Katholieke Universiteit Leuven
Faculteit Bewegings- en Revalidatiewetenschappen
Faculteit Wetenschappen

Summerschool FaBeR

FYSICA

Sophie Raedts

Augustus 2012

In dit deel fysica werden veel figuren gebruikt uit het boek Pearson International Edition, Physics fourth edition, James S. Walker. Dit is de cursus van het vak *Fysica en Biomechanica* in de 1^{ste} fase bacheloropleidingen Revalidatiewetenschappen en Kinesitherapie en Lichamelijke Opvoeding en Bewegingswetenschappen.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

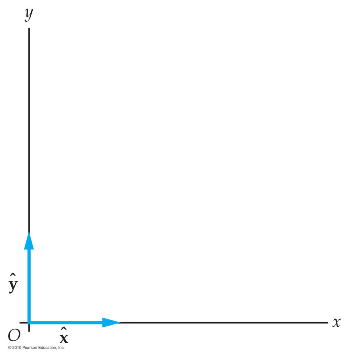
Rekenen met vectoren in de fysica

Rekenen met vectoren is een basisvaardigheid voor het vak fysica. Bij het vectorrekenen maken we gebruik van goniometrie en vlakke meetkunde (zie deel wiskunde). In dit hoofdstuk bespreken we het verschil tussen een scalair getal en een vector. We vatten de belangrijkste eigenschappen en rekenregels voor vectoren samen: vectoren optellen, vectoren vermenigvuldigen met een reëel getal, de componenten van een vector t.o.v. een basis bepalen. Tot slot geven we ook enkele voorbeelden van vectoren uit de fysica.

Belangrijkste concepten : Vector - vectorcomponenten - som van vectoren

1.1 Scalar vs. vector

Elementaire fysische grootheden kunnen in twee grote categorieën opgedeeld worden: "scalaire fysische grootheden" en "vectoriële fysische grootheden". *Scalars of scalaire grootheden* zijn volledig gekend door een algebraïsch maatgetal (reëel getal) en een eenheid, bv. een massa m van 5 kg, een lengte l van 2 m, een temperatuur T van -10°C. *Vectoriële fysische grootheden* zijn gekenmerkt door een grootte (met eenheid), richting en zin. Vectoren worden aangeduid met een pijltje of worden vet gedrukt. Voorbeelden van vectoriële grootheden zijn positie ($\vec{r}$), snelheid ($\vec{v}$), versnelling ($\vec{a}$), kracht ($\vec{F}$), elektrisch veld ($\vec{E}$). Vectoren worden op een figuur aangeduid met een pijl. De rechte waarop een vector gelegen is wordt de drager genoemd.



Figuur 1.1: x, y-assenstelsel met eenheidsvectoren $\hat{x}$ en $\hat{y}$.

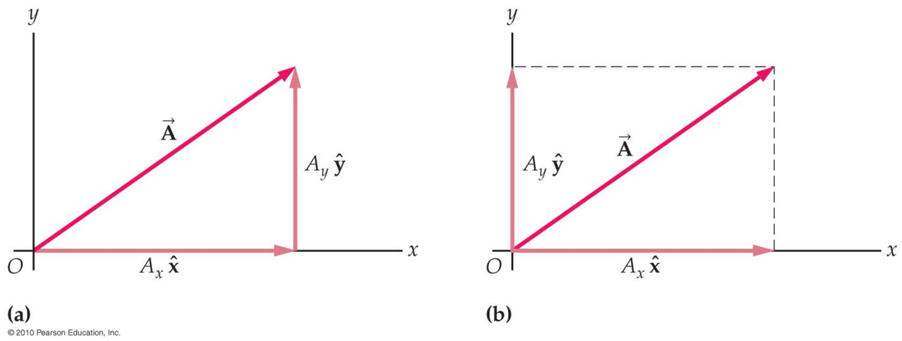
1.2 Vectoren in een cartesiaans assenstelsel - vectorcomponenten

Wanneer we vectoren in een vlak willen beschrijven hebben we twee assen nodig. Deze assen zullen we othogonaal (loodrecht) kiezen met de eenheid op iedere as dezelfde, i.e. een cartesiaans assenstelsel. Conventioneel worden de assen voor een vlak benoemd met x en y (zie figuur 1.1).

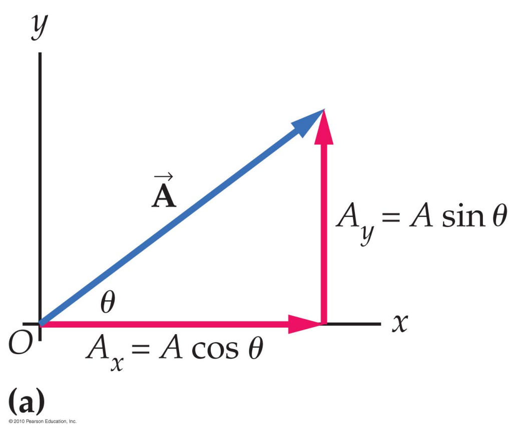
De eenheidsvectoren $\hat{x}$ en $\hat{y}$ respectievelijk volgens de x- en y-as vormen een basis[1]. Dit betekent dat elke vector $\vec{A}$ in het xy-vlak op éénduidige wijze kan ontbonden worden in vectorcomponenten volgens $\hat{x}$ en $\hat{y}$ (zie figuur 1.2(a)):

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}.$$

$\vec{A}_x = A_x\hat{x}$ is dan de vectorcomponent volgens $\hat{x}$ of de coördinaatprojectie op x. Analoog wordt $\vec{A}_y = A_y\hat{y}$ de vectorcomponent volgens $\hat{y}$ of de coördinaatprojectie op y genoemd.



Figuur 1.2: (a) De vector $\vec{A}$ kan geschreven worden met behulp van eenheidsvectoren: $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y}$. (b) De vectorcomponenten zijn de projecties van de vector $\vec{A}$ op de x en y-as.



Figuur 1.3: De De algebraïsche componenten van de vector $\vec{A}$ op de x- en y-as als de hoek tussen de vector $\vec{A}$ en de x-as gekend is.

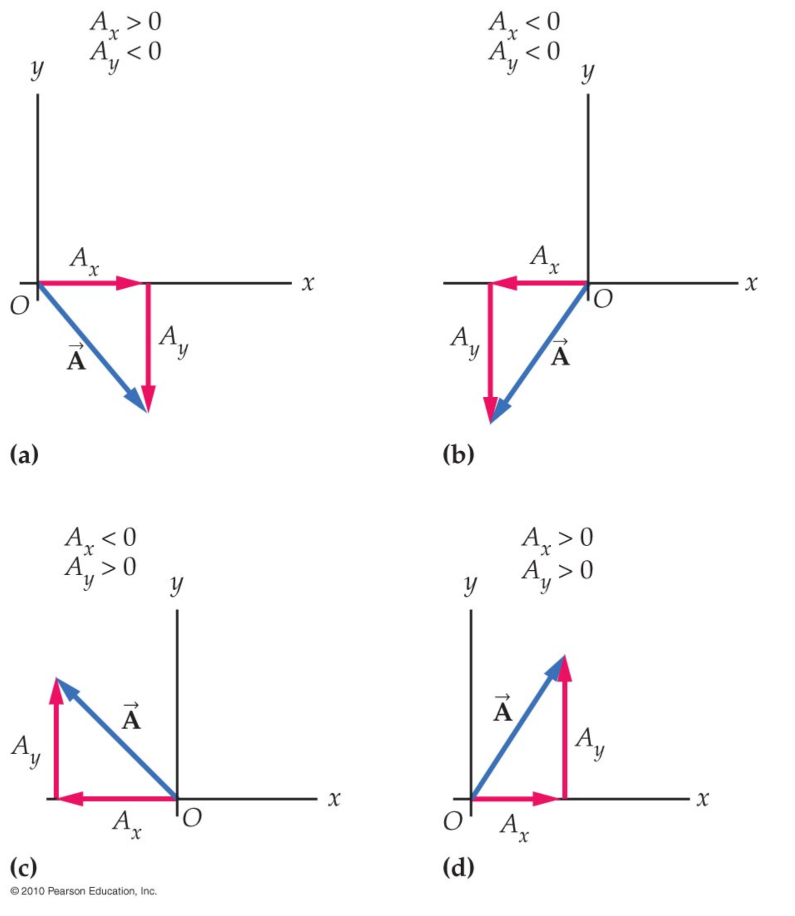
[1]In sommige tekstboeken worden ook andere notaties voor eenheidsvectoren volgens de x- en y-as gebruikt, zoals $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$.

In vele situaties is de hoek gekend tussen de vector en één van de assen. In figuur 1.3 bijvoorbeeld is de hoek θ gekend tussen de vector $\vec{A}$ en de x-as. In dit geval zijn de algebraïsche componenten

$$A_x = A\cos\theta \text{ en } A_y = A\sin\theta.$$

Afhankelijk van het kwadrant waar de vector $\vec{A}$ inligt zullen de algebraïsche componenten positief of negatief zijn[2] (zie figuur 1.4). Indien omgekeerd, de algebraïsche componenten A_x en A_y gekend zijn, kan men als volgt de hoek θ berekenen :

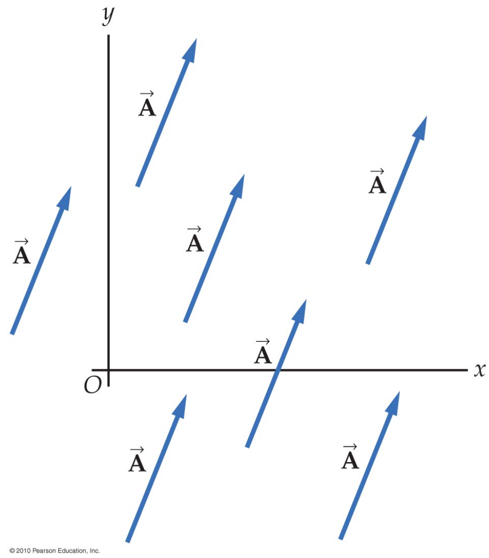
$$\theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x}.$$



Figuur 1.4: Voorbeelden van verschillende vectoren $\vec{A}$ met hun componenten.

Om een vector in de driedimensionele ruimte te beschrijven, hebben we drie assen nodig. Orthogonaal op de x- en y-as wordt de z-as ingevoerd. In de fysica maakt men een onderscheid tussen *vrije en gebonden vectoren.* Als je een *vrije vector* verschuift in het vlak of in de 3-dimensionele ruimte, blijft dit dezelfde vector (zie figuur 1.5). Wanneer men op eenzelfde afbeelding verschillende malen dezelfde vector tekent, heeft men verschillende, evenwijdige pijltjes van gelijke lengte die in dezelfde richting wijzen. Twee vrije vectoren zijn gelijk als ze dezelfde lengte, richting en zin hebben. *Gebonden vectoren* hebben ook

[2] Kijk steeds in de juist driehoek om zo A_x en A_y te bepalen via de definities van sin en cos. (Zie hoofdstuk goniometrie in deel wiskunde)



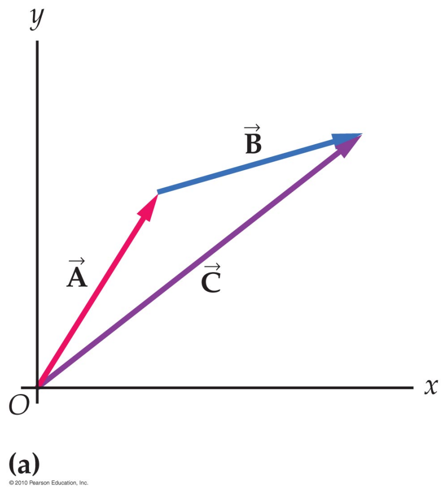
Figuur 1.5: Vrije vectoren $\vec{A}$.

een vast *aangrijpingspunt*. Hierdoor ligt de grafische voorstelling van een gebonden vector volledig vast: op één afbeelding kan men slechts op één manier de gebonden vector tekenen. De vectoren $\vec{A}$ in figuur 1.5 zijn gelijk als het gaat om vrije vectoren, maar verschillend als het gaat om gebonden vectoren, aangezien ze een verschillend aangrijpingspunt hebben.

1.3 Bewerkingen met vectoren

1.3.1 Som en vermenigvuldiging met een scalar

De som van twee vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ bekomt men door $\vec{B}$ te verschuiven zodat het beginpunt samenvalt met het eindpunt van $\vec{A}$. De vector die men bekomt door het beginpunt van $\vec{A}$ te verbinden met het eindpunt van $\vec{B}$ is de vector $\vec{A}+\vec{B}$.[3]

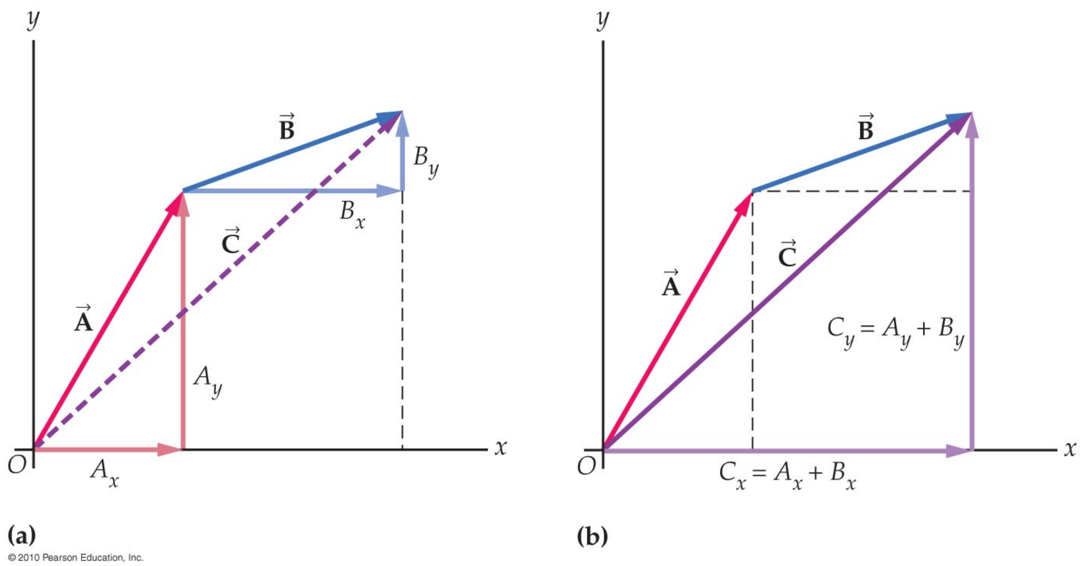


Figuur 1.6: De vector $\vec{C}$ is de som van de vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$. Anders genoteerd $\vec{C} = \vec{A}+\vec{B}$.

