بنگاه نشریات «میر»

Б. П. Демидович

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

ب. پ. دمیدویچ

مجموعهٔ
مسائل و تمرینات
آنالیز ریاضی

۱

بنگاه نشریات «میر»
مسکو

ترجمه از احسان الله قوام‌زاده قوام

На персидском языке

۱۹۷۹

قسمت اول

توابع یک متغیره

فصل ۱

مقدمهٔ آنالیز

بخش ۱ — اعداد حقیقی

بند ۱ — روش استقرای ریاضی. برای اثبات صحت یک قضیه بازای هر عدد طبیعی n کافی است ثابت کنیم: ۱) این قضیه بازای $n = ۱$ درست است و ۲) اگر این قضیه بازای عدد طبیعی دلخواه n درست باشد بازای تالی آن $n + ۱$ نیز درست است.

بند ۲ — برش. تقسیم اعداد گویا بدو طبقهٔ A و B را برش نامند اگر شرط‌های زیر بر قرار باشد: ۱) هر دو طبقه ناتهی باشند، ۲) هر عدد گویا تنها در یک طبقه واقع باشد، ۳) هر عدد دلخواه متعلق به طبقهٔ A (طبقهٔ پائین) کمتر از هر عدد دلخواه متعلق به طبقهٔ B (طبقهٔ بالا) باشد. برش A/B معرف: الف) عدد گویا است اگر طبقهٔ پائین دارای برزگترین عدد و یا طبقهٔ بالا دارای کوچکترین عدد باشد و ب) عدد گنگ (اصم) است اگر طبقهٔ A بزگترین عدد و طبقهٔ B کوچکترین عدد را نداشته باشد. اعداد گویا و گنگ به اعداد حقیقی موسومند*.

بند ۳ — قدر مطلق. اگر x عدد حقیقی باشد عدد نامنفی $|x|$ که بترتیب زیر تعریف می‌شود قدر مطلق یا مقدار مطلق x نامیده می‌شود:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{اگر } x < ۰ \\ x, & \text{اگر } x \geqslant ۰ \end{cases}$$

---

* از این پس منظور از کلمهٔ عدد همواره عدد حقیقی است مگر آنکه خلاف آن تصریح شود.

بازای اعداد حقیقی دلخواه x و y نامساوی زیر را داریم:

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

بند ٤ــ کران بالا و کران پائین. فرض کنیم $X=\{x\}$ مجموعهٔ متناهی از اعداد حقیقی باشد. عدد

$$m=\inf\{x\}$$

را کران پائین مجموعهٔ X نامند اگر:

۱) هر $x\in X$* در نامساوی

$$x\geqslant m$$

صدق کند؛

۲) بازای جمیع مقادیر $\varepsilon>0$ عددی مانند $x'\in X$ وجود داشته باشد بطوری که:

$$x'<m+\varepsilon$$

بطریق مشابهی عدد

$$M=\sup\{x\}$$

را کران بالای مجموعهٔ X نامند اگر:

۱) هر $x\in X$ در نامساوی

$$x\leqslant M$$

صدق کند؛

۲) بازای جمیع مقادیر $\varepsilon>0$ عددی مانند $x''\in X$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$x''>M-\varepsilon$$

اگر مجموعهٔ X کراندار از پائین نباشد عبارت

$$\inf\{x\}=-\infty$$

مورد قبول است و نیز اگر مجموعهٔ X کراندار از بالا نباشد اینطور بیان می‌شود:

$$\sup\{x\}=+\infty$$

---

* نگارش $x\in X$ بدان معناست که x متعلق به مجموعهٔ X است.

بند ۵ – خطای مطلق و خطای نسبی. اگر a $(a \neq ۰)$ مقدار دقیق یک کمیت و x مقدار تقریبی این کمیت باشد در اینصورت

$$\Delta = |x - a|$$

را خطای مطلق و

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

را خطای نسبی کمیت مورد اندازه گیای نامند.

گویند عدد x دارای n رقم مطمئن است اگر خطای مطلق این عدد از نصف واحد ردیف مربوط به رقم معنی‌دار $n - ۱$م تجاوز نکند.

با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کنید که بازای عدد طبیعی دلخواه n هر یک از تساوی های زیر درست است:

۱ – $۱ + ۲ + \dots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

۲ – $۱^۲ + ۲^۲ + \dots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

۳ – $۱^۳ + ۲^۳ + \dots + n^۳ = (۱ + ۲ + \dots + n)^۲$

۴ – $۱ + ۲ + ۲^۲ + \dots + ۲^{n-۱} = ۲^n - ۱$

۵ – بفرض آنکه

$$a^{[n]} = a(a-h)\dots[a-(n-۱)h] \quad \text{و} \quad a^{[۰]} = ۱$$

ثابت کنید که

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=۰}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}$$

که در آن C_n^m تعداد ترکیب های n عامل m به m است. از اینجا دستور دو جمله‌ای نیوتن را نتیجه بگیرید.

۶ – نامساوی برنولی:

$$(۱ + x_۱)(۱ + x_۲)\dots(۱ + x_n) \geqslant ۱ + x_۱ + x_۲ + \dots + x_n$$

را که در آن $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ اعداد متحد العلامه بزرگتر از ۱– می‌باشند ثابت کنید.

۷ – اگر $x > -۱$ درستی نامساوی

$$(۱ + x)^n \geqslant ۱ + nx \quad (n > ۱)$$

را اثبات کنید. علامت تساوی بازای $x = ۰$ دارای مفهوم است.

۸– نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$n! < \left(\frac{n+۱}{۲}\right)^n \quad n > ۱ \quad \text{بازای}$$

<u>راهنمائی</u> – از نامساوی زیر استفاده کنید:

$$\left(\frac{n+۲}{n+۱}\right)^{n+۱} = \left(۱ + \frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱} > ۲ \quad (n = ۱,\ ۲, \ldots)$$

۹ – نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$۲! \times ٤! \ \ldots \ (۲n)! > [(n+۱)!]^n \quad n > ۱ \quad \text{بازای}$$

۱۰ – نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{٤} \ \ldots \ \frac{۲n-۱}{۲n} < \frac{۱}{\sqrt{۲n+۱}}$$

۱۰٫۱ – نامساویهای زیر را ثابت کنید:

الف) $۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \ldots + \frac{۱}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n \geqslant ۲)$

ب) $n^{n+۱} > (n+۱)^n \quad (n \geqslant ۳)$

پ) $\left|\sin\left(\sum_{k=۱}^{n} x_k\right)\right| \leqslant \sum_{k=۱}^{n} \sin x_k$

$$(۰ \leqslant x_k \leqslant \pi \quad ؛ \ k = ۱,\ ۲,\ \ldots,\ n)$$

ت) $(۲n)! < ۲^{۲n}(n!)^۲$

۱۱ – فرض کنیم عدد مثبت c مجذور دقیق یک عدد درست نباشد و برش A/B مشخص کنندهٔ عدد حقیقی $\sqrt{c}$ باشد که در آن در طبقه B جمیع اعداد مثبت گویائی مانند b قرار دارند بطوریکه $b^۲ > c$ و طبقهٔ A شامل بقیهٔ اعداد گویا می باشد. ثابت کنید که در طبقهٔ A بزرگترین عدد و در طبقهٔ B کوچکترین عدد وجود ندارد.

۱۲ – برش A/B مشخص کنندهٔ عدد $\sqrt[۳]{۲}$ بترتیب زیر ساخته می شود:

طبقهٔ A شامل جمیع اعداد گویای a است بطوریکه $a^۳ < ۲$ و طبقهٔ B شامل بقیهٔ اعداد گویا می‌باشد. ثابت کنید که در طبقهٔ A بزرگترین عدد و در طبقهٔ B کوچکترین عدد وجود ندارد.

۱۳ – با تشکیل برش‌های مربوطه تساویهای زیر را ثابت کنید:

الف) $\sqrt{۲}+\sqrt{۸}=\sqrt{۱۸}$ ؛ ب) $\sqrt{۲}\,\sqrt{۳}=\sqrt{۶}$

۱۴ – برش مشخص کنندهٔ عدد $۲^{\sqrt{۲}}$ را تشکیل دهید.

۱۵ – ثابت کنید هر مجموعهٔ عددی ناتهی متناهی از پائین، دارای کران پائین و هر مجموعهٔ عددی ناتهی متناهی از بالا، دارای کران بالا است.

۱۶ – نشان دهید که مجموعهٔ تمام کسور متعارفی گویای

$$\frac{m}{n}$$

که در آن m ، n اعداد طبیعی می‌باشند و $۰ < m < n$ ، دارای بزرگترین و کوچکترین عنصر نیست. کران بالائی و پائینی این مجموعه را پیدا کنید.

۱۷ – کران بالا و پائین مجموعهٔ اعداد گویای r صادق در نامساوی

$$r^۲ < ۲$$

را تعیین کنید.

