

9. Topologische Bandtheorie

Referenzen: • Bernevig & Hughes, Topological Insulators and Superconductors

9.1 0-dimensionale Beispiele, Topologie und Symmetrie

Topologie: diskrete Dinge, die sich nicht kontinuierlich ändern können.

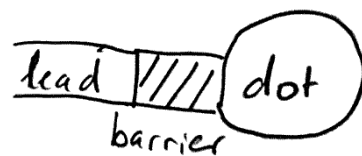
Bedeutung in Physik: falls Diskrettheit zu messbaren Konsequenzen führt. Topologie kann genutzt werden, um Systeme mit Anregungslücke zu klassifizieren.

0-dim. Systeme:

Betrachte Quantensystem mit N Zuständen.

$\Rightarrow$ Hamiltonian $\hat{H} \cong N \times N$ -Matrix

z.B. ein kleiner Quantenpunkt



Fermienergie in lead (Kontakt)

$\Rightarrow$ Zustände mit $E_n < E_F$ sind gefüllt. (setze $E_F = 0$).

Topologie und Systeme mit Anregungslücke

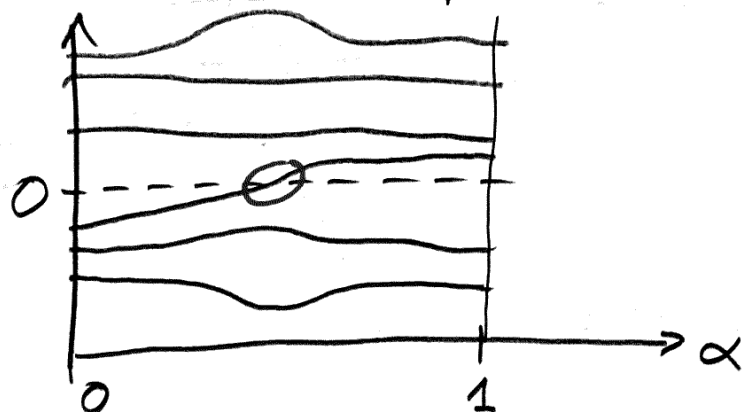
Def.: Zwei Systeme sind topologisch äquivalent, wenn sie kontinuierlich ineinander deformiert werden können, ohne die Anregungslücke zu schließen.

Betrachte beliebiges symmetrisches H und deformiere es in H' : $H(\alpha) = \alpha H' + (1-\alpha)H$

$\alpha=0$: H vom Anfang, $H(\alpha) = H$

$\alpha=1$: $H(\alpha) = H'$

Betrachte Energiespektrum: z.B.



Nulldurchgang: Energielückenbedingung gebrochen.

Frage: sind H und H' topologisch äquivalent?

Anderes Beispiel:

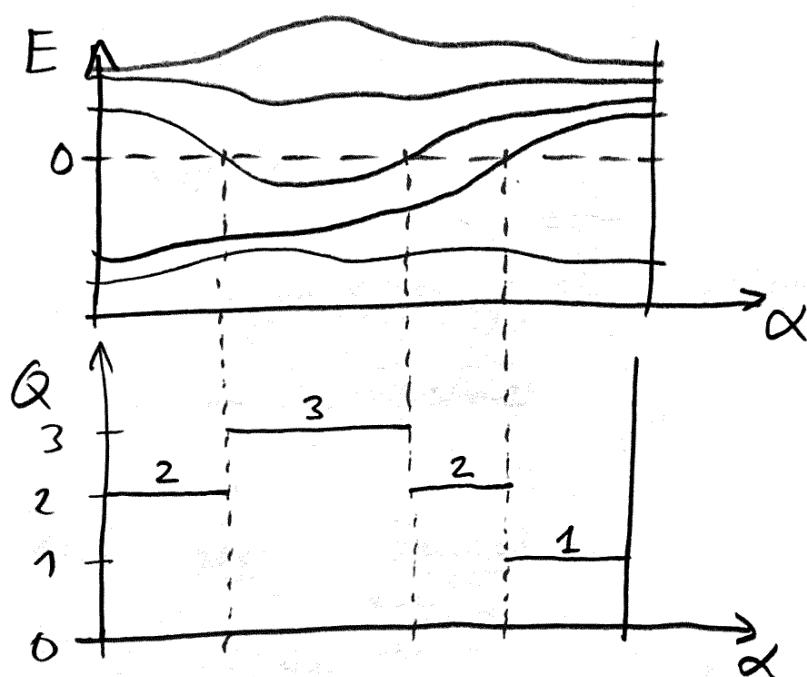


$\Rightarrow$ zwei Nulldurchgänge, aber evtl. existiert ein anderer Pfad ohne Nulldurchgänge?

$\Rightarrow$ Wir brauchen ein besseres Konzept, um topologische Äquivalenz zu bestimmen!

Konzept: Topologische Invariante

Idee: Zähle # Zustände mit $E < 0$
 $=$ # gefüllter Zustände
 $\equiv$ topologische Invariante Q



$\Rightarrow$ es genügt, die
Nulldurchgänge
zu betrachten!

Rolle von Erhaltungssätzen:

Betrachte Hamiltonian mit Symmetrie einschränkung:

$\exists$ eine Unitäre U , z.B., $U = \sigma_z \otimes 1$, so dass

$$U^\dagger H U = H$$

$\Rightarrow H$ kann blockdiagonalisiert werden:

$$H_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \boxed{H_1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \boxed{H_2}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q[H] = Q[H_1] + Q[H_2]$$

$\Rightarrow$ unitäre Symmetrien sind nützlich, um die Dimensionalität zu reduzieren, aber ansonsten langweilig.

Andere Symmetrien sind interessanter, z.B. Zeitinversionssymmetrie.

Zeitinversionssymmetrie (time-reversal symmetry, trs)

Sind reelle Matrizen speziell? Ja! Sie sind Manifestation von trs.

trs ist repräsentiert durch anti-unitären Operator

$$T = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unitär}}}{U} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{komplexe Konjugation}}}{K}$$

Bei reellen Matrizen ist $H = H^*$, $\Rightarrow$ kommutieren mit T .

Bei komplexen Matrizen ändert sich nichts, solange $T = K$ gilt ($U = \mathbb{1}$).

Aber: Wichtiger Fall, wo trs einen Unterschied ausmacht: Spin- $\frac{1}{2}$ Systeme.

Für Spin- $\frac{1}{2}$ gilt: $T = i\sigma_y K$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \boxed{T^2 = -1}$$

$\Rightarrow$ trs impliziert dann $H = \sigma_y H^* \sigma_y$

$\Rightarrow$ Jeder Energieeigenwert ist doppelt entartet

(Kramers-Entartung) $\Rightarrow$ Warum?
Kramers-Theorem
(s. unten)

$\Rightarrow Q$ kann nur gerade Werte annehmen

$$Q = 0, 2, 4, \dots$$

diskrete

$\Rightarrow$ Beispiel dafür, wie Symmetrie die Topologie beeinflusst.

Exkurs: Zeitinversionssymmetrie und Kramers-Theorem

- Symmetrie: Operation, die den Absolutbetrag des inneren Produkts zweier beliebiger Zustände im Hilbertraum $\mathcal{H}$ invariant lässt.
- U Symmetrioperation $\Leftrightarrow$ für bel. $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$
 $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$
 $|\phi'\rangle = U|\phi\rangle \Rightarrow |\langle\phi'|\psi'\rangle| = |\langle\phi|\psi\rangle|$
- Wigner 1930er: U linear oder antilinear

$\swarrow$
 $U(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle)$
 $= \alpha U|\psi\rangle + \beta U|\phi\rangle$

$\Uparrow$
 $U(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle)$
 $= \alpha^* U|\psi\rangle + \beta^* U|\phi\rangle$
- gegeben Symmetrie-Operation U :
wenn $U^{-1} H U = H$ dann hat H "U-Symmetrie"
- wichtige diskrete Symmetrie: Zeitinversionssymmetrie (tr_s)
 - zeitumgekehrter Zustand
 - umgekehrte Zeitevolution
- klassisch: Ort, Impuls $(\vec{r}, \vec{p})$
zeitumgekehrter Zustand $\Theta(\vec{r}, \vec{p}) = (\vec{r}, -\vec{p})$
 $\Theta^2 = \text{Identität (klassisch)}$

- rückwärts?

Vorwärts: $S_f = S_H(t_{\text{end}}, 0) S_i$

$\uparrow$ $\uparrow$
 Zustand Evolutionsoperator
 mit H

rückwärts: $S_f' = S_H(-t_{\text{end}}, 0) \underbrace{\Theta S_i}_{\text{zeitinverteilter Zustand}}$

- Zeitinversionssymmetrie von H

$$\Leftrightarrow \Theta S_f = S_f' \quad \text{für alle } S_i \text{ und } t_{\text{end}}$$

$\Rightarrow$ In einem System mit trs ist der Zustand, der durch umgekehrte Zeitevolution vom zeitinvertierten Anfangszustand erreicht wird, identisch mit dem zeitinvertierten ^{vorwärts} entwickelten Zustand aus dem Anfangszustand.

- Quantenmechanik: $\Theta \equiv$ Zeitumkehr-Operator auf Hilbertraum $\mathcal{H}$.

(wir benutzen wahlweise Θ oder $\mathcal{T}$)

- einzelnes spinloses Teilchen

$$\Theta |\vec{r}\rangle = |\vec{r}\rangle$$

$$\Theta |\vec{p}\rangle = |-\vec{p}\rangle$$

$$|\psi_f\rangle = S_H(t_{\text{end}}, 0) |\psi_i\rangle$$

$$S_H(t_{\text{end}}, 0) \equiv e^{-i H t_{\text{end}} / \hbar}$$

Beginne mit $|\psi_i'\rangle = \Theta |\psi_i\rangle$

$$|\psi_f'\rangle = S_H(-t_{\text{end}}, 0) \Theta |\psi_i\rangle$$

Frage: $\Theta |\psi_f\rangle \stackrel{?}{=} |\psi_f'\rangle$ Falls immer wahr, hat H trs

$\Rightarrow$ falls H trs hat, gilt

$$\Theta e^{-i H t / \hbar} = e^{i H t / \hbar} \Theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Theta \cdot (-i H) = i H \cdot \Theta} \Leftrightarrow H \text{ hat trs}$$

Man könnte nun denken: $\Theta H + H \Theta = \{\Theta, H\} = 0 (*)$

Ergibt das Sinn?

z.B. freies Teilchen $H = \hat{P}^2 / 2m$

$$H |p\rangle = \hat{P}^2 / 2m |p\rangle = p^2 / 2m |p\rangle$$

falls $(*)$ korrekt: $\Theta H |p\rangle = (-\hat{P})^2 / 2m |p\rangle = p^2 / 2m |p\rangle$

$$\stackrel{(*)}{=} -H \Theta |p\rangle = -H |-p\rangle = -p^2 / 2m |p\rangle$$

$$\Rightarrow -p^2 = p^2 \quad \text{!}$$

Warum ist das falsch? Wir hatten implizit Θ als linearen Operator angenommen. FALSCH!

