

⑥ Landau - Fermiflüssigkeitstheorie

Bisher hatten wir Elektronen als quasi-unabhängige Teilchen angenommen. Die einzigen Effekte der e-e-Wechselwirkung waren bisher die Renormierung von Potentialen und kollektive Anregungen (z.B. Plasmonen).

Wir waren insbesondere davon ausgegangen, dass sich elektronische Anregungen als Teilchen mit fester Energie-Impuls-Relation beschreiben lassen.

→ Grundzustand: Fermisee mit wohldefinierter Fermioberfläche

Diese Annahme (Hypothese) ist nicht allgemein korrekt!

Wir müssen zeigen, dass in Metallen die Quasiteilchenbeschreibung korrekt ist bzw. unter welchen Bedingungen das gilt. → Landau - Fermiflüssigkeitstheorie

⑥.1 Lebensdauer von Quasiteilchen

Betrachte die Lebensdauer eines Zustands mit einem gefüllten Fermisee, zu dem ein Elektron hinzugefügt wird. Sei $\vec{k}$ mit $|\vec{k}| > k_F$ ($\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $\epsilon_k > \epsilon_F$)

der Impuls (die Energie) des zusätzlichen Elektrons.

Durch e-e-WW wird dieser Zustand in einen Vielteilchenzustand zerfallen.

$$\hat{H}_{ee} = \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \vec{q}} \sum_{ss'} V(\vec{q}) \hat{C}_{\vec{k}, \vec{q}, s}^{\dagger} \hat{C}_{\vec{k}'+\vec{q}, s'}^{\dagger} \hat{C}_{\vec{k}', s'} \hat{C}_{\vec{k}, s}$$

$V(\vec{q})$: e-e-LW im Impulsraum

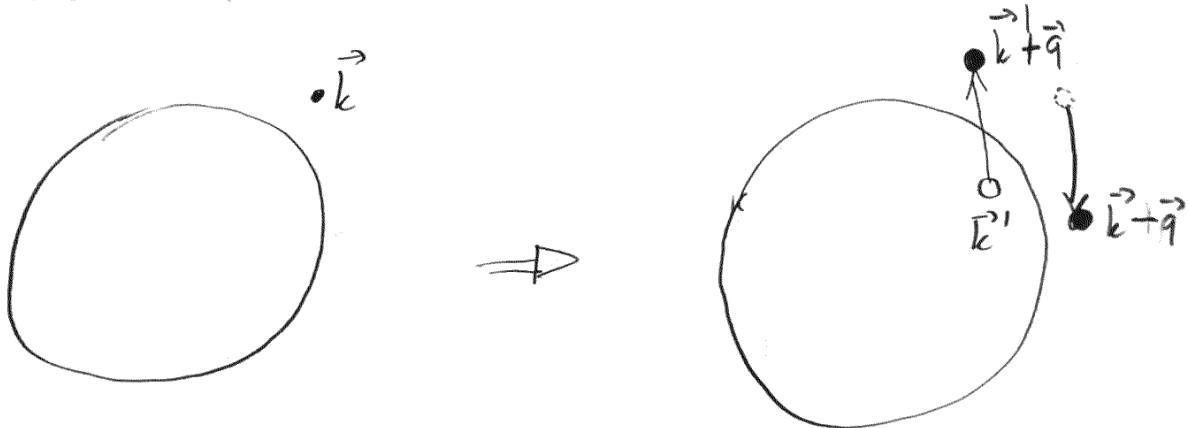
$\vec{q}$: Impulsübertrag

Im Folgenden benutzen wir das kurzreichweitige Yukawa-Potential

$$V(\vec{q}) = \frac{4\pi e^2}{q^2 \epsilon(\vec{q}, 0)} = \frac{4\pi e^2}{q^2 + k_{TF}^2} \quad (\text{Thomas-Fermi-Screening}).$$

Da wir nur kleine Energieüberträge $\hbar\omega \ll E_F$ betrachten, ist die statische ($\omega=0$) Näherung okay.

In Störungstheorie ist der führende Effekt von H_{ee} die Erzeugung eines Elektron-Loch-Paares zusätzlich zu dem Elektron über dem Fermisee.