۱۸ – فرض کنیم $\{-x\}$ مجموعهٔ اعداد متقابل عددهای $x\in\{x\}$ باشد. ثابت کنید:

الف) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$ ؛ ب) $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$

۱۹ – فرض کنیم $\{x+y\}$ مجموعهٔ تمام مجموعهای $x+y$ باشد که در آن $x\in\{x\}$ و $y\in\{y\}$ تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$

ب) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$

۲۰ – فرض کنیم $\{xy\}$ مجموعهٔ تمام حاصل ضرب‌های xy باشد که در آن $x\in\{x\}$ و $y\in\{y\}$ و در عین‌حال $x \geqslant ۰$ ، $y \geqslant ۰$.
تساویهای زیر را ثابت کنید:

الف) $\inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}$ ؛ ب) $\sup\{xy\} = \sup\{x\}\sup\{y\}$

۲۱ – نامساویهای زیر را ثابت کنید:

الف) $|x-y| \geqslant ||x|-|y||$

ب) $|x+x_۱+\ldots+x_n| \geqslant |x|-(|x_۱|+\ldots+|x_n|)$

نامعادلات زیر را حل کنید:

۲۲ – $|x+۱| < ۰,۰۱$

۲۳ – $|x-۲| \geqslant ۱۰$

۲۴ – $|x| > |x+۱|$

۲۵ – $|۲x-۱| < |x-۱|$

۲۶ – $|x+۲| + |x-۲| \leqslant ۱۲$

۲۷ – $|x+۲| - |x| > ۱$

۲۸ – $||x+۱| - |x-۱|| < ۱$

۲۹ – $|x(۱-x)| < ۰,۰۵$

۳۰ – اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\left(\frac{x+|x|}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{x-|x|}{۲}\right)^۲ = x^۲$$

۳۱ – در اندازه گیری طول ۱۰ cm خطای مطلق برابر ۵,۰ mm و در اندازه‌گیری طول ۵۰۰ km خطای مطلق برابر ۲۰۰ m است. کدام اندازه گیری دقیق‌تر است؟

۳۲ – تعیین کنید عدد

$$x = ۲,۳۷۵۲$$

در صورتیکه خطای نسبی آن ۱% باشد شامل چند رقم مطمئن است؟

۳۳ – عدد

$$x = ۱۲,۱۲۵$$

شامل ۳ رقم مطمئن است. خطای نسبی این عدد را معلوم کنید.

۳۴ – اضلاع یک مستطیل عبارتند از:

$$x = ۲,۵۰ \text{ cm} \pm ۰,۰۱ \text{ cm}$$

$$y = ۴,۰۰ \text{ cm} \pm ۰,۰۲ \text{ cm}$$

مساحت این مستطیل بین چه حدودی محصور است؟ اگر برای اضلاع مستطیل مقادیر میانگین اختیار شود خطای مطلق Δ و خطای نسبی δ – ی مساحت مستطیل چقدر است؟

۳۵ – وزن جسمی $p = ۱۲,۰۹ \text{ gf} \pm ۰,۰۱ \text{ gf}$ و حجم آن $v = ۳,۲ \text{ cm}^۳ \pm ۰,۲ \text{ cm}^۳$ است. مطلوبست تعیین وزن مخصوص جسم و بر آورد خطای‌مطلق و خطای نسبی وزن مخصوص در صورتیکه مقادیر میانگین برای وزن و حجم اختیار شود.

۳۶ – شعاع دایره‌ای عبارتست از:

$$r = ۷,۲ \text{ m} \pm ۰,۱ \text{ m}$$

با فرض ۳,۱۴ π با چه خطای نسبی مینیمال میتوان مساحت دایره را تعیین کرد؟

۳۷ – ابعاد مکعب مستطیلی عبارتند از :

$$x = ۲٤,۷\ \mathrm{m} \pm ۰,۲\ \mathrm{m}$$

$$y = ٦,٥\ \mathrm{m} \pm ۰,۱\ \mathrm{m}$$

$$z = ۱,۲\ \mathrm{m} \pm ٥,۱\ \mathrm{m}$$

حجم v این مکعب مستطیل بین چه حدودی محصور است؟ اگر مقادیر میانگین برای ابعاد اختیار شود حجم این مکعب مستطیل را با چه خطای مطلق و نسبی میتوان تعیین کرد؟

۳۸ – با چه خطای مطلقی باید ضلع x از یک مربع را که در آن $۲\,m < x < ۳\,m$ اندازه گرفت تا مساحت این مربع را بتوان با تقریب $۰,۰۰۱\ \mathrm{m}^۲$ تعیین نمود؟

۳۹ – با چه خطای مطلق Δ کافی است اضلاع x ، y یک مستطیل اندازه‌گیری شود تا مساحت آنرا بتوان با تقریب $۰,۰۱\ \mathrm{m}^۲$ بدست آورد در صورتیکه هر یک از اضلاع مستطیل تقریباً از $۱۰\ \mathrm{m}$ تجاوز نکند.

٤۰ – فرض کنیم $\delta(x)$ و $\delta(y)$ خطاهای نسبی اعداد x ، y و $\delta(xy)$ خطای نسبی عدد xy باشد ثابت کنید.

$$\delta(xy) \leqslant \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\,\delta(y)$$

بخش ۲ — نظریهٔ دنباله‌ها (رشته‌ها)

بند ۱ — مفهوم حد دنباله . گویند دنبالهٔ $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ دارای حد a است (یا بعبارت دیگر، بسمت a میل می‌کند) یعنی

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

اگر بازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $N = N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد بطوریکه :

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad n > N \quad \text{بازای}$$

در حالت خاص x_n را بی نهایت کوچک مینامند اگر :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = ۰$$

دنباله‌ای که دارای حد نباشد واگرا (متباعد) نامیده می‌شود.

بند ۲ — نشانه‌های وجود حد.

۱) اگر

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

و

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} z_n = c$$

در اینصورت

$$\lim_{n \to \infty} x_n = c$$

۲) دنباله‌ٔ یکنوای کراندار دارای حد است.

۳) معیار (آزمون) کوشی. برای آنکه دنباله x_n دارای حد باشد لازم و کافی است که بازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $N = N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد بطوریکه:

$$|x_n - x_{np}| < \varepsilon$$

اگر فقط $n > N$ و $p > ۰$ باشد.

بند ۳ — قضایای اساسی راجع به حد دنباله. بفرض آنکه:

$$\lim_{n \to \infty} y_n \quad \text{و} \quad \lim_{n \to \infty} x_n$$

وجود داشته باشد داریم:

۱) اگر $x_n \leqslant y_n$ در اینصورت $\lim_{n \to \infty} x_n \leqslant \lim_{n \to \infty} y_n$

۲) $\lim_{n \to \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \pm \lim_{n \to \infty} y_n$

۳) $\lim_{n \to \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \lim_{n \to \infty} y_n$

٤) $\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} x_n}{\lim_{n \to \infty} y_n}$ اگر $\lim_{n \to \infty} y_n \neq ۰$

بند ٤ — عدد e. دنباله‌ٔ

$$\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n \quad (n = ۱,\ ۲,\ \ldots)$$

دارای حد متناهی است:

$$\lim_{n \to \infty} \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n = e = ۲,۷۱۸۲۸۱۸۲۸٤ \ldots$$

بند ٥ — حد نامتناهی. نگارش نمادی (سمبولیک)

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$$

بدان معناست که بازای جمیع مقادیر $E > ٠$ عددی مانند $N = N(E)$ وجود دارد بطوریکه

$$|x_n| > E, \quad n > N \quad \text{بازای}$$

بند ٦ — نقطه حد. عدد ξ (یا نماد ∞) را حد جز (نقطهٔ حد) دنبالهٔ مفروض $x_n (n = ١, ٢, \dots)$ نامند اگر دنباله

$$x_{p_١}, x_{p_٢}, \dots, x_{p_n}, \dots \quad (١ \leqslant p_١ < p_٢ < \dots)$$

وجود داشته باشد بطوریکه

$$\lim_{n \to \infty} x_{p_n} = \xi$$

هر دنبالهٔ کراندار حد اقل دارای یک حد جزٔ متناهی است (اصل بولزانو — ویراشتراس). اگر این حد جزٔ یکتا باشد در آنصورت این حد جزٔ حد متناهی دنبالهٔ مفروض است.

کوچکترین حد جزٔ (متناهی یا نامتناهی) دنبالهٔ x_n

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n$$

را حد پائین و بزرگترین حد جزٔ آن:

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} x_n$$

را حد بالای این دنباله مینامند.

تساوی

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \to \infty} x_n$$

شرط لازم و کافی وجود حد (متناهی یا نامتناهی) در دنبالهٔ x_n است.