- Wigner: Θ ist antilinear falls trs

$$\Theta(-iH) = +i\Theta H \stackrel{!}{=} iH\Theta$$

$$\Rightarrow \boxed{[\Theta, H] = 0}$$

Θ ist antilinearer Operator, der für trs Systeme mit H kommutiert.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ort: } \Theta^{-1} \hat{\vec{r}} \Theta = \hat{\vec{r}} \\ \text{Impuls: } \Theta^{-1} \hat{\vec{p}} \Theta = -\hat{\vec{p}} \\ \text{Drehimpuls: } \Theta^{-1} \hat{\vec{L}} \Theta = -\hat{\vec{L}} \end{array} \right\} \hat{=} \text{klassisch}$$

- spinloses Teilchen in Zustand $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \int d^3r \psi(\vec{r}) |\vec{r}\rangle$$

$$\Theta|\psi\rangle = \int d^3r \psi^*(\vec{r}) |\vec{r}\rangle \Rightarrow \text{tr-zustand hat Amplitude } \psi^*(\vec{r})$$

$$|\psi'\rangle = \Theta|\psi\rangle \text{ und } |\phi'\rangle = \Theta|\phi\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\psi'|\phi'\rangle = (\langle\phi|\psi\rangle)^* \text{ trs ist antiunitär}$$

- Eigenzustand eines trs H (spinlos), wenn nicht-entartet, hat Wellenfunktion, die reell gewählt werden kann

- $\Theta^2 = 1$ für spinlose Teilchen

- Was ist mit Spin- $1/2$?

- Spin $\vec{S}$ mit $[S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k$

$$\Theta^{-1} \vec{S} \Theta = -\vec{S} \quad (\text{Drehimpuls})$$

- benutze, dass jeder antiunitäre Operator als

$$\Theta = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Unitär}}}{U} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{komplexe Konjugation}}}{K}$$

dargestellt werden kann.

- $|\psi\rangle = \sum_m \psi(m) |m\rangle \Rightarrow K|\psi\rangle = \sum_m \psi^*(m) \underline{K|m\rangle}$
 Basisabhängigkeit von K und damit von Θ

Aber: $K|\psi\rangle$ ist basis-unabhängig

- Was ist das U in Θ ?

$$\Theta|\psi\rangle = UK|\psi\rangle = U \sum_m \psi^*(m) K|m\rangle$$

$$\stackrel{\neq}{=} U \sum_m \psi^*(m) |m\rangle = \sum_m \psi^*(m) U|m\rangle$$

Wähle reelle Basis $|m\rangle \Rightarrow$ genügt, Wirkung von U auf Basis-Kets zu kennen

- Wirkung von U auf $|m\rangle$ muss basis-unabhängig sein, da K basis-unabhängig ist.

Wähle $|\vec{r}\rangle$ (Ortbasis), was ist $U|\vec{r}\rangle$?

Offensichtlich: $U|\vec{r}\rangle = |\vec{r}\rangle$, da $\Theta|\psi\rangle = \int d^3r \psi^*(\vec{r})|\vec{r}\rangle$

$\Rightarrow U \equiv \mathbb{1}$ für Ortbasis

Wähle $|\vec{p}\rangle$ (Impulsbasis)

$$\Rightarrow U|\vec{p}\rangle = |-\vec{p}\rangle$$

- Für spin- $\frac{1}{2}$: $|\psi\rangle = \sum_{\sigma} \int d^3r \underbrace{\psi_{\sigma}(\vec{r})}_{\substack{\uparrow \\ \text{2-Komponenten-Pauli-Spinor}}} |\vec{r}, \sigma\rangle$

- Spinanteil: $|\psi\rangle = \psi_{\uparrow}|\uparrow\rangle + \psi_{\downarrow}|\downarrow\rangle = \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}|\sigma\rangle$

$|\sigma\rangle = \text{Eigenzustand von } S_z$

$$\Theta|\psi\rangle = \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^* \Theta|\sigma\rangle$$

$$\Rightarrow UK|\psi\rangle = \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}^* U|\sigma\rangle$$

$\Rightarrow$ Was sind $U|\uparrow\rangle$ und $U|\downarrow\rangle$?

- Intuition: $\Theta|\uparrow\rangle \sim |\downarrow\rangle$ (Zeitumkehr dreht Spin um)
 $\Theta|\downarrow\rangle \sim |\uparrow\rangle$

U unitär $\Rightarrow \exists$ hermitesches W mit $U = e^{iW}$

• z.B. Rotation um y -Achse um π :

$$U = e^{-i\pi S_y/\hbar}$$

• für $\text{spin} = \frac{1}{2}$: $U = e^{-i\pi S_y/\hbar} = e^{-i\pi \sigma_y/2}$

$$= -i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \Theta |\uparrow\rangle = U |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$$

$$\Theta |\downarrow\rangle = \dots = -|\uparrow\rangle$$

$$\Theta^2 |\uparrow\rangle = -|\uparrow\rangle$$

$$\Theta^2 |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$$

$$\Theta^2 |\psi\rangle = \Theta \left(\sum_{\substack{\sigma=\uparrow,\downarrow \\ \hat{=}\pm}} \psi_\sigma^* \sigma |\bar{\sigma}\rangle \right) = \sum_{\sigma} \psi_\sigma \underbrace{\sigma \bar{\sigma}}_{=-1} |\sigma\rangle = -|\psi\rangle$$

$\Theta^2 = -1$ für $\text{spin} = \frac{1}{2}$ (halbzahligen spin;
Fermionen)

$$\bullet \Theta |\vec{r}\sigma\rangle = \sigma |\vec{r}\bar{\sigma}\rangle$$

$$\Theta |\vec{p}\sigma\rangle = \sigma |\vec{p}\bar{\sigma}\rangle$$

Kramers - Theorem

Sei H ein trs Hamiltonian, $|\psi\rangle$ Eigenzustand mit Energie E , System habe halbzahliges Spin.

trs $\Rightarrow \Theta|\psi\rangle = |\psi'\rangle$ ist ebenfalls Eigenzustand mit Energie E .

Ist $|\psi'\rangle$ ein anderer Zustand als $|\psi\rangle$?

$\Rightarrow$ falls ja, dann ist der Zustand entartet.

Nimm an, er sei nicht entartet: $|\psi'\rangle = e^{i\alpha}|\psi\rangle$

$$\Rightarrow \Theta|\psi\rangle = |\psi'\rangle = e^{i\alpha}|\psi\rangle$$

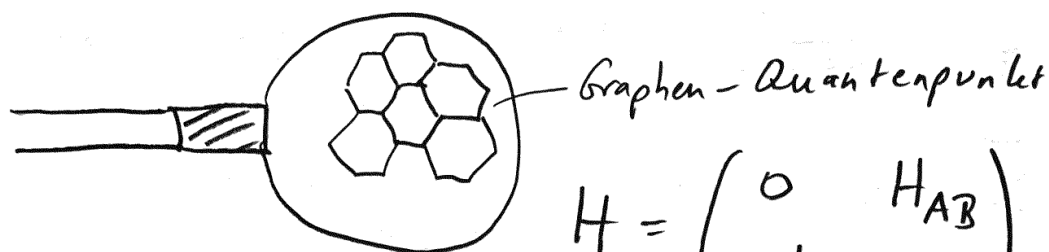
$$\boxed{-|\psi\rangle = \underbrace{\Theta^2}_{=-1}|\psi\rangle = \Theta|\psi'\rangle \stackrel{\Theta \text{ antilinear}}{=} e^{-i\alpha}\Theta|\psi\rangle = \boxed{|\psi\rangle} \quad \text{!}$$

$\Rightarrow |\psi'\rangle$ und $|\psi\rangle$ müssen linear unabhängig sein!

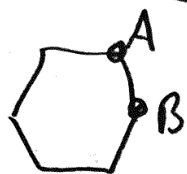
Kramers - Theorem: Jeder Eigenzustand eines halbzahliges Spinsystems mit Zeitumkehrinvarianz ist geradzahlig entartet. $|\psi\rangle$ und $\Theta|\psi\rangle$ sind verschiedene Eigenzustände mit demselben Eigenwert.

(wichtig für " $\mathbb{Z}_2$ " topologische Isolatoren)

Untergitter (sublattice) - Symmetrie



$$H = \begin{pmatrix} 0 & H_{AB} \\ H_{AB}^+ & 0 \end{pmatrix}$$



zwei identische Untergitter; nur Kopplung zwischen A und B; $H_{AA} = H_{BB} = 0$

$\Rightarrow$ Diagonalmatrix σ_z sei $+1$ für A
 -1 für B

$$-H = \sigma_z H \sigma_z$$

$\Rightarrow$ falls $(\psi_A, \psi_B)^T$ Eigenvektor von H mit Energie ϵ ,
dann $(\psi_A, -\psi_B)^T$ ————— $-\epsilon$

$\Rightarrow$ Symmetrisches Spektrum wegen Untergitter-Symmetrie

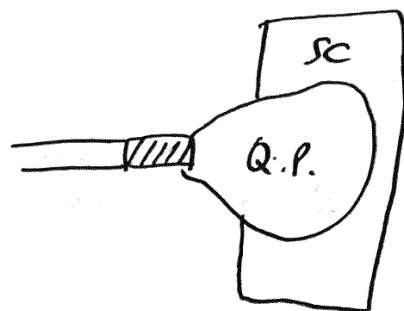
$\Rightarrow$ unsere topologische Invariante Q kann sich für Systeme mit Untergittersymmetrie nie ändern!

$\rightarrow$ zusätzliche Symmetrie kann topologische Klassifikation trivial machen

Test: Welche Symmetrie schränkt Q nicht ein?

(A) spinlose trs (B) Untergittersymm. (C) spin- $\frac{1}{2}$ trs

Teilchen - Loch - Symmetrie (particle-hole symmetry = phs) Beispiel: Supraleiter (SC)



$\Rightarrow$ Paarungsterme

$$H = \sum_{nm} H_{nm} c_n^\dagger c_m + \frac{1}{2} (\Delta_{nm} c_n^\dagger c_m^\dagger + \Delta_{nm}^* c_m c_n)$$

$c_n^\dagger, c_n$: fermionische Erzeuger / Vernichter

$$c_n^\dagger c_m + c_m c_n^\dagger = \delta_{nm}$$

Δ_{nm} : antisymmetrische Matrix

H_{nm} : Q.P. Hamiltonian ohne SC

H erhält nicht die Fermionenzahl, aber die Parität, d.h. gerade / ungerade Fermionenzahl

Wir schreiben $C = (c_1, c_2, \dots, c_n, c_1^\dagger, c_2^\dagger, \dots, c_n^\dagger)^T$

und $H = \frac{1}{2} C^\dagger H_{\text{BdG}} C$

BdG = Bogolyubov-de Gennes

$$H_{\text{BdG}} = \begin{pmatrix} H & \Delta \\ -\Delta^* & -H^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Elektronen} & \text{Paarung} \\ \text{Paarung} & \text{Löcher} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow H_{\text{BdG}}$ hat automatisch eine Extra-Symmetrie, die Elektronen und Löcher verbindet:

Antiunitäres $P = T_x K$ mit $T_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

das auf die Teildar / Loch Blöcke wirkt:

$$P H_{\text{BdG}} P^{-1} = -H_{\text{BdG}}$$

→ Teildar - Loch - Symmetrie (phs).