$\Rightarrow$ Energie- und Impulserhaltung!

$$\vec{k} = (\vec{k} - \vec{q}) - \vec{k}' + (\vec{k}' + \vec{q}) \quad \checkmark \quad \left(\begin{array}{l} \text{das hatten} \\ \text{wir extra} \\ \text{so gewählt} \end{array} \right)$$

$$\epsilon_{\vec{k}} = \epsilon_{\vec{k}-\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}'} + \epsilon_{\vec{k}'+\vec{q}}$$

Wir berechnen die Lebensdauer $\tau_{\vec{k}}$ des Anfangszustands mittels Fermis goldener Regel für Übergangsraten.

Da $\vec{k}'$, $\vec{q}$ und der Spin des erzeugten Elektrons nicht fixiert sind, müssen wir darüber summieren:

$$\frac{1}{\tau_{\vec{k}}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{\Omega^2} \sum_{\vec{k}', \vec{q}} \sum_{s'} |V(\vec{q})|^2 \underbrace{n_{0,\vec{k}'} (1 - n_{0,\vec{k}-\vec{q}}) (1 - n_{0,\vec{k}'+\vec{q}})}_{\substack{\uparrow \\ \text{Pauliprinzip ist erfüllt!}}} \delta(\epsilon_{\vec{k}-\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}'} - (\epsilon_{\vec{k}'+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}}))$$

Betrachte $\vec{k}'$ -Summe (Integral) unter der Annahme, dass $|\epsilon_{\vec{k}'+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}'}|$ klein ist.

$$S(\omega_{\vec{q}, \vec{k}}, \vec{q}) := \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{k}'} n_{0,\vec{k}'} (1 - n_{0,\vec{k}'+\vec{q}}) \delta(\epsilon_{\vec{k}-\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}'} - (\epsilon_{\vec{k}'+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}}))$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k' n_{0,\vec{k}'} (1 - n_{0,\vec{k}'+\vec{q}}) \delta(\epsilon_{\vec{k}'+\vec{q}} - \epsilon_{\vec{k}'} - \hbar \omega_{\vec{q}, \vec{k}}),$$

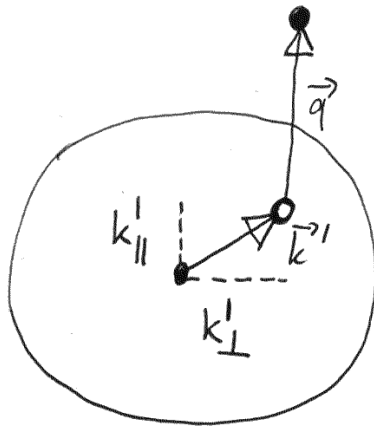
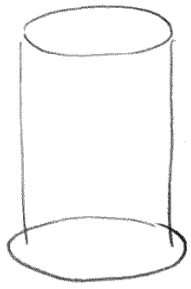
Wobei wir $\hbar \omega_{\vec{q}, \vec{k}} := \frac{\hbar^2}{2m} (2\vec{k} \cdot \vec{q} - \vec{q}^2)$ gesetzt haben.

Energieverlust
des Elektrons
bei der Streuung

$$\epsilon_{\vec{k}} - \epsilon_{\vec{k}-\vec{q}} = \frac{\hbar^2}{2m} (\|\vec{k}\|^2 - \|\vec{k}-\vec{q}\|^2)$$

Jetzt nutzen wir Zylinderkoordinaten:

Siehe Sigrist-Script
Seite 95



$$k_1^2 := k_F^2 - k_{||,0}^2$$

$$k_2^2 := k_F^2 - (k'_{||,0} + q)^2$$

$$k'_{||,0} = \frac{2m\omega_{qE} - \hbar q^2}{2\hbar q} \quad (*)$$

$$\hookrightarrow S(\omega, \vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{k_2}^{k_1} dk'_\perp k'_\perp \int_0^{k_F} dk'_\parallel \delta\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} + \frac{\hbar^2 q k'_\parallel}{m} - \hbar\omega\right)$$

$$= \frac{m}{4\pi^2 \hbar^2 q} (k_1^2 - k_2^2)$$

$$\text{und } k_1^2 - k_2^2 = (k'_{||,0} + q)^2 - k_{||,0}^2 = 2k'_{||,0} q + q^2$$