[3]Deze grafische constructie noemt men de kop-staart-methode.

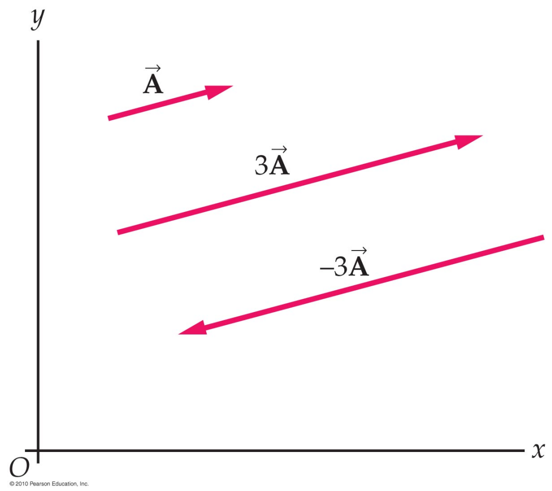
Indien de algebraïsche componenten van de vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ gegeven zijn, kunnen we de vectorsom berekenen door component per component op te tellen (zie figuur 1.7):

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y}.$$



Figuur 1.7: (a) De x en y componenten van de vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$. (b) De x en y componenten van de vector $\vec{C}$.

Wanneer we de vector $\vec{a}$ vermenigvuldigen met een scalar m verkrijgen we de vector $m\vec{a}$ die dezelfde richting heeft als de vector $\vec{a}$. Indien $m > 0$ heeft die vector ook dezelfde zin; indien $m < 0$ heeft die vector een tegengestelde zin. De lengte van de vector $m\vec{a}$ is $|m|$ keer de lengte van de vector $\vec{a}$.



Figuur 1.8: Vermenigvuldiging van een vector met een scalar.

Vectoren met de som en de vermenigvuldiging met een scalar gedefinieerd zoals hierboven vormen een vectorruimte. Er gelden dus volgende eigenschappen.

eigenschappen

1. Het optellen van twee vectoren is associatief:
   $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

2. De vector met lengte 0 wordt genoteerd met $\vec{0}$. Deze vector wordt de nulvector genoemd. Er geldt:
   $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

3. De tegengestelde vector van $\vec{a}$ is $-\vec{a}$:
   $-\vec{a}+\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

4. Het optellen van twee vectoren is commutatief:
   $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

5. Het vermenigvuldigen van een vector met een scalar is distributief ten opzichte van de optelling van scalairen:
   $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$.

6. Het vermenigvuldigen van een vector met een scalar is distributief ten opzichte van de vectoroptelling:
   $n(\vec{a}+\vec{b})=n\vec{a}+n\vec{b}$.

7. Het vermenigvuldigen van een vector met een scalar is associatief ten opzichte van de vermenigvuldiging van scalairen:
   $m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$.

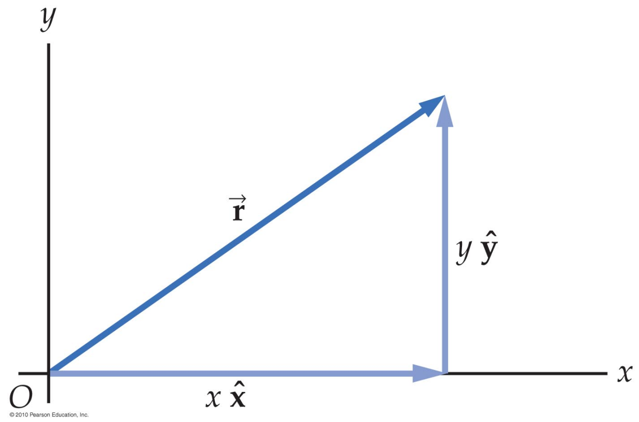
8. $1\vec{a}=\vec{a}$

1.3.2 Lengte of norm

De lengte of norm van de vector $\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}$ (zie figuur 1.2 en 1.3) kan berekend worden via
$A=\|\vec{A}\|=\sqrt{A_x^2+A_y^2}$. Dit is een rechtstreeks gevolg van de stelling van Pythagoras die geldt in een rechthoekige driehoek.

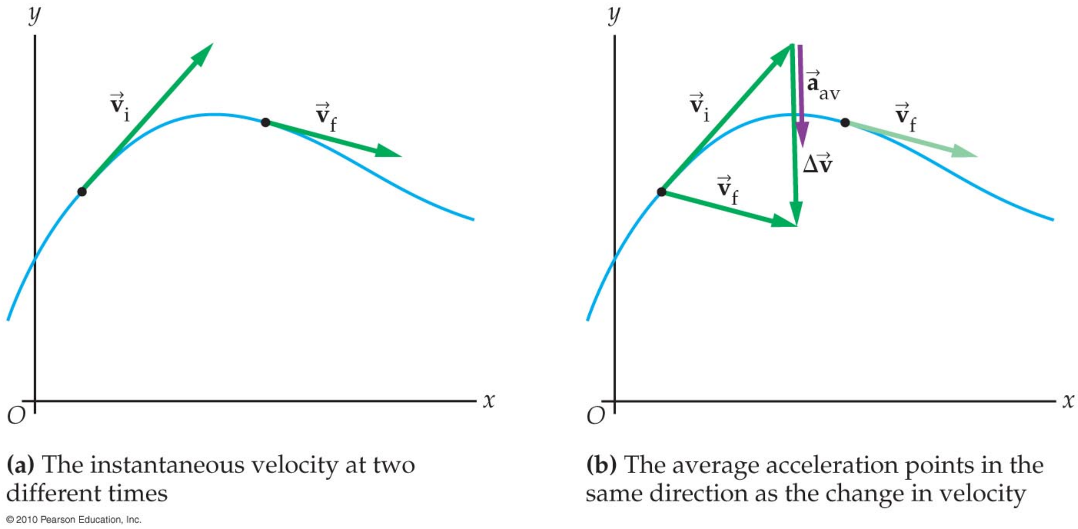
1.4 Voorbeeldvectoren uit de fysica.

In de fysica wordt de positie van een massapunt weergegeven met een vector $\vec{r}$ die de oorsprong van het assenstelsel verbindt met de locatie van het massapunt. Deze positievector $\vec{r}$ wordt weergegeven in figuur 1.9 en kan geschreven worden met behulp van zijn componenten: $\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}$.



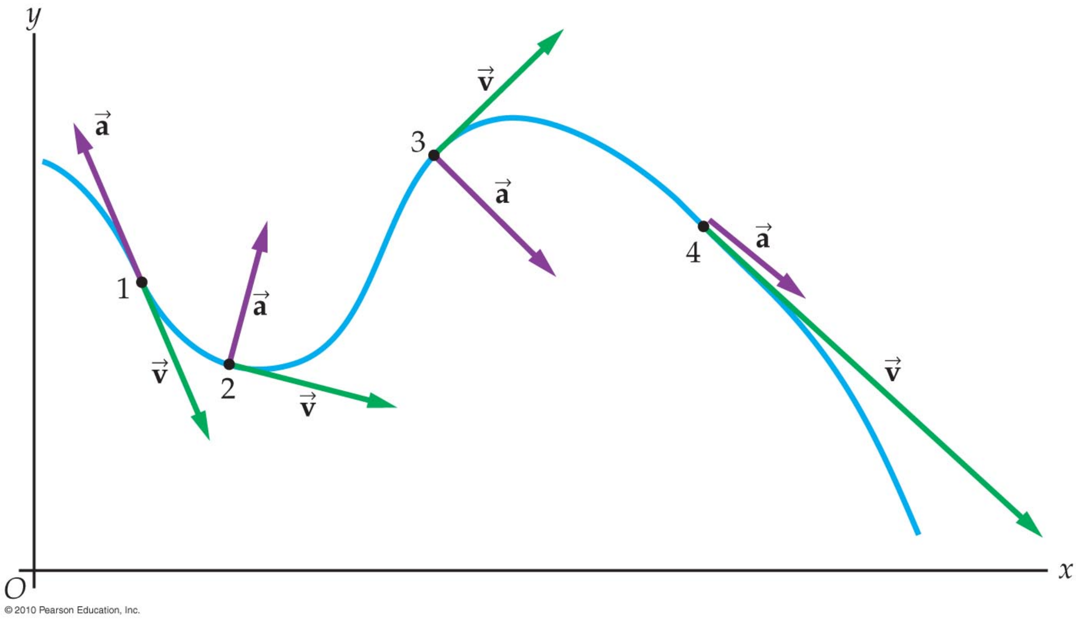
Figuur 1.9: Positievector.

De ogenblikkelijke snelheid is een vector die momentaan raakt aan de baan, zoals weergegeven in figuur 1.10(a). De lengte van de vectorpijl is de grootte van de ogenblikkelijke snelheid (bv. 10 m/s). Deze vector geeft dus informatie over zowel de grootte van de snelheid als de bewegingsrichting. De gemiddelde versnellingsvector is gedefinieerd als de verandering van de snelheidsvector $\Delta\vec{v}$ over een bepaald tijdsinterval. Deze versnellingsvector heeft dezelfde richting als de vector $\Delta\vec{v}$ (zie figuur 1.10(b)). Dit alles wordt behandeld in het hoofdstuk kinematica.



Figuur 1.10: Snelheids- en versnellingsvectoren.

In figuur 1.11 tenslotte, wordt de baan weergegeven waarlangs een puntmassa beweegt. De snelheidsvector $\vec{v}$ is altijd gericht volgens de bewegingszin van het deeltje. De versnellingsvector $\vec{a}$ daarentegen kan verschillende richtingen aannemen.



Figuur 1.11: Snelheids- en versnellingsvectoren voor een deeltje dat beweegt langsheen een kromme.

1.5 Oefeningen

1. Duid op een tekening de vectoren $\vec{a} = 2\hat{x} + \hat{y}$ en $\vec{b} = \hat{x} - \hat{y}$ aan. Duid ook de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a}$ en $-\vec{b}$ aan.

2. Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \hat{x} + 2\hat{y}$, $\vec{b} = -2\hat{x} + 3\hat{y}$ en $\vec{c} = \hat{x} - \hat{y}$. Teken deze vectoren. Bereken en construeer de vectoren $\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ en $\vec{t} = -\vec{a} + \dfrac{1}{2}(\vec{b} - 2\vec{c})$.

3. Bereken de grootte van de vector $\vec{a} = \hat{x} + 3\hat{y}$.

4. Een vector $\vec{a}$ met lengte 10 maakt een hoek van 225° met de x-as. Bereken de vectorcomponenten volgens $\hat{x}$ en $\hat{y}$.

5. Wat is de grootte van de vector $\vec{c} = \hat{x} - 3\hat{y}$ en welke hoek maakt deze vector met de x-as?

6. Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = 3\hat{x} + 2\hat{y}$ en $\vec{b} = 4\hat{x} - 3\hat{y}$. (a) Bereken de grootte van beide vectoren.

Hoofdstuk 2

Kinematica

In dit hoofdstuk behandelen we de beschrijving van de beweging (*kinematica*) zonder de oorzaak van de beweging in rekening te brengen. De belangrijkste concepten die hierbij aan bod komen zijn positie, snelheid en versnelling. In het volgende hoofdstuk basis Newtonmechanica zullen we zien dat de beweging van een voorwerp kan verklaard worden door de wisselwerking met zijn omgeving. Daar bekijken we dus de oorzaak van de beweging (*dynamica*), dit wordt uitgedrukt in de tweede wet van Newton.

Belangrijkste concepten : positie, snelheid, versnelling

2.1 Eén-dimensionale kinematica

In een eerste deel beschrijven we de beweging van een massapunt langsheen een rechte. Hiertoe kiezen we een x-as volgens deze rechte met een zin wijzend in de positieve richting, dit is de richting waarin x toeneemt. Als ook een oorsprong ($x = 0$) op deze rechte wordt vastgelegd, dan is de *plaats* of *positie* van het punt éénduidig bepaald door zijn x-coördinaat. Wanneer het massapunt verandert van positie, ondergaat het een *verplaatsing*. Als het punt van een beginpositie x_i naar een eindpositie x_f beweegt, dan is de verplaatsing

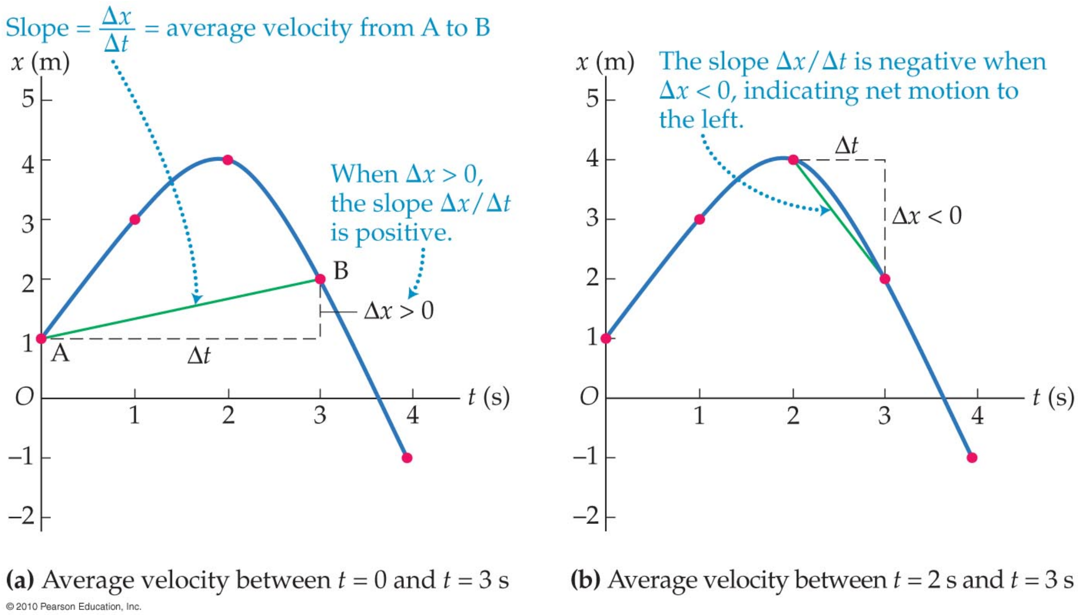
$$\Delta x = x_f - x_i.$$

De SI-eenheid van positie en verplaatsing is één meter (m). Merk op dat de verplaatsing positief, negatief of nul (begin-en eindpositie gelijk) kan zijn. Hieruit volgt het belangrijke verschil tussen *verplaatsing* en *afgelegde weg*. Stel je fietst heen en terug van je huis naar de supermarkt, 2 km verderop. De totaal afgelegde weg is 4 km terwijl de verplaatsing nul is.