Check: $T_x H_{\text{BdG}} T_x^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & \Delta \\ -\Delta^* & -H^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & H \\ -H^* & -\Delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H^* & -\Delta^* \\ \Delta & H \end{pmatrix}$$

davon das K komplex konjugiert:

$$\begin{pmatrix} -H & -\Delta \\ \Delta^* & H^* \end{pmatrix} = -H_{\text{BdG}}$$

Achtung: Die Schreibweise $P H_{\text{BdG}} P^{-1}$ mit

$P = T_x K$ ist evtl. verwirrend.

Besser: $K \left[T_x H_{\text{BdG}} T_x^{-1} \right]$

$\uparrow$
nur 1x komplex konjugieren

phs repräsentiert durch antiunitären Operator,
der mit H ant-kommutiert.

- Vorzeichen $\Rightarrow$ Spektrum symmetrisch um Energie = 0
(Fermi-Energie)

$\Rightarrow$ für jeden Eigenvektor $\Psi = (u, v)^T$ von H_{BdG}
gibt es ph-symmetrisches $P\Psi = (v^*, u^*)^T$
mit Energie $-E$

$\Rightarrow$ ähnlich wie bei Untergitter-Symmetrie, phs
erzwingt, dass Q immer gleich bleibt.

Aber: Energienulldurchgänge sind möglich bei
phs — was passiert dort? ~~X~~

Fermion-Paritäts-Übergänge:

Für H_{BdG} mussten wir die Zustände verdoppeln.

Die Paare bei $\pm E$ sind nicht verschiedene

Zustände: Bogolyuba-Quasiteilchen = kohärente
Superposition von Elektronen und Löchern.

Zustand bei

Energie E hat Operator $a^\dagger = u c^\dagger + v c$

Partnerzustand bei $-E$: $(a^\dagger)^\dagger = a$

Besetzung bei $-E$ ^{Anteil} = Vernichtung bei E

$\Rightarrow$ Wenn ein Paar von Bogolyubov-Zuständen bei E durch Energie $= 0$ läuft, dann wechselt die Anregungsenergie E das Vorzeichen und es wird günstig, ein Bogolyubov-Q.T. zum Q.P. hinzufügen bzw. zu entfernen.

Nulldurchgänge $\equiv$ Änderungen der Fermionen-Parität im Grundzustand zwischen gerade und ungerade.

Solange es keine Nulldurchgänge gibt, ist in H₀ die Fermionen-Parität erhalten

$\Rightarrow$ Grundzustands-Parität = topologische Invariante

Die Wahl der topologischen Invariante hängt vom System bzw. dessen Symmetrien ab.

Pfaff'sche Invariante ("Pfaffian")

$$\text{Basistransformation: } \tilde{H}_{\text{BdG}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} H_{\text{BdG}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{H}_{\text{BdG}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} H - H^* + \Delta - \Delta^* & -iH - iH^* + i\Delta + i\Delta^* \\ iH + iH^* + i\Delta + i\Delta^* & H - H^* - \Delta + \Delta^* \end{pmatrix}$$

antisymmetrisch

Δ ist antisymmetrisch. Da H hermitesch ist, ist $H - H^*$ auch antisymmetrisch, und $H + H^*$ ist symmetrisch $\Rightarrow \tilde{H}_{\text{BdG}}$ ist antisymmetrisch
($\tilde{H}_{\text{BdG}}^T = -\tilde{H}_{\text{BdG}}$)

Die Pfaff'sche Invariante ist für antisymmetrische Matrizen definiert: Idee ist, dass die Eigenwerte paarweise auftreten $\pm E_n$

$$\text{Determinante: } \prod_n (-E_n^2)$$

Pfaffian $\rightarrow$ Wurzel der Determinante

$$= \pm i \prod_n E_n$$

so dass das Produkt eindeutig definiert ist.
Bei Änderung der Parität ändert sich einzelnes E_n

das Vorzeichen, so dass die Pfaffian das $\sqrt{z}$ ändert, während die Determinante sich nicht ändert.

$$Q_{\text{rdg}} \equiv \text{sign} [\text{Pf}(iH_{\text{rdg}})]$$

damit Pfaffian reell wird

$$\text{Pf}(A) = \sqrt{\det(A)}$$

Beispiele:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Pf}(A) = a$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Pf}(B) = af - be + dc$$

Zusammenfassung (9.1)

- einfachste topologische Invariante: Zahl der negativen-Energie-Zustände (nullte Chernzahl)
- Erhaltungssatz (Unitäre Symmetrie) $\Rightarrow H$ blockdiagonal
 $\Rightarrow$ betrachte Topologie der Blöcke
- Zahl der besetzten Zustände ist gerade für spin-ungerade tr.s-Systeme (Kramers-Theorem)
- Untergitter-Symmetrie: # gefüllter Zustände konstant
- Teilchen-Lock-Symmetrie (Ladungskonjugationssymmetrie):
nullte Chernzahl konstant, aber generiert
neue Invariante: Vorzeichen der Pfaffian
 $\rightarrow$ zwei Werte $\pm 1 \equiv$ Parität der Elektronenzahl

Symmetrien und Erhaltungssätze
definieren den Typ und die
Existenz topologischer Invarianten.

9.2 1D-Beispiel: Bulk-Edge-Korrespondenz in der Kitaev-Kette

Fermionen: $c, c^\dagger$ $cc^\dagger + c^\dagger c = 1$
 $c^2 = 0 = c^{\dagger 2}$

Zwei Zustände $|0\rangle, |1\rangle$ mit $c^\dagger|0\rangle = |1\rangle$ $c|0\rangle = 0$
 $c|1\rangle = |0\rangle$ $c^\dagger|1\rangle = 0$

Andere Schreibweise eines komplexen Dirac-Fermions
mit reellen Majorana-Operatoren γ_1, γ_2 :

$$c^\dagger \equiv \frac{1}{2} (\gamma_1 + i\gamma_2)$$

$$c \equiv \frac{1}{2} (\gamma_1 - i\gamma_2)$$

Inverses:

$$\gamma_1 \equiv c + c^\dagger$$

$$\gamma_2 \equiv i(c - c^\dagger)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_1^\dagger &= c^\dagger + c = \gamma_1 \\ \gamma_2^\dagger &= -i(c^\dagger - c) = \gamma_2 \end{aligned}} \quad (*)$$

$\Rightarrow$ es existiert kein Besetzungsoperator für Majoranas!

Normale Fermionen: $\hat{n} = c^\dagger c$ mit $c^\dagger \neq c$

$$\Rightarrow \langle 0 | \hat{n} | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 1 | \hat{n} | 1 \rangle = 1$$

Majoranas: $\gamma_1 + \gamma_1 \stackrel{(*)}{=} \gamma_1^2 = \underbrace{c^{\dagger 2} + c^2}_{=0} + \underbrace{cc^\dagger + c^\dagger c}_{=1} = 1$

$$\Rightarrow \langle \psi | \gamma_1 + \gamma_1 | \psi \rangle = 1 \text{ unabhängig von } |\psi\rangle !$$

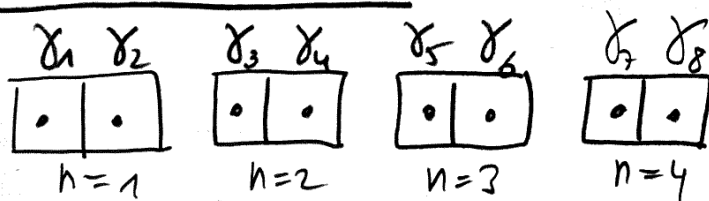
Außerdem $\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2 \gamma_1 = 0$ — Antikommutation
 $\rightarrow$ "Fermionen"

Wegen $c^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_1 + i\gamma_2)$ können wir Majoranas
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 komplex reell reell
 (hermitisch)

als Real - und Imaginärteil eines Fermions
 auffassen. Majoranas existieren nur paarweise.

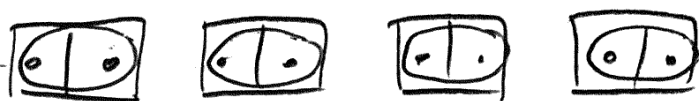
Kann man zwei Majoranas voneinander trennen?

Domino-Modell



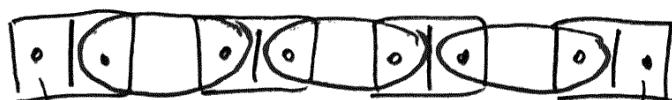
$$H_\mu = -\mu \hat{N} = -\mu \sum_{n=1}^N c_n^\dagger c_n \hat{=} \text{Fermionen-Füllung}$$

$$\hat{=} \frac{i}{2} \mu \sum_{n=1}^N \gamma_{2n-1} \gamma_{2n} \hat{=} \text{Majorana-Paarung}$$



keine ungepaarten Majoranas;
 Paarungsenergie $\pm |\mu|/2$
 $\Rightarrow$ Anregungen mit Energielücke

Aber wir wollen sie trennen:



ungepaarte Majoranas am Rand

$$\Rightarrow H_t = it \sum_{n=1}^{N-1} \gamma_{2n} \gamma_{2n+1} \hat{=} \text{fermion-Hopping}$$

$\Rightarrow \gamma_1$ und γ_{2N} tauchen in H_t nicht auf

$\Rightarrow H_t$ hat zwei Energie-Null-zustände ("zero modes"), die am Rand lokalisiert sind

$\Rightarrow$ alle anderen Zustände haben Energie $\pm |t|$

$\Rightarrow$ 1D-System mit Anregungslücke im Inneren ("bulk") und zero modes am Rand

Kitaev-Kette

Nutze $\gamma_{2n-1} = (c_n^\dagger + c_n)$

$$\gamma_{2n} = -i(c_n^\dagger - c_n)$$

bzw. $c_n^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_{2n-1} + i\gamma_{2n})$

$$c_n = \frac{1}{2}(\gamma_{2n-1} - i\gamma_{2n})$$

$$c_{n+1}^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_{2n+1} + i\gamma_{2n+2})$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}(\gamma_{2n+1} - i\gamma_{2n+2})$$

Tight-binding-Model für 1D-Supraleiter:

$$H = -\mu \sum_n c_n^\dagger c_n - t \sum_n (c_{n+1}^\dagger c_n + \text{h.c.}) + \Delta \sum_n (c_n c_{n+1} + \text{h.c.})$$

3 reelle Parameter:

chemisches Potential μ

Hüpfintegral t

Paarungsenergie Δ

Umschreiben in Majorana-Darstellung:

$$\Delta c_n c_{n+1} + \text{h.c.} = \frac{\Delta}{4} (\gamma_{2n-1} \gamma_{2n+1} - \gamma_{2n} \gamma_{2n+2} - i \gamma_{2n} \gamma_{2n+1} - i \gamma_{2n-1} \gamma_{2n+2})$$

$$+ \frac{\Delta}{4} (\gamma_{2n+1} \gamma_{2n-1} + \gamma_{2n+2} \gamma_{2n} + i \gamma_{2n+1} \gamma_{2n} + i \gamma_{2n+2} \gamma_{2n-1})$$

$$= \frac{i\Delta}{2} (\gamma_{2n+1} \gamma_{2n} + \gamma_{2n+2} \gamma_{2n-1})$$

$$-t c_{n+1}^\dagger c_n + \text{h.c.} = \dots = \frac{it}{2} (\gamma_{2n+1} \gamma_{2n} - \gamma_{2n+2} \gamma_{2n-1})$$

$\Rightarrow$ falls $\Delta = t$ verschwinden die $\gamma_{2n+2} \gamma_{2n-1}$ Terme
falls zusätzlich $\mu=0$ dann entspricht H exakt



$\rightarrow \Delta = t \neq 0, \mu=0$ erzeugt ungepaarte Majorana-Randmoden

Andererseits: $\mu \neq 0$, $\Delta = t = 0$ ergibt trivialen
vollgepaarten Zustand

$\Rightarrow$ da zwischen muss es einen Phasenübergang geben

Erinnerung: Nützlichkeit der BdG-Darstellung

$$H = \frac{1}{2} C^\dagger H_{\text{BdG}} C$$

$$C \equiv (c_1, \dots, c_N, c_1^\dagger, \dots, c_N^\dagger)^T$$

$H_{\text{BdG}} \rightarrow 2N \times 2N$ Matrix

$\rightarrow$ kann mittels Pauli-Matrizen im Teilchen-Loch-
Raum geschrieben werden und $|n\rangle =$
 $(0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{1}, 0, \dots, 0)^T$ einem Spaltenvektor
für n -ten Platz der Kette.

z.B. $C^\dagger \tau_z |n\rangle \langle n| C = 2 c_n^\dagger c_n - 1.$

$$H_{\text{BdG}} = - \sum_n \mu \tau_z |n\rangle \langle n| - \sum_n [(t \tau_z + i \Delta \tau_y) |n\rangle \langle n+1| + \text{h.c.}]$$

H_{BdG} wirkt auf Zustände in Basis $|n\rangle |T\rangle$ mit
 $T = \pm 1$ für Elektronen-/Lochzustände.