٤١ — فرض کنیم

$$x_n = \frac{n}{n + ١} \quad (n = ١, ٢, \dots)$$

ثابت کنید:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = ١$$

با تعیین $N = N(\varepsilon)$ بازای هر $\varepsilon > ۰$ بطوریکه

$|x_n - ۱| < \varepsilon$ اگر $n > N$

جدول زیر را تکمیل کنید:

...	۰,۰۰۰۱	۰,۰۰۱	۰,۰۱	۰,۱	ε
					N

۴۲ – ثابت کنید که $x_n\ (n = ۱, ٤, \ldots)$ یک بی نهایت کوچک است (یعنی دارای حد برابر صفر است) و عددی مانند $N = N(\varepsilon)$ تعیین کنید بقسمی که بازای $n > N$، $|x_n| < \varepsilon$ در صورتیکه:

الف) $x_n = \frac{(-۱)^{n+۱}}{n}$ ؛ پ) $x_n = \frac{۱}{n!}$ ؛

ب) $x_n = \frac{۲n}{n^۳ + ۱}$ ؛ ت) $x_n = (-۱)^n \times ۰,۹۹۹^n$ در هر یک از حالات فوق جدول زیر را تکمیل کنید:

...	۰,۰۰۰۱	۰,۰۰۱	۰,۱	ε
				N

۴۳ – ثابت کنید که دنباله های

الف) $x_n = (-۱)^n n$ ب) $x_n = ۲^{\sqrt{n}}$ پ) $x_n = \lg(\lg n)\ (n \geqslant ۲)$

بازی $n \to \infty$ دارای حدود نامتناهی می‌باشند (یعنی بی نهایت بزرگ می‌باشند) و در ضمن برای هر $E > ۰$ عددی مانند $N = N(E)$ تعیین نمائید بقسمیکه بازای $n > N$ ، $|x_n| > E$.

در هر یک از حالات فوق جدول زیر را تکمیل کنید:

...	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰	E
					N

۴۴ - نشان دهید که

$$x_n = n^{(-۱)^n} \quad (n = ۱,\ ۲,\ \ldots)$$

کراندار نیست . معهذا بازای $n \to \infty$ بی نهایت بزرگ نیست.

۴۵ - مدعی‌های زیر را بکمک نامساویها فرمول بندی کنید :

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ ب) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ پ) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

اگر n سری عددهای طبیعی را طی کند مقدار هر یک از عبارات زیر را تعیین کنید :

۴۶ - $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{۱۰۰۰۰\,n}{n^۲+۱}$ ۴۸ - $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[۳]{n^۲}\sin n!}{n+۱}$

۴۷ - $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+۱} - \sqrt{n})$ ۴۹ - $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-۲)^n + ۳^n}{(-۲)^{n+۱} + ۳^{n+۱}}$

۵۰ - $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{۱+a+a^۲+\ldots+a^n}{۱+b+b^۲+\ldots+b^n} \ (|a|<۱ \ ،\ |b|<۱)$

۵۱ - $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{۱}{n^۲} + \dfrac{۲}{n^۲} + \ldots + \dfrac{n-۱}{n^۲}\right)$

۵۲ - $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{۱}{n} - \dfrac{۲}{n} + \dfrac{۳}{n} - \ldots + \dfrac{(-۱)^{n-۱}n}{n}\right]$

۵۳ - $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{۱^۲}{n^۳} + \dfrac{۲^۲}{n^۳} + \ldots + \dfrac{(n-۱)^۲}{n^۳}\right]$

۵۴ - $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{۱^۲}{n^۳} + \dfrac{۳^۲}{n^۳} + \ldots + \dfrac{(۲n-۱)^۲}{n^۳}\right]$

۵۵ - $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{۱}{۲} + \dfrac{۳}{۲^۲} + \dfrac{۵}{۲^۳} + \ldots + \dfrac{۲n-۱}{۲^n}\right)$

۵۶ - $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{۱}{۱\times۲} + \dfrac{۱}{۲\times۳} + \ldots + \dfrac{۱}{n(n+۱)}\right]$

۵۷ - $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{۲}\,\sqrt[۴]{۲}\,\sqrt[۸]{۲}\ \ldots\ \sqrt[۲^n]{۲}\right)$

تساویهای زیر را ثابت کنید :

۵۸ - $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{۲^n} = ۰$ ۶۰ - $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = ۰ \ (a>۱)$

۵۹ - $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{۲^n}{n!} = ۰$ ۶۱ - $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = ۰$

۶۲- $\lim_{n \to \infty} nq^n = ۰$ اگر $|q| < ۱$

۶۳- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = ۱ \quad (a > ۰)$

۶۴- $\lim_{n \to \infty} \frac{\log_a n}{n} = ۰ \quad (a > ۱)$

۶۵- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = ۱$

۶۶- $\lim_{n \to \infty} \frac{۱}{\sqrt[n]{n!}} = ۰$

۶۷- بازای مقادیر باندازهٔ کافی بزرگ n کدام یک از عبارات زیر بزرگترند:

الف) $۱۰۰n + ۲۰۰$ یا $۰٫۰۱n^۲$؟ ب) ۲^n یا $n^{۱۰۰۰}$؟ پ) ۱۰۰۰^n یا $n!$؟

۶۸- ثابت کنید که:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} \ \dots \ \frac{۲n-۱}{۲n}\right) = ۰$$

راهنمائی- (مثال ۱۰ را ببینید).

۶۹- ثابت کنید که دنبالهٔ

$$x_n = \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n \quad (n, \ ۲, \ \dots)$$

بطور یکنوا صعودی و کراندار از بالا است و دنبالهٔ

$$y_n = \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{n+۱} \qquad (n = ۱, \ ۲, \ \dots)$$

بطور یکنوا (نزول و کراندار از پائین است و از اینجا نتیجه بگیرید که این دو دنباله دارای حد مشترکی می‌باشند:

$$\lim_{n \to \infty} \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{n+۱} = e$$

راهنمائی- نسبت‌های $\frac{x_{n+۱}}{x_n}$ ، $\frac{y_n}{y_{n-۱}}$ را تشکیل دهید و از نامساوی مثال ۷ استفاده کنید.

۷۰ – ثابت کنید که

$$۰ < e - \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n < \frac{۳}{a} \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

بازای چه مقادیری از نمای n تفاضل عبارت $\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$ از e کمتر از ۰,۰۰۱ است؟

۷۱ – فرض کنیم $p_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ دنبالهٔ عددی اختیاری گرانیده بسمت $+\infty$ و $q_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ دنبالهٔ عددی اختیاری گراینده بسمت $-\infty$ $(p_n, q_n \overline{\in} [-۱, ۰])$ باشد. ثابت کنید که:

$$\lim_{n \to \infty} \left(۱ + \frac{۱}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \to \infty} \left(۱ + \frac{۱}{q_n}\right)^{q_n} = e$$

۷۲ – میدانیم که

$$\lim_{n \to \infty} \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n = e$$

ثابت کنید

$$\lim_{n \to \infty} \left(۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \ldots + \frac{۱}{n!}\right) = e$$

و از آنجا دستور

$$e = ۲ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \ldots + \frac{۱}{n!} + \frac{\theta_n}{n!\, n}$$

را که در آن $۰ < \theta_n < ۱$ نتیجه بگیرید و عدد e را با تقریب $۱۰^{-۵}$ حساب کنید.

۷۳ – ثابت کنید عدد e گنگ است.

۷۴ – نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{۲}\right)^n$$

۷۵ – نامساویهای زیر را ثابت کنید:

الف) $$\frac{۱}{n+۱} < \ln\left(۱ + \frac{۱}{n}\right) < \frac{۱}{n}$$

که در آن n عددیست طبیعی.

ب) $۱ + \alpha < e^{\alpha}$

که در آن α یک عدد حقیقی مخالف صفر می‌باشد.

۷۶ – ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{۱}{n}}-۱\right)=\ln a \quad (a>۰)$$

که در آن $\ln a$ لگاریتم عدد a به مبنای ... $e=۲٫۷۱۸$ می باشد .

با استفاده از قضیهٔ وجود حد در دنباله‌های یکنوای کراندار ، همگرائی دنباله‌های زیر را ثابت کنید :

۷۷ – $(n=۱, ۲, \dots)$ $\quad x_n=p_۰+\frac{p_۱}{۱۰}+\dots+\frac{p_n}{۱۰^n}$ که در آن $p_i\ (i=۰, ۱, ۲, \dots)$ اعداد درست نامنفی است که با ابتدا از $p_۱$ از ۹ تجاوز نمی‌کند .