In een volgende stap bekijken we hoeveel tijd er verloopt tijdens een verplaatsing van een object. Of anders, hoe snel kan dat object bewegen? Bijvoorbeeld, hoeveel seconden verlopen er om de 100 m sprint af te leggen op een atletiekpiste? Zo komen we tot het begrip *snelheid*. De snelheid kan dus bepaald worden als we informatie hebben over de plaats x als functie van de tijd t. Deze informatie kan grafisch weergegeven worden in een $x(t)$-grafiek (zie figuur 2.1) of in een algebraïsche uitdrukking. Deze geven voor elk tijdstip t de positie x van het object weer. De *gemiddelde snelheid* wordt gedefinieerd als de verhouding van de verplaatsing tot het tijdsinterval waarin deze verplaatsing gebeurt:

$$v_g = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

De helling van de groene verbindingslijn tussen twee rode punten op de blauwe $x(t)$-grafiek (in figuur 2.1) is gelijk aan de gemiddelde snelheid gedurende dat tijdsinterval. Deze kan positief, negatief of nul zijn.



Figuur 2.1: Gemiddelde snelheid aangeduid op een $x(t)$-grafiek.

Dit geeft ons slechts een globaal beeld van de snelheid. Als we een nauwkeurigere beschrijving van de beweging willen kennen, moeten we de gemiddelde snelheid berekenen over kortere tijdsperiodes. Een nog betere realistische beschrijving kan bekomen worden door de snelheid te kennen op elk ogenblik, de zogenaamde ogenblikkelijke snelheid:

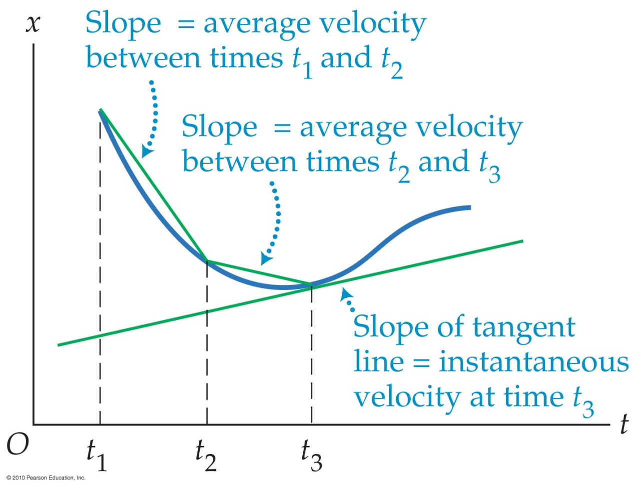
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Deze notatie betekent dat we de gemiddelde snelheid gaan bekijken op steeds kortere tijdsintervallen die in de limietstand nul worden. De snelheid op een bepaald tijdstip t_3 is de helling van de raaklijn aan de $x(t)$-grafiek in het punt t_3 (zie figuur 2.2).

Probeer nu in te zien dat de snelheid de afgeleide is van de positie naar de tijd door de definitie van afgeleide terug te bekijken in het deel wiskunde.

In het dagelijks taalgebruik bedoelen we met het begrip snelheid de grootte van de snelheid. Bijvoorbeeld, een auto heeft een snelheid van 100 km/u. In de fysica moeten we echter ook nog specifiëren in welke richting en zin die auto rijdt. Met andere woorden, *snelheid* is een *vectoriële grootheid* gekenmerkt door 3 eigenschappen: grootte, richting en zin. Stel dat een auto met een constante snelheid van 100 km/u gedurende anderhalf uur op de autostrade rijdt. Wat is zijn eindpositie dan? Dit kunnen we slechts bepalen als we weten waar hij vertrokken is (bv. als zijn vertrekpositie Leuven is en hij rijdt in westelijke richting dan is hij na anderhalf uur aan zee.) Dit brengt ons tot de formule voor de positie als functie van de tijd voor een rechtlijnige beweging met constante snelheid, met name een *éénparig rechtlijnige beweging.*

$$x(t) = x_0 + v_x t$$



Figuur 2.2: Grafische interpretatie van gemiddelde - en ogenblikkelijke snelheid.

Net zoals de snelheid de verandering is van de positie met de tijd, is de *versnelling* de verandering van de snelheid met de tijd. Met andere woorden, een voorwerp versnelt als zijn snelheid verandert. Een auto die aan een rood licht stilstond en plots vertrekt als het licht op groen springt, voert een versnelde beweging uit (hij trekt bijvoorbeeld op van 0 naar 50 km/u). De gemiddelde versnelling is de verhouding van de snelheidsverandering tot de tijdsduur waarover deze verandering plaatsvindt.

$$a_g = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

De SI-eenheid van versnelling is m/s^2. De gemiddelde versnelling kan positief, negatief of nul zijn . Net zoals de verplaatsing en de snelheid is de versnelling een vectoriële grootheid. Analoog als hierboven voor de snelheid, wordt in de limietstand voor steeds kleinere tijdsintervallen deze gemiddelde versnelling een ogenblikkelijke versnelling (zie figuur 2.3).

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Een goed gekende versnelling is de valversnelling op aarde, deze is bij benadering 9.81 m/s^2. Dit betekent dat de snelheid van vallende objecten elke seconde verandert met 9.81 m/s. In één dimensie zullen de snelheid en versnelling als vectoriële grootheden ofwel dezelfde ofwel een tegengestelde zin hebben (zie figuur 2.4). Wanneer ze dezelfde zin hebben zal de snelheid in grootte toenemen (versnelling). Wanneer hun zin tegengesteld is, zal de snelheid afnemen (vertraging).

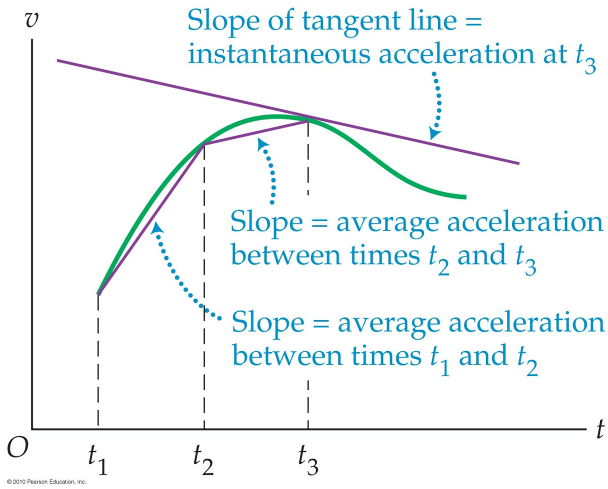
Ten slotte bekijken we de *éénparig versnelde rechtlijnige beweging*. Dit is een beweging langsheen een rechte met een constante versnelling. Deze laatste kan positief of negatief zijn. De snelheid neemt dan lineair toe (of af) in de tijd:

$$v = v_0 + at$$

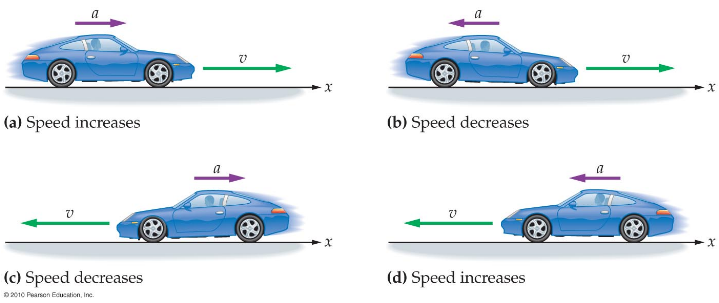
Deze vergelijking beschrijft een rechte op een $v(t)$-grafiek. De positie als functie van de tijd voor dit soort bewegingen wordt gegeven door :

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Dit beschrijft een parabool op een $x(t)$-grafiek (zie figuur 2.5).



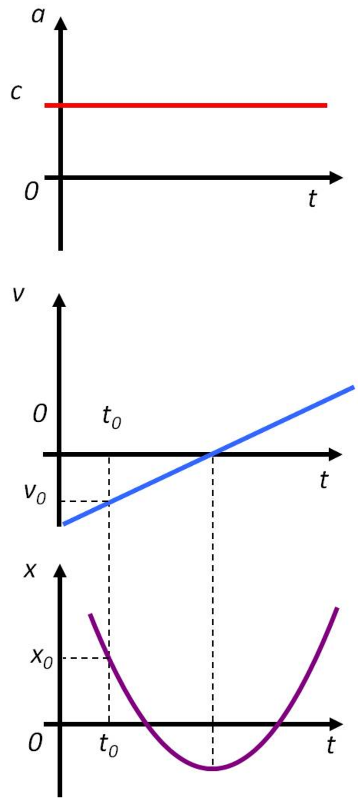
Figuur 2.3: Grafische interpretatie van gemiddelde - en ogenblikkelijke versnelling.



Figuur 2.4: Versnelling en vertraging.

Oefening Stel dat een bal omhoog gegooid wordt met een beginsnelheid van 8.2 m/s en dat de versnelling gelijk is aan -9.81m/s^2. Wat is dan de snelheid van de bal na (a) 0.5s (b) 1s ?

- *Begrijp je het verschil tussen snelheid en versnelling?*
- *Geef een voorbeeld van een éénparig versnelde beweging.*
- *Kan een object op een bepaald moment een snelheid nul hebben en toch versnellen?*
- *Registreert de kilometerteller in een wagen de afgelegde weg of de verplaatsing? Verklaar.*
- *Tracht de grafieken uit figuur 2.5 te schetsen voor een negatieve versnelling a.*

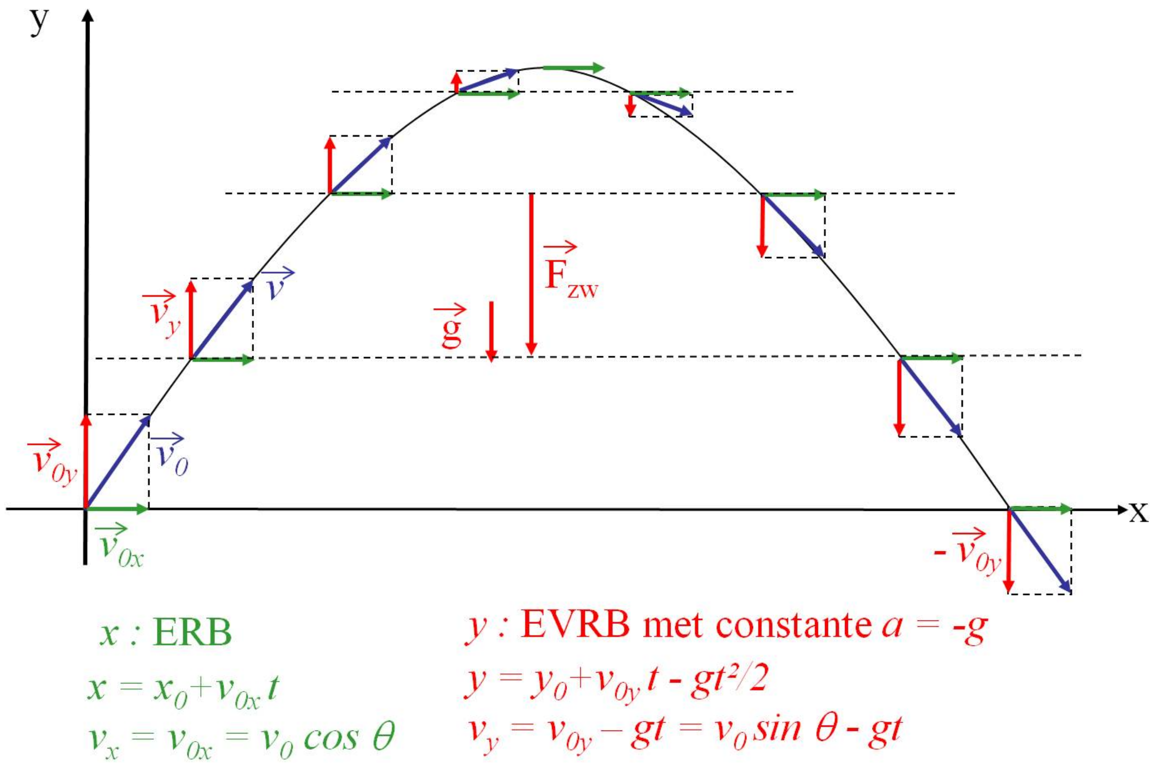


Figuur 2.5: Positie, snelheid en versnelling als functie van de tijd voor een éénparig, versnelde rechtlijnige beweging waarbij de versnelling a positief is.

2.2 Twee-dimensionale kinematica

In tegenstelling tot de vorige paragraaf waar enkel rechtlijnige bewegingen (1 dimensie) werden beschouwd, bekijken we nu bewegingen in het vlak (2-dimensionaal). Daartoe splitsen we de beschrijving van de beweging op in twee 1-dimensionale bewegingen, nl. in de x- en de y-richting.

Projectielbeweging - Schuine worp Een voorbeeld van een 2-dimensionale beweging is de *projectielbeweging*. Dit is de beweging van een projectiel (kogel, bal, ...) *nadat* het werd weggeschoten of weggegooid onder een bepaalde hoek. Men spreekt ook van *schuine worp*. Het projectiel beschrijft een parabolische baan en landt na een bepaalde tijd t^* terug op de grond.



