide van de snelheid naar de tijd:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = a$$

Deze versnelling blijft constant in de tijd voor een éénparig versnelde rechtlijnige beweging. De grafiek hiervan is dan ook een horizontale rechte.

4.4.3 Optimalisatieproblemen

We zagen al dat maxima en minima van een functie kunnen optreden wanneer de afgeleide van deze functie nul is. Dit kan gebruikt worden in optimalisatieproblemen (ook minimum-maximum-problemen genoemd). Bekijk bijvoorbeeld volgende situatie. We willen een cilindervormig blik maken met een inhoud van 1 liter, maar met een zo klein mogelijk randoppervlak (omdat dit dan het minste materiaal vereist). Hoe moeten we dan de afmetingen van dit blik kiezen? Die afmetingen zijn de hoogte h van de cilinder, en de straal r van het grond- en bovenvlak van de cilinder.
De totale oppervlakte van het blik bestaat uit drie delen: het grondvlak is een cirkel met straal r, dus heeft als oppervlakte πr^2. Het bovenvlak uiteraard ook. Tot slot is er de mantel, die kan worden gezien als een rechthoek met afmetingen h en $2\pi r$. De totale oppervlakte van het blik wordt dus:

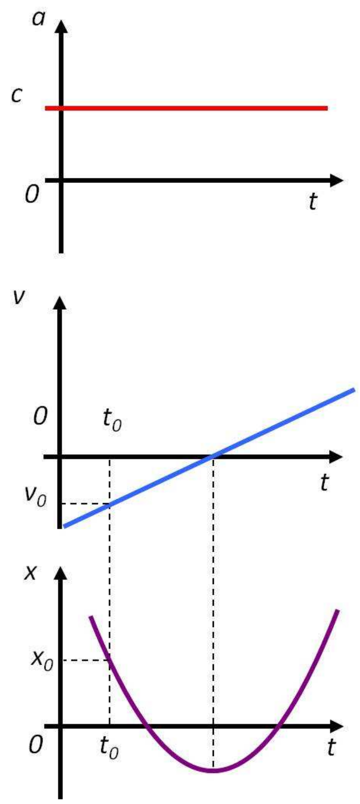
$$\text{opp} = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Daarnaast weten we dat de inhoud 1 liter is, de inhoud van een cilinder wordt gegeven door $\pi r^2 h$. Hieruit halen we dat

$$h = \frac{1}{\pi r^2}.$$

Dat laat toe om de oppervlakte A (dit is de grootheid waarvan we een minimum zoeken) te schrijven als een functie van één variabele:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}.$$



Figuur 4.4: Versnelling a, snelheid v en positie x als functie van de tijd t voor een éénparig versnelde rechtlijnige beweging.

We zijn op zoek naar een minimum, dus we berekenen de eerste afgeleide, en stellen deze gelijk aan nul:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = 0 \iff 4\pi r = \frac{2}{r^2} \iff r^3 = \frac{1}{2\pi} \iff r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \approx 0.5419.$$

De hoogte kennen we dan uiteraard ook, want we hebben nu dat

$$h = \frac{1}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 1.0839.$$

Tot slot kunnen we nagaan dat dit nulpunt van de afgeleide wel degelijk overeenkomt met een minimum, door de tweede afgeleide te berekenen:

$$A\text{"}(r) = 4\pi + \frac{4}{r^3} = 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0$$

zodat Tabel 4.1 ons leert dat we hier inderdaad een minimum gevonden hebben.

4.5 Oefeningen

18 Oefening
Bereken de afgeleide van volgende functies

(a) $f(t) = (1+t)\ln t$

(b) $f(t) = t^2 \cos t$

(c) $f(t) = \dfrac{-1}{t^2}$

(d) $f(t) = \dfrac{3t-1}{2t+2}$

(e) $f(x) = \sin(4x+5)$

(f) $f(t) = \ln(7t^2)$

(g) $f(x) = \dfrac{4x^3+1}{3x}$

(h) $f(x) = \tan \dfrac{1}{x}$

(i) $f(x) = \cos(-8x^2 - 1)$

(j) $f(x) = \sin^3 3x$

(k) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 8}$

(l) $f(t) = \ln t \, \sin(t^2)$

(m) $f(t) = \ln(1 - t^2)$.