H_{BdG} hat phs: $\mathcal{P} H_{\text{BdG}} \mathcal{P}^{-1} = -H_{\text{BdG}}$

$$\mathcal{P} = \tau_x / \mathcal{K} \quad (\text{s. phs-Abchnitt})$$

Nachrechnung:

$$\mathcal{P} H_{\text{BdG}} \mathcal{P}^{-1} = - \sum_n \left[\mu \tau_x \tau_z \tau_x |n\rangle \langle n| + \left(t \tau_x \tau_z \tau_x + i \Delta \tau_x \tau_y^* \tau_x \right) |n\rangle \langle n+1| + \text{h.c.} \right]$$

Nutze $\tau_x \tau_z \tau_x = -\tau_z$

$$\tau_x \tau_y^* \tau_x = \tau_y$$

$$\Rightarrow \mathcal{P} H_{\text{BdG}} \mathcal{P}^{-1} = -H_{\text{BdG}} \quad \checkmark$$

Topologischer Schutz der Majorana-Randmoden

Ist Finetuning ($\mu=0, t=\Delta$) nötig, um ungepaarte Majoranas zu bekommen?

Was passiert bei $\mu \neq 0$?

→ Übung: berechne Energiespektrum und Eigenzustände einer endlichen Kitaev-Kette

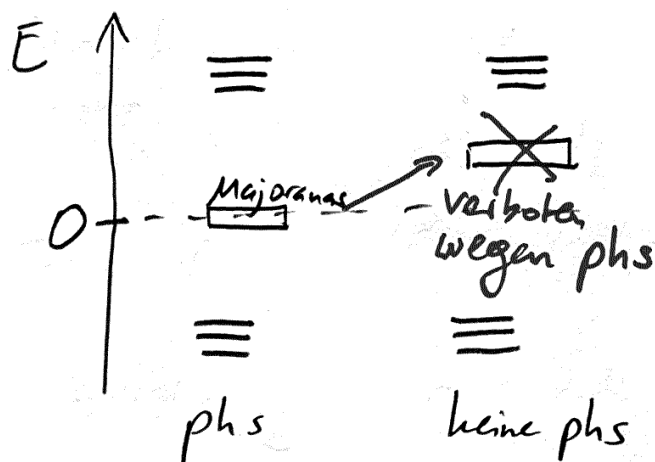
Antwort: Für $\mu \approx 2t$ schließen sich die Energielücken im bulk und die Randmoden verschmelzen mit den bulk-Zuständen

kein Finetuning nötig:

Majorana - Randmoden sind geschützt durch
(Majorana zero modes, MZM)
Bulk - Anregungslücke und pfs.

Bemerkung: experimentell ist es dennoch noch
wie vor offen, ob man die Majoranas re-
alisieren kann. Problem: Unordnung und
Sensitivität der Transportmessungen auf
die Qualität der Kontakte.

Ideal fall:



→ man muss Bulk-Anregungslücke schließen,
um MZM zu zerstören.

Grund: "Bulk-Edge-Korrespondenz"

→ Info über Randmoden bereits in Bulkzuständen
enthalten!

Topologische Phasen im Bulk

Betrachte jetzt Kette mit periodischen Randbedingungen (PBC):

Impulsraum:

$$|k\rangle = (N)^{-1/2} \sum_{n=1}^N e^{-ikn} |n\rangle$$

$$\text{PBC: } \langle k | n=0 \rangle = \langle k | n=N \rangle$$

$\Rightarrow k$ gute Quantenzahl, Werte $\frac{2\pi}{N} p$

$$p = 0, \dots, N-1$$

$N \rightarrow \infty$: $k \in [-\pi, \pi) = 1.$ Brillouinzone

$$H_{\text{BdG}} = \sum_k H(k) |k\rangle \langle k|$$

$$\boxed{H(k) \equiv \langle k | H_{\text{BdG}} | k \rangle = (-2t \cos k - \mu) T_z + 2\Delta \sin k T_y}$$

$$N \rightarrow \infty: \frac{1}{N} \sum_k \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi}$$

Teilchen-Loch-Symmetrie im Impulsraum:

Wirkung K auf e^{-ikn} : $K e^{-ikn} = e^{+ikn}$

$$\Rightarrow P|k\rangle|T\rangle = \left(\sum_n e^{-ikn}\right)^* |n\rangle T_x |T\rangle^* = |-k\rangle T_x |T\rangle^*$$

$\Rightarrow P$ überführt $k \rightarrow -k$

$$P H_{\text{BdG}} P^{-1} = \sum_k T_x H^*(k) T_x |-k\rangle \langle -k| = \sum_k T_x H^*(-k) T_x |k\rangle \langle k|$$

Summation k
= Summation $-k$

$$\Rightarrow \boxed{\text{phs } P H_{\text{BdG}} P^{-1} = -H_{\text{BdG}}}$$

$$\Leftrightarrow H(k) = -T_x H^*(-k) T_x$$

Check: $T_x H^*(-k) T_x = (+2t \cos k + \mu) T_z - 2\Delta \sin k T_y$
 $= -H(k)$

Teilchen-Loch-Symmetrie im k -Raum

$\Rightarrow$ für Lösung E und k existiert auch
Lösung $-E$ und $-k$

Bandstruktur:

Diagonalisiere $H(k) = \begin{bmatrix} -2t \cos k - \mu & -2i\Delta \sin k \\ 2i\Delta \sin k & 2t \cos k + \mu \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow E(k) = \pm \sqrt{(2t \cos k + \mu)^2 + 4\Delta^2 \sin^2 k}$$

$\Rightarrow$ Energielücke für alle k bei $\mu=0$

[Frage: Warum keine MZM?]

$\Rightarrow$ Bulle-Lücke schließt sich für $\mu = \pm 2t$

+ : Bandberührung bei $k = \pi$

- : — — — $k = 0$

Ist dort ein Phasenübergang?

Schreibe zuerst effektives Modell nahe des erwarteten Phasenübergangs hin!

Effektives Dirac-Modell:

Fokus auf $\mu = -2t$ und $k = 0$.

Taylor-Linearisierung:

$$H(k) \simeq m \tau_z + 2\Delta k \tau_y$$

$$m \equiv -\mu - 2t \equiv \text{Massesterm}$$

$$H(k) = \begin{bmatrix} m & -2i\Delta k \\ 2i\Delta k & -m \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E(k) = \pm \sqrt{m^2 + 4\Delta^2 k^2}$$

$\Rightarrow$ Massesterm ist entscheidend.

- $m < 0$ für $\mu > -2t$: topologische Phase
- $m > 0$ für $\mu < -2t$: triviale Phase

berechne Pfaffian!

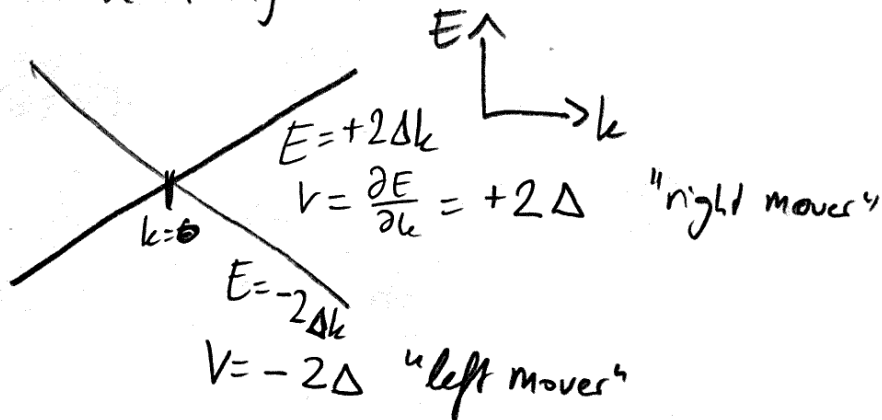
↓
siehe später

Was passiert am Phasenübergang bei $m=0$?

$m=0$: $H(k)$ hat zwei Eigenzustände $E = \pm 2\Delta k$,
diese sind Eigenzustände von T_y

$\Rightarrow$ Elektron-Loch-Überlagerungen mit gleichem Anteil

$\Rightarrow$ diese sind Majorana-Moden



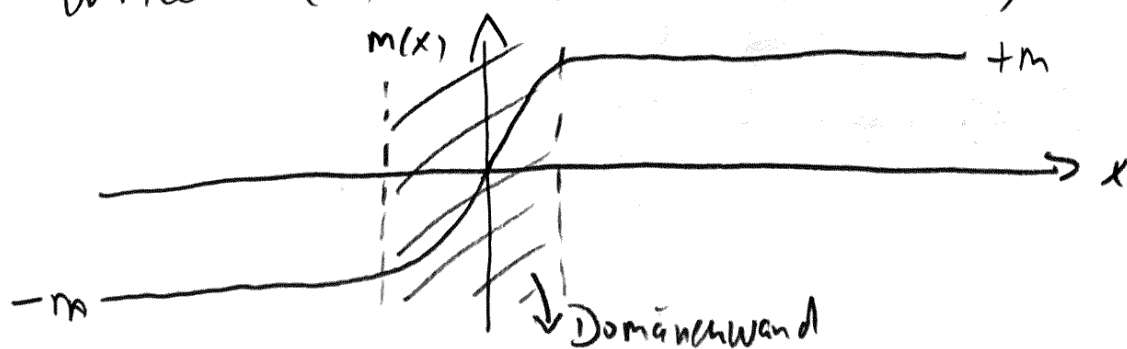
$\Rightarrow m=0$: zwei Zweige mit frei beweglichen Majoranas

Majorana-Moden an Domänenwänden

Was passiert, wenn m im Realraum das Vorzeichen wechselt? Kontinuumsmodell mit $k \rightarrow -i\partial_x$

$$H(x) = -v T_y i \partial_x + m(x) T_z \quad (*)$$

Wähle $m(x) \rightarrow \pm m$ für $x \rightarrow \pm \infty$, $m(x=0) = 0$



Für nun gilt $H\psi = 0$.

