

7. Transport in Metallen

In diesem Kapitel kehren wir zu unserer Ausgangsfrage zurück (① Drude-Modell):
Wie passiert Ladungstransport in Metallen?

$T=0$: ein ideales Metall ist ein perfekter elektrischer Leiter.

Aber: Restwiderstand durch Unordnung (Störstellen, Gitterdefekte).

$T>0$: Elektron-Elektron und Elektron-Phonon-Streuung sorgen für T -abhängigen Widerstand.

Spezialfall: Supraleitung — hier bildet sich durch Elektron-Phonon-Wechselwirkung (oder andere Mechanismen) ein Kondensat von Cooper-Paaren (makroskopischer Quantenzustand), das widerstandsfrei den Strom leitet.

→ fortgeschrittenes Thema (BCS-Theorie).

7.1 Elektrische Leitfähigkeit

Homogenes, isotropes Metall: skalare elektrische Leit-

fähigkeit σ : $\vec{j}(\vec{q}, \omega) = \sigma(\vec{q}, \omega) \vec{E}(\vec{q}, \omega)$

↑
Stromdichte

$\vec{j}(\vec{q}, \omega) \longleftrightarrow$ Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t) = -en(\vec{r}, t)$

Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0}$$

Fouriertransformation:

$$\omega \rho(\vec{q}, \omega) - \vec{q} \cdot \vec{j}(\vec{q}, \omega) = 0.$$

Verbindung zur dielektrischen Suszeptibilität $\chi_0(\vec{q}, \omega)$:

$$\chi_0(\vec{q}, \omega) \stackrel{\text{Def. } \chi_0}{=} - \frac{\rho(\vec{q}, \omega)}{eV(\vec{q}, \omega)} \stackrel{\text{Kont. Gl.}}{=} - \frac{\vec{q} \cdot \vec{j}(\vec{q}, \omega)}{e\omega V(\vec{q}, \omega)}$$

$$\stackrel{\text{Def. } \sigma}{=} - \frac{\sigma(\vec{q}, \omega)}{e} \frac{\vec{q} \cdot \vec{E}(\vec{q}, \omega)}{V(\vec{q}, \omega)} = - \frac{\sigma(\vec{q}, \omega)}{\omega} \frac{[i\vec{q}^2 V(\vec{q}, \omega)]}{e^2 V(\vec{q}, \omega)}$$

↑
 $\vec{E} \rightarrow V$

$$-e\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} V(\vec{r}, t)$$

$$\Rightarrow \chi_0(\vec{q}, \omega) = -\frac{iq^2}{e^2 \omega} \sigma(\vec{q}, \omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon(\vec{q}, \omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi_0(\vec{q}, \omega) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma(\vec{q}, \omega)}$$

Lange Wellenlängen: $q \ll k_F$

$$\epsilon(0, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow \sigma(\omega) = \frac{i\omega_p^2}{4\pi\omega} \quad \text{rein imaginär?}$$

(*)

→ FALSCH!

Real- und Imaginärteil von σ müssen
Kramers-Kronig-Relation erfüllen:

$$\sigma_1(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \left[\int d\omega' \frac{1}{\omega - \omega'} \sigma_2(\omega') \right]$$

$$\sigma_2(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \left[\int d\omega' \frac{1}{\omega - \omega'} \sigma_1(\omega') \right]$$

→ Benutze σ_2 aus (*):

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_1(\omega) &= \frac{\omega_p^2}{4} \delta(\omega) \\ \sigma_2(\omega) &= \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega} \end{aligned}}$$

perfekte
Leitfähigkeit
Korrekt:

$$\sigma(\omega) = i \frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{1}{\omega + i0^+}$$

(analytische Form) ↑
Kausalität!

Wichtige Konsequenz:

"f-Summenregel"

$$\int_0^{\infty} d\omega' \sigma_1(\omega') = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \sigma_1(\omega') = \frac{\omega_p^2}{8} = \frac{\pi e^2 n}{2m}$$

7.2 Transportgleichungen und Relaxationszeit

7.2.1 Boltzmann-Gleichung

Ähnlicher Ansatz wie in Landau-Fermiflüssigkeitstheorie: Verteilung von Quasiteilchen.