$$\stackrel{(*)}{=} 2 \frac{2m\omega - \hbar q^2}{2\hbar q} q + q^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}$$

$$\Rightarrow S(\omega, \vec{q}) = \frac{m^2 \omega}{2\pi^2 \hbar^3 q} \quad ; \quad \text{mit } N(\epsilon_F) = \frac{mk_F}{\pi^2 \hbar^2}$$

$$\rightarrow S(\omega, \vec{q}) = \frac{N(\epsilon_F) \omega}{4 q v_F}$$

Unter der Annahme, dass für $q \ll k_F$ das Matrixelement $|V(\vec{q})|^2$ nur schwach von $\vec{q}$ abhängt (kurzreichweitige WW), können wir $\frac{1}{T_k}$ weiter

auswerten:

$$\frac{1}{T_k} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{N(E_F)}{4V_F \Omega} \sum_{\vec{q}, s'} |V(\vec{q})|^2 \frac{\omega_{\vec{q}, k}}{q}$$

$$= \frac{N(E_F)}{(2\pi)^2 2\hbar V_F} \int d^3 q |V(\vec{q})|^2 \frac{\omega_{\vec{q}, k}}{q}$$

$$= \frac{N(E_F)}{2\pi 4mV_F} \int dq |V(q)|^2 q^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sin \theta (2k \cos \theta - q)$$

$$= \frac{N(E_F)}{2\pi 4mV_F} \int dq |V(q)|^2 q^2 \left[-\frac{1}{4k} (2k \cos \theta - q)^2 \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Einschränkung des θ -Integrals durch

$$k^2 \geq (\vec{k} - \vec{q})^2 \geq k_F^2 \Rightarrow \cos \theta_2 = \frac{q}{2k}$$

$$(\vec{k} - \vec{q})^2 = k^2 - 2kq \cos \theta + q^2 \Rightarrow \cos \theta_1 = \frac{k^2 - k_F^2 + q^2}{2kq}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_k} = \frac{N(E_F)}{2\pi 4mV_F} \int dq |V(q)|^2 \frac{1}{4k} (k^2 - k_F^2)^2 \approx$$

$$\approx \frac{N(\epsilon_F)}{2\pi^4 V_F} \frac{m}{k_F} \frac{1}{\hbar^4} (\epsilon_k - \epsilon_F)^2 \int dq |V(q)|^2$$

$$= \frac{1}{8\pi\hbar^3} \frac{N(\epsilon_F)}{V_F^2} (\epsilon_k - \epsilon_F)^2 \underbrace{\int dq |V(q)|^2}$$

Damit dieses Integral konvergiert, darf $|V(q)|^2$ nicht stärker als q^α , $\alpha < 1$ für $q \rightarrow 0$ divergieren; das ist durch die dielektrische Abschirmung erfüllt.

Zentrales Resultat:

$$\boxed{\frac{1}{T_k} \propto (\epsilon_k - \epsilon_F)^2}$$

für $k \gtrsim k_F$.

$\Rightarrow$ Der Zustand $|\vec{k}s\rangle$ ist eine Resonanz mit Breite $\frac{\hbar}{T_k}$ und erscheint in der Spektralfunktion als Quasiteilchen.

Exkurs: Spektralfunktion, Einteilchen-Greensfunktionen (Vielteilchentheorie)

Hintergrund: Greensfunktionen werden in der Theorie der Differentialgleichungen genutzt.

In der Vielteilchentheorie sind sie ein wichtiges Werkzeug zur Berechnung von Anregungsspektren, die experimentell gemessen werden können; sie hängen mit Responsefunktionen (wie χ , ϵ) zusammen, die wir bereits kennengelernt haben.

Definition: $G_{jn}(\tau) := \langle c_j(\tau) c_n^\dagger(0) \rangle$ für $0 < \tau < \beta$

mit $c_j(\tau) = e^{\hat{H}\tau} c_j(0) e^{-\hat{H}\tau}$ (*)

ist die Einteilchen-Imaginärzeit-Greensfunktion.