۷۸ – $$x_n=\frac{۱۰}{۱}\times\frac{۱۱}{۳}\ \dots\ \frac{n+۹}{۲n-۱}$$

۷۹ – $$x_n=\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)\left(۱-\frac{۱}{۴}\right)\ \dots\ \left(۱-\frac{۱}{۲^n}\right)$$

۸۰ – $$x_n=\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{۴}\right)\ \dots\ \left(۱+\frac{۱}{۲^n}\right)$$

۸۱ – $$x_۱=\sqrt{۲}\ ,\ x_۲=\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\ ,\ \dots\ ,\ x_n=\underbrace{\sqrt{۲+\sqrt{۲+\dots+\sqrt{۲}}}}_{n\ \text{ریشه}}$$

با استفاده از معیار کوشی همگرائی دنباله‌های زیر را اثبات کنید :

۸۲ – $x_n=a_۰+a_۱q+\dots+a_nq^n$ که در آن $|q|<۱,\ |a_k|<M$ $(k=۰, ۱, ۲, \dots)$

۸۳ – $$x_n=\frac{\sin ۱}{۲}+\frac{\sin ۲}{۲^۲}+\dots+\frac{\sin n}{۲^n}$$

۸۴ – $$x_n=\frac{\cos ۱!}{۱\times ۲}+\frac{\cos ۲!}{۲\times ۳}+\dots+\frac{\cos n!}{n(n+۱)}$$

۸۵ – $$x_n=۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\dots+\frac{۱}{n^۲}$$

راهنمایی – از نامساوی زیر استفاده کنید :

$$\frac{۱}{n^۲}<\frac{۱}{n-۱}-\frac{۱}{n} \quad (n=۲, ۳, \dots)$$

۸۶ – گویند دنبالهٔ $x_n (n = ۱, ۲, ...)$ دارای تغییرات محدود است هرگاه عدد C وجود داشته باشد چنانکه:

$$|x_۲ - x_۱| + |x_۳ - x_۲| + ... + |x_n - x_{n-۱}| < C \quad (n = ۲, ۳, ...)$$

ثابت کنید که دنبالهٔ دارای تغییرات محدود همگرا است.
مثالی از دنباله‌های همگرا بیاورید که دارای تغییرات محدود نباشد.

۸۷ – وقتی میگوییم که معیار کوشی برای دنبالهٔ مفروضی صادق نیست یعنی چه، آنرا فرمول‌بندی کنید.

۸۸ – با استفاده از معیار کوشی واگرایی دنبالهٔ

$$x_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + ... + \frac{۱}{n}$$

را اثبات کنید.

۸۹ – ثابت کنید که اگر دنبالهٔ $x_n (n = ۱, ۲, ...)$ همگرا باشد هر زیردنبالهٔ x_{p_n} از آن نیز همگرا و دارای همان حد میباشد.

$$\lim_{n \to \infty} x_{p_n} = \lim_{n \to \infty} x_n$$

۹۰ – ثابت کنید اگر یک زیردنباله از یک دنبالهٔ یکنوا همگرا باشد آن دنباله همگراست.

۹۱ – ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

در اینصورت

$$\lim_{n \to \infty} |x_n| = |a|$$

۹۲ – اگر $x_n \to a$ در اینصورت در بارهٔ حد

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n + ۱}{x_n}$$

چه میتوان گفت؟

۹۳ – ثابت کنید که دنبالهٔ عددی همگرا کراندار است.

۹۴ – ثابت کنید که دنبالهٔ عددی همگرا یا به کران بالایی خود یا به کران پایینی خود و یا به هر دو میرسد.
برای هر سه نوع مثال ذکر کنید.

۹٥- ثابت کنید دنبالهٔ عددی $x_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ متقارب به $+\infty$ حتماً به کران پائینی خود میرسد .

مطلوبست بزرگترین جملهٔ دنبالهٔ $x_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ اگر

۹٦- $x_n = \frac{n^۲}{۲^n}$

۹۷- $x_n = \frac{\sqrt{n}}{۱۰۰ + n}$

۹۸- $x_n = \frac{۱۰۰۰^n}{n!}$

مطلوبست کوچکترین جملهٔ دنبالهٔ $x_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ اگر :

۹۹- $x_n = n^۲ - ۹n - ۱۰۰$

۱۰۰- $x_n = n + \frac{۱۰۰}{n}$

مطلوبست محاسبهٔ $\inf x_n$ ، $\sup x_n$ ، $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} x_n$ و $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} x_n$ در دنبالهٔ $x_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ اگر :

۱۰۱- $x_n = ۱ - \frac{۱}{n}$

۱۰۲- $x_n = \frac{(-۱)^n}{n} + \frac{۱ + (-۱)^n}{۲}$

۱۰۱,۱- $x_n = (-۱)^{n-۱}\left(۲ + \frac{۳}{n}\right)$

۱۰۳- $x_n = ۱ + \frac{n}{n+۱} \cos \frac{n\pi}{۲}$

۱۰٤- $x_n = ۱ + ۲(-۱)^{n+۱} + ۳(-۱)^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$

۱۰٥- $x_n = \frac{n-۱}{n+۱} \cos \frac{۲n\pi}{۳}$

۱۰۸- $x_n = n^{(-۱)^n}$

۱۰٦- $x_n = (-۱)^n n$

۱۰۹- $x_n = ۱ + n \sin \frac{n\pi}{۲}$

۱۰۷- $x_n = -n[۲ + (-۱)^n]$

۱۱۰- $x_n = \frac{۱}{n - ۱۰,۲}$

مطلوبست محاسبهٔ

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, x_n \quad \text{و} \quad \underline{\lim_{n \to \infty}}\, x_n$$

اگر :

۱۱۱- $x_n = \frac{n^۲}{۱ + n^۲} \cos \frac{۲n\pi}{۳}$

۱۱۲- $x_n = \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n \times (-۱)^n + \sin \frac{n\pi}{٤}$

$$x_n = \frac{n}{n+۱} \sin^۲ \frac{n\pi}{۳}$$ – ۱۱۳

$$x_n = \sqrt[n]{۱ + ۲^{n(-۱)^n}}$$ – ۱۱٤

$$x_n = \cos^n \frac{۲\, n\pi}{۳}$$ – ۱۱٥

مطلوبست محاسبهٔ حد جزء هر یک از دنباله‌های زیر :

$$\frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{٤},\ \frac{۳}{٤},\ \frac{۱}{۸},\ \frac{۷}{۸},\ \dots,\ \frac{۱}{۲^n},\ \frac{۲^n-۱}{۲^n},\ \dots$$ – ۱۱٦

$$۱,\ \frac{۱}{۲},\ ۱+\frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{۳},\ ۱+\frac{۱}{۳},\ \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳},\ \frac{۱}{٤},\ ۱+\frac{۱}{٤},$$ – ۱۱۷

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{٤},\ \frac{۱}{۳}+\frac{۱}{٤},\ \frac{۱}{٥},\ \dots,\ \frac{۱}{n},\ ۱+\frac{۱}{n},\ \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{n},\ \dots,$$

$$\frac{۱}{n-۱}+\frac{۱}{n},\ \frac{۱}{n+۱},\ \dots$$

$$\frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{۳},\ \frac{۲}{۳},\ \frac{۱}{٤},\ \frac{۲}{٤},\ \frac{۳}{٤},\ \frac{۱}{٥},\ \frac{۲}{٥},\ \frac{۳}{٥},\ \frac{٤}{٥},\ \dots$$ – ۱۱۸

$$x_n = ۳\left(۱-\frac{۱}{n}\right) + ۲\,(-۱)^n$$ – ۱۱۹

$$x_n = \frac{۱}{۲}\,[(a+b)+(-۱)^n(a-b)]$$ – ۱۲۰

۱۲۱ – دنبالهٔ عددی‌ای بسازید که حدود جزء آن اعداد مفروض

$$a_۱,\ a_۲,\ \dots,\ a_p$$

باشند.

۱۲۲ – مثالی برای دنباله‌های عددی بیاورید که برای آن جمیع جملات دنبالهٔ عددی مفروض

$$a_۱,\ a_۲,\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

حدود جزء آن باشند. دنبالهٔ مذکور چه حدهای جزء دیگری را نیز حتماً دارا می‌باشد ؟

۱۲۳ – دنباله‌ای مثال بزنید که :

الف) حدهای جزء متناهی نداشته باشد،

ب) دارای حد جزء متناهی یکتا بوده ولی همگرا نباشد .

پ) دارای مجموعهٔ ناستناهی حدود جزء باشد.
ت) هر عدد حقیقی را بعنوان حد جزء خود بپذیرد .

۱۲۴ – ثابت کنید که دنباله‌های x_n و $y_n = x_n \sqrt[n]{n}$ $(n = ۱, ۲, \ldots)$ دارای حدود جزء یکسان می‌باشند .

۱۲۵ – ثابت کنید که از دنبالهٔ کراندار $x_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ همواره میتوان یک زیر دنبالهٔ همگرای $x_{p_n} (n = ۱, ۲, \ldots)$ را اختیار نمود.

۱۲۶ – ثابت کنید که اگر دنبالهٔ $x_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ کراندار نباشد در این صورت زیر دنبالهٔ x_{p_n} وجود دارد بطوریکه :

$$\lim_{n \to \infty} x_{p_n} = \infty$$

۱۲۷ – هر گاه دنبالهٔ $x_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ همگرا و دنبالهٔ $y_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ واگرا باشد در بارهٔ همگرایی دنباله‌های زیر چه اظهار نظری میتوان نمود :
الف) $x_n + y_n$ ، ب) $x_n y_n$ ؟
مثال‌های نظیر ذکر کنید.

۱۲۸ – هر گاه دنباله‌های $y_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ ، x_n واگرا باشند آیا میتوان گفت که دنباله‌های
الف) $x_n + y_n$ ب) $x_n y_n$ نیز واگرا می‌باشند؟
در هر مورد مثال ذکر کنید .

۱۲۹ – فرض کنیم :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = ۰$$

و $y_n (n = ۱, ۲, \ldots)$ دنبالهٔ نامشخصی باشد آیا میتوان گفت که

$$\lim_{n \to \infty} x_n y_n = ۰$$

مثال ذکر کنید .