Betrachte $f(\vec{k}, \vec{r}, t)$:

$$f(\vec{k}, \vec{r}, t) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^3 r$$

= Anzahl der Teilchen im Phasenraumvolumen
 $d^3 r \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$ um $(\vec{k}, \vec{r})$ zur Zeit t .

→ Beschreibung funktioniert, wenn zeitliche und räumliche Variablen bei $q \ll k_F$ (lange Wellenlängen) bzw. $\hbar\omega \ll \epsilon_F$ (kleine Frequenzen) auftreten.

Gesamtteilchenzahl $N = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3r f(\vec{k}, \vec{r}, t)$

Gleichgewicht: Fermi-Dirac $f_0(\vec{k}, \vec{r}, t) = \frac{1}{e^{(\epsilon_k - \mu)/k_B T} + 1}$
unabhängig von $\vec{r}, t$

Man kann zeigen (Herleitung ist aufwändig):

$$\frac{D}{Dt} f(\vec{k}, \vec{r}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \dot{\vec{k}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} \right) f(\vec{k}, \vec{r}, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}}$$

Boltzmann-Gleichung

↑
totale Zeitableitung in Bezugssystem, das sich mit dem Phasenraumvolumen bewegt.

Rechte Seite: "Kollisionsintegral"

→ Änderungsrate durch Streuprozesse

[ohne Streuung = "nur linke Seite = 0" ↔ Kontinuitätsgleichung]

Klassisch gesehen:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$

$$\hbar \dot{\vec{k}} = -e \vec{E} = \text{Kraft}$$

Für statische Potentiale:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = - \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \left[\overset{\text{Wahrscheinlichkeit eines Streuung } \vec{k} \rightarrow \vec{k}'}{W(\vec{k}, \vec{k}') f(\vec{k}, \vec{r}, t) (1 - f(\vec{k}', \vec{r}, t))} - W(\vec{k}', \vec{k}) f(\vec{k}', \vec{r}, t) (1 - f(\vec{k}, \vec{r}, t)) \right]$$

Zeit inversion $\Rightarrow W(\vec{k}, \vec{k}') = W(\vec{k}', \vec{k})$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} W(\vec{k}, \vec{k}') [f(\vec{k}', \vec{r}, t) - f(\vec{k}, \vec{r}, t)]$$

$\Rightarrow$ Integro-Differentialgleichung

Vereinfachung nahe des Gleichgewichts:

$$|f - f_0| \ll f_0$$

Weitere Annahme: lokales Gleichgewicht mit langsamer raumzeitlicher Variation von Temperatur $T(\vec{r}, t)$ und chemischem Potential $\mu(\vec{r}, t)$

$\rightarrow$ benutze lokale Fermi-Dirac-Verteilung.

$\rightarrow$ nähere Kollisionsintegral mittels Relaxationszeit-Näherung.

+ Isotropie $\epsilon_{\vec{k}} = \epsilon_{|\vec{k}|}$ + elastische Prozesse (nur Winkel zwischen $\vec{k}$ und $\vec{k}'$ geht ein)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = - \frac{f(\vec{k}, \vec{r}, t) - f_0(\vec{k}, \vec{r}, t)}{\tau(\epsilon_{\vec{k}})}$$

$\tau \equiv$ Relaxationszeit

Einfachster Fall: System bei $T = \text{const}$ in einem kleinen homogenen $\vec{E}(t)$.

Schreibe $f = f_0 + \delta f$ und linearisiere in δf :

$$\boxed{-i\omega \delta f(\vec{k}, \omega) - \frac{e \vec{E}(\omega)}{\hbar} \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0(\vec{k}) = - \frac{\delta f(\vec{k}, \omega)}{\tau(\epsilon_{\vec{k}})}$$

mit $f(\vec{k}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} f(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t}$ und analog für $\vec{E}$.