τ : imaginäre Zeit (aber $\tau \in \mathbb{R}$)

denn in Realzeit haben wir $c_j(t) = e^{i\hat{H}t} c_j(0) e^{-i\hat{H}t}$

(*) folgt aus $t \rightarrow -i\tau$ "Wick-Rotation"



Außerdem haben wir $\langle \hat{O} \rangle \equiv \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{O}] = \frac{\text{Tr} [\hat{O} e^{-\beta \hat{H}}]}{\text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}}]}$

Was ist $c_k(T)$ für nichtwechselwirkende Elektronen?

$$\hat{H} = \sum_{k'} \epsilon_{k'} c_{k'}^\dagger c_{k'}$$

$$\frac{\partial c_k(T)}{\partial T} = [\hat{H}, c_k(T)] = \sum_{k'} \epsilon_{k'} \underbrace{[c_{k'}^\dagger c_{k'}, c_k]} = \dots$$

$$c_{k'}^\dagger c_{k'} c_k - c_k c_{k'}^\dagger c_{k'}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } k' \neq k \\ -c_k & \text{falls } k' = k \end{cases}$$

$$(\text{nutze } \{c_k, c_k^\dagger\} = 1)$$

$$\dots = -\epsilon_k c_k$$

$$\Rightarrow \boxed{c_k(T) = e^{-\epsilon_k T} c_k(0)}$$

$$\Rightarrow G_{jn}(T) = \frac{1}{N} \sum_k e^{ik(n-j)} \underbrace{(1-f_k)} e^{-\epsilon_k(T)}$$

hier haben wir $\langle c_k c_k^\dagger \rangle = 1 - f_k$

benutzt, mit $\langle c_k^\dagger c_k \rangle = f_k$

= Fermi-Dirac-Verteilung

$$f_k = f(\epsilon_k) = \frac{1}{1 + e^{\beta \epsilon_k}}$$

$$\Rightarrow G_{jn}(T) = G_{j-n}(T) \text{ für translationsinvariantes System.}$$

Definiere k -Raum Greensfunktion

$$G_k(T) := - \langle T_T C_k(T) C_k^\dagger(0) \rangle$$

mit Zeitordnungsoperator T_T

$$T_T C_k(T) C_k^\dagger(0) = \begin{cases} C_k(T) C_k^\dagger(0) & \text{für } T > 0 \\ -C_k^\dagger(0) C_k(T) & \text{für } T < 0 \end{cases}$$

Es gilt $G_k(T + \beta) = -G_k(T)$ für $-\beta < T < 0$

$\rightarrow$ definiere Matsubara - Fouriertransformation für
diskrete Matsubara - Frequenzen

$$G_k(T) = \frac{1}{\beta} \sum_n G_k(i\omega_n) e^{-i\omega_n T}$$

$$G_k(i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau G_k(\tau) e^{i\omega_n \tau}$$

mit $\omega_n \equiv \frac{\pi}{\beta} (2n+1)$ "fermionische Matsubaras"

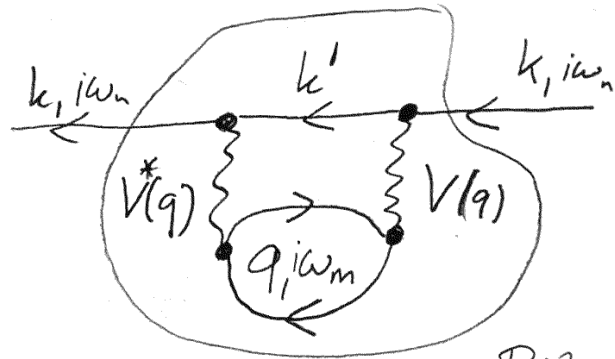
Es gilt $G_k(T) = \begin{cases} -e^{-E_k T} (1-f_k) & \text{für } 0 < T < \beta \\ e^{-E_k T} f_k & \text{für } -\beta < T < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{G_k(i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - E_k}}$$

Einteilchen-Greensfunktion
für nicht-wechsel-
wirkende Elektronen mit
Dispersion E_k

→ dieses $G_k(i\omega_n)$ ist die Basis für Vielteilchen-Störungstheorie $\leadsto$ Selbstenergie $\Sigma(k, i\omega_n)$.

→ Feynman-Diagramme für Streuprozesse: z.B.