Voorbeeldoefening *Een kanonskogel wordt onder een hoek van 40° afgeschoten. Als de kogel een doel moet treffen gelegen op 1500 m afstand, in een 100 m lager gelegen vallei, hoe groot moet dan de beginsnelheid van de kogel zijn? Verwaarloos de luchtweerstand.*

1. *Kies een x, y-assenstelsel.*

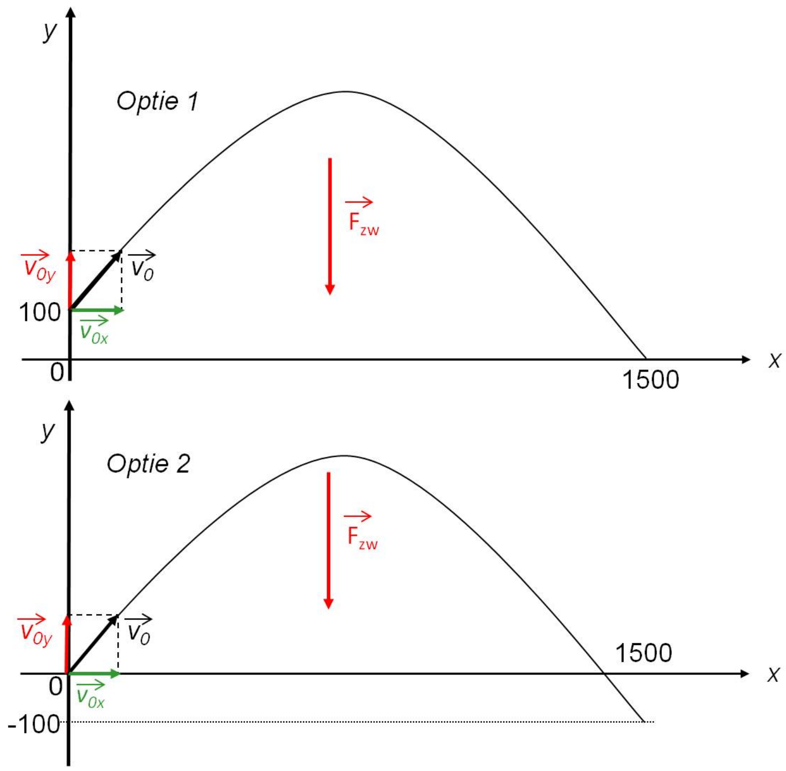
   We tekenen hier 2 eenvoudige mogelijkheden en kiezen optie 1 (zie figuur 2.6). Teken de beginsnelheidsvector $\vec{v_0}$ en de x- en y-projectie $\vec{v_{0x}}$ en $\vec{v_{0y}}$.

2. *Opsplitsen van de beweging in de x- en y-richting. Welk soort beweging voert de kogel uit in de x-richting? Welk soort beweging voert de kogel uit in de y-richting?*

   Na het afvuren van de kogel is de invloed (kracht) van het kanon weg. De kogel ondervindt enkel invloed van de zwaartekracht en heeft bijgevolg enkel een versnelling (de valversnelling) in de verticale y-richting. In de x-richting blijft bijgevolg de snelheid behouden en is de beweging éénparig. Met andere woorden, de x-component van de snelheden zijn over gans de beweging gelijk aan v_{0x}.
   x: Eénparig rechtlijnige beweging
   $x = x_0 + v_{0x}t$ en $v_x = v_{0x} = constant$
   y: Eénparig versnelde rechtlijnige beweging
   $y = y_0 + v_{0y}t + a_y t^2/2$ en $v_y = v_{0y} + a_y t$

   Welke informatie bevatten deze vergelijkingen? Ze geven de positie en snelheid weer op elk tijdstip t.

3. *Lees terug de opgave en probeer de gegevens en het gevraagde te begrijpen en in te vullen in de vergelijkingen.*



Figuur 2.6: Twee mogelijke keuzes van assenstelsels.

$$\begin{array}{cc} x_0 = 0m & y_0 = 100m \\ v_{0x} = v_0 \cos 40^\circ & v_{0y} = v_0 \sin 40^\circ \\ a_x = 0 & a_y = -g \end{array}$$

Stel dat de kogel op de grond valt op het tijdstip t^*, dan is de x-positie van de kogel 1500 m en de y-positie van de kogel 0 m:

$$x = 1500 = x_0 + v_{0x}t^* = 0 + v_0 \cos 40^\circ t^*$$

en dus is

$$t^* = \frac{1500}{v_0 \cos 40^\circ} \ (1)$$

$$y = 0 = y_0 + v_{0y}t^* - gt^{*2}/2 = 100 + v_0 \sin 40^\circ t^* - gt^{*2}/2 \ (2)$$

(1) invullen in (2) levert:

$$0 = 100 + v_0 \sin 40^\circ \frac{1500}{v_0 \cos 40^\circ} - \frac{g}{2} \frac{1500^2}{v_0^2 \cos^2 40^\circ}$$

Na uitrekening levert dit:

$$v_0 = 118m/s$$

Oefeningen

1. Een jongen gooit een bal horizontaal weg met een snelheid $v_0 = 1.3$ m/s, vanaf een hoogte van 1.25 m boven de grond. Bepaal de x- en y-positie op de tijdstippen $t = 0.25$ s en $t = 0.5$ s. Hoe lang duurt het eer de bal landt (*tijdstip* t^*)? Waar landt de bal (*of wat is de* x*-positie van de bal bij landing op tijdstip* t^*)?

2. Een kogelstoter (met schouderhoogte 1.7 m) stoot een kogel onder een hoek van 40°. De kogel landt 18 m verder op de grond. Met welke snelheid werd de kogel weggestoten?

- *Hoe groot is de snelheid van een projectiel op het hoogste punt van de parabolische baan? Probeer deze vraag te beantwoorden door eerst na te denken over de grootte van de snelheid in de* x *- en* y*-richting op het hoogste punt van de parabolische baan.*

- *Stel dat een projectiel verticaal omhoog wordt gegooid. Hoe groot is dan de snelheid van het projectiel op het hoogst bereikte punt?*

Toepassing Een voorwerp voert een projectielbeweging uit met een initiële snelheid v_0. Op het hoogste punt is de grootte van de snelheid $v_0/2$. Onder welke hoek werd het voorwerp weggeschoten?

- ○ 30 °
- ○ 45 °
- ○ 60 °
- ○ 75 °

Hoofdstuk 3

Basis Newtonmechanica - Dynamica van een massapunt - Cirkelbeweging

Het vorig hoofdstuk handelde over *kinematica*, hierin wordt de beweging van objecten beschreven zonder de oorzaak van de beweging te beschrijven. Bij de dynamica wordt deze oorzaak wel in de beschrijving opgenomen. In dit hoofdstuk worden wisselwerkingen tussen deeltjes (krachten) en de gevolgen ervan op de bewegingstoestand bestudeerd. Wat veroorzaakt een beweging of een verandering van beweging? Belangrijk hierbij zijn de concepten *massa* en *kracht*. De wetten van Newton worden behandeld. Krachtendiagramma's moeten kunnen worden opgesteld alsook de bewegingsvergelijking van een massapunt (in x- en y-richting). Tenslotte wordt de cirkelvormige beweging van een massapunt beschouwd alsook de dynamica hiervan. Belangrijke concepten hierbij zijn *centripetale kracht* en *centripetale versnelling*.

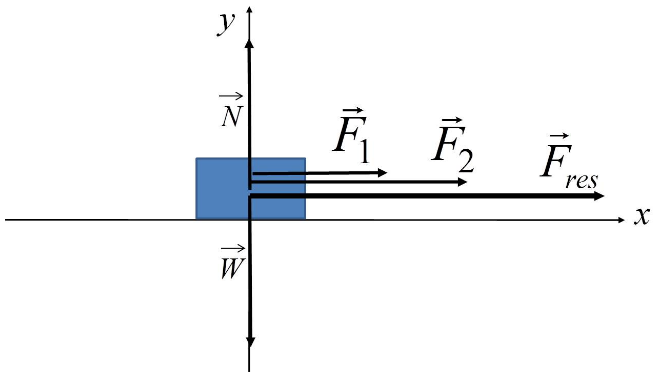
Belangrijkste concepten : massa - kracht

3.1 Kracht - massa - traagheidswet

Wanneer je een doos op de vloer duwt zodat ze in beweging komt, dan oefen je een *kracht* uit op de doos. Als je een boek in je hand houdt, moet je een opwaarts gerichte kracht uitoefenen die de neerwaartse gerichte zwaartekracht compenseert. Een kracht is een vectoriële grootheid gekenmerkt door een grootte, richting en zin. Er kunnen meerdere krachten inwerken op een voorwerp. De *nettokracht* of *resulterende kracht* is de vectorsom[1] van alle krachten uitgeoefend op dat voorwerp.

Voorbeeld Een vader en zijn zoon duwen samen een doos over de vloer verder. Vader en zoon duwen elk met een kracht met respectievelijke groottes $F_1 = 23$ N en $F_2 = 17$ N. Bereken de nettokracht.

[1]We noteren de som van alle krachten $\vec{F_i}$ voor i=1,2,3,...n als $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + ... + \vec{F_n}$.



Figuur 3.1: De resulterende kracht of nettokracht.

Beide krachten werken allebei op de doos, alsook de zwaartekracht $\vec{W}$ en de normaalkracht $\vec{N}$, dus is $\vec{F_{res}} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{W} + \vec{N}$. De zwaartekracht en normaalkracht werken in de y-richting en compenseren elkaar. De krachten $\vec{F_1}$ en $\vec{F_2}$ werken beide in de x-richting (één-dimensionaal) zodat $F_{1x} = F_1 = 23$ N en $F_{2x} = F_2 = 17$ N. Dus is $F_{res,x} = F_{res} = 40$ N. In vectoriële notatie wordt dit: $\vec{F_{res}} = 40\hat{x}$. Hierbij is $\hat{x}$ een eenheidsvector in de x-richting (zie hoofdstuk 1 Rekenen met vectoren in de fysica).

Als er tussen twee objecten een wisselwerking bestaat, zeggen we dat ze op elkaar een kracht uitoefenen. Een kracht beïnvloedt de beweging van een object door een versnelling op te leggen. Een tweede belangrijke grootheid in de wetten van Newton is de *massa*. Dit is een scalaire grootheid met als eenheid de kilogram. De massa van een object is een maat voor de weerstand tegen snelheidsveranderingen (= maat voor traagheid). Hoe moeilijk is het om een object in beweging te krijgen. Bijvoorbeeld als je een bal opvangt zal je minder kracht moeten uitoefenen dan wanneer je een auto al duwend in beweging wil krijgen. De massa van een auto is dan ook veel groter dan de massa van een bal. Bij dezelfde resulterende kracht zal een object met grote massa een kleine versnelling krijgen en een object met een kleine massa een grote versnelling. De versnelling is dus omgekeerd evenredig met de massa.

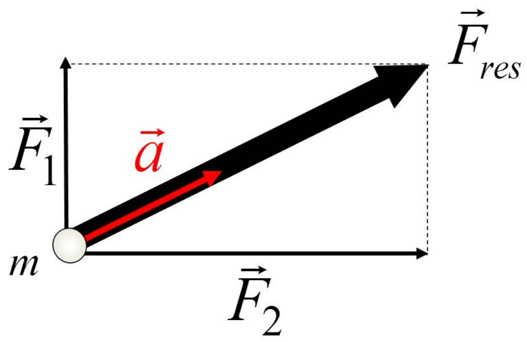
Eerste wet van Newton - Traagheidswet
Een object in rust zal in rust blijven als er geen resulterende kracht op inwerkt. Een object dat een bepaalde snelheid heeft (= vector), zal met deze snelheid (zowel in grootte als in richting) blijven verderbewegen zolang er geen nettokracht op inwerkt.

3.2 Tweede wet van Newton

De tweede wet van Newton geeft een verband tussen de krachten die inwerken op een deeltje en de verandering van de bewegingstoestand van dat deeltje.

Tweede wet van Newton
Als een resulterende kracht (= *oorzaak*) inwerkt op een object met massa m , zal het object een versnelling (= *gevolg*) ondervinden gelijk aan de resulterende kracht gedeeld door de massa. Omdat de resulterende kracht een vectoriële grootheid is, zal de versnelling ook een vector zijn. Bovendien hebben de versnelling en de resulterende kracht dezelfde richting (zie figuur 3.2).

$$\sum \vec{F} = \vec{F_{res}} = m\vec{a}$$



Figuur 3.2: De resulterende kracht (of nettokracht) $\vec{F_{res}}$ is de vectorsom van de krachten $\vec{F_1}$ en $\vec{F_2}$ die werken *op* een puntmassa m (som van vectoren: zie hoofdstuk 1). Deze nettokracht veroorzaakt een versnelling $\vec{a}$ in dezelfde richting als $\vec{F_{res}}$.

Bij het oplossen van problemen zullen we de tweede wet van Newton schrijven met behulp van krachtcomponenten, met andere woorden we projecteren de krachten, welke vectoren zijn, op de x-,y- en z-as, zo bekomen we:

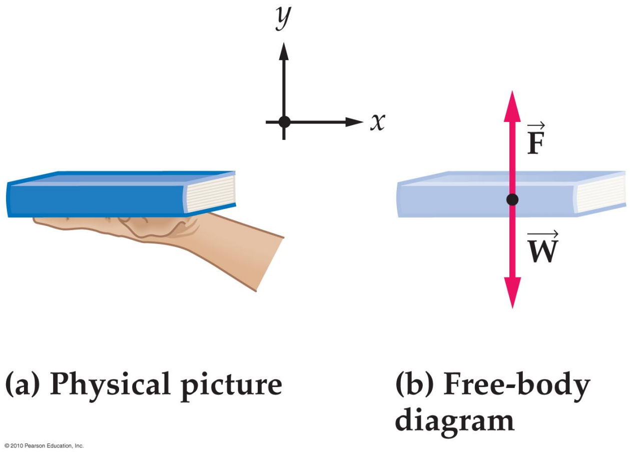
$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\sum F_z = ma_z$$

Dit zijn nu algebraïsche vergelijkingen (geen vectorvergelijkingen) waarmee we kunnen verderrekenen. Merk op dat de krachtcomponent volgens een bepaalde richting enkel de beweging in die richting beïnvloedt. Krachten worden gemeten in Newton. Eén Newton is gedefinieerd als de kracht nodig om één kilogram massa een versnelling van $1\mathrm{m/s^2}$ te geven. Dus,

$$1\mathrm{N} = 1\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Krachtendiagramma's Bij het oplossen van dynamische problemen is het belangrijk om te starten met een eenvoudige schets waarin elke uitwendige kracht *op* het betreffende object wordt getekend. Deze schets wordt een krachtendiagramma genoemd. Als we ons beperken tot rechtlijnige bewegingen (zonder rotatie) mogen we het object beschouwen als een puntmassa waarop alle krachten inwerken (zie figuur 3.3). We kiezen een referentiestelsel en projecteren elke kracht op de x- en y-as (projectie van een vector op een as). Zo kan de tweede wet van Newton toegepast worden in elke coördinaatrichting afzonderlijk. We vatten dit samen in onderstaand stappenplan.