Weitere Annahme für linearisierte Gleichung: $\delta f \propto |\vec{E}|$

$$\begin{aligned} \text{Lösung: } \delta f(\vec{k}, \omega) &= \frac{e \tau \vec{E}(\omega)}{\hbar (1 - i\omega \tau)} \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0(\vec{k}) \\ &= \frac{e \tau \vec{E}(\omega)}{\hbar (1 - i\omega \tau)} \frac{\partial f_0(\epsilon)}{\partial \epsilon} \vec{\nabla}_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Strom } \vec{j}(\omega) = -2e \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{\nabla}_{\vec{k}} f(\vec{k}, \omega) = - \frac{e^2}{4\pi^3} \int d^3k \frac{\tau(\epsilon_{\vec{k}}) [\vec{E}(\omega) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}}] \vec{\nabla}_{\vec{k}}}{1 - i\omega \tau(\epsilon_{\vec{k}})} \frac{\partial f_0(\epsilon_{\vec{k}})}{\partial \epsilon_{\vec{k}}}$$

$$\text{mit } \hbar \vec{\nabla}_{\vec{k}} = \vec{\nabla}_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}}$$

$$\Rightarrow \vec{j}_{\alpha}(\omega) = \sum_{\beta} \sigma_{\alpha\beta}(\omega) E_{\beta}(\omega)$$

$$\boxed{\sigma_{\alpha\beta}(\omega) = - \frac{e^2}{4\pi^3} \int d\epsilon \frac{\partial f_0(\epsilon)}{\partial \epsilon} \frac{\tau(\epsilon)}{1 - i\omega \tau(\epsilon)} \int d\Omega_{\vec{k}} k^2 \frac{V_{\alpha\vec{k}} V_{\beta\vec{k}}}{\hbar |\vec{\nabla}_{\vec{k}}|}}$$

Ohmsches Gesetz. $T \ll T_F$: $\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}$ gepunktet um $\epsilon = \mu$.

7.2.2 Drude - Leitfähigkeit

Für $\omega T \gg 1$ spielt die Relaxation keine Rolle.
Im isotropen System $\bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma \delta_{\alpha\beta}$ und bei $T \ll T_F$ erhalten wir

$$\sigma(\omega) \approx i \frac{e^2 m^2 V_F}{4\pi^3 \hbar^3 \omega} \int d\Omega_{\vec{k}} V_F^2 = i \frac{\epsilon_n}{m \omega} = i \frac{\omega_p^2}{4\pi \omega}$$

→ siehe perfektes Metall.

Aber: Für kleine Frequenzen $\omega T \ll 1$

(dc = "direct current", $\omega = 0$)

haben wir

$$\sigma_{dc} = - \frac{e^2 n}{m} \int d\epsilon \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \tau(\epsilon) = \frac{\epsilon_n \bar{\tau}}{m} = \frac{\omega_p^2 \bar{\tau}}{4\pi}$$

mit $\bar{\tau} := \int d\epsilon \tau(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = \text{gemittelte Relaxationszeit.}$

⇒ Drude - Leitfähigkeit (siehe Kapitel 1).

Wenn τ nur schwach von ϵ abhängt:

$$\begin{aligned} \sigma(\omega) &= \frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{\bar{\tau}}{1 - i\omega \bar{\tau}} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \left(\frac{\bar{\tau}}{1 + \omega^2 \bar{\tau}^2} + i \frac{\bar{\tau}^2 \omega}{1 + \omega^2 \bar{\tau}^2} \right) \\ &= \sigma_1 + i\sigma_2 \end{aligned}$$

Da erfüllt f-Summenregel $\int_0^\infty d\omega \sigma_1(\omega) = \frac{\omega_p^2}{8}$

7.2.3 Die Relaxationszeit

Wir hatten $W(\vec{k}, \vec{k}')$ eingeführt:

$$\frac{f(\vec{k}) - f_0(\vec{k})}{T(\epsilon_{\vec{k}})} = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} W(\vec{k}, \vec{k}') [f(\vec{k}) - f(\vec{k}')], \quad (*)$$

Betrachte wieder elastische Streuung im isotropen System bei schwachem $\vec{E}$ -Feld. Die Lösung der linearisierten Gleichung $-i\omega \delta f - \frac{e\vec{E}}{\hbar} \vec{v}_{\vec{k}} f_0 = -\frac{\delta f}{T}$ ist von der Form

$$f(\vec{k}) = f_0(\vec{k}) + A(k) \vec{k} \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow f(\vec{k}) - f(\vec{k}') = A(k) (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{E}$$

Definiere $\hat{z} \parallel \vec{k}$; $\Theta = \text{Polarwinkel von } \vec{E}$

$\Theta' = \text{Polarwinkel von } \vec{k}'$

$\phi' = \text{Azimutwinkel von } \vec{k}'$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = kE \cos \Theta$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k}' = kk' \cos \Theta$$

$$\vec{k}' \cdot \vec{E} = k'E (\cos \Theta \cos \Theta' + \sin \Theta \sin \Theta' \cos \phi')$$