= ein möglicher Beitrag zur Selbstenergie

Die Selbstenergie enthält Informationen zur Anregungsenergie und Lebensdauer von Anregungen.

Dyson-Gleichung: man kann zeigen: ohne Wechselwirkung

$$\boxed{G_k^{ww}(i\omega_n)} = G_k^0(i\omega_n) + G_k^0(i\omega_n) \Sigma(k, i\omega_n) \boxed{G_k^{ww}(i\omega_n)}$$

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \circ \Sigma \text{---}$$

= geometrische Reihe

Das kommt aus

$$\text{---} = \text{---} \circ \Sigma \text{---} + \text{---} \circ \Sigma \circ \Sigma \text{---} + \text{---} \circ \Sigma \circ \Sigma \circ \Sigma \text{---} + \dots$$

$$G = G^0 + G^0 \Sigma G^0 + G^0 \Sigma G^0 \Sigma G^0 + G^0 \Sigma G^0 \Sigma G^0 \Sigma G^0 + \dots$$

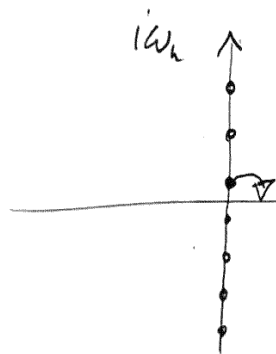
Das heißt $G = G_0 (1 + \Sigma G_0 + (\Sigma G_0)^2 + (\Sigma G_0)^3 + \dots)$

und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow G^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma$$

$$\Rightarrow G_k(i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \epsilon_k - \Sigma(k, i\omega_n)}$$

Analytische Fortsetzung:



komplexe Frequenzen $G_k(z)$

Matsubara: $z = i\omega_n$

reelle Frequenzen: $z = \omega + i0^+$

↑
Kausalität

$$G_k(\omega + i0^+) = \frac{1}{\omega - \epsilon_k + i0^+ - \Sigma(k, i\omega_n)}$$

Dirac-Identität: $\frac{1}{x + i0^+} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi \delta(x)$

↑
Hauptwert integral;

Unter Integral gesetzt

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) = \left[\int_{-\infty}^{-\delta} dx g(x) + \int_{\delta}^{\infty} dx g(x) \right] \Big|_{\delta \rightarrow 0^+}$$

$$\rightarrow G_k^0(\omega + i0^+) = \mathcal{P} \frac{1}{\omega - \epsilon_k} - i\pi \delta(\omega - \epsilon_k)$$

Definiere Spektralfunktion

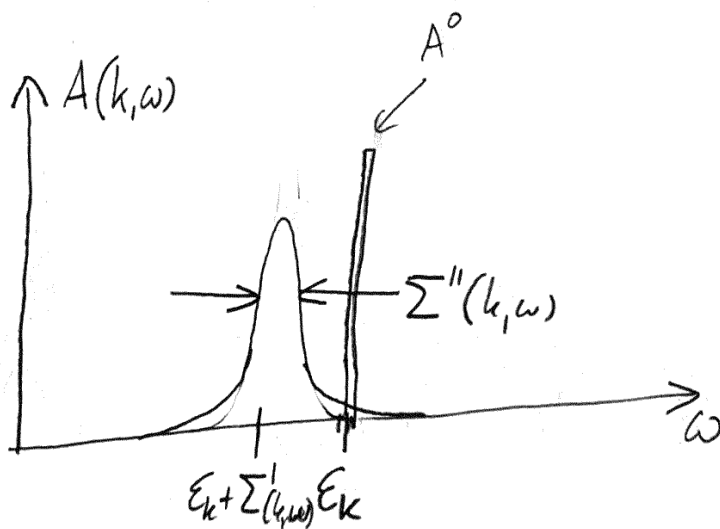
$$A(k, \omega) := -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_k(\omega + i0^+)$$