1. *Teken alle krachten op het object.*
2. *Isoleer het beschouwde object, vervang het object door een puntmassa waarop alle krachten inwerken.*
3. *Kies een passend x-y assenstelsel (maak een eenvoudige keuze, bijvoorbeeld de x-as volgens de bewegingsrichting).*
4. *Projecteer de krachten op de x- en y-as.*
5. *Pas de tweede wet van Newton toe in elke coördinaatrichting en analyseer zo de beweging in elke richting apart.*



Figuur 3.3: (a) De fysische situatie. (b) Het krachtendiagramma, bestaande uit twee uitwendige krachten op het boek, ook een keuze van referentiestelsel wordt getoond.

Voorbeeld 1 Stel dat je een boek vasthoudt in je hand. Wat is de grootte van de opwaartse kracht van je hand op het boek zodat deze in rust blijft? In figuur 3.3(a) wordt de fysische situatie voorgesteld. Het corresponderende krachtendiagramma wordt getoond in figuur 3.3(b). Daar wordt het boek voorgesteld als een puntmassa waarop de krachten inwerken. De twee krachten die inwerken op het boek zijn enerzijds de zwaartekracht $\vec{W}$ en anderzijds de opwaartse kracht $\vec{F}$ van je hand op het boek. Merk op dat in een krachtendiagramma enkel de krachten getekend worden die *op* het object (in dit geval het boek) inwerken. Vervolgens kiezen we een x, y-assenstelsel zodat we de componenten van de krachten kunnen bepalen. In dit geval zijn alle krachten verticaal, zo wordt de tweede wet van Newton in de y-richting:

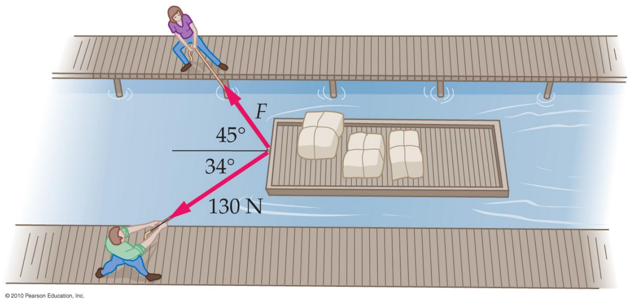
$$\sum F_y = F - W = ma_y$$

Omdat het boek in rust blijft, is de versnelling in de y-richting 0, dus is

$$F - W = ma_y = 0 \text{ of } F = W.$$

Zoals verwacht is de opwaartse kracht van je hand dus even groot als het gewicht van het boek.

Voorbeeld 2 Twee arbeiders trekken een vlot verder zoals weergegeven in figuur 3.2. Eén arbeider trekt met een kracht van 130 N onder een hoek van 34° met de voortbewegingsrichting van het vlot. De tweede arbeider trekt onder een hoek van 45°. Met welke kracht moet de tweede arbeider trekken opdat de nettokracht uitgeoefend door de twee arbeiders in de voorwaartse bewegingsrichting van het vlot staat?

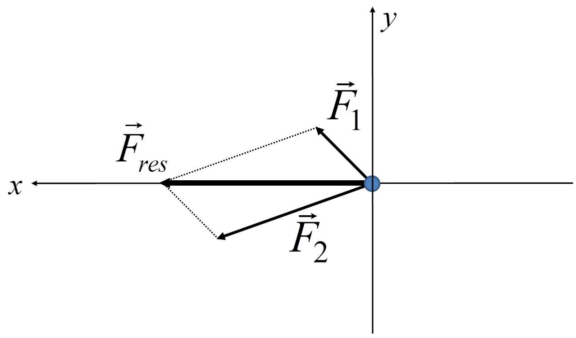


Figuur 3.4: voorbeeld 2 : Fysische situatie : Twee arbeiders trekken een vlot verder.

Via het stappenplan proberen we deze oefening op te lossen.

1. *Teken alle krachten op het object* (zie figuur 3.5). In de tekening hebben we ons beperkt tot alle krachten in het x, y-vlak. De zwaartekracht en opwaartse Archimedeskracht heffen mekaar op in de z-richting.

2. *Isoleer het beschouwde object, vervang het object door een puntmassa waarop alle krachten inwerken.* (zie figuur 3.5).



Figuur 3.5: voorbeeld 2 Krachtendiagramma.

3. *Kies een passend x-y assenstelsel (maak een eenvoudige keuze)* Hier kiezen we de x-as in de richting van de beweging. (zie figuur 3.5).

4. *Projecteer de krachten op de x- en y-as.*

   $F_{1x}=F_1 \cos 45°$
   $F_{2x}=F_2 \cos 34°$
   $F_{1y}=F_1 \sin 45°$
   $F_{2y}=-F_2 \sin 34°$

5. *Pas de tweede wet van Newton toe in elke coördinaatrichting en analyseer zo de beweging in elke richting apart.*

$F_{1x} + F_{2x} = ma_x$ (1)
$F_{1y} + F_{2y} = ma_y$ (2)

6. *Wat wordt er precies gevraagd?* De resulterende kracht moet volgens de x-as liggen. Dit wil zeggen dat de resulterende kracht horizontaal ligt en dus geen y-component heeft. Vergelijking (2) wordt dan:

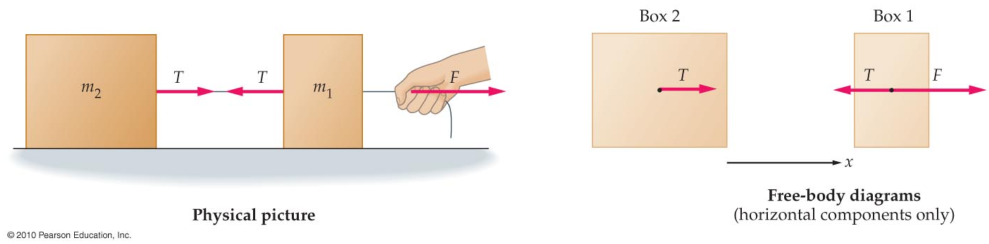
$$F_{1y} + F_{2y} = ma_y = 0$$

$$F_1 \sin 45° - F_2 \sin 34° = 0$$

$$F_1 \sin 45° = F_2 \sin 34°$$

$$F_1 = \frac{F_2 \sin 34°}{\sin 45°} = \frac{130 \sin 34°}{\sin 45°} = 103N$$

Toepassing : Gekoppelde objecten We passen de tweede wet van Newton toe op objecten die met mekaar verbonden zijn. In dit voorbeeld wordt er met een kracht $\vec{F}$ getrokken aan twee dozen die verbonden zijn door een massaloos touw en die schuiven over een wrijvingsloos oppervlak. Zo ontstaat er een *spanning* in het touw en bewegen de dozen verder met dezelfde versnelling $\vec{a}$. Stel dat de massa's van de dozen gekend zijn. Bepaal dan de spankracht in het touw en de versnelling van de dozen. We maken weer gebruik van het stappenplan.



Figuur 3.6: Twee dozen verbonden door een massaloos touw worden voortgetrokken. Zo krijgen de twee dozen dezelfde versnelling. In de rechtse figuur wordt het krachtendiagramma voorgesteld, hierbij beschouwen we elke doos als een apart systeem.

1. *Teken alle krachten op het object* (zie figuur 3.6).

2. *Isoleer de twee beschouwde objecten*
   Vervang de twee dozen door twee puntmassa waarop de krachten inwerken. (zie figuur 3.6b). Op doos 1 met massa m_1 werken twee krachten: de trekkracht $\vec{F}$ naar rechts en de spankracht $\vec{T}$ naar links. Op doos 2 met massa m_2 werkt slechts één kracht, nl. de spankracht $\vec{T}$ naar rechts toe. (zie figuur 3.6b).

3. *Kies een passend x-y assenstelsel (maak een eenvoudige keuze)*
   Hier kiezen we de x-as in de richting van de beweging, naar rechts dus.

4. *Projecteer de krachten op de x- en y-as.*
   Vermits alle krachten horizontaal zijn, zijn alle x-projecties even groot als de krachten zelf.

5. *Pas de tweede wet van Newton toe voor elk object in elke coördinaatrichting en analyseer zo de beweging in elke richting apart.*
We dienen hier enkel de x-richting te bekijken.

$$\text{Doos 1 :} \quad F - T = m_1 a_1 = m_1 a \ (1)$$

$$\text{Doos 2 :} \quad T = m_2 a_2 = m_2 a \ (2)$$

Merk hierbij op dat beide dozen dezelfde versnelling krijgen dus $a_1 = a_2 = a$. Wiskundig gezien is dit een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden T en a. Dit is oplosbaar met behulp van substitutie of combinatie (zie deel wiskunde, hoofdstuk veeltermvergelijkingen en stelsels). Tellen we beide vergelijkingen op dan bekomen we:

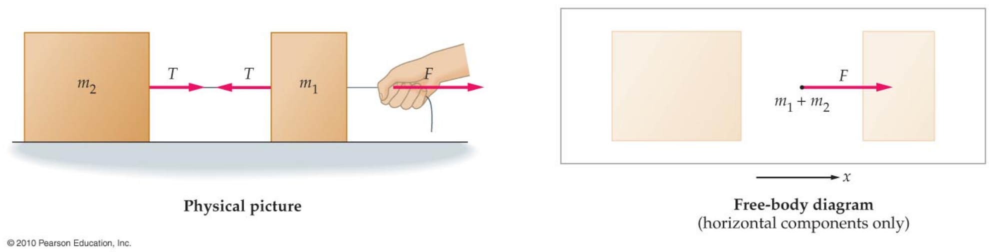
$$F = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Wanneer we deze laatste uitdrukking voor a substitueren in vergelijking (2) bekomen we:

$$T = m_2 a = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$$

We hebben het probleem hier opgesplitst in twee deelproblemen (voor elke doos een bewegingsvergelijking). Een alternatieve oplosmethode bestaat erin om de twee dozen als één geheel te beschouwen, waarop één uitwendige kracht $\vec{F}$ werkt (zie figuur 3.7). De spankrachten in het touw worden dan inwendige krachten die mekaar compenseren en bovendien geen rol spelen in de tweede wet van Newton. Bijgevolg is de horizontale versnelling a simpelweg gelijk aan: $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$. Dit is duidelijk een snellere methode.



Figuur 3.7: Twee dozen verbonden door een touw worden voortgetrokken. In de rechtse figuur wordt het krachtendiagramma voorgesteld. In dit geval worden de dozen als één geheel beschouwd met totale massa $m_1 + m_2$ waarop slechts één uitwendige kracht F werkt.

3.3 Soorten krachten

3.3.1 Gewicht

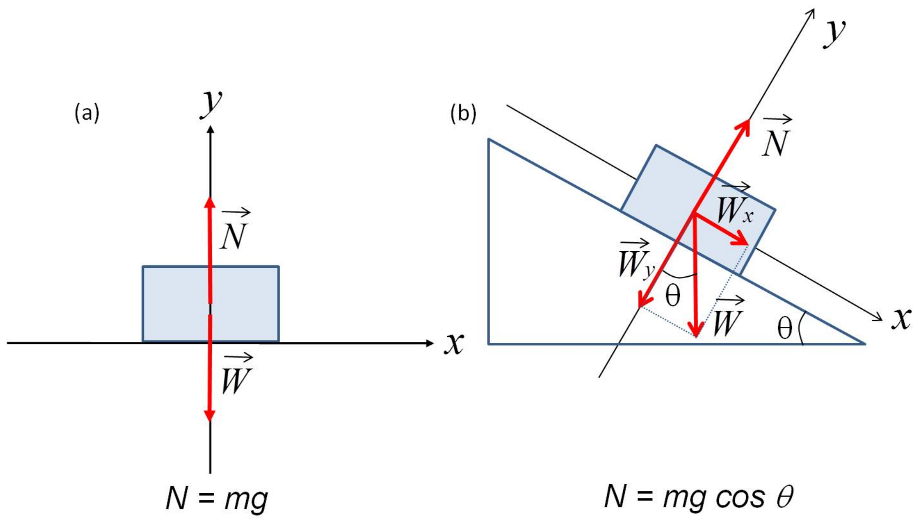
Het *gewicht* van een voorwerp op het aardoppervlak is de *zwaartekracht* door de aarde uitgeoefend op het voorwerp. Hoe groter de massa van het voorwerp, hoe groter het gewicht. Merk op dat het gewicht een kracht is uitgedrukt in Newton, terwijl massa uitgedrukt wordt in kilogram. Het gewicht $\vec{W}$ is een vector met een grootte, richting en zin. De grootte is $W = mg$ en de richting en zin zijn deze van de gravitatie- of valversnelling $\vec{g}$.

$$\vec{W} = m\vec{g}$$

3.3.2 Normaalkracht

Veronderstel een boek dat (in rust) op tafel ligt. De zwaartekracht werkt in op het boek, toch versnelt het boek niet naar beneden. Er moet dus (volgens de tweede wet van Newton) nog een kracht zijn die de zwaartekracht compenseert. Deze kracht wordt uitgeoefend door de tafel op het boek. Deze kracht wordt *de normaalkracht* genoemd en staat loodrecht op het oppervlak. We gebruiken het symbool $\vec{N}$.

De grootte van de normaalkracht wordt bepaald door te eisen dat het voorwerp op het oppervlak moet blijven. Voor een horizontaal oppervlak (geschetst in figuur 3.8(a)) is de normaalkracht in grootte gelijk aan het gewicht van het voorwerp ($N = mg$). Deze gelijkheid geldt echter niet altijd. Dit is duidelijk te zien in figuur 3.8(b) waar een voorwerp op een schuin oppervlak ligt. Na projectie van de zwaartekracht $\vec{W}$ op de gekozen x- en y-as, is duidelijk dat $N = W_y = mg\cos\theta$ opdat de krachten in de y-richting elkaar compenseren. Uit de tweede wet van Newton volgt dan dat er geen versnelling is in de y-richting zodat het voorwerp inderdaad op het oppervlak blijft (in de y-richting). Merk op dat de x-component van de zwaartekracht $\vec{W}_x$ het voorwerp naar beneden doet glijden (tenzij er veel wrijving is, zie volgende paragraaf).