19 Oefening
Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bepaal dan de afgeleide van onderstaande functies

(a) $s(t) = a + b\sin(bt - c)$

(b) $s(\theta) = ab\theta + c\theta^2$.

20 Oefening
Bereken de tweede afgeleide van elk van volgende functies.

(a) $f(x) = \ln x^2$

(b) $f(\theta) = \theta \cos \theta$

(c) $f(t) = \sin t^4$

21 Oefening

Bepaal $\dfrac{dr}{d\theta}$ als de functie r gegeven wordt door

(a) $r(\theta) = 2\,\theta^{1/2} + \dfrac{3}{2}\,\theta^{2/3} + \dfrac{4}{3}\,\theta^{3/4}$

(b) $r(\theta) = \dfrac{4}{1 + 2\cos\theta}$

(c) $r(\theta) = \sqrt{1 - 2\theta}$

(d) $r(\theta) = \dfrac{a}{\theta}$ met $a > 0$.

22 Oefening

Kies het juiste antwoordalternatief. De afgeleide van $f(x) = (1 + 2x)^5$ naar x is:

- ○ $10(1 + 2x)^5$
- ○ $2(1 + 2x)^4$
- ○ $10(1 + 2x)^4$
- ○ $5(1 + 2x)^4$

23 Oefening

Stel $\theta = \omega t$ en $\omega, a \in \mathbb{R}$. Bereken de afgeleide van x naar t als

(a) $x = a(1 - \cos\theta)$

(b) $x = a\sin^2\theta$

4.6 Oplossingen

18 (a) $\ln t + \frac{1}{t} + 1$

(b) $2t \cos t - t^2 \sin t$

(c) $2t^{-3}$

(d) $2(t+1)^{-2}$

(e) $4\cos(4x+5)$

(f) $\frac{2}{t}$

(g) $\frac{8x^3-1}{3x^2}$

(h) $-(x\cos(x^{-1}))^{-2}$

(i) $16x\sin(-8x^2-1)$

(j) $9\sin^2(3x)\cos(3x)$

(k) $\frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+8}}$

(l) $\frac{\sin t^2}{t} + 2t\ln t \;\cos t^2$

(m) $\frac{-2t}{1-t^2}$

19 (a) $b^2\cos(bt-c)$

(b) $ab + 2c\theta$

20 (a) $-2x^{-2}$

(b) $-2\sin\theta - \theta\cos\theta$

(c) $-16t^6\sin t^4 + 12t^2\cos t^4$

21 (a) $\theta^{-1/2} + \theta^{-1/3} + \theta^{-1/4}$

(b) $\frac{8\sin\theta}{(1+2\cos\theta)^2}$

(c) $\frac{-1}{\sqrt{1-2\theta}}$

(d) $\frac{-a}{\theta^2}$

Hoofdstuk 5

Exponentiële en logaritmische functies

5.1 Machten met reële exponenten: rekenregels

In het functievoorschrift van exponentiële groei

$$f(x) = b \cdot a^x$$

kan x zowel rationale als irrationale waarden aannemen.

Ter herinnering: als $a > 0$ dan

$$\begin{aligned} a^n &= a \cdot a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ keer}) && \text{met } n \text{ een natuurlijk getal.} \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} && \text{met } n \text{ een natuurlijk getal.} \\ a^{n/m} &= \sqrt[m]{a^n} && \text{met } n \text{ en } m \neq 0 \text{ natuurlijke getallen.} \end{aligned}$$

Stel a, b **strikt positieve** reële getallen met $a, b \neq 1$ en r, s willekeurige reële getallen. Dan gelden volgende rekenregels:

$a^0 = 1$
$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$
$a^r a^s = a^{r+s}$
$\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
$(ab)^s = a^s b^s$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^s = \dfrac{a^s}{b^s}$
$(a^r)^s = a^{rs}$

5.1.1 Opmerking

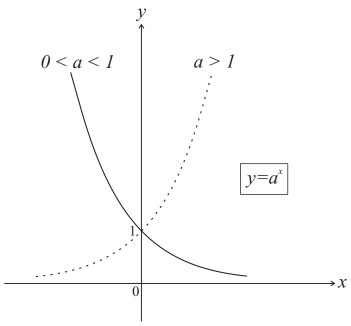
We hebben hierboven de exponentiële functie enkel nog maar ingevoerd voor rationale exponenten. Dit kan echter ook voor irrationale elementen, een uitdrukking als $5^{\sqrt{2}}$ bestaat dus wel degelijk, en deze uitdrukkingen voldoen aan dezelfde rekenregels die hierboven in de tabel staan.