$$A^0(k, \omega) = \delta(\omega - \epsilon_k)$$

$$\Sigma = \Sigma' + i\Sigma''$$

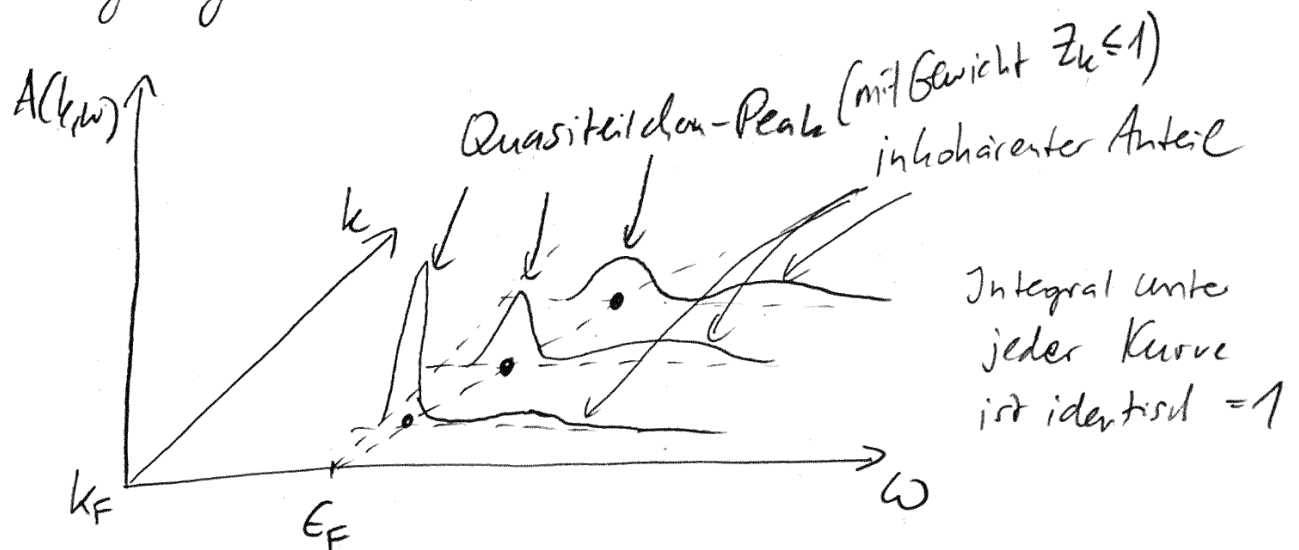
$$A(k, \omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\Sigma''(k, \omega)}{[\omega - \epsilon_k - \Sigma'(k, \omega)]^2 + [\Sigma''(k, \omega)]^2}$$

Lorentzian



$\rightarrow$ dieses $\Sigma''(k, \omega)$ ist die Linienbreite der
 Einteilchenanregung bei $k \leftrightarrow \frac{1}{\tau_k}$, das
 wir mit Fermis goldener Regel abgeschatzt hatten. 105

Zurück zur Fermiflüssigkeitstheorie: Wir wissen jetzt, dass in $D=3$ unter der Annahme, dass $\frac{1}{T_F}$ mit Fermis goldener Regel abgesclätet werden kann, diese Linienbreite wie $\sim (\epsilon_k - \epsilon_F)^2$ verschwindet, wenn wir nah genug an der Fermioberfläche bleiben.



Da $\lim_{k \rightarrow k_F} \frac{\hbar T_F}{\epsilon_k - \epsilon_F} = 0$ gilt, ist das

Quasiteilchenkonzept asymptotisch valide.

Wichtig: dieses Resultat hängt u.a. entscheidend von der Kurzreichweitigkeit (q -Unabhängigkeit) der WW ab; ebenso von der Raumdimension (siehe Phasenraumüberlegungen bei $\frac{1}{T_F}$ -Rechnung).

6.2 Phänomenologische Theorie der Fermiflüssigkeiten

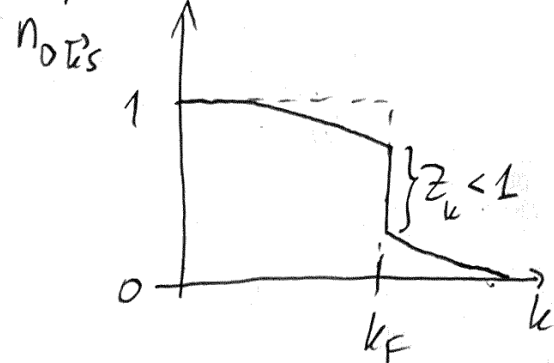
Landaus Postulat: 1:1-Korrespondenz zwischen nicht-wechselwirkenden Quasi-Elektronen und Quasiteilchen einer wechselwirkenden Fermiflüssigkeit.