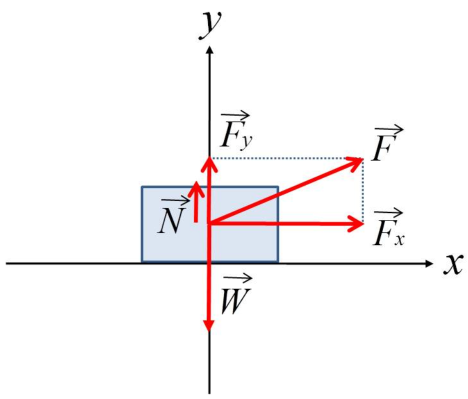
Figuur 3.8: Normaalkracht door een oppervlak op een voorwerp uitgeoefend. Dit voor een (a) horizontaal oppervlak en een (b) schuin oppervlak. In (b) zien we duidelijk dat de normaalkracht in grootte niet altijd gelijk is aan het gewicht van het voorwerp.

In figuur 3.9 wordt een situatie geschetst waar ook de normaalkracht in grootte niet gelijk is aan het gewicht van het voorwerp. Een voorwerp ligt op een horizontaal oppervlak en wordt onder een bepaalde hoek verdergetrokken door een uitwendige kracht $\vec{F}$. Het voorwerp komt hierbij niet los van het oppervlak. Bijgevolg moeten de krachten (volgens tweede wet van Newton) in de y-richting compenseren:

$$\sum F_y = ma_y = 0$$

$$N + F_y - W = 0$$
$$N = W - F_y = mg - F_y$$

We zien dus dat de normaalkracht in grootte kleiner is dan het gewicht van het voorwerp. Dit is te verwachten omdat de trekkracht de normaalkracht 'helpt' om de zwaartekracht te compenseren. In de x-richting zorgt F_x voor een versnelling $a_x = \dfrac{F_x}{m}$.



Figuur 3.9: Normaalkracht door een horizontaal oppervlak op een voorwerp uitgeoefend. Op het voorwerp werkt nog een bijkomende uitwendige kracht $\vec{F}$. In dit geval is de normaalkracht in grootte ook niet gelijk aan het gewicht van het voorwerp.

3.3.3 Wrijvingskracht

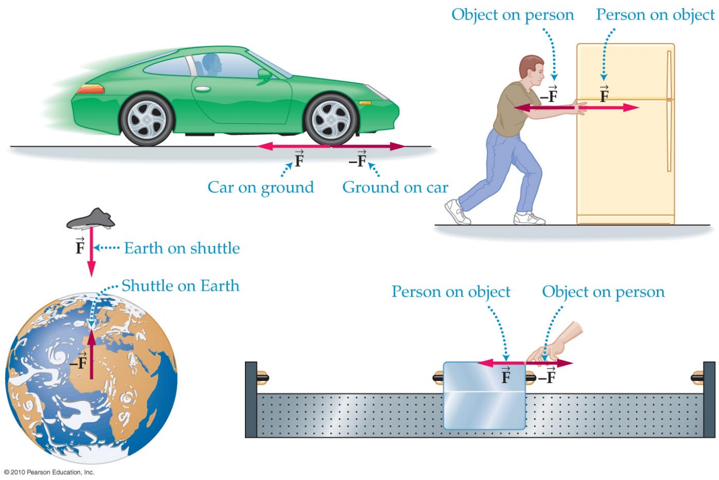
Oppervlakken zijn niet altijd perfect glad. Wanneer een voorwerp over een ruw oppervlak geduwd wordt, oefent het oppervlak een *dynamische wrijvingskracht* $\vec{f_k}$ uit op het voorwerp, evenwijdig aan het oppervlak. Deze kracht is evenredig met de normaalkracht en de wrijvingscoëfficiënt μ_k (afhankelijk van het materiaal van het oppervlak).

$$\vec{f_k} = \mu_k \vec{N}$$

3.4 Derde wet van Newton

Derde wet van Newton
De kracht van voorwerp 1 op voorwerp 2 is gelijk en tegengesteld aan de reactiekracht van voorwerp 2 op voorwerp 1. Bijgevolg komen krachten voor in paren, waarvan beide krachten gelijk zijn in grootte maar tegengesteld in zin.

Deze wet is ook bekend als de wet van 'actie en reactie'. Merk op dat de actie- en reactiekrachten altijd inwerken op *verschillende* objecten. Dit wordt geïllustreerd in figuur 3.10.



Figuur 3.10: Enkele voorbeelden van actie-en reactieparen.

3.5 Beschrijving en dynamica van cirkelvormige beweging

In hoofdstuk 2 over kinematica hebben we *rechtlijnige bewegingen* besproken. De verplaatsing is dan volgens een rechte. Als de snelheidsvector constant blijft, spreken we van een éénparig rechtlijnige beweging. Is de versnellingsvector constant, dan is de beweging éénparig versneld. De versnellingsvector $\vec{a}$ is gericht evenwijdig (of tangentieel) aan de bewegingsrichting en kan gelijk of tegengesteld gericht zijn aan de snelheidsvector. Als de versnellingsvector en de snelheidsvector dezelfde richting en zin hebben, neemt de grootte van de snelheid toe. Zijn de richting en zin van de snelheidsheidvector en de versnellingsvector tegengesteld, dan neemt de grootte van de snelheid af.

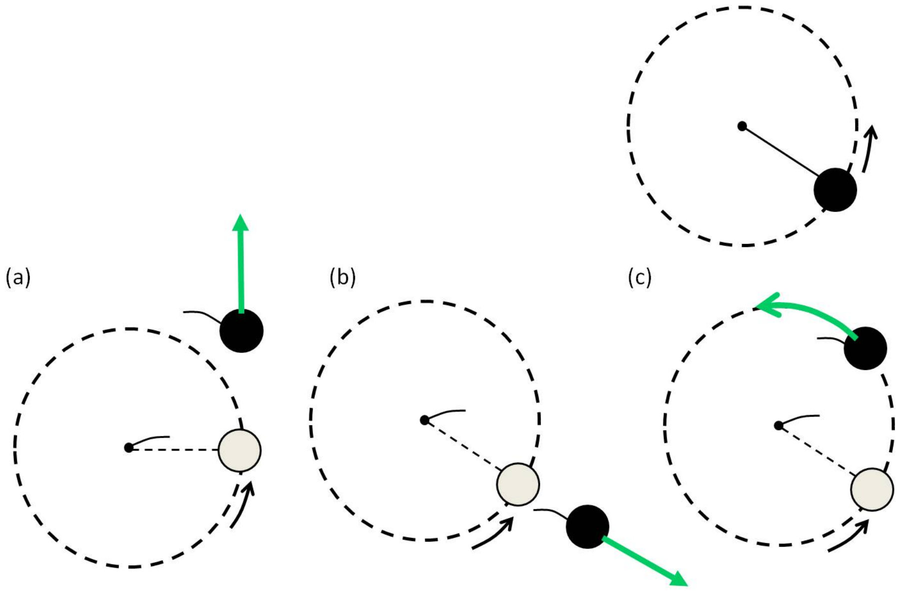
Voor een *kromlijnige beweging* verandert de snelheid voortdurend van richting, bijgevolg is er *altijd* een *versnelling* (verandering van snelheid = versnelling). De versnelling hiervoor verantwoordelijk is de *centripetale versnelling*. De meest eenvoudige kromlijnige beweging is de *cirkelbeweging*.

Denkvraag Stel dat een bal wordt rondgeslingerd aan een touw. Wat gebeurt er met de bal als het touw breekt? Bekijk hiervoor onderstaande figuur 3.11.

Volgens de eerste en tweede wet van Newton blijft de snelheid (= vector) van een object behouden als er geen kracht op inwerkt. Met andere woorden, er is een kracht nodig om de grootte of de richting van de snelheid te veranderen, en dus om de bal op de cirkelbaan te houden. Als het touw breekt valt deze kracht weg, en vliegt de bal rechtdoor. Het juiste antwoord is dus (a). Deze kracht wordt de *centripetale kracht* genoemd en veroorzaakt de *centripetale versnelling* :

$$f_{cp} = ma_{cp} = m\frac{v^2}{r}.$$

Hierbij is m de massa van het object en v de grootte van de snelheid van het object.

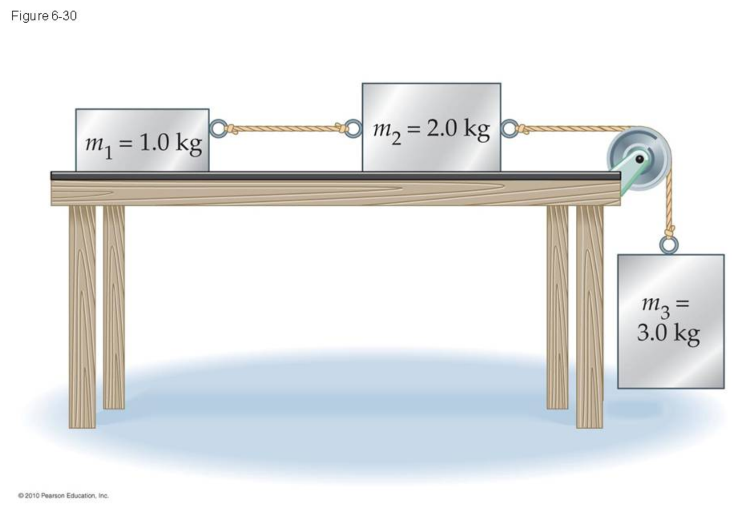


Figuur 3.11: Denkvraag over cirkelvormige beweging: wat gebeurt er met de bal als het touw breekt? Kies het juiste antwoord.

3.6 Oefeningen

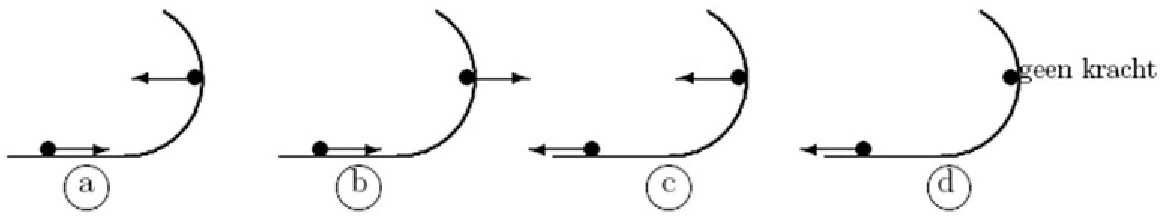
1. Een skiër met massa $m = 65$ kg glijdt langs een wrijvingsloze helling naar beneden. De helling maakt een hoek van 22° met de horizontale.(a) Bepaal de richting en grootte van de resulterende kracht op de skiër. Wordt deze resulterende kracht groter, kleiner of blijft ze dezelfde als de helling steiler wordt? Verklaar.

2. Zoek de versnelling van de massa's weergegeven in figuur 3.12. Gegeven is dat $m_1 = 1.0$ kg, $m_2 = 2.0$ kg en $m_3 = 3.0$ kg. Veronderstel hierbij dat de tafel wrijvingsloos is.



Figuur 3.12: oefening 2

3. In onderstaande figuur worden twee posities weergegeven van een wagen die over een horizontaal vlak in een cirkelvormige bocht rijdt. In het rechte stuk voor de bocht vertraagt de wagen om de bocht met een constante snelheid te nemen. We stellen de resulterende kracht op de wagen voor door een pijl. In welke figuur wordt voor beide posities (in het rechte stuk en in de bocht) de richting van de kracht juist weergegeven?



4. Je fietst door een bocht met een constante snelheid van 18 km/u. Wanneer je diezelfde bocht neemt met een constante snelheid van 25 km/u, is je versnelling anders dan in het eerste geval? Licht uw antwoord toe.

5. Je fietst met een snelheid van 18 km/u door een scherpe bocht, daarna neem je met dezelfde snelheid een flauwe bocht, is je versnelling in beide gevallen gelijk of niet? Leg uw antwoord uit.

Hoofdstuk 4

Elektrische netwerken

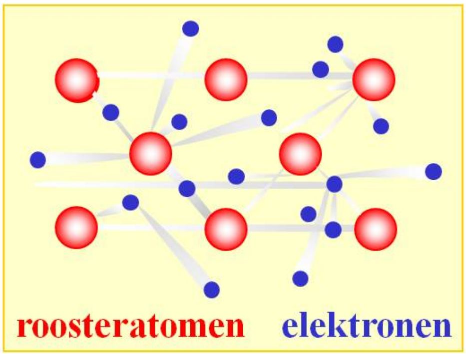
Belangrijkste concepten : Stroom - spanning - weerstand

4.1 Wat is elektrische stroom?

Elektrische stroom is de hoeveelheid lading die in een tijdsinterval door een doorsnede van een geleider stroomt, gedeeld door dit tijdsinterval. De eenheid van elektrische stroom is de Ampère (1A=1C/s).

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Transport kan alleen maar als ladingen vrij kunnen bewegen, bv. elektronen in metalen geleiders, ionen in elektrolyten, geïoniseerde materie in sterren,... Een *elektrisch veld* is nodig voor dit *ladingentransport*. Een *spanningsbron* (bv. een batterij) zorgt dat er steeds een veld is binnen de geleider zodat de stroom blijft lopen. De richting van de elektrische stroom is deze waarin positieve ladingen bewegen. Bijgevolg is de stroomrichting volgens de richting van het elektrisch veld in de geleider, of anders uitgedrukt: in de richting van afnemende potentiaal (van + naar -). We kunnen de elektrische stroom vergelijken met water dat door een tuinslang vloeit waarbij elk uiteinde door een persoon wordt vastgehouden. Indien beide uiteinden op dezelfde hoogte worden gehouden, vloeit er geen water. Als een persoon één uiteinde hoger houdt, zal het water beginnen vloeien van hoog naar laag.



Figuur 4.1: Normaal metaal: elektronen bewegen tussen de roosteratomen (bv. koperatomen) en zorgen voor de elektrische stroom.