Multipliziere (*) von links mit iT_y :

$$iT_y H\psi = \left(\sqrt{2} \partial_x - m(x) T_x \right) \psi(x) = 0$$

$$\begin{aligned} T_y^2 &= \mathbb{1} \\ iT_y T_z &= -T_x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial_x \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} m(x) T_x \psi(x)$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \exp \left[T_x \int_0^x \frac{m(x')}{\sqrt{2}} dx' \right] \psi(0)$$

$\Rightarrow$ zwei linear unabhängige Lösungen via Eigenzuständen von T_x :

$$\psi(x) = \exp \left[\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \int_0^x \frac{m(x')}{\sqrt{2}} dx' \right] \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ nur eine davon normierbar (+-twig divergiert)

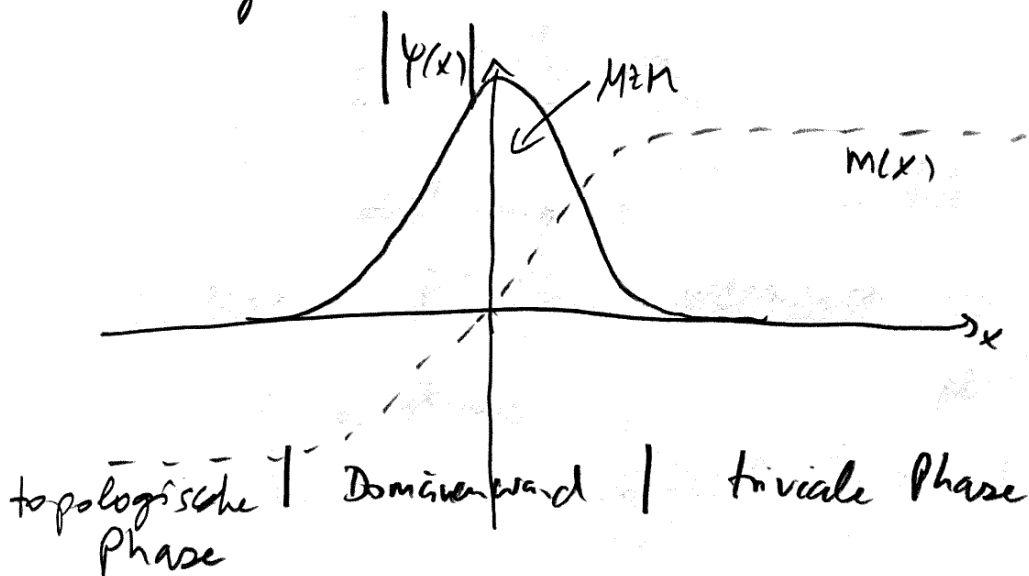
$\Rightarrow$ gebundener Zustand, der um die Domänenwand lokalisiert ist – existiert nur dank VZ -Wechsel von $m(x)$!

Tiefer physikalischer Grund für dessen Existenz:

$\chi < 0$: topologische Phase

$\chi > 0$: triviale Phase

→ an der Grenzfläche muss eine Null-Energie-Mode existieren



Domino-Bild:



Topologische Invariante im Bulk

Effektives Modell: V_F des Masseterms half uns, Topologie zu verstehen. Welche topologische Invariante können wir dafür allgemeiner nutzen?

Heuristische Herleitung:

- BdG Hamiltonian: V_F der Pfaffian bei $\mu = 0$; Pfaffian wechselt V_F bei Lückenschluss. Können wir das V_F von m mit einer Pfaffian-Invariante in Verbindung bringen?
- H_{BdG} : große Matrix mit $\mu = 0$
 $\Rightarrow$ berechne antisymmetrische Form von H_{BdG} und deren Pfaffian?
- V_F der Pfaffian ändert sich nur bei Nulldurchgang eines Eigenwerts.
 $\mu = 0 \Rightarrow E(k)$ kommen paarweise
 $+E(k)$ & $-E(-k)$

Nur zwei Ausnahmen:

$k=0$ und $k=\pi$ "invariante Impulse"
bilden unter $k \rightarrow -k$ auf sich selbst ab

$$\text{phs: } T_x H^*(0) T_x = -H(0)$$

$$T_x H^*(\pi) T_x = -H(\pi)$$

$\Rightarrow H(0)$ und $H(\pi)$ können individuell anti-symmetrisiert werden.

- Wissen bereit: Massentome ändern VZ bei 0 oder π
 $\Rightarrow$ ergibt Sinn, sich auf diese beiden Impulse zu fokussieren.

Anti-symmetrisierung:

$$\tilde{H}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2t-\mu & 0 \\ 0 & 2t+\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & -2t-\mu \\ 2t+\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H}(\pi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t-\mu & 0 \\ 0 & -2t+\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & 2t-\mu \\ \mu-2t & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Pf}(i \tilde{H}(0)) = -2t-\mu \rightarrow \text{VZ-Wechsel bei } \mu = -2t$$

$$\text{Pf}(i \tilde{H}(\pi)) = 2t-\mu \rightarrow \text{VZ-Wechsel bei } \mu = +2t$$

Topologische Invariante:

$$Q = \text{sign} \left[\text{Pf} [i\tilde{H}(0)] \text{Pf} [i\tilde{H}(\pi)] \right]$$

$Q = -1$: topologische Phase

$Q = +1$: triviale Phase

-Vgl. mit Rechnungen für endliche Kette

Die topologische Invariante kann sich nicht ändern unter kontinuierlichen Deformationen von H , außer es schließt sich die Energielücke.

Verbindung zwischen Bulk-Invariante Q und Randmoden:

Welche physikalische Bedeutung hat Q ?

Vorzeichen von $\text{Pf} [i\tilde{H}(0)] \text{Pf} [i\tilde{H}(\pi)]$: wir vergleichen fermionische Paritäten zwischen $k=0$ und $k=\pi$.

$Q = -1 \Leftrightarrow$ verschiedene Paritäten

$\Rightarrow$ wenn wir $H(0)$ kontinuierlich in $H(\pi)$ deformieren, ohne phs zu brechen, muss sich eine Fermion-Paritäts-Änderung ereignen (Energie-Nulldurchgang).

Implementierung:

Gehe von periodischen zu antiperiodischen Randbedingungen.

$$\langle k | n=0 \rangle = - \langle k | n=N \rangle$$

$$\Rightarrow \text{erlaubte Impulse } k = \frac{2\pi}{N}p + \frac{\pi}{N} \quad \left. \vphantom{k = \frac{2\pi}{N}p + \frac{\pi}{N}} \right\} p=0, \dots, N-1$$

$\Rightarrow$ Wie ändert sich Parität zwischen PBC- und APBC-Kette?

$k=0 \rightarrow$ immer existent

$k=\pi \rightarrow$ existiert für $\begin{cases} N \text{ gerade mit PBC} \\ N \text{ ungerade mit APBC} \end{cases}$

$\Rightarrow$ in beiden Fällen (N gerade oder ungerade) ist

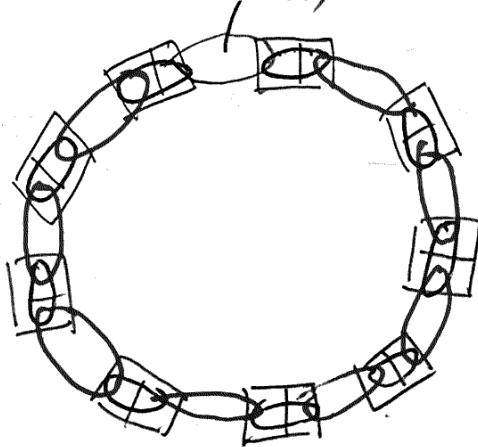
Q der Unterschied zwischen Fermionparitäten bei PBC versus APBC.

Beispiel: Kitaev-Ring mit $\Delta=t$, Ändere Hüpfermatrixelement $t \rightarrow -t$ auf letztem Bond zwischen $n=N-1$ und $n=0$.

Dieser VT-Weg entspricht genau dem PBC-APBC-Übergang.

Kontinuierliche Aft, dies zu tun, ohne phs zu

brechen: letztes Hopping = $t(1-2\lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$;



$$\frac{\mu}{t}$$

$\mu < 2t$: $E(\lambda)$ geht durch 0 bei $\lambda = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ unterschiedliche Parität bei $\lambda=0$ vs. $\lambda=1$

$\lambda = \frac{1}{2}$: Kette unterbrochen ($t=0$ auf letzten Bond)

$\Rightarrow$ zwei MZM in topologische Phase

$\mu > 2t$: kein Nulldurchgang

$\Rightarrow$ selbe Parität $\lambda=0$ vs. $\lambda=1$

$\lambda = \frac{1}{2}$: keine MZM $\Rightarrow$ konsistent mit trivialer Phase

Essenz der Bulk-Boundary-Korrespondenz:

$Q = -1 \equiv$ nichttriviale Bulk-Invariante

impliziert Existenz ungepaarter Majoranas

in offener Kette

Verbindung $Q \Leftrightarrow$ messbarer Größe: Grundzustands-Fermionenparität.

Testfrage: Was passiert, wenn wir ein 100-site-

Kitaevkette in der topologischen Phase nehmen und sie auf einen

stark negativen Wert (triviale Phase) auf der

letzten 50 Sites setzen?

(Wähle alle korrekten Antworten)

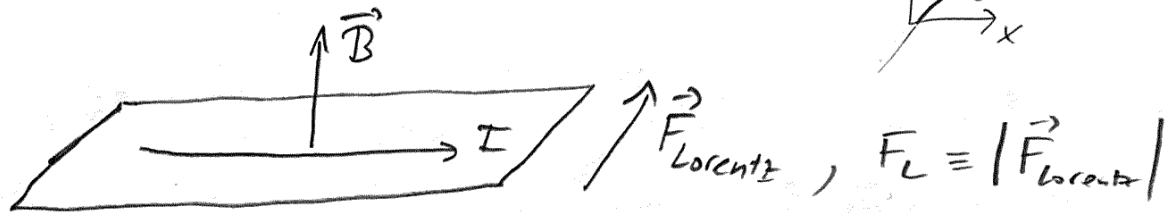
(A) Lücke auf den letzten 50 Sites schließt und öffnet sich dann wieder

(B) Majoranas werden zerstört

(C) Eins der Majoranas bewegt sich vom Ende zur Mitte der Kette

9.3 Quanten - Hall - Effekt (QHE)

Klassischer Hall - Effekt:



$\Rightarrow$ Hall-Spannung (V_H) baut sich auf, die der Lorentz-Kraft entgegenwirkt

Wegen $F_L \sim B \Rightarrow V_H \sim B$



S_{xy} = Hall-Widerstand ändert sich nicht über größere B -Bereiche und ist quantisiert!

$$S_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}, \quad \frac{h}{e^2} = 25812,807 \, \Omega$$

$$\equiv R_K$$

Von-Klitzing-Konstante

integer quantum Hall effect = IQHE

Es gilt $\vec{J} = \underline{\sigma} \vec{E}$

$$\begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{h}{ve^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Zeitumkehrsymmetrie durch B-Feld gebrochen)

Thouless, Kohmoto, Nightingale, den Nijs (TKNN):

IQHE ist topologisches Phänomen und steht
in Verbindung mit topologischer Invariante

C = Chern-Zahl.