Impulsverteilung:

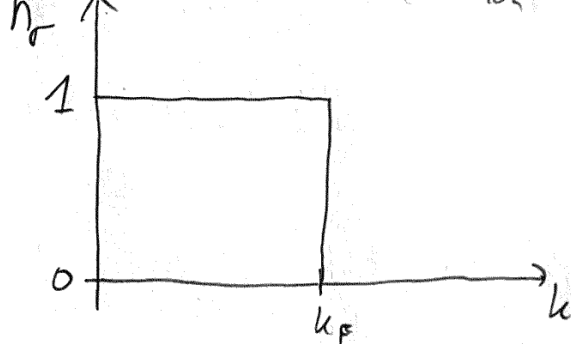
$$n_{\sigma}^{(0)}(\vec{k}) = \Theta(k_F - |\vec{k}|) \quad \text{Grundzustand}$$

$$N = \sum_{\vec{k}, \sigma} n_{\sigma}(\vec{k})$$

Original-Elektronen



Landau-Quasiteilchen



Dabei bleibt die Fermioberfläche unverändert! Das Volumen innerhalb der Fermifläche ist erhalten

(Luttinger - Theorem).

Original - Elektronen:

$$n_{0\vec{k}\sigma} = \langle \hat{C}_{\vec{k}\sigma}^\dagger \hat{C}_{\vec{k}\sigma} \rangle$$

Landau-Quasiteilchen:

$$n_{\sigma}^{(0)}(\vec{k})$$

gehen adiabatisch
ineinander über,
wenn die
e-e-Wechselwirkung
verschwindet

Landau-Theorie: Betrachte Abweichung vom Grundzustand

$$\delta n_{\sigma}(\vec{k}) = n_{\sigma}(\vec{k}) - n_{\sigma}^{(0)}(\vec{k})$$

↑
i.A. nicht klein

→ Energiefunktional

$$E = E_0 + \sum_{\vec{k}, \sigma} \epsilon_{\sigma}(\vec{k}) \delta n_{\sigma}(\vec{k}) + \frac{1}{2\Omega} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \sum_{\sigma, \sigma'} f_{\sigma\sigma'}(\vec{k}, \vec{k}') \delta n_{\sigma}(\vec{k}) \delta n_{\sigma'}(\vec{k}') + O(\delta n^3)$$

↑
Grundzustandsenergie

$\epsilon_{\sigma}(\vec{k})$, $f_{\sigma\sigma'}(\vec{k}, \vec{k}')$: phänomenologische Parameter,
müssen aus Experiment oder mikroskopischer
Theorie bestimmt werden.

$$\tilde{\epsilon}_{\sigma}(\vec{k}) := \frac{\delta E}{\delta n_{\sigma}(\vec{k})} = \epsilon_{\sigma}(\vec{k}) + \frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{k}', \sigma'} f_{\sigma\sigma'}(\vec{k}, \vec{k}') \delta n_{\sigma'}(\vec{k}')$$

effektive Energie-Impuls-Relation

→ zweiter Term hängt von Verteilung aller
Quasiteilchen ab: "mean-field"-artig

Zweite Ableitung: Kopplung zwischen Quasiteilchen:

$$\frac{\delta^2 E}{\delta n_{\sigma}(\vec{k}) \delta n_{\sigma'}(\vec{k}')} = \frac{1}{\Omega} f_{\sigma\sigma'}(\vec{k}, \vec{k}')$$

→ Parametrisierung: $|\vec{k}|, |\vec{k}'|$ nahe k_F , sphärische Symmetrie

$$f_{\sigma\sigma'}(\vec{k}, \vec{k}') = \underbrace{f^s(\hat{k}, \hat{k}')}_{\text{symmetrisch unter } \sigma, \sigma'} + \sigma\sigma' \underbrace{f^a(\hat{k}, \hat{k}')}_{\text{anti-symmetrisch unter } \sigma, \sigma' \text{ gleich/ungleich}}$$

$$\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

→ Entwicklung nach Legendre-Polynomen $P_l(z)$.