5.2 Exponentiële functie

5.2.1 Definitie
Zij a een strikt positief reëel getal en $a \neq 1$, dan definiëren we de **exponentiële functie** $\exp_a$ met *grondtal* a door het functievoorschrift:

$$\exp_a(x) = a^x \qquad \text{met } x \in \mathbb{R}.$$

We onderscheiden twee grote klassen van grafieken naargelang het grondtal $a > 1$ of $0 < a < 1$.



Figuur 5.1: Exponentiële functie met grondtal $a > 1$, en $0 < a < 1$.

5.2.2 Eigenschappen

Geval 1: $a > 1$

- *$exp_a x$ is gedefinieerd als* $x \in \mathbb{R}$
- *voor elke* $x \in \mathbb{R} : a^x > 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$
- *exp_a is strikt stijgend,*
  de functie is orde bewarend.
  $x < z \Longleftrightarrow a^x < a^z$
- $a^x = a^z \Longleftrightarrow x = z$

Geval 2: $0 < a < 1$

- *$exp_a x$ is gedefinieerd als* $x \in \mathbb{R}$
- *voor elke* $x \in \mathbb{R} : a^x > 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
- *exp_a is strikt dalend,*
  de functie is orde-omkerend
  $x > z \Longleftrightarrow a^x < a^z$
- $a^x = a^z \Longleftrightarrow x = z$

Kiezen we voor het grondtal de specifieke waarde $e = 2,7182818\cdots$, dan verkrijgen we de functie e^x met als voorschrift:

$$f(x) = e^x = \exp x.$$

In de notatie wordt het grondtal e niet vermeld. Deze functie wordt in vele tekstboeken als **DE *exponentiële functie*** gedefinieerd.

We vermelden, zonder in detail te gaan, dat de afgeleide van *een exponentiële functie* $\exp_a$ evenredig is met deze functie zelf en dat de afgeleide van *de exponentiële functie exp* de exponentiële functie *exp* zelf is.

5.2.3 Opdrachten

Bedenk hoe de grafieken van volgende functies eruit zien en trek de gepaste conclusies voor hun limieten. Zij $k > 0$, dan is

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} =$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-kx} =$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-kx} =$

5.2.4 Opmerking

We zullen later aantonen dat elke exponentiële functie met grondtal a kan geschreven worden met behulp van de exponentiële functie in die zin dat er steeds een gepaste $k > 0$ bestaat zodat

$$a^x = e^{\pm kx},$$

maar daartoe hebben we logaritmische functies nodig.
Dit verklaart dat we exponentiële functies met willekeurig grondtal kunnen herleiden tot een exponentiële functie met grondtal e. Daarenboven heeft de functie met voorschrift $f(x) = e^x$ de eigenschap dat ze gelijk is aan haar afgeleide. Wat wiskundig gezien een niet te versmaden eigenschap is.

5.3 Logaritmische functie

5.3.1 Inleidend voorbeeld

Een bacteriekolonie wordt gekweekt in een kweekschaaltje. Bij aanvang ($t = 0$) zijn er 4000 bacteriën. Elk uur verdubbelt dit aantal. Het voorschrift voor het aantal bacteriën (N) na t uur, wordt dan

$$N(t) = 4000 \cdot 2^t.$$

Na hoeveel uur zullen er honderdduizend bacteriën in het schaaltje aanwezig zijn?
We zoeken met andere woorden de tijd t, waarvoor

$$N(t) = 4000 \cdot 2^t = 100.000 \qquad \Rightarrow \qquad 2^t = \frac{100.000}{4000} = 25.$$

Dus tot welke macht moeten we het grondtal 2 verheffen om 25 uit te komen? Dit getal noemen we de logaritme van 25 met grondtal 2 en noteren dit als:

$$\log_2 25.$$

We stellen vast dat

$$\log_2 25 = x \Leftrightarrow 2^x = 25$$

Later, bij de rekenregels van logaritme, zullen we leren hoe $\log_2 25$ met een rekenmachine kan berekend worden.