۱۳۰ – فرض کنیم

$$\lim_{n \to \infty} x_n y_n = ۰$$

آیا از این جا میتوان نتیجه گرفت که $\lim_{n \to \infty} x_n = ۰$ یا $\lim_{n \to \infty} y_n = ۰$ ؟
به مثال : $x_n = \frac{۱ + (-۱)^n}{۲}$ ، $y_n = \frac{۱ - (-۱)^n}{۲} (n = ۱, ۲, \ldots)$ توجه کنید .

۱۳۱ – ثابت کنید که :

الف) $\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \to \infty} y_n \leqslant \underline{\lim}_{n \to \infty} (x_n + y_n) \leqslant \underline{\lim}_{n \to \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n$

و

ب) $\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n \leqslant \overline{\lim}_{n \to \infty} (x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim}_{n \to \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n$

برای مواردی که در این روابط نامساویهای اکید وجود داشته باشند مثال ذکر کنید.

۱۳۲ – فرض کنیم $(n = ۱, ۲, \dots)$ $y_n \geqslant ۰$ و $x_n \geqslant ۰$ ثابت کنید:

الف) $\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n \times \underline{\lim}_{n \to \infty} y_n \leqslant \underline{\lim}_{n \to \infty} (x_n y_n) \leqslant \underline{\lim}_{n \to \infty} x_n \times \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n$

و

ب) $\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n \times \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n \leqslant \overline{\lim}_{n \to \infty} (x_n y_n) \leqslant \overline{\lim}_{n \to \infty} x_n \times \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n$

برای مواردی که در این روابط نامساویهای اکید وجود داشته باشند مثال ذکر کنید.

۱۳۳ – ثابت کنید که اگر $\lim_{n \to \infty} x_n$ وجود داشته باشد در آنصورت بازای جمیع دنباله‌های $y_n (n = ۱, ۲, \dots)$ داریم:

الف) $\overline{\lim}_{n \to \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n$

و

ب) $(x_n \geqslant ۰)$ $\overline{\lim}_{n \to \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n \times \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n (x_n \geqslant ۰)$

۱۳۴ – ثابت کنید که اگر حد اقل یکی از تساویهای زیر بازای هر دنباله $y_n (n = ۱, ۲, \dots)$ و یک دنباله $x_n (n = ۱, ۲, \dots)$ بر قرار باشد در اینصورت دنباله x_n همگرا است:

الف) $\overline{\lim}_{n \to \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \to \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n$

یا

ب) $\overline{\lim}_{n \to \infty} (x_n y_n) = \overline{\lim}_{n \to \infty} x_n \times \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n (x_n \geqslant ۰)$

۱۳۵ – ثابت کنید که اگر $(n = ۱, ۲, \dots)$ $x_n > ۰$ و

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} x_n \times \overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{۱}{x_n} = ۱$$

در اینصورت دنباله x_n همگرا است.

۱۳۶ – ثابت کنید که اگر دنباله $x_n (n = ۱, ۲, \dots)$ کراندار و

$$\lim_{n \to \infty} (x_{n+۱} - x_n) = ۰$$

در اینصورت حدود جزء این دنباله در همه جا بطور فشرده بین حدهای پائین و بالای آن

$$L = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, x_n \quad و \quad l = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, x_n$$

قرار دارد یعنی هر عدد دلخواهی از فاصلهٔ $[l, L]$ مساوی حد جزء دنبالهٔ مفروض است .

۱۳۷ – فرض کنیم دنبالهٔ عددی $x_۱, x_۲, \dots, x_n, \dots$ در شرایط

$$۰ \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n \quad (m, n = ۱, ۲, \dots)$$

صدق کند . ثابت کنید که $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{n}$ وجود دارد .

۱۳۸ – ثابت کنید که اگر دنبالهٔ $x_n (n = ۱, ۲, \dots)$ همگرا باشد در اینصورت دنبالهٔ واسطه‌های حسابی

$$\xi_n = \frac{۱}{n}(x_۱ + x_۲ + \dots + x_n) \quad (n = ۱, ۲, \dots)$$

نیز همگرا و

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_۱ + x_۲ + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \to \infty} x_n$$

عکس این حکم درست نیست — مثال بزنید .

۱۳۹ – ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$$

در آنصورت :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_۱ + x_۲ + \dots + x_n}{n} = +\infty$$

۱۴۰ – ثابت کنید اگر دنبالهٔ $x_n (n = ۱, ۲, \dots)$ همگرا و $x_n > ۰$ باشد در اینصورت :

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_۱ x_۲ \dots x_n} = \lim_{n \to \infty} x_n$$

۱۴۱ – ثابت کنید که اگر $(n = ۱, ۲, \dots)\ x_n > ۰$ در اینصورت :

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+۱}}{x_n}$$

بفرض آنکه حد در سمت راست این تساوی وجود داشته باشد .

۱۴۲ – ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$$

۱۴۳ – قضیهٔ شتولتس را ثابت کنید: اگر

الف) $y_{n+۱}>y_n(n=۱, ۲, \ldots)$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$

پ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+۱}-x_n}{y_{n+۱}-y_n}$ وجود داشته باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+۱}-x_n}{y_{n+۱}-y_n}$$

۱۴۴ – مطلوبست محاسبهٔ:

الف) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^۲}{a^n}(a>۱)$ ؛ ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}$

۱۴۵ – ثابت کنید که اگر p یک عدد طبیعی باشد در اینصورت

الف) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱^p+۲^p+\ldots+n^p}{n^{p+۱}}=\frac{۱}{p+۱}$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{۱^p+۲^p+\ldots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+۱}\right)=\frac{۱}{۲}$

پ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱^p+۳^p+\ldots+(۲n-۱)^p}{n^{p+۱}}=\frac{۲^p}{p+۱}$

۱۴۶ – ثابت کنید دنباله

$$x_n=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\ldots+\frac{۱}{n}-\ln n\quad(n=۱, ۲, \ldots)$$

همگرا است.

بدین ترتیب فرمول

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\ldots+\frac{۱}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$$

را داریم که در آن $C=۰,۵۷۷۲۱۶\ldots$ موسوم به ثابت اولر است و $\varepsilon_n\to ۰$ بازای $n\to\infty$.

۱۴۷ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \dots + \frac{۱}{۲n} \right)$$

۱۴۸ – دنبالهٔ عددی $x_n (n = ۱, ۲, \dots)$ با دستورهای زیر مشخص شده است:

$$x_۱ = a, \ x_۲ = b, \ x_n = \frac{x_{n-۱} + x_{n-۲}}{۲} \quad (n = ۳, ۴, \dots)$$

مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{n \to \infty} x_n$$

۱۴۹ – فرض کنیم $x_n (n = ۱, ۲, \dots)$ دنبالهٔ عددی مشخص شده با دستورهای

$x_۰ > ۰, \ x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}\left(x_n + \frac{۱}{x_n}\right) \quad (n = ۰, ۱, ۲, \dots)$ باشد.

ثابت کنید

$$\lim_{n \to \infty} x_n = ۱$$

۱۵۰ – ثابت کنید که دنباله‌های x_n و $y_n (n = ۱, ۲, \dots)$ مشخص شده با دستورهای

$$x_۱ = a, \ y_۱ = b, \ x_{n+۱} = \sqrt{x_n y_n}, \ y_{n+۱} = \frac{x_n + y_n}{۲}$$

دارای حد مشترکی می‌باشند:

$$\mu(a, b) = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n$$

(میانگین حسابی – هندسی دو عدد a و b)

بخش ۳ — مفهوم تابع

بند ۱ — مفهوم تابع. متغیر y را تابع تک‌مقداری f از متغیر x در حوزهٔ تغییرات $X = \{x\}$ نامند اگر با هر مقدار $x \in X$ یک مقدار حقیقی معین $y = f(x)$ متعلق به مجموعهٔ $Y = \{y\}$ متناظر باشد.

مجموعهٔ X حوزهٔ تعریف یا حوزهٔ وجود تابع $f(x)$، Y مجموعهٔ مقادیر این تابع نامیده می‌شود. در حالت‌های ساده ممکن است مجموعهٔ X فاصلهٔ باز

(بازه) (a, b) : $a<x<b$ یا نیمه‌باز $(a, b]$: $a<x\leqslant b$ و $[a, b)$: $a\leqslant x<b$ و یا فاصلهٔ بسته (قطعه) $[a, b]$: $a\leqslant x\leqslant b$ باشد که در آن a و b دو عدد حقیقی یا نمادهای $-\infty$ و $+\infty$ میباشند .

اگر هر مقدار x از X متناظر یک یا چند مقدار $y=f(x)$ باشد در اینصورت y را تابع چند مقداری از x مینامند.