Elastische Streuung $\Rightarrow k = k'$

$$\Rightarrow f(\vec{k}) - f(\vec{k}') = A(k) kE [\cos \Theta (1 - \cos \Theta') - \sin \Theta \sin \Theta' \cos \phi']$$

$\Rightarrow$ Einsetzen in (*): ϕ' -Integral verschwindet

$$\Rightarrow \frac{f(\vec{k}) - f_0(\vec{k})}{T(\epsilon_{\vec{k}})} = \int d\Omega_{\vec{k}'} [f(\vec{k}) - f(\vec{k}')] W(\vec{k}, \vec{k}') =$$

$$\begin{aligned}
&= A(k) k E \cos \theta \int d\Omega_{k'} (1 - \cos \theta') W(\vec{k}, \vec{k}') \\
&= [f(\vec{k}') - f_0(\vec{k}')] \int d\Omega_{k'} (1 - \cos \theta') W(\vec{k}, \vec{k}')
\end{aligned}$$

→ Faktor $f(\vec{k}') - f_0(\vec{k}')$ kürzt sich raus

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\tau(\epsilon_k)} = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} W(\vec{k}, \vec{k}') (1 - \cos \theta')}$$

wobei $\epsilon_k = \epsilon_{k'}$ erhalten ist.

Nächster Schritt: Betrachte verschiedene Streuprozesse und deren Kollisionswahrscheinlichkeiten W , Relaxationszeiten τ und zugehörige Leitfähigkeits- und Widerstandsbeiträge.

7.3 Störstellenstreuung

Störstellen $\Rightarrow$ Verlust der Gitterperiodizität

$\Rightarrow$ Quasiteilchenstreuung

$\Rightarrow$ Impuls wird verändert, Energie bleibt erhalten.

Streuquote $W(\vec{k}, \vec{k}')$ durch Störstellenpotential $\hat{V}$ folgt aus Fermis goldener Regel:

$$W(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{2\pi}{\hbar} n_{\text{imp}} |\langle \vec{k}' | \hat{V} | \vec{k} \rangle|^2 \delta(\epsilon_{\vec{k}} - \epsilon_{\vec{k}'})$$

↑
Dichte der Störstellen ("impurities")

Geringe Dichte $n_{\text{imp}} \Rightarrow$ vernachlässige Interferenzeffekte

$$\begin{aligned} \frac{1}{T(\epsilon_{\vec{k}})} &= \frac{2\pi}{\hbar} n_{\text{imp}} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} |\langle \vec{k}' | \hat{V} | \vec{k} \rangle|^2 (1 - \hat{k} \cdot \hat{k}') \delta(\epsilon_{\vec{k}} - \epsilon_{\vec{k}'}) \\ &= n_{\text{imp}} (\hat{k} \cdot \vec{V}_{\vec{k}}) \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{k}, \vec{k}') (1 - \hat{k} \cdot \hat{k}') \frac{d\Omega_{\vec{k}'}}{4\pi} \end{aligned}$$

mit dem differentiellen Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$.

Herleitung:

$$\begin{aligned} W(\vec{k}, \vec{k}') d\Omega_{\vec{k}'} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}' \in d\Omega_{\vec{k}'}} |\langle \vec{k}' | \hat{V} | \vec{k} \rangle|^2 \delta(\epsilon_{\vec{k}} - \epsilon_{\vec{k}'}) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} d\Omega_{\vec{k}'} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} |\langle \vec{k}' | \hat{V} | \vec{k} \rangle|^2 \delta(\epsilon_{\vec{k}} - \epsilon_{\vec{k}'}) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} d\Omega_{\vec{k}'} N(\epsilon) |\langle \vec{k}' | \hat{V} | \vec{k} \rangle|^2 \end{aligned}$$

Die Streuung pro einfallendem Teilchen $\int_{\text{Strom}} d\sigma(\vec{k}, \vec{k}') = W(\vec{k}, \vec{k}') d\Omega_{\vec{k}'}$ bestimmt den diff. Streuquerschnitt

$$\hat{k} \cdot \vec{V}_{\vec{k}} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{N(\epsilon)}{4\pi} |\langle \vec{k}' | \hat{V} | \vec{k} \rangle|^2$$