Legendre-Polynome:

$$\int \frac{d\Omega_k}{4\pi} P_l(\cos \theta_k) P_{l'}(\cos \theta_k) = \int_{-1}^1 \frac{dz}{2} P_l(z) P_{l'}(z) = \frac{\delta_{ll'}}{2l+1}$$

für $l=0, 1, 2, \dots$

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \quad P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z)$$

$$f^{s/a}(\hat{k}, \hat{k}') = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^{s/a} P_l(\cos \theta_{\hat{k}, \hat{k}'})$$

↑
Winkel zwischen $\vec{k}, \vec{k}'$

Dies bei ϵ_F ist summiert über g_m

$$N(\epsilon_F) = \frac{2}{\Omega} \sum_{\vec{k}} \delta(\epsilon(\vec{k}) - \epsilon_F) = \frac{k_F^2}{\pi^2 \hbar v_F} = \frac{m^* k_F}{\pi^2 \hbar^2}$$

Mit Fermigeschwindigkeit $\vec{v}_{\vec{k}} \epsilon(\vec{k})|_{\epsilon_F} = \vec{v}_F = \frac{\hbar \vec{k}_F}{m^*}$

für $\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m^*}$.

→ Landau-Parameter

$$F_e^s = N(\epsilon_F) f_e^s$$

$$F_e^a = N(\epsilon_F) f_e^a$$

6.2.1 Spezifische Wärmekapazität

Quasiteilchen = Fermionen → Fermi-Dirac-Statistik

$$n_{\sigma}^{(0)}(T, \vec{k}) = \frac{1}{e^{[\tilde{\epsilon}(\vec{k}) - \mu]/k_B T} + 1}, \quad \mu = \text{chemisches Potential.}$$

Niedrige Temperaturen:

$$\delta n_{\sigma}(\vec{k}) = n_{\sigma}^{(0)}(T, \vec{k}) - n_{\sigma}^{(0)}(0, \vec{k})$$

was mit der Definition für $\tilde{\epsilon}$ sofort auf

$$\tilde{\epsilon}(\vec{k}) = \epsilon(\vec{k}) \quad \text{führt, da}$$

$$\frac{1}{\Omega} \sum_{\vec{k}, \sigma} f_{\sigma}(\vec{k} | \vec{k}') \delta n_{\sigma}(\vec{k}') = 0. \quad (*)$$

Grund: in $\delta n_{\sigma}(\vec{k}')$ sind gleich viele Teilchen wie Löcher, so dass sich diese im Korrekturen (*) gerade wegheben.

$$\rightarrow n_{\sigma}(\vec{k}) = \frac{1}{e^{\frac{[\epsilon(\vec{k}) - \epsilon_F]/k_B T}{}} + 1}$$

↑
unrenormierte Dispersions

$$\text{und } \mu = \epsilon_F + \mathcal{O}(T^2) \rightarrow \epsilon_F$$

Entropie eines Fermigas:

$$S = -\frac{k_B}{\Omega} \sum_{\vec{k}, \sigma} \left[n_{\sigma}(\vec{k}) \ln(n_{\sigma}(\vec{k})) + (1 - n_{\sigma}(\vec{k})) \ln(1 - n_{\sigma}(\vec{k})) \right]$$

Spezifische Wärme

$$C(T) = T \frac{\partial S}{\partial T} = -\frac{k_B T}{\Omega} \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{e^{\xi(\vec{k})/k_B T}}{(e^{\xi(\vec{k})/k_B T} + 1)^2} \frac{\xi(\vec{k})}{k_B T^2} \ln\left(\frac{n_{\sigma}(\vec{k})}{1 - n_{\sigma}(\vec{k})}\right)$$

$$\text{mit } \xi(\vec{k}) = \epsilon(\vec{k}) - \epsilon_F.$$

Für niedrige Temperaturen:

$$C(T) \approx \frac{\pi^2 k_B^2 N(\epsilon_F)}{3} \cdot T = \gamma \cdot T$$

Wegen $N(\epsilon_F) \propto m^*$ kann man damit m^* messen! $\checkmark$