بند ۲ — تابع معکوس. هرگاه x مقدار دلخواهی انتخاب شود که در معادلهٔ

$$f(x)=y$$

صدق کند که در آن y عددیست ثابت متعلق به مجموعهٔ مقادیر Y تابع $y=f(x)$، در اینصورت این تناظر بطور کلی یک تابع چند مقداری

$$x=f^{-۱}(y)$$

را روی مجموعهٔ Y تعریف میکند که به تابع معکوس تابع $f(x)$ موسوم است . اگر تابع $y=f(x)$ بمعنای اکید یکنوا باشد یعنی بازای $x_۲>x_۱$ داشته باشم

$$f(x_۲)>f(x_۱) \quad \text{یا} \quad f(x_۲)<f(x_۱)$$

در اینصورت تابع $x=f^{-۱}(y)$ یک تابع تک مقداری یکنوا بهمان معنا میباشد .

حوزهٔ وجود توابع زیر را تعیین کنید :

۱۵۱ — $y=\dfrac{x^۲}{۱+x}$

۱۵۲ — $y=\sqrt{۳x-x^۳}$

۱۵۳ — $y=(x-۲)\sqrt{\dfrac{۱+x}{۱-x}}$

۱۵۴ — الف) $y=\log(x^۲-٤)$

ب) $y=\log(x+۲)+\log(x-۲)$

۱۵۵ — $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$

۱۵۶ — $y=\sqrt{\cos x^۲}$

۱۵۷ — $y=\lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$

۱۵۸ — $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

۱۵۹ — $y=\arcsin\dfrac{۲x}{۱+x}$

۱۶۰ — $y=\arccos(۲\sin x)$

۱۶۱ — $y=\lg[\cos(\lg x)]$

۱۶۲ — $y=(x+|x|)\sqrt{x\sin^۲\pi x}$

۱۶۳ — $y=\operatorname{ctg}\pi x+\arccos(۲^x)$

۱٦٤ — $y=\arcsin(۱-x)+\lg(\lg x)$

۱٦۵ — $y=(۲x)!$

۱٦۵,۱ — $y=\log_۲\log_۳\log_٤ x$

۱٦۵,۲ — $y=\sqrt[٤]{\lg \operatorname{tg} x}$

۱٦۵,۳ — $y=\sqrt{\sin ۲x}+\sqrt{\sin ۳x}$

$$(۰\leqslant x\leqslant ۲\pi)$$

حوزهٔ وجود و مجموعهٔ مقادیر توابع زیر را تعیین کنید:

۱۶۶ - $y = \sqrt{۲ + x - x^۲}$

۱۶۷ - $y = \lg(۱ - ۲\cos x)$

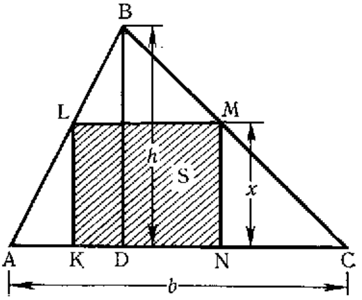
۱۶۸ - $y = \arccos\frac{۲x}{۱ + x^۲}$

۱۶۹ - $y = \arcsin\left(\lg\frac{x}{۱۰}\right)$

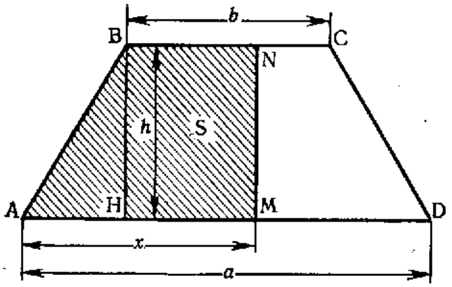
۱۷۰ - $y = (-۱)^x$

۱۷۱ - در مثلث ABC (شکل ۱) به قاعدهٔ $AC = b$ و ارتفاع $BD = h$ محیط بر مستطیل $KLMN$ به ارتفاع $NM = x$ مطلوبست بیان P محیط مستطیل $KLMN$ و مساحت S آن بصورت تابعی از x. نمودار توابع $P = P(x)$ ، $S = S(x)$ را رسم کنید.

۱۷۲ - در مثلث ABC ضلع $AB = ۶\ \text{cm}$, $AC = ۸\ \text{cm}$ و زاویهٔ $BAC = x$ است. ضلع $BC = a$ و مساحت S مثلث ABC را بصورت تابعی از x بیان کنید. نمودار توابع $S = S(x)$, $a = a(x)$ را رسم کنید.



شکل ۱



شکل ۲

۱۷۳ - در ذوذنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ (شکل ۲) به قاعده‌های $AD = a$, $BC = b$ $(a > b)$ و ارتفاع $HB = h$ خط $MN \| HB$ بفاصلهٔ $AM = x$ از رأس A رسم شده است. مساحت S شکل $ABNMA$ را بصورت تابعی از x بیان کنید. نمودار تابع $S = S(x)$ را رسم کنید.

۱۷۴ - در قطعهٔ $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ ، از محور Ox جرم برابر ۲ گرم بطور یکنواخت توزیع و در هر یک از نقاط $x = ۲$ و $x = ۳$ از این محور جرم متمرکز یک گرمی قرار داده شده است. از طریق تحلیلی تابع $m = m(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ را که از لحاظ عددی برابر جرم موجود در فاصلهٔ $(-\infty, x)$ است بیان نموده و نمودار این تابع را رسم کنید.

۱۷۵ - تابع $y = \operatorname{sgn} x$ به ترتیب زیر تعریف می‌شود:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -۱, & \text{اگر } x < ۰ \\ ۰, & \text{اگر } x = ۰ \\ ۱, & \text{اگر } x > ۰ \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم کنید. نشان دهید که:

$$|x| = x \operatorname{sgn} x$$

۱۷۶ – تابع $y = [x]$ (قسمت درست عدد x) بدین ترتیب تعریف می‌شود: اگر $x = n + r$ که در آن n عدد درست و $۰ \leqslant r < ۱$ باشد در اینصورت $[x] = n$. نمودار این تابع را رسم کنید.

۱۷۷ – فرض کنیم

$$y = \pi(x) \quad (x \geqslant ۰)$$

معرف تعداد اعداد اولی باشد که از x تجاوز نکند. نمودار این تابع را بازای مقادیر آرگومان $۰ \leqslant x \leqslant ۲۰$ رسم کنید.

مجموعهٔ E_x بوسیلهٔ تابع $y = f(x)$ بر کدام مجموعهٔ E_y تصویر می‌شود اگر:

۱۷۸ – $y = x^۲$ ، $E_x = \{-۱ \leqslant x \leqslant ۲\}$

۱۷۹ – $y = \lg x$ ، $E_x = \{۱۰ < x < ۱۰۰۰\}$

۱۸۰ – $y = \frac{۱}{\pi} \operatorname{arc\,ctg} x$ ، $E_x = \{-\infty < x < +\infty\}$

۱۸۱ – $y = \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{۴}$ ، $E_x = \{۰ < |x| \leqslant ۱\}$

۱۸۲ – $y = |x|$ ، $E_x = \{۱ \leqslant |x| \leqslant ۲\}$

اگر متغیر x بازهٔ $۰ < x < ۱$ را طی کند متغیر y در توابع زیر کدام مجموعه را خواهد پیمود:

۱۸۳ – $y = a + (b - a)x$

۱۸۴ – $y = \frac{۱}{۱ - x}$

۱۸۵ – $y = \frac{x}{۲x - ۱}$

۱۸۶ – $y = \sqrt{x - x^۲}$

۱۸۷ – $y = \operatorname{ctg} \pi x$

۱۸۸ – $y = x + [۲x]$

۱۸۹ – مطلوبست محاسبهٔ $f(۰)$ ، $f(۱)$ ، $f(۲)$ ، $f(۳)$ ، $f(۴)$ اگر

$$f(x) = x^۴ - ۶x^۳ + ۱۱x^۲ - ۶x$$

۱۹۰ – مطلوبست محاسبهٔ $f(-۱)$ ، $f(-۰,۰۰۱)$ ، $f(۱۰۰$ اگر

$$f(x) = \lg x^۲$$

۱۹۱ – مطلوبست محاسبهٔ $f(۰,۹)$ ، $f(۰,۹۹)$ ، $f(۰,۹۹۹)$ ، $f(۱)$ اگر

$$f(x) = ۱ + [x]$$

۱۹۲ – مطلوبست محاسبهٔ $f(-۲)$ ، $f(-۱)$ ، $f(۰)$ ، $f(۱)$ ، $f(۲)$ اگر

$$f(x) = \begin{cases} ۱ + x, & \text{بازای} \quad -\infty < x \leqslant ۰ \\ ۲^x, & \text{بازای} \quad ۰ < x < +\infty \end{cases}$$

۱۹۳ – مطلوبست محاسبهٔ $f(۰)$ ، $f(-x)$ ، $f(x+۱)$ ، $f(x)+۱$ ، $f\left(\frac{۱}{x}\right)$ ، $\frac{۱}{f(x)}$ اگر

$$f(x) = \frac{۱ - x}{۱ + x}$$

۱۹٤ – مطلوبست تعیین مقادیر x که بازای آنها : ۱) $f(x) = ۰$ ؛ ۲) $f(x) > ۰$ ؛ ۳) $f(x) < ۰$ اگر :

الف) $f(x) = x - x^۳$ ؛ ب) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$

پ) $f(x) = (x + |x|)(۱ - x)$

۱۹۵ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\varphi(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

اگر : الف) $f(x) = ax = b$ ؛ ب) $f(x) = x^۲$ ؛ پ) $f(x) = a^x$

۱۹٦ – فرض میکنیم

$$f(x) = ax^۲ + bx + c$$

نشان دهید که

$$f(x+۳) - ۳f(x+۲) + ۳f(x+۱) - f(x) \equiv ۰$$

۱۹۷ – مطلوبست تعیین تابع خطی صحیح

$$f(x) = ax + b$$

اگر $f(۰) = -۲$ و $f(۳) = ۵$ باشد .