Wichtig: Beachte den Unterschied in den Ausdrücken für die Transport-Relaxationszeit

$$\frac{1}{T_{\text{transport}}(\epsilon_k)} = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} W(\vec{k}, \vec{k}') (1 - \cos \theta')$$

und die Quasiteilchen-Relaxationszeit

$$\frac{1}{T_{\text{quasiparticle}}(\epsilon_k)} = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} W(\vec{k}, \vec{k}')$$

Der Faktor $(1 - \cos \theta')$ gewichtet Rückwärtsstreuung ($\theta' \approx \pi$) stärker gegenüber Vorwärtsstreuung ($\theta' \approx 0$), da Rückwärtsstreuung stärker gegen den gerichteten Transport arbeitet.

Annahme: Defekte = Punktladungen Ze

$$\text{mit } \langle \vec{k}' | \hat{V} | \vec{k} \rangle = \frac{4\pi Ze^2}{|\vec{k} - \vec{k}'|^2 + k_{\text{TF}}^2}$$

Für starke Abschirmung $k_{\text{TF}} \gg k_F$ wird das Potential unabhängig von $(\vec{k} - \vec{k}')$, und wir haben

$$T_{\text{transport}} = T_{\text{quasiparticle}}, \quad \frac{1}{T} \approx \frac{\pi}{\hbar} N(\epsilon_F) n_{\text{imp}} \frac{(4\pi Ze^2)^2}{k_{\text{TF}}^4}$$

Zugehörige Leitfähigkeit für Streuung an Coulomb-Defekten mit nur s-Wellen-Streuung. $T(\epsilon)$ hängt nur schwach von Energie ab, und damit $\sigma = \frac{e^2 n T(\epsilon_F)}{m}$ bzw.

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{e^2 n T(\epsilon_F)}$$

unabhängig von der Temperatur.

Dieser Widerstand heißt Restwiderstand von Metallen. Der Restwiderstand wird null für perfekte Materialien.

7.4 Elektron-Phonon-Wechselwirkung

Wir hatten im Rahmen der Peierls-Instabilität bereits die Elektron-Phonon-Wechselwirkung eingeführt:

$$H_{int} = 2i \sum_{\vec{k}, \vec{q}, s} \tilde{V}_{\vec{q}} \sqrt{\frac{\hbar}{2s_0 \omega_{\vec{q}}}} |\vec{q}| (b_{\vec{q}} - b_{-\vec{q}}^+) C_{\vec{k}+\vec{q}, s}^+ C_{\vec{k}, s}$$

→ dominante Prozesse sind Emission / Absorption einzelner Phononen (andere Prozesse sind von höherer Ordnung in H_{int}).

Impuls- und Energieerhaltung:

(Quasi-) $\vec{k} = \vec{k}' + \vec{q} + \vec{G}$

$$E_{\vec{k}} = \hbar \omega_{\vec{q}} + E_{\vec{k}'}$$

mit $\omega_{\vec{q}} = c_s |\vec{q}|$ der Phonon dispersion.

Beachte, dass $\hbar \omega_{\vec{q}} \leq \hbar \omega_D \ll E_F$.

→ betrachte Matrixelemente der möglichen Streuprozesse:

$$\langle \vec{k}+\vec{q}; N_{\vec{q}} | (b_{\vec{q}} - b_{-\vec{q}}^+) c_{\vec{k}+\vec{q},s}^+ c_{\vec{k},s} | \vec{k}; N_{\vec{q}}' \rangle$$