In een geleider (bijvoorbeeld koperdraad, aluminium) zorgen de elektronen voor de elektrische stroom (zie figuur 4.1). De richting van de stroom in een geleider is bijgevolg tegengesteld aan de richting van de stroom van de elektronen. Botsingen van elektronen aan hindernissen zoals onzuiverheden, onvolmaaktheden van het rooster,... veroorzaken elektrische weerstand (energieverlies onder de vorm van warmte).

4.2 Wet van Ohm

Om elektronen te transporteren door een geleider is er een spanningsverschil nodig over de uiteinden. Dit wordt in stand gehouden door een spanningsbron (bv. een batterij). Het spanningsverschil V nodig om een stroom I door een geleider met weerstand R te sturen, wordt gegeven door de wet van Ohm

$$V = IR.$$

De SI-eenheid van spanning is Volt (1 V). De wet van Ohm is genoemd naar de duitse fysicus Georges Simon Ohm (1789-1854). Als we de wet van Ohm herschrijven naar de weerstand, bekomen we:

$$R = \frac{V}{I}$$

Hieruit volgt duidelijk de eenheid van weerstand, 1 volt per ampere. Dit wordt gedefinieerd als 1 Ohm = $1V/A$ ($1\Omega = 1V/A$).

Veronderstellen we nu een geleider van lengte L en doorsnede A. De weerstand van de draad zal dan evenredig zijn met de lengte ervan en omgekeerd evenredig met de doorsnede. Kijken we terug naar het voorbeeld met het stromende water in de tuinslang. Bij een zeer lange tuinslang zal de weerstand ondervonden door het water groot zijn in vergelijking met een kortere tuinslang. Anderzijds zal een tuinslang met een grotere doorsnede het water makkelijker laten doorstromen. Zo komen we tot de weerstand van een geleider met lengte L, doorsnede A en resistiviteit[1] ρ

$$R = \rho\frac{l}{A}.$$

Het vermogen P geleverd door de bron en gedissipeerd door de weerstand wordt gegeven door:

$$P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R}$$

en wordt uitgedrukt in Watt (1W).

Invloed van spanning en weerstand op de stroomsterkte : Vul aan.
Stijgt de spanning over eenzelfde weerstand dan .... de stroom door die weerstand in dezelfde mate; de stroomsterkte in een weerstand is bijgevolg .... evenredig met de spanning over de weerstand.
Vergroot de weerstand bij een constante spanning dan .... de stroom in dezelfde mate; de stroomsterkte in een verbruiker is bijgevolg .... evenredig met de waarde van zijn weerstand.

[1] De resistiviteit wordt uitgedrukt in Ωm en is materiaalafhankelijk.

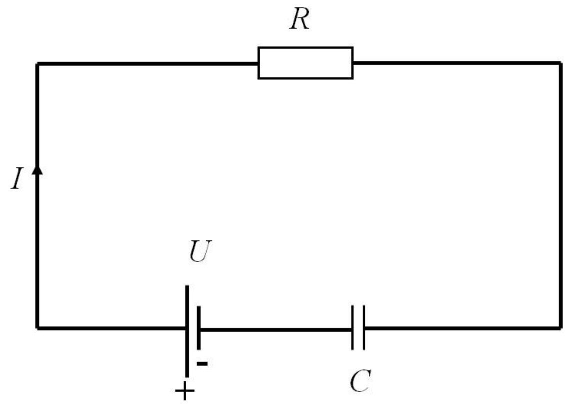
Figuur 4.2: Weerstanden.

4.3 Elektrisch netwerk

Een elektrisch netwerk bestaat uit een spanningsbron, schakelaars, weerstanden, condensatoren, spoelen die allen verbonden zijn door geleidende draden. Condensatoren en spoelen bespreken we niet in deze cursus.

4.3.1 Eenvoudig netwerk: één lus

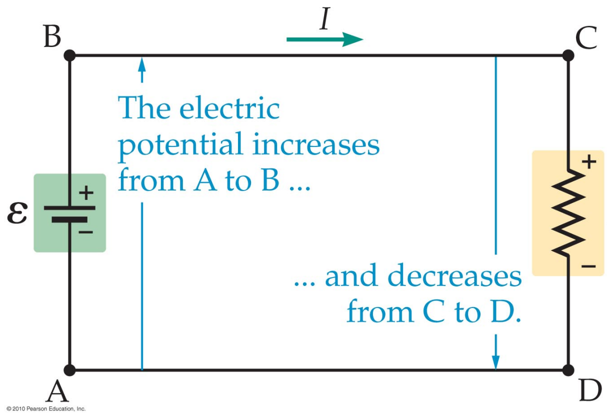
Een zeer eenvoudig elektrisch netwerk waarbij de geleidende draden geen vertakkingspunten of knooppunten hebben, wordt voorgesteld in figuur 4.3. Belangrijk in een netwerk zonder knooppunten (één lus) is dat de stroom overal dezelfde is en loopt van hoge naar lage potentiaal (van + naar -). Er kunnen geen ladingen verloren gaan.



Figuur 4.3: Eenvoudig elektrisch netwerk bestaande uit één lus.

Tweede wet van Kirchhoff. De algebraïsche som van de potentiaalverschillen over de verschillende elementen in de lus is gelijk aan nul (wet van behoud van energie).

Deze potentiaalverschillen kunnen zowel positief als negatief zijn. Dit wordt geïllustreerd in figuur 4.4. De elektrische potentiaal neemt toe van A naar B, dus van de negatieve naar de positieve plaat van de spanningsbron. De elektrische potentiaal daalt van C naar D, dus als een stroom door een weerstand loopt, daalt de potentiaal in de richting van de stroom. Tenslotte is er geen potentiaalverschil als we van B naar C en van D naar A gaan, we passeren immers geen weerstanden waar de potentiaal kan dalen (draden worden verondersteld wrijvingsloos te zijn). Merk op dat het potentiaal- of spanningsverschil in deze figuur met ϵ wordt aangeduid, terwijl meestal het symbool U hiervoor gebruikt wordt.



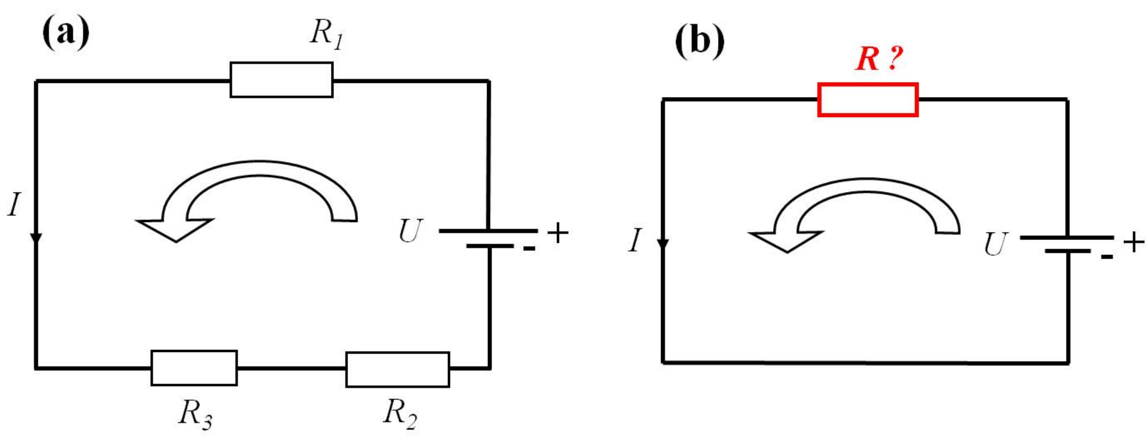
Figuur 4.4: Tweede wet van Kirchhoff.

Passen we nu de tweede wet van Kirchhoff toe op het netwerk bestaande uit 3 in *serie* geschakelde weerstanden voorgesteld in figuur 4.5(a). Er zijn geen vertakkingspunten in de keten, dus door elke weerstand vloeit dezelfde stroom. De ronde pijl duidt op de gekozen omloopzin. Als we in die draairichting de kring doorlopen volgt uit de tweede wet dat:

$$U - IR_1 - IR_3 - IR_2 = 0 \text{ of } U - I(R_1 + R_3 + R_2) = 0 \ (1)$$

De te zoeken vervangingsweerstand of equivalente weerstand R van deze drie in serie geschakelde weerstanden, wordt in het rood voorgesteld in figuur 4.5(b). Na toepassen van de tweede wet van Kirchhoff $U - IR = 0$ in deze kring en vergelijken met uitdrukking (1) zien we duidelijk dat

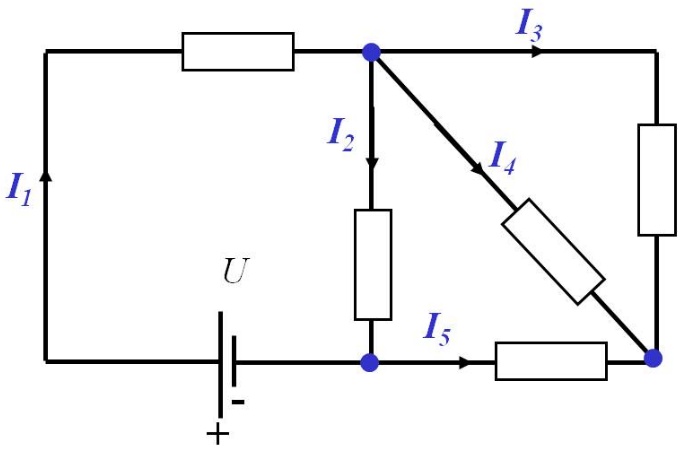
$$R = R_1 + R_2 + R_3.$$



Figuur 4.5: Weerstanden in serie.

4.3.2 Netwerken bestaande uit 2 of meerdere lussen

Een netwerk bestaande uit 2 of meerdere lussen is gekenmerkt door *vertakkingspunten* of *knooppunten* waar 3 of meer geleidende draden samenkomen (zie figuur 4.6).

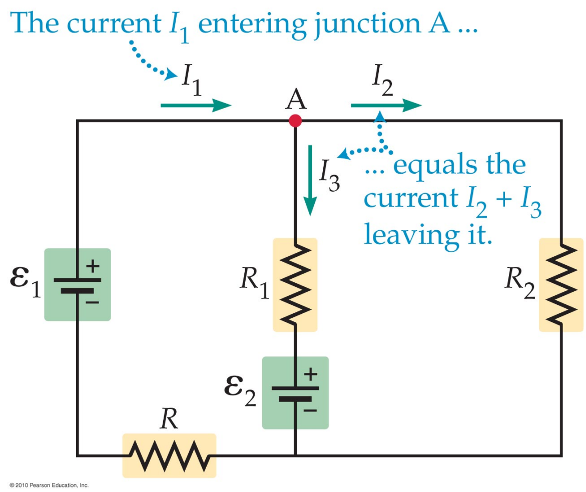


Figuur 4.6: Netwerk bestaande uit meerdere lussen.

Eerste wet van Kirchhoff. De som van de toekomende stromen is gelijk aan de som van de weglopende stromen (wet van behoud van lading).

Deze wet wordt verduidelijkt in figuur 4.7; in het knooppunt A komt de stroom I_1 toe en de stromen I_2 en I_3 lopen weg. Als we deze aan mekaar gelijkstellen, verkrijgen we:

$$I_1 = I_2 + I_3$$



Figuur 4.7: Eerste wet van Kirchhoff.

Als we de inkomende stromen een positief teken geven en de weglopende stromen een negatief teken, dan kan de eerste wet van Kirchhoff hergeformuleerd worden als: **de algebraïsche som van alle toekomende en weglopende stromen in een knooppunt van een netwerk moet gelijk zijn aan nul**.

Passen we nu de eerste wet van Kirchhoff toe op het netwerk bestaande uit 3 in *parallel* geschakelde weerstanden voorgesteld in figuur 4.8(a). Als we het netwerk hertekenen (figuur 4.8(b)) zien we duidelijk dat er 2 knooppunten A en B zijn waar de bronstroom I opsplitst in 3 deelstromen I_1, I_2 en I_3. Bijgevolg geldt:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \ (1)$$

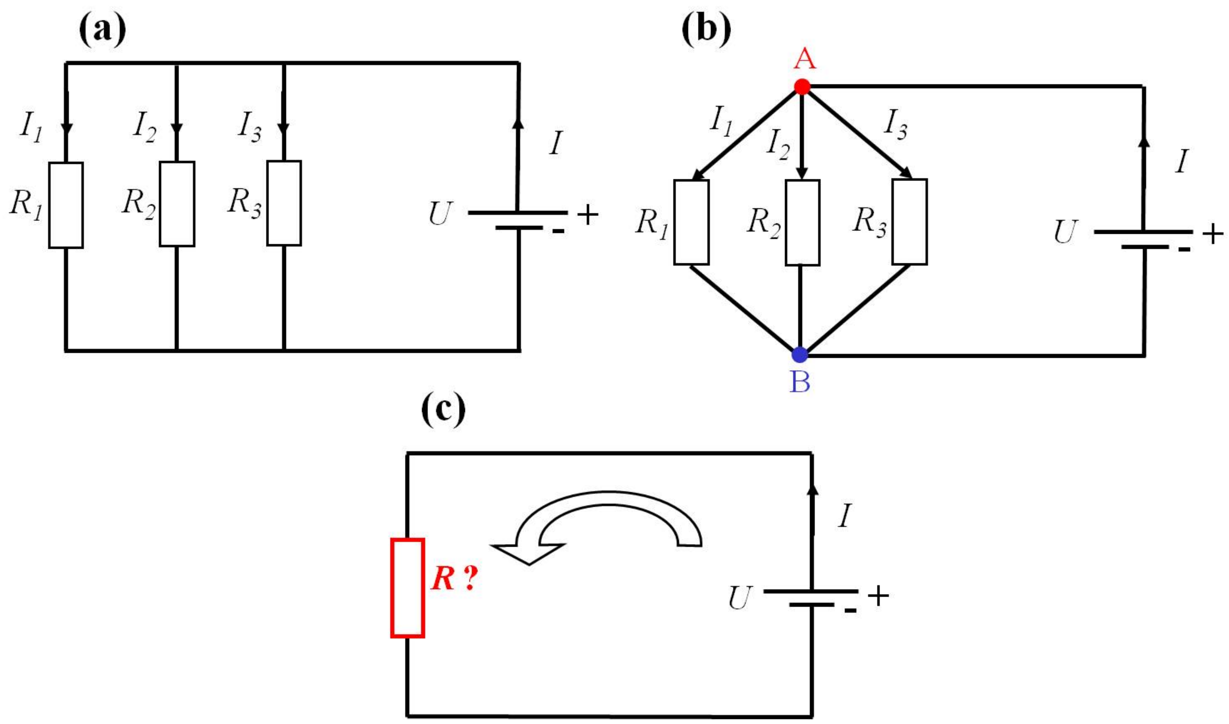
Kiezen we de lus in het netwerk die de bron en weerstand R_1 omvat. Dan volgt uit de tweede wet van Kirchhoff dat $U - I_1R_1 = 0$ of $I_1 = \frac{U}{R_1}$. Op analoge manier volgt voor de twee lussen in het netwerk die telkens de bron en respectievelijk de weerstanden R_2 en R_3 omvatten dat $I_2 = \frac{U}{R_2}$ en $I_3 = \frac{U}{R_3}$. Na invullen in vergelijking (1) krijgen we:

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}$$

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \ (2)$$

De te zoeken vervangingsweerstand R van deze drie in parallel geschakelde weerstanden, wordt in het rood voorgesteld in figuur 4.8(c). Na toepassing van de tweede wet van Kirchhoff $U - IR = 0$ of $\frac{I}{U} = \frac{1}{R}$ en na vergelijking met uitdrukking (2) zien we duidelijk dat

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$



Figuur 4.8: Weerstanden in parallel. Het netwerk voorgesteld in (b) is een hertekende versie van het netwerk voorgesteld in (a).