Een eenvoudiger voorbeeld krijg je als je zoekt naar

$$\log_2 32 = ?$$

Stel dat $\log_2 32 = x$ dan moet $2^x = 32 = 2^5$ zodat we uit eigenschap 5.2.2 kunnen besluiten dat $x = 5$ of nog

$$\log_2 32 = 5.$$

5.3.2 Definitie en eigenschappen

Omdat $a^x > 0$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ is het duidelijk dat men enkel logaritmes kan berekenen van strikt positieve getallen.
We komen tot volgende definitie

5.3.1 Definitie (logaritme)
Zij $a > 0$ en $a \neq 1$ en $x > 0$ dan definieert men

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y \ .$$

De logaritme met grondtal a van x **is de exponent (macht) waartoe men** a **moet verheffen om** x **als uitkomst te krijgen.**

Opmerking: De notatie $\log_a(x)$ heeft dezelfde betekenis als ${}^a\log(x)$. Deze laatste notatie wordt vaak in het secundair onderwijs gebruikt. Internationaal wordt de eerste notatie gebruikt.

De functie $\log_a$ is de inverse functie van $\exp_a$, d.w.z. het zijn functies die elkaars werking opheffen.

5.3.2 Opdrachten

(a) $\log_a(\exp_a(x)) = \log_a a^x =?$
in woorden: *tot welke exponent moet je a verheffen om a^x te bekomen?*

(b) $\exp_a(\log_a(y)) = a^{\log_a y} =?$
in woorden: *als je a verheft tot die exponent waartoe je a moet verheffen om y te bekomen, dan bekom je ....*

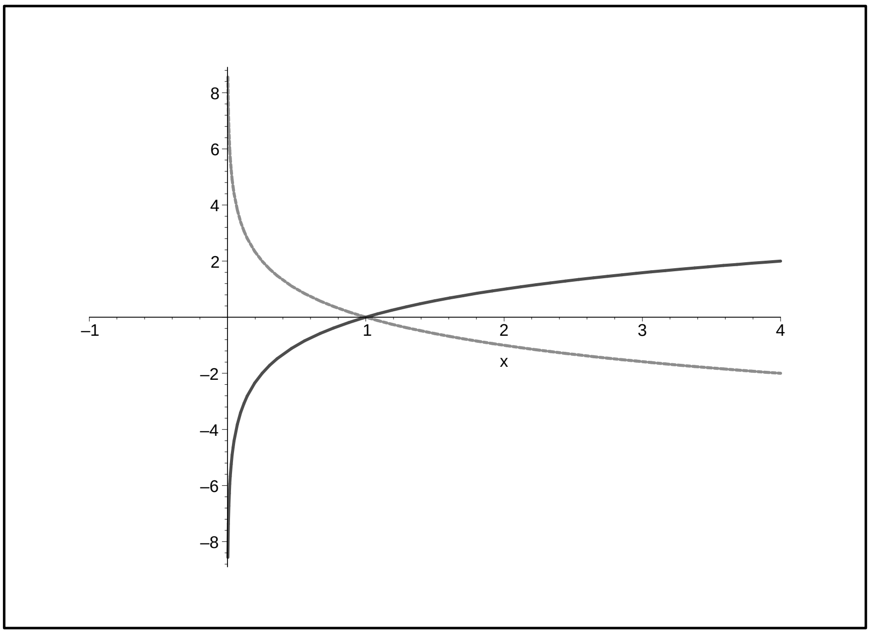
We komen tot volgende handige identiteiten.

5.3.3 Eigenschappen
Zij x, y reëele getallen en $y > 0$ dan geldt

(a) $\log_a a^x = x$

(b) $a^{\log_a y} = y$

Dat de logaritmische functies de inverse functie is van de exponentiële heeft als leuk gevolg dat hun grafieken elkaars spiegelbeeld zijn t.o.v. de rechte $y = x$.
Net als bij de exponentiële functie bekomen we twee soorten grafieken naargelang $a > 1$ of $0 < a < 1$.



Figuur 5.2: $f(x) = \log_a x$, donkere lijn: $a > 1$, lichte lijn: $0 < a < 1$.