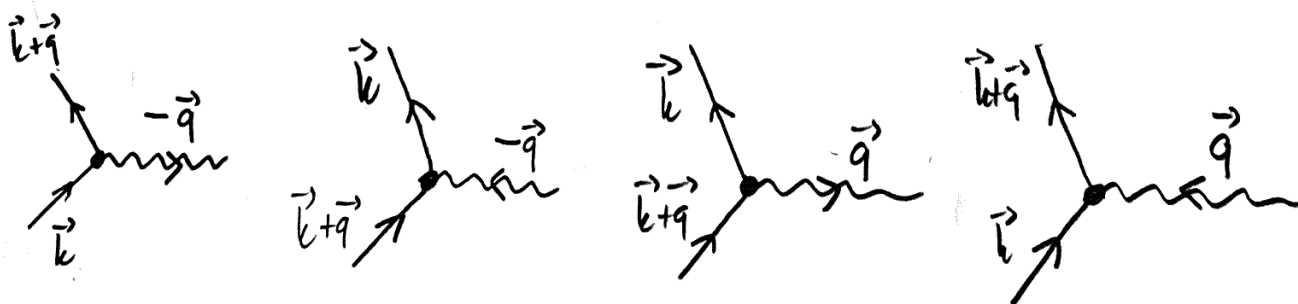
$$= \langle \vec{k}+\vec{q} | c_{\vec{k}+\vec{q},s}^+ c_{\vec{k},s} | \vec{k} \rangle \left(\sqrt{N_{\vec{q}}'} \delta_{N_{\vec{q}}', N_{\vec{q}}'-1} \delta_{\vec{q}, \vec{q}'} - \right. \\ \left. - \sqrt{N_{\vec{q}}'+1} \delta_{N_{\vec{q}}', N_{\vec{q}}'+1} \delta_{\vec{q}, -\vec{q}'} \right)$$

Fermis goldene Regel $\Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = -\frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{q}} |g(\vec{q})|^2 \left[f(\vec{k}) (1-f(\vec{k}+\vec{q})) (N_{\vec{q}}+1) - f(\vec{k}+\vec{q}) (1-f(\vec{k})) N_{\vec{q}} \right] \times \\ \times \delta(\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}} + \hbar \omega_{\vec{q}}) \\ - \left[f(\vec{k}+\vec{q}) (1-f(\vec{k})) (N_{\vec{q}}+1) - f(\vec{k}) (1-f(\vec{k}+\vec{q})) N_{\vec{q}} \right] \times \\ \times \delta(\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}} - \hbar \omega_{\vec{q}}) \Big]$$

Hier $g(\vec{q}) := \tilde{V}_{\vec{q}} |\vec{q}| \sqrt{\frac{2\hbar}{\rho_0 \omega_{\vec{q}}}}$

Graphisch:



→ $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}}$ führt auf komplizierte Integro-Differentialgleichung, deren Lösung aufwändig ist. Zudem muss man auch das Nichtgleichgewichts-Phonon-Problem lösen.

Hier: Beschränkung auf verschiedene Temperatur-Regime und Vereinfachung der Phonon-Betrachtung.

Zunächst: $\Theta_D \ll T_F \Rightarrow \omega_{\vec{q}}$ irrelevant für Energieerhaltung: $E_{\vec{k}'} = E_{\vec{k}+\vec{q}} \approx E_{\vec{k}}$

$\Rightarrow$ nimm Impulserhaltung an und betrachte Gitterverzerrung als quasi-statisch. (adiabatische Born-Oppenheimer-Näherung).

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{q}} |g(\vec{q})|^2 2 N(\omega_{\vec{q}}) [f(\vec{k}+\vec{q}) - f(\vec{k})] \delta(E_{\vec{k}+\vec{q}} - E_{\vec{k}})$$

und Gleichgewichtsanahme für Phonon-Verteilung:

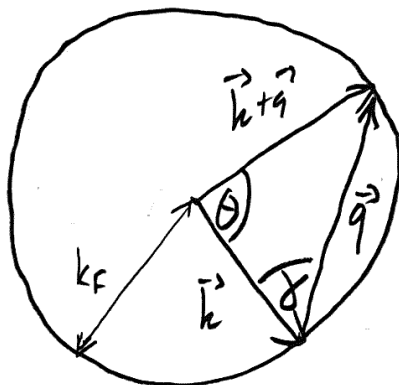
$$N(\omega_{\vec{q}}) = \frac{1}{e^{\hbar\omega_{\vec{q}}/k_B T} - 1}.$$

$\Rightarrow$ diese Näherungen führen auf korrekte T -Abhängigkeit von $\rho(T)$.

Relaxationszeitansatz:

$$\frac{1}{T(\epsilon_{\vec{k}})} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\lambda}{N(\epsilon_F)} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_{\vec{q}} N(\omega_{\vec{q}}) (1 - \cos \theta) \delta(\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}})$$

mit $|\vec{k}| = |\vec{k}+\vec{q}| = k_F$.