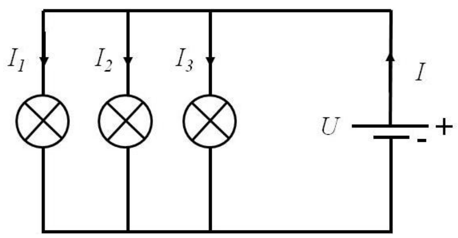
De eerste en tweede wet van Kirchhoff samen laten toe om onbekende stromen en/of spanningen in netwerken te bepalen. In de volgende paragraaf geven we hiervoor een duidelijk stappenplan.

4.3.3 Werkwijze voor oefeningen

1. *Duid alle knooppunten aan in het netwerk.*
2. *Benoem alle stromen en geef voor elke tak de richting van de stroom weer (mbv pijltje). Kies een stroomrichting als deze niet voorspelbaar is.*
3. *n wetten van Kirchhoff opschrijven voor n onbekenden.*
   Eerste wet: telkens volgens de stroomrichtingen gekozen in 1.
   Tweede wet: in elke lus een omloopzin kiezen. Let op voor het teken van het potentiaalverschil:
   - *Stroomrichting over een weerstand volgens de omloopzin : potentiaalverschil gelijk aan $-IR$*
   - *Stroomrichting over een weerstand tegen de omloopzin : potentiaalverschil gelijk aan $+IR$*
   - *Potentiaalverschil over een spanningsbron van - naar + volgens omloopzin : $+U$*
   - *Potentiaalverschil over een spanningsbron van + naar - volgens omloopzin : $-U$*
4. *De vergelijkingen oplossen (stelsel oplossen).*
5. *Bekom je als oplossing een negatieve stroom dan was de oorspronkelijk gekozen stroomrichting voor deze stroom fout gekozen. Vermeld dit in een korte opmerking.*

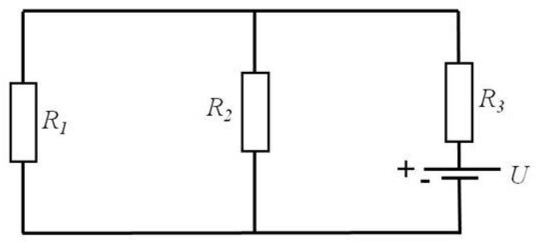
4.4 Oefeningen

1. Geef een voorbeeld hoe 4 weerstanden R kunnen geschakeld worden opdat de totale weerstand opnieuw R is.
2. De onderstaande identieke lampen (met zelfde weerstand R) zijn in parallel geschakeld. Als één van de lampen stuk gaat, hoe verandert dan de stroom I door de bron?

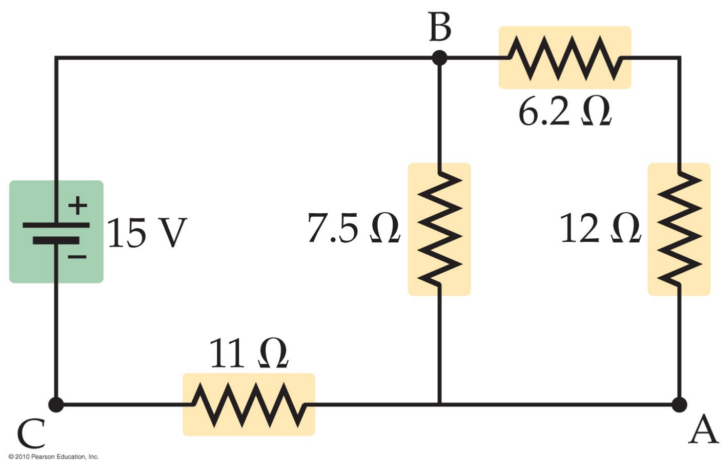


3. Gegeven is onderstaand netwerk met een gegeven spanning $U = 220\ V$ en gegeven weerstanden $R_1 = 484\ \Omega$, $R_2 = 48.4\ \Omega$ en $R_3 = 0.5\ \Omega$. Zoek de verschillende

stromen in het netwerk. (a) Bereken de stromen eerst door de equivalente weerstand te zoeken. (b) Bereken daarna de stromen opnieuw via de wetten van Kirchhoff. (c) Wat is de spanning over R_1? Wat is de spanning over R_2?



4. Bereken de stroom door elke weerstand in onderstaand elektrisch netwerk.



Figuur 4.9: Bereken de stroom door elke weerstand.

Hoofdstuk 5

Arbeid en energie

In dit hoofdstuk definiëren we arbeid die door een kracht wordt uitgeoefend en tonen aan hoe die arbeid gerelateerd is met de kinetische energie. Vervolgens bespreken we kort potentiële energie en zien wanneer mechanische energie behouden blijft.

> **Belangrijkste concepten : Arbeid - kinetische energie - potentiële energie**

5.1 Arbeid verricht door een constante kracht

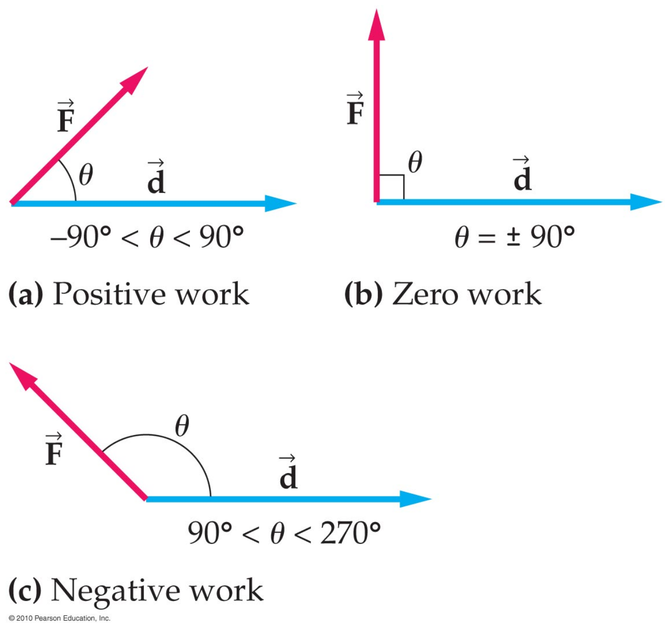
Wanneer je een doos verderduwt over de vloer, verricht je arbeid. Hoe groter de uitgeoefende kracht, hoe groter de arbeid. Hoe groter de afstand waarover je de doos duwt, hoe groter de verrichte arbeid. Als de doos wordt verdergeduwd met een constante kracht $\vec{F}$ in de richting van de verplaatsing $\vec{d}$ dan is de verrichte arbeid:

$$W = Fd.$$

De arbeid wordt uitgedrukt in newton-meter (1 Nm = 1 Joule). Merk op dat als we een zware massa in ons hand omhoog blijven houden, we natuurkundig gezien geen arbeid verrichten omdat er geen verplaatsing is. Toch vereist dit veel lichamelijke arbeid van ons spierweefsel. Als we een kracht uitoefenen onder een bepaalde hoek met de verplaatsing (bv. een trolley reiskoffer verdertrekken onder een bepaalde hoek) wordt de verrichte arbeid gegeven door:

$$W = (F \cos\theta)d = Fd\cos\theta.$$

Met andere woorden, de arbeid W van een kracht $\vec{F}$ op een voorwerp (punt) is gelijk aan de verplaatsing d die dat voorwerp maakt, vermenigvuldigd met de component van de kracht in de richting van de verplaatsing ($F\cos\theta$). De arbeid van de kracht is positief als de component van de kracht in de richting van de verplaatsing positief is (scherpe hoek tussen kracht en verplaatsing) en negatief als de component van de kracht in de richting van de verplaatsing negatief is (stompe hoek tussen kracht en verplaatsing). De arbeid van een kracht is nul als de kracht loodrecht staat op de verplaatsing (zie figuur 5.1).



Figuur 5.1: Afhankelijk van de hoek tussen de kracht en de verplaatsing kan de arbeid (work) positief, negatief of nul zijn.

5.2 Arbeid en kinetische energie

Een systeem dat in staat is *arbeid* te leveren bezit *energie*. Energie wordt uitgewisseld door arbeid te leveren of te ontvangen. Energie is equivalent met arbeid. Merk op dat zowel arbeid als energie scalaire grootheden zijn, beide uitgedrukt in dezelfde eenheid Joule. De *kinetische energie* is de energie die een deeltje bezit omwille van zijn beweging. We gebruiken hiervoor het symbool K.

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

In tegenstelling tot arbeid, is kinetische energie altijd positief.

Als een puntmassa een kracht ondervindt, kan haar snelheid veranderen. Een snelheid veroorzaakt een verplaatsing. Er zal dus een verband zijn tussen arbeid (kracht maal verplaatsing) en snelheidsverandering.

De arbeid van alle krachten werkende op een puntmassa (anders gezegd: de arbeid van de resulterende kracht) is gelijk aan de verandering van kinetische energie van de puntmassa. Dit is de **wet van arbeid en kinetische energie** die als volgt wordt uitgedrukt:

$$W_{\text{totaal}} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Met andere woorden, wanneer op een object een kracht werkt over een bepaalde afstand (d.i. arbeid verrichten), resulteert dit in een snelheidsverandering van het object. Bijgevolg zal ook de kinetische energie van het object veranderen, en dit met een bedrag gelijk aan de verrichte arbeid.

5.3 Potentiële energie

We kunnen krachten onderverdelen in *conservatieve* en *niet-conservatieve krachten.* De arbeid die een conservatieve kracht verricht is onafhankelijk van het gevolgde pad. De arbeid van een niet-conservatieve kracht daarentegen hangt wel af van de gekozen weg.

Voor conservatieve krachten (gravitatiekracht, zwaartekracht, veerkracht, Coulombkracht) definiëren we de verandering van potentiële energie als het tegengestelde van de arbeid geleverd door die kracht.

$$W_c = -\Delta U = U_i - U_f = -(U_f - U_i)$$

We geven de potentiële energie voor enkele conservatieve krachten.

Conservatieve kracht	**Potentiële energie**
zwaartekracht	$U = mgh$
gravitatiekracht	$U = -\dfrac{G_0 M m}{r}$
veerkracht	$U = \dfrac{1}{2} k x^2$
Coulombkracht	$U = -\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r}$

5.4 Behoudswetten

Mechanische energie is het geheel van kinetische en potentiële energie.

$$E = U + K$$

De arbeid verricht door niet-conservatieve krachten (bv. de wrijvingskracht) is gelijk aan de verandering van mechanische energie van de puntmassa :

$$W_{nc} = \Delta E = E_f - E_i$$

Als er geen niet-conservatieve krachten aanwezig zijn of als ze er wel zijn maar geen arbeid verrichten, is $\Delta E = 0$ of $E_i = E_f$ en blijft dus de mechanische energie behouden.

In een systeem met alleen conservatieve krachten blijft de mechanische energie behouden:

$$E = U + K = \text{constant}$$

5.5 Oefeningen

1. Hoeveel arbeid is nodig om een jogger van 73 kg te versnellen van rust tot 7.7 m/s?

2. Een waterskiër wordt door een horizontaal touw verdergetrokken met een constante snelheid door een boot die zich recht voor de skiër bevindt. Dit gebeurt over een afstand van 65 m, dan valt de skiër. De spanning in het touw is 120 N. (a) Is de arbeid door het touw op de skiër positief, negatief of nul? Verklaar. (b) Bereken de arbeid van het touw op de skiër.

3. Een basketspeler gooit een basketbal (met massa $m = 0.6$ kg) met een snelheid van $v = 8.3$ m/s. De bal vertraagt tot 7.1 m/s aan het hoogste punt. (a) Als we de luchtweerstand verwaarlozen, wat is dan de maximaal bereikte hoogte van de bal (vanaf de beginhoogte van de bal)? (b) Hoe zal dit resultaat beïnvloed worden als de massa van de bal verdubbeld wordt? Verklaar.

Bibliografie

[1] Pearson International Edition, James S. Walker, Addison Wesley, *Physics Fourth Edition.*

[2] Jos Rogiers, *Van fysica naar biofysica, cursustekst KU Leuven*, 2010.

[3] Georges Van der Perre, Luc Labey, *Toegepaste Mechanica 1, cursustekst KU Leuven*, 2006.

[4] R. Silverans, *Algemene natuurkunde, cursustekst KU Leuven*, 2007.

[5] Formularium usolvit, *www.usolvit.be/usolvit/formularium*, versie 24/01/2008.

[6] Remediëringspakket KU Leuven Faculteit wetenschappen, *Vectoren in* $\mathbb{R}^2$ *en vlakke meetkunde*, 2007.

[7] *Prisma, Vademecum van de wiskunde*, Uitgeverij Het Spectrum B.V., 15de druk, 1998