$f(۱)$ و $f(۲)$ مساوی چیست (انترپولاسیون یا درون‌یابی خطی)؟

۱۹۸ – مطلوبست تعیین تابع گویای صحیح درجهٔ دوم:

$$f(x)=ax^{۲}+bx+c$$

در صورتیکه

$$f(-۲)=۰ \quad ، \quad f(۰)=۱ \quad ، \quad f(۱)=۵$$

$f(-۱)$ و $f(۰{,}۵)$ مساوی چیست (انترپولاسیون کوادراتیک یا درون‌یابی درجهٔ دوم)؟

۱۹۹ – مطلوبست تعیین تابع گویای صحیح درجهٔ سوم:

$$f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$$

اگر

$$f(-۱)=۰ \quad ، \quad f(۰)=۲ \quad ، \quad f(۱)=-۳ \quad ، \quad f(۲)=۵$$

۲۰۰ – مطلوبست تعیین تابع بصورت

$$f(x)=a+bc^{x}$$

اگر

$$f(۰)=۱۵ \quad ، \quad f(۲)=۳۰ \quad ، \quad f(٤)=۹۰$$

۲۰۱ – ثابت کنید اگر برای تابع خطی

$$f(x)=ax+b$$

مقادیر آرگومان $x=x_n\,(n=۱, ۲, \ldots)$ تشکیل تصاعد حسابی بدهند در اینصورت مقادیر نظیر تابع $y_n=f(x_n)\,(n=۱, ۲, \ldots)$ نیز تشکیل تصاعد حسابی میدهند.

۲۰۲ – ثابت کنید اگر برای تابع نمائی

$$f(x)=a^{x} \quad (a>۰)$$

مقادیر آرگومان $x=x_n\,(n=۱, ۲, \ldots)$ تشکیل تصاعد حسابی بدهند در اینصورت مقادیر نظیر تابع $y_n=f(x_n)\,(n=۱, ۲, \ldots)$ نیز تشکیل تصاعد هندسی میدهند.

۲۰۳ – فرض کنیم تابع $f(u)$ بازای $۰<u<۱$ معین باشد. مطلوبست حوزهٔ تعریف توابع زیر:

الف) $f(\sin x)$ ؛ ب) $f(\ln x)$ ؛ پ) $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$

۲۰۴ – فرض کنیم

$$f(x) = \frac{۱}{۲}(a^x + a^{-x}) \quad (a > ۰)$$

نشان دهید که

$$f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x)f(y)$$

۲۰۵ – فرض کنیم

$$f(x) + f(y) = f(z)$$

مطلوبست تعیین z اگر :

الف) $f(x) = ax$ ؛ ب) $f(x) = \frac{۱}{x}$ ؛

پ) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x \quad (|x| < ۱)$ ؛ ت) $f(x) = \log \frac{۱+x}{۱-x}$

مطلوبست محاسبهٔ $\varphi[\varphi(x)]$ ، $\psi[\psi(x)]$ ، $\varphi[\psi(x)]$ و $\psi[\varphi(x)]$ اگر :

۲۰۶ – $\psi(x) = ۲^x$ و $\varphi(x) = x^۲$

۲۰۷ – $\psi(x) = \frac{۱}{x}$ و $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$

۲۰۸ – $\psi(x) = \begin{cases} ۰ & \text{، بازای } x \leqslant ۰ \\ -x^۲ & \text{، بازای } x > ۰ \end{cases}$ و $\varphi(x) = \begin{cases} ۰ & \text{، بازای } x \leqslant ۰ \\ x & \text{، بازای } x > ۰ \end{cases}$

۲۰۹ – مطلوبست محاسبهٔ $f\{f[f(x)]\}$ و $f[f(x)]$ اگر

$$f(x) = \frac{۱}{۱-x}$$

۲۱۰ – فرض کنیم

$$f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n \text{ بار}}$$

مطلوبست محاسبهٔ $f_n(x)$ اگر

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

۲۱۱ – مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$ اگر

$$f(x+۱) = x^۲ - ۳x + ۲$$

۲۱۲ – مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$ اگر

$$f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x^۲+\frac{۱}{x^۲} \quad (|x|\geqslant ۲)$$

۲۱۳ – مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$ اگر

$$f\left(\frac{۱}{x}\right)=x+\sqrt{۱+x^۲} \quad (x>۰)$$

۲۱۳,۱ – مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$ اگر

$$f\left(\frac{x}{x+۱}\right)=x^۲$$

ثابت کنید که توابع زیر در فواصل ذکر شده صعودی یکنوا میباشند:

۲۱۴ – $f(x)=x^۲ \quad (۰\leqslant x<+\infty)$

۲۱۵ – $f(x)=\sin x \quad \left(-\frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{۲}\right)$

۲۱۶ – $f(x)=\operatorname{tg} x \quad \left(-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}\right)$

۲۱۷ – $f(x)=۲x+\sin x \quad (-\infty<x<+\infty)$

ثابت کنید که توابع زیر در فواصل ذکر شده نزولی یکنوا میباشند:

۲۱۸ – $f(x)=x^۲ \ (-\infty<x\leqslant ۰)$

۲۱۹ – $f(x)=\cos x \ (۰\leqslant x\leqslant \pi)$

۲۲۰ – $f(x)=\operatorname{ctg} x \ (۰<x<\pi)$

۲۲۱ – یکنوائی توابع زیر را بررسی کنید:

الف) $f(x)=ax+b$ ؛

ب) $f(x)=ax^۲+bx+c$ ؛ پ) $f(x)=x^۳$ ؛

ت) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ؛ ت) $f(x)=a^x \ (۰>a)$

۲۲۲ – آیا از طرفین یک نامساوی میتوان لگاریتم گرفت؟

۲۲۳ – فرض کنیم $\varphi(x)$ ، $\psi(x)$ و $f(x)$ سه تابع صعودی یکنوا باشند. اگر

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi(x)$$

باشد ثابت کنید:

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant \psi[\psi(x)]$$

تابع $x=\varphi(y)$ که معکوس توابع زیر باشد و حوزهٔ وجود آنرا تعیین کنید:

۲۲۴ – $y = ۲x + ۳ \; (-\infty < x < +\infty)$

۲۲۵ – $y = x^{۲}$ ؛ الف) $-\infty < x \leqslant ۰$ ؛ ب) $۰ \leqslant x < +\infty$

۲۲۶ – $y = \frac{۱ - x}{۱ + x} \; (x \neq -۱)$

۲۲۷ – $y = \sqrt{۱ - x^{۲}}$ ؛ الف) $-۱ \leqslant x \leqslant ۰$ ؛ ب) $۰ \leqslant x \leqslant ۱$

۲۲۸ – $y = \operatorname{sh} x$ که در آن $\operatorname{sh} x = \frac{۱}{۲}(e^{x} - e^{-x}) \; (-\infty < x < +\infty)$

۲۲۹ – $y = \operatorname{th} x$ که در آن $\operatorname{th} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \; (-\infty < x < +\infty)$

۲۳۰ –
$$y = \begin{cases} x, & \text{اگر} \quad -\infty < x < ۱ \\ x^{۲}, & \text{اگر} \quad ۱ \leqslant x \leqslant ۴ \\ ۲^{x}, & \text{اگر} \quad ۴ < x < +\infty \end{cases}$$

۲۳۱ – تابع $f(x)$ معین در بازهٔ متقارن $(-l, l)$ را اگر

$$f(-x) = f(x)$$

باشد زوج و اگر

$$f(-x) = -f(x)$$

باشد فرد مینامند .

تعیین کنید کدامیک از توابع مفروض زیر زوج و کدامیک فردند :

الف) $f(x) = ۳x - x^{۳}$

ب) $f(x) = \sqrt[۳]{(۱ - x)^{۲}} + \sqrt[۳]{(۱ + x)^{۲}}$

ت) $f(x) = a^{x} + a^{-x} \; (a > ۰)$

ت) $f(x) = \ln \frac{۱ - x}{۱ + x}$

پ) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{۲ + x^{۲}}\right)$

۲۳۲ – ثابت کنید هر تابع $f(x)$ معین در بازهٔ متقارن $(-l, l)$ را میتوان بصورت مجموع توابع زوج و فرد بیان نمود .