Hier wurde $|g(\vec{q})|^2 = \frac{\lambda}{2N(\epsilon_F)\Omega} \hbar \omega_{\vec{q}}$ parametrisiert,

λ = dimensionslose Elektron-Phonon-Kopplungskonstante.

$\lambda < 1$ in den meisten Metallen.

Wie vorher hängt T nur schwach von ϵ_F ab;
aber jetzt hängt es via $N(\omega_{\vec{q}})$ von T ab!

Schreibe δ -Funktion um:

$$\delta(\epsilon_{\vec{k}+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}}) = \delta\left(\frac{\hbar^2}{2m} (q^2 - 2k_F q \cos \varphi)\right) = \frac{m}{\hbar^2 k_F q} \delta\left(\frac{q}{2k_F} - \cos \varphi\right)$$

↑
siehe Skizze.

$$2\gamma + \Theta = \pi$$

$$\Rightarrow 1 - \cos \Theta = 1 + \cos(2\gamma) = 2 \cos^2(\gamma)$$

Integral über q geht von 0 bis $2k_F$.

$$\Rightarrow \frac{1}{T(E_F, T)} = \frac{-\lambda}{N(E_F)} \frac{m}{\hbar^2 \pi k_F} \int_0^{2k_F} dq \, q \omega_q N(\omega_q) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\gamma \sin \gamma \cos^2 \gamma \delta\left(\frac{q}{2k_F} - \cos \gamma\right)$$

$$= \frac{\lambda}{4N(E_F)} \frac{m c_s}{\hbar^2 \pi k_F^3} \int_0^{2k_F} \frac{q^4 dq}{e^{\hbar c_s q / k_B T} - 1}$$

$$= \frac{\lambda}{4N(E_F)} \frac{m c_s k_F^2}{\hbar^2 \pi} \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^5 \int_0^{2\Theta_D/T} \frac{y^4 dy}{e^y - 1},$$

wobei wir $k_B \Theta_D \approx \hbar c_s k_F$ benutzt haben.

$\Rightarrow$ zwei Temperatur-Regime:

$$\frac{1}{T} = \begin{cases} 6 \zeta(5) \lambda \pi \frac{k_B \Theta_D}{\hbar} \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^5, & T \ll \Theta_D \\ \lambda \pi \frac{k_B \Theta_D}{\hbar} \left(\frac{T}{\Theta_D}\right), & T \gg \Theta_D. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma = \frac{e^2 n}{m} \tau(T) \\ \rho = \frac{m}{e^2 n} \frac{1}{\tau(T)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S(T) \propto \begin{cases} T^5 & , T \ll \Theta_D \\ T & , T \gg \Theta_D \end{cases}$$

Bloch-Grüneisen-Gesetz

Für hohe T ist S bestimmt durch die thermische Besetzung von Phononen,

$$N(\omega_q) \approx \frac{k_B T}{\hbar \omega_q} \quad (\text{Bose-Einstein für } T \gg \Theta_D)$$

durch die sich die Streustärke der Gitterschwingungen quasi-linear mit T verändert.

Bei tiefen T sind nur Moden mit $\hbar \omega_q < k_B T$ bzw. $q < k_B T / \hbar c_s$ besetzt; dadurch findet vor allem Vorwärtsstreuung statt, die den Streuphasenraum stärker einschränkt und zugleich den Widerstand weniger stark beeinflusst.

Daher die T^5 -Abhängigkeit für $T \ll \Theta_D$.

7.5 Elektron-Elektron-Streuung

Erinnerung Kapitel 5: Streurate nahe E_F wird klein wegen Pauli-Prinzip:

$$\frac{1}{T(E)} = \frac{1}{T_e} \left(\frac{E}{E_F} - 1 \right)^2$$

$\uparrow$
Zeitkonstante

Wir addieren dazu eine konstante Streurate durch Störstellen (reguliert das Streu-Integral):

$$\frac{1}{T(E)} \rightarrow \frac{1}{T_e} \left(\frac{E}{E_F} - 1 \right)^2 + \frac{1}{T_0}$$

und daraus erhält man

$$\rho(T) = \rho_0 + \frac{\pi^2}{3} \frac{m}{n e^2 T_e} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2$$

$\Rightarrow \rho(T) \propto \text{const} + T^2$ für Fermiflüssigkeit mit Störstellen.

Wichtig dabei: Bedeutung der Umklappstreuung (s. Sigrist-Skript S. 126).