5.3.4 Eigenschappen

Geval 1: $a > 1$

- $\log_a x$ *is gedefinieerd als* $x > 0$
- *voor elke* $x < 1 : \log_a x < 0$
- *voor elke* $x > 1 : \log_a x > 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = -\infty$
- $\log_a$ *is strikt stijgend,*
  de functie is orde bewarend.
  $x < z \Longleftrightarrow \log_a x < \log_a z$
- $\log_a x = \log_a z \Longleftrightarrow x = z$

Geval 2: $0 < a < 1$

- $\log_a x$ *is gedefinieerd als* $x > 0$
- *voor elke* $x < 1 : \log_a x > 0$
- *voor elke* $x > 1 : \log_a x < 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = +\infty$
- exp_a *is strikt dalend,*
  de functie is orde-omkerend
  $x < z \Longleftrightarrow \log_a x > \log_a z$
- $\log_a x = \log_a z \Longleftrightarrow x = z$

5.3.3 Bijzondere logaritmen $\log_{10} = \mathbf{log}$ en $\log_e = \mathbf{ln}$

Met het tiendelig talstelsel zijn de machten van 10 vrij bijzonder, de logaritme met grondtal 10 kreeg dan ook een aparte naam de *tiendelige* of *Briggse* logaritme.
We noteren $\log_{10} x$ als **log** x, de functiewaarden kan je uitrekenen met je rekenmachine via de toets $\boxed{\text{log}}$.
De logaritme van een getal x geeft de grootte-orde van x aan. Als we 10 als grondtal kiezen is dit duidelijk :

$$\begin{aligned} \log 1 &= 0 \\ \log 10 &= 1 \\ \log 100 &= 2 \\ \log 1000 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log 0,1 &= -1 \\ \log 0,01 &= -2 \\ \log 0,001 &= -3 \end{aligned}$$

De inverse van de exponentiële functie exp krijgt ook een bijzondere naam en notatie. Indien het grondtal het getal e is spreken we van de *natuurlijke* of *Neperiaanse* logaritme, we noteren $\log_e x$ als **ln** x. De Neperiaanse logaritmen kunnen eveneens met de rekenmachine berekend worden via de toets $\boxed{\text{ln}}$.

5.3.4 Rekenregels

Alle rekenregels voor exponenten leiden tot hun equivalent voor logaritmen. We plaatsen ze hier naast elkaar. Het is eenvoudig na te gaan dat elke bewering in de linkerkolom een bewijs is van de regel in de rechterkolom.
Zij a, x, y **strikt positieve** reële getallen met $a \neq 1$ en r, s reële getallen dan geldt

$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$a^1 = a$	$\log_a a = 1$
$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$	$\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x$
$a^r a^s = a^{r+s}$	$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
$\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$	$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
$(a^s)^r = a^{sr}$	$\log_a x^r = r \log_a x$

We kunnen nu de bewering van Opmerking 5.2.4 aantonen:
Gebruiken we de eerste identiteit uit Eigenschap 5.3.3 voor de exponentiële functie

$$x = e^{\ln x}.$$

Vervangen we hierin x door a^x en passen we de laatste rekenregel van de logaritme toe dan bekomen we

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

Hierin is $\ln a$ een positief of negatief getal naargelang $a > 1$ of $a < 1$.
Alle groeifunctie kunnen dus met de exponentële functie worden beschreven omdat :

als $a > 1$	dan is $a^x = e^{kx}$	met $k = \ln a > 0$
als $0 < a < 1$	dan is $a^x = e^{-kx}$	met $k = -\ln a = \ln(1/a) > 0$

Net als we bij exponentiële functies kunnen overgaan naar andere grondtallen geldt dit dan ook voor logaritmische functies.

5.3.5 Overgang naar andere grondtallen

5.3.5 Eigenschappen

$$\begin{aligned}
Voor\ alle\ grondtallen\ a, b\ en\ voor\ alle\ x > 0: \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a}\\
Voor\ alle\ grondtallen\ a, b: \log_a b &= \frac{1}{\log_b a}\\
Voor\ alle\ grondtallen\ a\ en\ voor\ alle\ x > 0: \log_a x &= \frac{\log x}{\log a}\\
Voor\ alle\ grondtallen\ a\ en\ voor\ alle\ x > 0: \log_a x &= \frac{\ln x}{\ln a}
\end{aligned}$$

De laatste twee eigenschappen geven aan hoe je met een rekenmachine een logaritme met willekeurig grondtal a kan berekenen via de $\boxed{\log}$ - of de $\boxed{\ln}$ -toets.

5.3.6 Voorbeeldoefeningen

(a) Bereken met je rekenmachine.