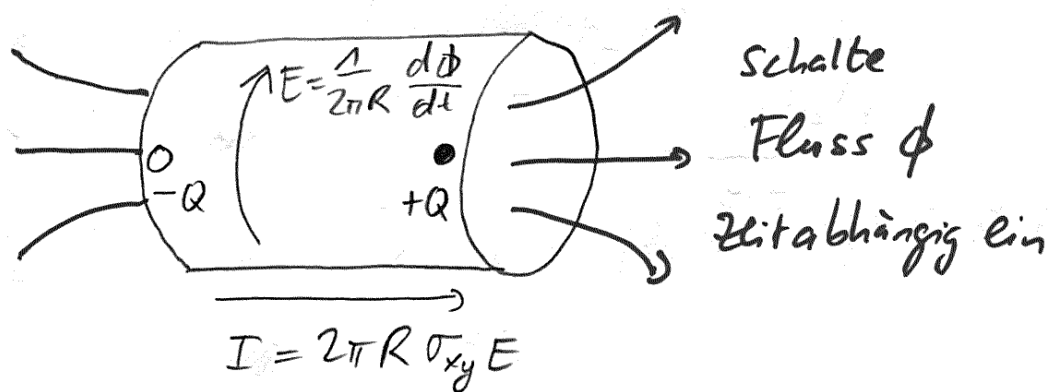
Gleichzeitig ist der longitudinale Widerstand $\rho_{xx} = 0$,
da Strom und $\vec{E}$ -Feld senkrecht aufeinander stehen.
Daher ist kurioserweise auch $\sigma_{xx} = 0$ (siehe Matrix-
struktur oben.)

Höhere T : Aktivierungsverhalten $\sim e^{-T_0/T}$ von ρ_{xx} und σ_{xx}

$\rightarrow$ System hat Bulk-Energielücke.

Diese Lücke muss sich am Rand der Probe schließen!

Betrachte Zylinder eines IQHE-Materials mit Radius R :



Fluss $\Rightarrow$ azimutales $\vec{E}$ -Feld $\Rightarrow$ Strom

$\Rightarrow$ Polarisation mit Ladung Q zwischen den Rändern.

Diese Ladung kann wegen $\sigma_{xx} = 0$ nicht relaxieren.

$\Rightarrow$ Ladungsakkumulation $\Rightarrow$ dafür braucht es Zustände

Da die Störung (Magnetfeld) langsam ist und klein.

(nur ein Flussquant), ist es eine Niederenergie-

Anregung und skaliert wie $1/\text{Systemgröße}$.

$\Rightarrow$ diese angeregten Zustände müssen nah am chemischen Potential liegen.

$\Rightarrow$ Energielücke muss am Rand verschwinden

$\Rightarrow$ An Grenzfläche zwischen Regionen verschiedener

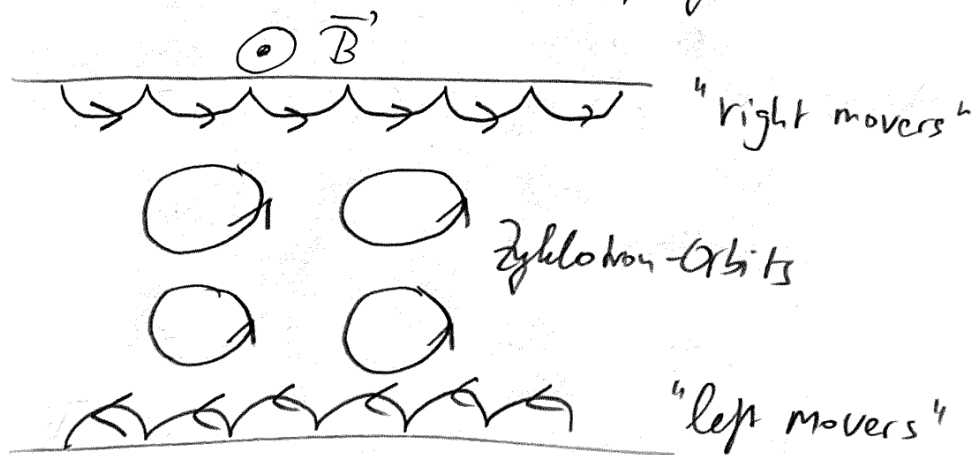
Hall-Leitfähigkeiten muss sich Energielücke schließen!

(vgl. Domänenwand in Kitaev-Kette!)

Zugrundeliegende Physik: Elektronen bewegen sich in Landau-Niveaus (Zyklotron-Orbits). Wichtige Rolle von Unordnung: In reiner Probe würden Landau-Niveaus kontinuierlich gefüllt und man sähe keine Plateaus! Durch Unordnung gibt es lokalisierte Zustände zwischen Landau-Niveaus; während diese gefüllt werden, treten Plateaus auf.

Chirale - Randzustände:

quasiklassisches Bild "shipping orbits"



("Bulk-Boundary-Korrespondenz")

9.4 Chern - Isolatoren

Strategie, um ein Gittermodell für den Quanten-Hall-Effekt zu konstruieren:

Idee: Kitaev-Kette half uns, Majorana-Randmoden zu verstehen. QHE: man kann QHE durch 2D

Elektronen in Magnetfeld bekommen. Jetzt:

Wollen einfacher tight-binding-Modell für QHE

basteln, am besten sogar ohne äußeres Magnetfeld.

Solche Systeme heißen Chern-Isolator (CI).

QHE ohne Magnetfeld: quantum anomalous Hall effect (QAHE).

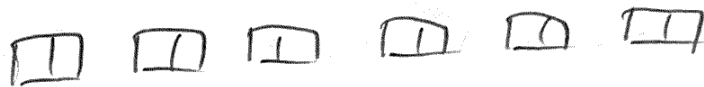
Erstes CI-Modell: Haldane 1988 - Graphen-artiges Honigwabengitter mit speziellem Extra-Hopping - (→ Nobelpreis 2016).

Zwei wichtige Aspekte:

- QHE kann nicht isoliert vom Bulk existieren
- Idee à la Domino: finde niedrigdimensionalen Baustein

Domino-Idee: von 0D nach 1D durch Verketten

von Majorana-Paaren (fermionische Sites) und geeignete Kopplungsterme, die zu energetisch isolierten Null-Energie-Randmoden (MZM) führen:

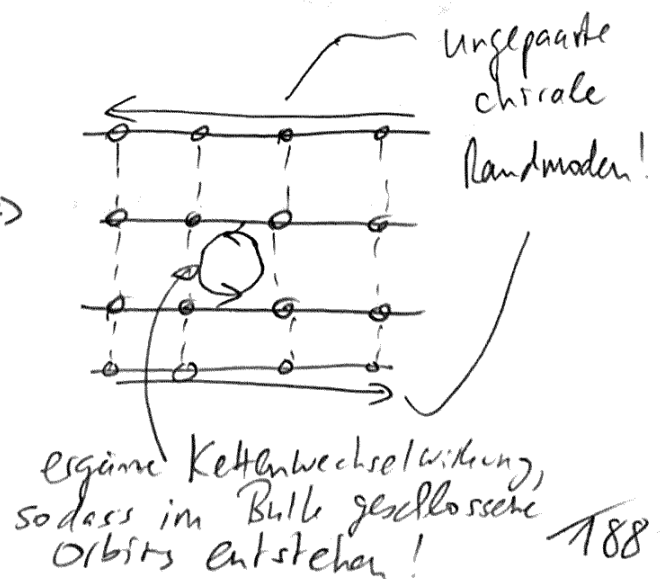
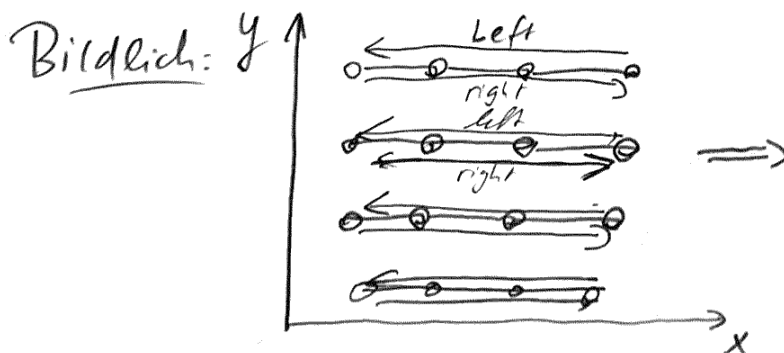


Jetzt: von 1D nach 2D



Strategie: • 1D-System, das chirale Randmoden ("shipping orbits" im quasiklassischen Bild) enthält

- left + right movers in derselben Kette
- stecke diese 1D-Legosteiche zu einem 2D-System zusammen



1D-Kette mit left und right movers:

Erinnerung: am Phasenübergang von trivialen zu topologischer Phase der Kitaev-Kette hatten wir ein Paar von linear dispersierenden Moden gefunden — Dirac-Modell:

$$H = \Delta k T_y$$

Kitaev-Kette: $H(k) = -(2t \cos k + \mu) T_z + \Delta \sin k T_y$

Kritischer Punkt
 $\mu = -2t$: $H(k) = -2t(\cos k - 1) T_z + \Delta \sin k T_y$

Nähe $k=0$: Paar von Zuständen mit Wellenfunktionen, die Eigenzuständen von T_y mit Eigenwerten ± 1 entsprechen. $\Rightarrow$ entgegengesetzte Geschwindigkeiten

Problem: Kitaev-Modell enthält Supraleitung,
wir hätten gern Modell ohne Supraleitung

Lösung: Uminterpretation der T-Matrizen — sie sollen auf den Raum der Left + right Mover wirken (zwei fermionische Spezies anstelle von Elektronen + Löchern)

Generische Strategie: Phasenübergänge niedrigerdimensionaler Modelle sind oft geeignete Startpunkte, um topologische Modelle in $D+1$ zu konstruieren.

Modell-Hamiltonian:

- stecke x -orientierte Ketten entlang y -Richtung zusammen

- Kettenindex n_y

- $k \rightarrow k_x$

- einzelne Kette:

$$\left[-(2t \cos k_x + \mu) T_z + \Delta \sin k_x T_y \right] \otimes \underbrace{|n_y\rangle\langle n_y|}_{\text{Projektion auf } n_y\text{-te Kette}}$$

- koppel $T_y = -1$ Zwisch einer Kette

an $T_y = +1$ Zwisch der nächsten Kette,

um geschlossene Orbits zu erzwingen



- Idee: wir wollen einen R -in einer L -Mover umwandeln, wenn er auf die nächste Kette hüpf.

Wie?

Betrachte $T_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$$|\Psi_{R/L}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mp i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Check: $T_y |\Psi_{R/L}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \pm |\Psi_{R/L}\rangle \quad \checkmark$

Welche Kombination von Pauli-Matrizen erfüllt folgende Bedingung?

$$\hat{O} |\Psi_{R/L}\rangle \stackrel{!}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } |\Psi_R\rangle \\ \propto |\Psi_R\rangle & \text{für } |\Psi_L\rangle \end{cases}$$

→ Ausprobieren!

Hinweis: Man braucht Linearkombination von T_z und T_x , die trs bricht (analog zu $\vec{B}$ -Feld)!

Lösung:

$$\begin{aligned} (T_z + iT_x) |\Psi_{R/L}\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mp i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mp i + i \\ \pm 1 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } |\Psi_R\rangle \\ -2|\Psi_R\rangle & \text{für } |\Psi_L\rangle \end{cases} \quad \checkmark \end{aligned}$$

• komplettiere H durch Summation über n_y

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n_y} \sum_{k_x} \left\{ \left[-(2t \cos k_x + \mu) T_z + \Delta \sin k_x T_y \right] \otimes |n_y\rangle \langle n_y| \right. \\ &\quad \left. - \left(g \sum_{n_y} |n_y\rangle \langle n_y+1| \otimes (T_z + iT_x) + \text{h.c.} \right) \right\} \\ &\equiv \sum_{k_x} H(k_x) \end{aligned}$$

→ dieses H sollte einen QAHF produzieren
(Erinnerung: müssen $\mu = -2t$ setzen, um freie
R/L Major in Ketten zu haben; behalte
vorerst allgemeines μ bei.)

Energielücke und Randmoden:

Betrachte endliche Anzahl von Ketten $n_y = 1, \dots, N$.

Schreibe H als $N \times N$ Matrix von 2×2 Blöcken in $|n_y\rangle$ -Basis.

Für $2t \cos k_x + \mu \approx 0$ und $\sin k_x \approx k_x$:
($\mu = -2t$)

$H(k_x \approx 0)$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \Delta k_x T_y & -\gamma(T_z + iT_x) & & \\ -\gamma(T_z - iT_x) & \Delta k_x T_y & -\gamma(T_z + iT_x) & \\ & -\gamma(T_z - iT_x) & \Delta k_x T_y & -\gamma(T_z + iT_x) \\ & & -\gamma(T_z - iT_x) & \Delta k_x T_y \end{bmatrix} \quad \text{z.B. für } N=4$$

Quiz: Finde Eigenzustände und Eigenwerte für $N=2$ und identifiziere die "Randmoden".

Nächster Schritt: Sind diese Randmoden die einzigen Niederenergiezustände — ist der Bulk gegappt?

Übung: Unendliches System (nur Bulk)

→ finde $H(k_x, k_y)$, plote $E(k_x, k_y)$

für $t=1$, $\Delta=0.3$, $\gamma=-0.5$, $\mu \in [-2, 0]$

Lösung: 2D Bloch-Hamiltonian

$$H(k_x, k_y) = [-(2t \cos k_x + \mu) T_z + \Delta \sin k_x T_y] \\ - 2\gamma [\cos k_y T_z + \sin k_y T_x]$$

$$E(k_x, k_y) = \pm \sqrt{\Delta^2 \sin^2 k_x + (2\gamma \cos k_x + \mu + 2t \cos k_x)^2 + 4\gamma^2 \sin^2 k_y}$$

$\Rightarrow$ immer Energielücke außer für $\mu = -2t - 2\gamma$

Übung: Betrachte endliches System entlang y ("ribbon") und suche nach den Randmoden

Details wie Bulk-Spektrum und Randmoden-Dispersion sind anders als beim QHE durch Magnetfeld. Aber Bulk-Edge-Korrespondenz verrät uns, dass die Randmoden ebenso robust sind wie beim QHE.

Dirac-Gleichung am Phasenübergang:

Bulk-Hamiltonian nahe des Phasenübergangs
bei $\delta = -(\mu + 2t + 2\gamma)$.

Definiere "Masse" $m \equiv -(\mu + 2t + 2\gamma)$

$$H_{\text{Dirac}}(\vec{k}) = \Delta k_x \tau_y - 2\gamma k_y \tau_x + m \tau_z$$
$$= \begin{bmatrix} m & -2\gamma k_y - i\Delta k_x \\ -2\gamma k_y + i\Delta k_x & -m \end{bmatrix}$$

Übergang: $m=0$: masseloses Dirac-Modell

$m>0$: topologische Phase

$m<0$: triviale Phase

$\leadsto$ erinnert an Kitaev-Kette ($m(x) \leftrightarrow$ Domain-Wand)

hier: Fixiere $k_y=0 \rightarrow$ identisches Hamiltonian
wie bei Kitaev-Kette

$\rightarrow M\pm M$ war Eigenzustand von τ_x mit Eigenwert ± 1

Aber hier: Nullmode nicht stationär

$$\varepsilon(k_y) \approx -2\gamma k_y \text{ bei } k_x=0$$

$\Rightarrow$ propagierende Mode mit Geschwindigkeit -2γ

Zusammenfassung (9.4)

- Beziehung Kitaev-Kette und Gittermodell für QHE (Chern-Isolator, QAHE)
- niedrigdimensionales Modell am kritischen Punkt
→ masselose Moden → kopple diese, um höherdimensionales Modelle mit nichttrivialer Topologie zu generieren
- QHE kann in translationsinvarianten Gittermodellen ohne Magnetfeld (aber mit chiralen Hüpftermen) realisiert werden.
- chirale Randmoden können nicht alleine existieren in 1D: 1D-Modell hat immer Paare von L+R Movers
→ die einzige Möglichkeit, nur L zu erzeugen (oder nur R), ist am Rand eines höherdimensionalen Systems

Generelles Zusammenhang: Verbotene Zustände in einer niedrigeren Dimension und nichttriviale Topologie in höherer Dimension hängen zusammen.

9.5 Flusspumpen und die Berry-Phase

Erinnerung: QHE - Zylinder mit magnetischen

Fluss Φ ,



Beschreibe Magnetfeld mit Vektorpotential $\vec{A}$:

$$H(\vec{k}) \rightarrow H(\vec{k} - e\vec{A}) \quad \text{mit} \quad \vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\vec{e}_\phi}{r}$$

Fluss-Pumpen $\Leftrightarrow$ Änderung des Impulses

Fluss-Änderung um ganzzahliges Vielfaches eines

Flussquants: $\vec{k}$ ändert sich um reziproken Gittervektor

$\Rightarrow$ Bloch-Hamiltonian kehrt zu sich selbst zurück

Vereinfachung: benutze 2D Quadratgitter mit

$$k_x, k_y \in [0, 2\pi]^2$$

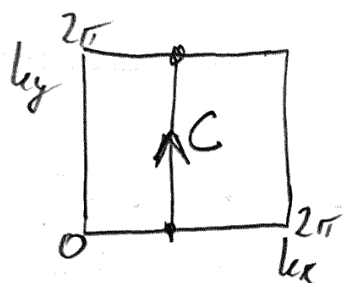
Adiabatische Zeitentwicklung eines Eigenzustands

$|\psi(\vec{k})\rangle$ von $H(\vec{k})$ mit Energie $E(\vec{k})$.

$|\psi(\vec{k})\rangle$ sollte dabei nicht entartet bleiben

$\Rightarrow$ adiabatisches Folgen möglich

Wähle Pfad $\vec{k}(t)$ mit $\vec{k}(0) = \vec{k}(T)$ periodisch



Was ist der finale Zustand bei T_0^2 ?

$$|\psi(k_x, k_y + 2\pi)\rangle \stackrel{?}{=} |\psi(k_x, k_y)\rangle e^{-i \int_0^{T_0^2} dt E(\vec{k}(t))}$$

Nein! Berry 1984: zusätzliche Phase γ

$$\gamma(C) = \oint \vec{A}(\vec{k}) \cdot d\vec{k} \quad \leftarrow \text{Berry-Phase}$$

$$\vec{A}(\vec{k}) = i \langle \psi(\vec{k}) | \vec{\nabla}_{\vec{k}} \psi(\vec{k}) \rangle \quad \leftarrow \text{Berry-Connection}$$

↗ nicht das
Vektorpotential;
für das Argument
braucht man kein
reales Magnetfeld

Berry-Phase = geometrische Phase

Später: $\gamma \leftrightarrow$ topologischer Charakter des
Hamiltonians und seiner Grund-
zustandswellenfunktion

Fluss-Pumpen und Chernzahl:

$\gamma(k_x)$: Information über gepumpte Ladung während
des adiabatischen Zyklus.

Dabei: gepumpte Ladung ist invariant, solange die
Energiedicke erhalten bleibt.

→ wähle E entlang k_x flach für festes k_y

→ lokalisierter Zustand innerhalb einer Einheitszelle in x -Richtung, da alle Wellenfunktionen unabhängig von k_x dieselbe Energie haben.

$$|\psi(n, t=0)\rangle = \int_0^{2\pi} dk_x e^{ik_x n} |\psi(k_x, k_y=0)\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi(n, t=T)\rangle = \int_0^{2\pi} dk_x e^{ik_x n} e^{i(\gamma(k_x) - \theta(k_x))} |\psi(k_x, k_y=0)\rangle$$

$$\theta(k_x) \equiv \int_0^T dt E(k_x, k_y(t)) \text{ dynamische Phase}$$

Seltzam: Während $\theta(k_x)$ periodisch in k_x ist, da $E(k_x) = E(k_x + 2\pi)$, ist die einzige Einschränkung für $\gamma(k_x)$, dass es periodisch modulo 2π sein muss:

$$\gamma(k_x + 2\pi) = \gamma(k_x) + 2\pi W, W \in \mathbb{Z} \text{ ganzzahlig}$$

Wähle Dispersion so, dass $\gamma(k_x) - \theta(k_x) = W \cdot k_x$

$$\Rightarrow |\psi(n, t=T)\rangle = \int dk_x e^{ik_x \underbrace{(n+W)}} |\psi(k_x, k_y=0)\rangle$$

⇒ Wellenfunktion effektiv nach Periode um W Einheitszellen verschoben!

⇒ nach Durchlaufen einer Periode sind die W Ladungseinheiten gepumpt worden, wenn die Berryphase die Relation

$$\gamma(k_x + 2\pi) - \gamma(k_x) = 2\pi W$$

erfüllt.

W heißt 1. Chernzahl = topologische Invariante, die die Bandstruktur von 2D QHE-Systemen charakterisiert.

Tatsächlich W = Bulk topologische Invariante von Systemen mit gebrochener Zeitinversionssymmetrie.

$W=0$: trivialer Isolator

$W \neq 0$: Chern-Isolator mit $|W|$ chiralen Randmoden

Chernzahl von der Berrykrümmung

Berry-Connection $\vec{A}(\vec{k}) \Leftrightarrow$ Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$?

Ähnlichkeiten: • $\vec{A}(\vec{k})$ ist eichabhängig

$$|\psi(\vec{k})\rangle \rightarrow e^{i\chi(\vec{k})} |\psi(\vec{k})\rangle$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{k}) \rightarrow \vec{A}(\vec{k}) + \vec{\nabla}_{\vec{k}} \chi$$

• Berryphase ist eichinvariant für geschlossene Pfade

Idee: In EM ist $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ das messbare Magnetfeld

Hier: $\vec{\nabla}_{\vec{k}} \times \vec{A}(\vec{k}) = \vec{\Omega}(\vec{k})$ Berry-Krümmung

$$= i \left[\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial k_x} \left| \frac{\partial \psi}{\partial k_y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial k_y} \left| \frac{\partial \psi}{\partial k_x} \right\rangle \right] \quad \left(\begin{array}{l} \text{nur} \\ z\text{-Komponente} \\ \text{für 2D-System} \end{array} \right)$$

eichinvariant

Stokes-Theorem: Brillouinzone = 2-Torus (Donut)

$$2\pi W = \gamma(2\pi) - \gamma(0)$$

$$= \iint_{BZ} \vec{\Omega}(\vec{k}) \cdot d\vec{S}$$

"Gauß-Bonnet-Theorem"



$W \neq 0$: "Fluss", der durch geschlossene Fläche geht

$\rightarrow \exists$ "magnetischer Monopol" (Dirac Monopol).