(a) $\log_2 10 = \dfrac{\log 10}{\log 2} = \dfrac{1}{\log 2} \approx 3,32$

(b) $\log_4 3 = \dfrac{\log 3}{\log 4} \approx 0,79$

(b) Reken uit zonder rekenmachine.

(a) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

(b) $\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$

(c) $\log 0,001 = \log 10^{-3} = -3$

(d) $\log_9 \dfrac{1}{81} = \log_9 1 - \log_9 81 = 0 - \log_9 9^2 = -2$

(e) $\log_2 4^{1\,000\,000} = 1\,000\,000 \log_2 4 = 1\,000\,000 \log_2 2^2 = 1\,000\,000 \cdot 2 = 2\,000\,000$

(f) $\log_2 8\sqrt{2} = \log_2 8 + \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^3 + \log_2 2^{\frac{1}{2}} = 3 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$

(g) $$\log_5\left(\frac{25}{\sqrt[3]{5}}\right)^2 = 2\log_5\frac{25}{\sqrt[3]{5}}$$
$$= 2\left(\log_5 25 - \log_5\sqrt[3]{5}\right)$$
$$= 2\left(\log_5 5^2 - \log_5 5^{\frac{1}{3}}\right)$$
$$= 2\left(2 - \frac{1}{3}\right)$$
$$= 2\,\frac{5}{3}$$
$$= \frac{10}{3}$$

(c) Schrijf in functie van $\log a$ en $\log b$.
$\log\sqrt{\frac{a}{b}} = \log\left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\log\frac{a}{b} = \frac{1}{2}\log a - \frac{1}{2}\log b$

(d) Los op naar x.

(a) $\log_3(x-5) + \log_{1/3} 12 = \log_3 x$
Deze vergelijking is enkel geldig als $x > 0$ en $x > 5$.
Dus de bestaansvoorwaarde is $x > 5$.
Proberen we eerst $\log_{1/3} 12$ ook te schrijven als een logaritme met grondtal 3. Dit wordt

$\log_{1/3} 12 = \frac{\log_3 12}{\log_3(1/3)} = \frac{\log_3 12}{\log_3 3^{-1}} = -\log_3 12$. Zo verkrijgen we

$$\begin{aligned}
\log_3(x-5) - \log_3 12 &= \log_3 x \\
\log_3\frac{x-5}{12} &= \log_3 x \\
\frac{x-5}{12} &= x \\
x - 5 &= 12x \\
-11x &= 5 \\
x &= \frac{-5}{11}
\end{aligned}$$

Nu moet $x > 5$, dus moeten we deze negatieve oplossing verwerpen. De oplossingenverzameling is dus leeg.

(b) $2^{3x-5} = 5^x$

Nemen we van beide leden de ln:

$$\begin{aligned}(3x-5)\ln 2 &= x\ln 5\\ x(3\ln 2-\ln 5) &= 5\ln 2\\ x &= \frac{5\ln 2}{3\ln 2-\ln 5}\\ &= \frac{5\ln 2}{\ln\frac{2^3}{5}}\\ &= \frac{5\ln 2}{\ln 8/5}\\ &= 7,37\end{aligned}$$

5.4 Oefeningen op rekenregels

5.4.1 Oefening

Bereken zonder rekenmachine.

(a) $\log_2 64$

(b) $\log_5 125$

(c) $\log_2 \dfrac{1}{32}$

(d) $\log_6(36\sqrt{6})$

(e) $\log 0,00001$

(f) $\log_4\left(\log_4 \sqrt[4]{4}\right)$

5.4.2 Oefening

Bereken met rekenmachine.

(a) $\log_2 7$

(b) $\log_{0,3} 4$

5.4.3 Oefening

Schrijf in functie van $\log a$, $\log b$ en $\log c$.