Energetischen schlüsse sind Quellen der Berrykrümmung

9.6) Kubo-Formel und TKNN-Invariante

Behauptung war: Chernzahl W ist topologische Invariante, die mit Berry-Krümmung besetzter Bänder zu tun hat und die Zahl der chiralen Randmoden zwischen Chern-Isolator und trivialer Außenwelt zählt.

Jetzt: Explizite Berechnung der Hall-Leitfähigkeit

$$\sigma_{xy} = W \frac{e^2}{h}$$

aus linear response (Kubo-Formel).

"Linear Response in a nutshell:"

$$H = H_0 + \Delta H$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
System Störung

$$H_0 |m\rangle = E_m |m\rangle \quad \text{Vielleichteigenzustände von } H_0$$

$$\vec{E}\text{-Field: } \vec{E} = -\partial_t \vec{A}$$

$$\Rightarrow \Delta H = -\vec{J} \cdot \vec{A} \quad (\text{paramagnetische Kopplung})$$

$$\text{Wähle } \vec{A}(t) = \frac{\vec{E}}{i\omega} e^{-i\omega t} \quad (\text{nimm } \omega \rightarrow 0 \text{ Limit am Ende})$$

Beachte: i.A. gibt es auch $\vec{A}^2$ -Terme in ΔH (diamagnetische Kopplung), sind für Hall-Response aber zweitrangig.

Ziel: Schreibe $\langle \vec{J}(\omega) \rangle = \vec{\sigma}(\omega) \vec{E}(\omega)$
 $\uparrow$
hängt nur von H_0 ab

$\vec{\sigma}$ = Leitfähigkeitstensor

σ_{xy} = Hall-Leitfähigkeit

Wechselwirkungsbild:

$$\vec{\sigma}(t) = V^{-1} \vec{\sigma} V, \quad V \equiv e^{-i H_0 t / \hbar}$$

$$|\psi(t)\rangle_I = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

$$U(t, t_0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Zeitordnung}}}{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \Delta H(t') dt'\right)$$

$i\hbar \dot{U} = \Delta H U$

Schreibe $U(t) = U(t, t_0 \rightarrow -\infty)$, System bei $t_0 \rightarrow -\infty$

im Grundzustand $|0\rangle$:

zeitwechselter Grundzustand

$$\langle \vec{J}(t) \rangle = \langle 0(t) | \vec{J}(t) | 0(t) \rangle$$

$$= \langle 0 | U^{-1}(t) \vec{J}(t) U(t) | 0 \rangle$$

$$\underset{\uparrow}{\approx} \langle 0 | \left(\vec{J}(t) + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [\Delta H(t'), \vec{J}(t)] \right) | 0 \rangle$$

filtrierende Ordnung ρ in $U(t)$ behalten

bzgl. ΔH

Annahme: $\langle 0 | \vec{J}(t) | 0 \rangle = 0$ kein Strom im Grundzustand

Summenkonvention

$$\langle J_i(t) \rangle = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{-\infty}^t dt' \langle 0 | [J_j(t'), J_i(t)] | 0 \rangle E_j e^{-i\omega t'} = \dots$$

$\uparrow$
i-te Komponente
 $i = x, y$

$t'' \equiv t - t'$

$$\dots = \frac{1}{\hbar\omega} \left(\int_0^{\infty} dt'' e^{i\omega t''} \langle 0 | [J_j(0), J_i(t'')] | 0 \rangle \right) E_j e^{-i\omega t}$$

(genauer: $\omega \rightarrow \omega + i0^+$ für Konvergenz)

Hall-Leitfähigkeit:

$$\sigma_{xy}(\omega) = \frac{1}{\hbar\omega} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle 0 | [J_y(0), J_x(t)] | 0 \rangle$$

Kubo-Formel

Einschieben von Eigenbasis:

$$\sigma_{xy}(\omega) = -\frac{i}{\omega} \sum_{n \neq 0} \left[\frac{\langle 0 | J_y | n \rangle \langle n | J_x | 0 \rangle}{\hbar\omega + E_n - E_0} - \frac{\langle 0 | J_x | n \rangle \langle n | J_y | 0 \rangle}{\hbar\omega + E_0 - E_n} \right]$$

$\omega \rightarrow 0$ Lines:

$$\frac{1}{\hbar\omega + E_n - E_0} \approx \frac{1}{E_n - E_0} - \frac{\hbar\omega}{(E_n - E_0)^2} + \mathcal{O}(\omega^2)$$

$\uparrow$
spielt keine Rolle für Halle

$$\sigma_{xy} = i\hbar \sum_{n \neq 0} \frac{\langle 0 | J_y | n \rangle \langle n | J_x | 0 \rangle - \langle 0 | J_x | n \rangle \langle n | J_y | 0 \rangle}{(E_n - E_0)^2}$$

Kubo-Formel für DC Hall-Leitfähigkeit

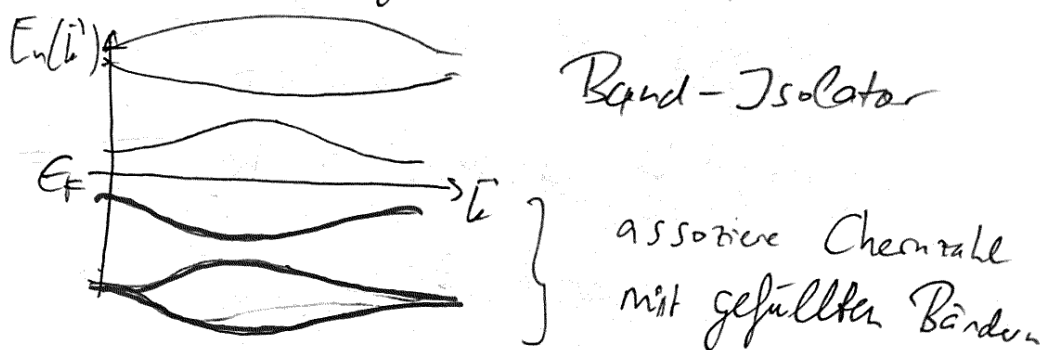
Rolle der Topologie

Betrachte Teilchen auf Gitter

$\Rightarrow$ Brillouinzone = 2-Torus $\mathbb{T}^2$

Bloch-Wellenfunktionen $\Psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\vec{x}} u_{\vec{k}}(\vec{x})$

Annahme: Bänder energetisch separiert, Energielücke (im Bulk)



Berry-Connection: $A_j(\vec{k}) = -i \langle u_{\vec{k}} | \frac{\partial}{\partial k^j} | u_{\vec{k}} \rangle$

$\Rightarrow$ Berry-Krümmung (hier vorher $\vec{\Omega}$)

$$F_{xy} = \frac{\partial A_x}{\partial k^y} - \frac{\partial A_y}{\partial k^x} = -i \left\langle \frac{\partial u}{\partial k^y} \middle| \frac{\partial u}{\partial k^x} \right\rangle + i \left\langle \frac{\partial u}{\partial k^x} \middle| \frac{\partial u}{\partial k^y} \right\rangle$$

$\Rightarrow$ 1. Chernzahl $W = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^2} d^2k F_{xy}$

TKNN-Invariante PRL 99, 405 (1982)

Kubo-Formel ausgedrückt mit Produktzuständen:

$$\sigma_{xy} = i\hbar \sum_{E_\alpha < E_F < E_\beta} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\langle u_k^\alpha | \vec{J}_y | u_k^\beta \rangle \langle u_k^\beta | \vec{J}_x | u_k^\alpha \rangle - (x \leftrightarrow y)}{(E_\beta(k) - E_\alpha(k))^2}$$

Strom: $H |\psi_k\rangle = E_k |\psi_k\rangle$

$$\Rightarrow (e^{-ikx} H e^{ikx}) |u_k\rangle = E_k |u_k\rangle$$

$$\Rightarrow \tilde{H}(k) |u_k\rangle = E_k |u_k\rangle, \quad \tilde{H}(k) = e^{-ikx} H e^{ikx}$$

Strom $\vec{J} = \frac{e}{\hbar} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \vec{k}}$

$$\sigma_{xy} = \frac{ie^2}{\hbar} \sum_{E_\alpha < E_F < E_\beta} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\langle u_k^\alpha | \partial_y \tilde{H} | u_k^\beta \rangle \langle u_k^\beta | \partial_x \tilde{H} | u_k^\alpha \rangle - (x \leftrightarrow y)}{(E_\beta - E_\alpha)^2}$$

∂_x, ∂_y bedeutet $\partial/\partial k^x, \partial/\partial k^y$

$$\langle u_k^\alpha | \partial_i \tilde{H} | u_k^\beta \rangle = \langle u_k^\alpha | \partial_i (\tilde{H} | u_k^\beta \rangle) - \langle u_k^\alpha | \tilde{H} | \partial_i u_k^\beta \rangle$$

$$(\partial_i E_\beta) \underbrace{\langle u_k^\alpha | u_k^\beta \rangle}_{=0} = (E_\beta(k) - E_\alpha(k)) \langle u_k^\alpha | \partial_i u_k^\beta \rangle$$

$$= - (E_\beta(k) - E_\alpha(k)) \langle \partial_i u_k^\alpha | u_k^\beta \rangle$$

$$\Rightarrow \sigma_{xy} = \frac{ie^2}{\hbar} \sum_{\alpha\beta} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \langle \partial_y u_k^\alpha | u_k^\beta \rangle \langle u_k^\beta | \partial_x u_k^\alpha \rangle - (x \leftrightarrow y)$$

Summation über leere Bänder: $\sum_{\beta} |u_{\beta}^p\rangle \langle u_{\beta}^p| = \mathbb{1} - \sum_{\alpha} |u_{\alpha}^p\rangle \langle u_{\alpha}^p|$

kann die $\mathbb{1}$ wieder
"rausziehen"

verschwindet in σ_{xy}
durch Symmetrie

$$\Rightarrow \sigma_{xy} = \frac{ie^2}{h} \sum_{\alpha} \int_{\text{gefüllte Bänder}} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \left\langle \partial_y u_{\alpha}^p / \partial_x u_{\alpha}^p \right\rangle - \left\langle \partial_x u_{\alpha}^p / \partial_y u_{\alpha}^p \right\rangle$$

Daraus folgt mit Definition der Chernzahl

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \sum_{\alpha} W_{\alpha}$$

gefüllte
Bänder

"Kubo = Chern"

Japanischer Physiker = chinesischer Mathematiker

Eine der fundamentalen Gleichungen der topologischen
Bandtheorie.

Im QHE-System bestimmt die Chernzahl der besetzten
Zustände die quantisierte Hall-Leitfähigkeit!

Übung: Zeige für Gittermodell des 2D-Chen-Isolators,
dass die Chernzahl die Anzahl der Randmoden bestimmt.
chiral