(a) $\log \dfrac{a}{b^4}$

(b) $\log\left(c^3\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$

(c) $\log \dfrac{a^4bc}{\sqrt{bc^2}}$

5.4.4 Oefening
Schrijf elke uitdrukking in functie van $\log x$, $\log(x-5)$ en $\log(x+1)$.

(a) $\log \dfrac{x(x+1)}{x-5}$

(b) $\log\left((x+1)^2\sqrt{x-5}\right)$

(c) $\log \sqrt{\dfrac{x-5}{x^3(x+1)}}$

(d) $\log \dfrac{1}{(x+1)^2}$

5.4.5 Oefening
Schrijf elke uitdrukking als één enkele logaritme.

(a) $\log(x+1) - \log x^2 + \dfrac{1}{2}\log(x-3)$

(b) $3 - \log x$

(c) $5\log(x-1) - \dfrac{1}{2}\log(x+3)$

5.4.6 Oefening
Schrijf onderstaande uitdrukking in functie van $\log(k-1)$, $\log k$ en $\log(k+1)$.

$$\log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

5.4.7 Oefening
Stel dat y impliciet gegeven is als functie van t door volgende formule,

$$kt = \frac{1}{3}[\ln(y-2) - \ln(y-5)].$$

Hierin is k een strikt positieve parameter.
Toon aan dat $y = \dfrac{5-2e^{-3kt}}{1-e^{-3kt}}$.
Bereken $\lim\limits_{t\to+\infty} y$

5.4.8 Oefening
Toon aan dat:

(a) $\log\dfrac{a}{b} - \log\dfrac{c}{d} = -\log\dfrac{b}{d} + \log\dfrac{a}{c}$

(b) $-\log\dfrac{1}{a} + \log\dfrac{1}{b} = -\log\dfrac{b}{a}$

opmerking: de rekenregels gebruiken zoals in deze oefening, moet je ook vlot kunnen wanneer hier grootheden uit de chemie of fysica staan in plaats van a, b, c en d.

5.4.9 Oefening
Je hoeft de betekenis van de gebruikte symbolen niet te kennen om de oefening te kunnen oplossen.

(a) Gegeven $\Delta G^0 = -n.F.\Delta E^0$ en $\Delta G^0 = -R.T.\ln(K_{ev})$.

Toon aan dat $K_{ev} = 10^{\dfrac{n.F.\Delta E^0}{2,303.R.T}}$.

(b) Gegeven $0,89 = 1,5 - \dfrac{0,059}{2}\log_{10}\dfrac{1}{\frac{10^{-14}}{K_a}10^{-14}}$.

Toon aan dat $K_a = 4,7.10^{-8}$.

5.4.10 Oefening
Je hoeft de betekenis van de gebruikte symbolen niet te kennen om de oefening te kunnen oplossen.

(a) Schets de grafiek van de functie $\ln C(t)$ met $C(t) = C_0 e^{-kt}$.

(b) Schets de grafiek van $\ln k$ in functie van $\dfrac{1}{T}$ met $k = Ae^{-\dfrac{E}{RT}}$.

5.4.11 Oefening
Los op naar x.

(a) $\log x + \log(x+1) = \log 2$

(b) $\log_3(x-3) = \dfrac{1}{2\log_2 3} + \log_{81}(3x-13)^2$

(c) $\log_x\left(\dfrac{\log_2 6}{\log_{12} 6} + \log_2\dfrac{1}{3}\right) = \log_2\sqrt[6]{2x}$ (deze opgave is iets moeilijker)

5.4.12 Oefening

De vergelijking $4^x - 5 \cdot 2^x = 24$ werd opgelost naar x. Toch klopt de oplossing voor x niet als we deze terug invullen in de vergelijking. Zoek de fout in de berekening.

$$\begin{aligned}
2^{2x} - 5 \cdot 2^x &= 24 \\
\log_2 2^{2x} - \log_2(5 \cdot 2^x) &= \log_2 24 \\
2x - \log_2 5 - \log_2 2^x &= \log_2 24 \\
2x - \log_2 5 - x &= \log_2 24 \\
x &= \log_2 24 + \log_2 5 \\
x &= \log_2(24 \cdot 5) \\
x &= \log_2 120
\end{aligned}$$

5.4.13 Oefening

Los volgende vergelijkingen op naar x. Geef de exacte waarde (eventueel een formule, je hoeft dus geen rekenmachine te gebruiken).

(a) $15 \cdot 3^{x+1} - 243 \cdot 5^{x-2} = 0$

(b) $3^{2x-3} - 10 \cdot 3^{x-2} + 3 = 0$ (de oplossingmethode is niet analoog aan het voorbeeld)

5.4.14 Oefening

Welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan volgende ongelijkheid.

(a) $\ln(x + 5) > 7$

(b) $\log(x^2 - 3) > 2$

(c) $\log_{0,5}(x - 1) < 1$