۲۳۳ – تابع $f(x)$ معین روی مجموعهٔ E را دوره‌ای نامند هرگاه عدد $T > ۰$ (دورهٔ تابع در معنای کلی کلمه) وجود داشته باشد بطوریکه

$$f(x + T) = f(x) \quad \text{بازای} \quad x \in E$$

تعیین کنید کدامیک از توابع مفروض زیر دوره‌ای هستند و کوچکترین دورهٔ آنها را پیدا کنید:

الف) $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$ ؛

ب) $f(x) = \sin x + \frac{۱}{۲}\sin ۲x + \frac{۱}{۳}\sin ۳x$ ؛

پ) $f(x) = ۲\,\mathrm{tg}\frac{x}{۲} - ۳\,\mathrm{tg}\frac{x}{۳}$ ؛

ت) $f(x) = \sin^{۲} x$ ؛ چ) $f(x) = \sqrt{\mathrm{tg}\, x}$ ؛

ث) $f(x) = \sin x^{۲}$ ؛ ج) $f(x) = \mathrm{tg}\sqrt{x}$ ؛

ح) $f(x) = \sin x + \sin\left(x\sqrt{۲}\right)$

۲۳۴ – ثابت کنید که برای تابع دیریکله

$$\chi(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } x \text{ گویا} \\ ۰, & \text{اگر } x \text{ گنگ} \end{cases}$$

هر عدد گویا دورهٔ آن است.

۲۳۵ – ثابت کنید که مجموع و حاصل ضرب دو تابع دوره ای که روی یک مجموعهٔ مشترک معین هستند و دوره‌هایشان دارای مضرب صحیح مشترک است یک تابع دوره‌ای است.

۲۳۵,۱ – تابع $f(x)$ را وقتی پادوره‌ای (آنتی پریودیک) نامند که

$$f(x+T) = -f(x) \quad (T > ۰)$$

ثابت کنید که تابع $f(x)$ دوره‌ای و دورهٔ آن $۲T$ است.

۲۳۶ – ثابت کنید که اگر بازای تابع $(-\infty < x < +\infty)$ $f(x)$ تساوی $f(x+T) = kf(x)$ بر قرار باشد که در آن k و T ثابتهای مثبتی میباشند در اینصورت $f(x) = a^{x}\varphi(x)$ که در آن a مقدار ثابت و $\varphi(x)$ تابع دوره‌ای با دورهٔ T است.

بخش ٤ — نمایش ترسیمی تابع

بند ۱ — برای رسم نمودار تابع $y = f(x)$ بترتیب زیر عمل می‌شود: ۱) حوزهٔ وجود تابع $X = \{x\}$ را تعیین میکنند؛ ۲) تعداد مکفی از مقادیر آرگومان $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ از X را اختیار و جدول مقادیر نظیر تابع را تشکیل میدهند $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ $y_i = f(x_i)$؛ ۳) دستگاه نقاط $M_i(x_i, y_i)$

$(i = ۱, ۲, \dots, n)$ را در صفحهٔ مختصات Oxy مشخص ساخته و آنها را با خطی بهم می‌پیوندند بطوریکه وضع نقاط بیناسینی را معلوم سازد .

بند ۲ – برای آنکه نمودار صحیحی از تابع بدست آید باید ویژگی‌های کلی تابع را بررسی نمود . ابتدا لازم است : ۱) حل معادلهٔ $f(x) = ۰$ و تعیین نقاط تقاطع نمودار تابع با محور Ox (صفرهای تابع) ؛ ۲) تعیین حدود تغییر آرگومان برای مقادیر مثبت و منفی تابع ؛ ۳) در صورت امکان، تعیین فواصل یک نوائی (صعود یا نزول) تابع ؛ ۴) بررسی رفتار تابع بازای نزدیکی بی‌نهایت زیاد آرگومان به نقاط مرزی حوزهٔ وجود تابع .

در این بند فرض میشود که ویژگی‌های تابع‌های ساده ابتدایی : درجه‌ای، نمائی، مثلثاتی و غیره برای خوانندگان معلوم است .

با استفاده از این ویژگی‌ها بدون انجام محاسبات زیاد، میتوان طرح نمودار بسیاری از توابع را رسم نمود. سایر نمودارها گاهی به ترکیب (جمع و ضرب و غیره...) این نمودارهای ساده منجر می شود .

۲۳۸ – مطلوبست رسم نمودار تابع خطی همگن

$$y = ax$$

بازای $a = ۰, \frac{۱}{۲}, ۱, ۲, -۱$

۲۳۸ – مطلوبست رسم نمودار تابع خطی

$$y = x + b$$

بازای $b = ۰, ۱, ۲, -۱$

۲۳۹ – مطلوبست رسم نمودار توابع خطی :

الف) $y = ۲x + ۳$ ؛ ب) $y = ۲ - ۰{,}۱x$ ؛ پ) $y = -\frac{x}{۲} - ۱$

۲۴۰ – ضریب انبساط طولی حرارتی آهن $a = ۱{,}۲ \times ۱۰^{-۶}$. در مقیاس مناسبی نمودار تابع

$$l = f(T) \quad (-۴۰^\circ \leqslant T \leqslant ۱۰۰^\circ)$$

را رسم کنید که در آن T درجهٔ حرارت و l طول میلهٔ آهنی بازای T درجهٔ حرارت است در صورتیکه بازای $T = ۰^\circ$ ، داشته باشیم $l = ۱۰۰\ \text{cm}$

۲۴۱ – روی محور عددی دو نقطهٔ مادی حرکت میکنند. متحرک اول در مبدأ زمان $t = ۰$ در ۲۰ متری سمت چپ مبدأ مختصات قرار دارد و دارای سرعت $v_۱ = ۱۰\ \text{m/sec}$ و دومی بازای $t = ۰$ در ۳۰ متری سمت راست نقطهٔ O قرار دارد و دارای سرعت $v_۲ = -۲۰\ \text{m/sec}$

میباشد . نمودار معادلات حرکت این دو متحرک را رسم نمایید و زمان و محل ملاقات آنها را پیدا کنید.

۲۴۲ – نمودار توابع گویای درست درجهٔ دوم (سهمی ها) زیر را رسم کنید :

الف) $y = ax^۲$ بازای $a = ۱, \frac{۱}{۲}, ۲, -۱$

ب) $y = (x - x_۰)^۲$ بازای $x_۰ = ۰, ۱, ۲, -۱$

پ) $y = x^۲ + c$ بازای $c = ۰, ۱, ۲, -۱$

۲۴۳ – نمودار سه جمله‌ای درجهٔ دوم

$$y = ax^۲ + bc + c$$

را با در آوردن آن بصورت زیر رسم کنید .

$$y = y_۰ + a(x - x_۰)^۲$$

مثال‌های زیر را در نظر بگیرید :

الف) $y = ۸x - ۲x^۲$

ب) $y = x^۲ - ۳x + ۲$

پ) $y = -x^۲ + ۲x - ۱$

ت) $y = \frac{۱}{۲}x^۲ + x + ۱$

۲۴۴ – یک نقطهٔ مادی تحت زاویهٔ $\alpha = ٤٥^\circ$ نسبت به صفحهٔ افق با سرعت اولیهٔ $v_۰ = ٦٠٠$ m/sec پرتاب شده است . نمودار مسیر حرکت آنرا رسم کنید و نقطهٔ اوج و برد پرواز آنرا بدست آورید. (بطور تقریب $g \approx ۱۰$ m/sec^۲ بگیرید و از مقاومت هوا صرفنظر کنید) .

نمودار توابع گویای درست بالاتر از درجهٔ دوم زیر را رسم کنید :

۲۴۵ – $y = x^۳ + ۱$

۲۴۶ – $y = (۱ - x^۲)(۲ + x)$

۲۴۷ – $y = x^۲ - x^۴$

۲۴۸ – $y = x(a - x)^۲(a + x)^۳ \quad (a > ۰)$

نمودار توابع کسری ـ خطی (هذلولی ها) زیر را رسم کنید :

۲۴۹ – $y = \frac{۱}{x}$

۲۵۰ – $y = \frac{۱ - x}{۱ + x}$

۲۵۱ – نمودار تابع کسری ـ خطی

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ab - bc \neq ۰,\ c \neq ۰)$$

را با درآوردن آن بصورت

$$y = y_۰ + \frac{m}{x - x_۰}$$

رسم کنید .

مثال زیر را در نظر بگیرید :

$$y = \frac{۳x + ۲}{۲x - ۳}$$

۲۵۲ – گازی تحت فشار $p_۰ = ۱\,\text{atm}$ حجم $v = ۱۲m^۳$ را اشغال میکند مطلوبست رسم نمودار تغییرات حجم v گاز بعنوان تابعی از فشار p در صورتیکه درجهٔ حرارت گاز ثابت باشد (قانون بویل – ماریوت) .

مطلوبست رسم نمودار توابع گویای کسری زیر :

۲۵۳ – $y = x + \frac{۱}{x}$ (هذلولی)

۲۵۴ – $y = x^۲ + \frac{۱}{x}$ (سه دندانه‌ای نیوتن)

۲۵۵ – $y = x + \frac{۱}{x^۲}$

۲۵۶ – $y = \frac{۱}{۱ + x^۲}$ (منحنی آنیزی)

۲۵۷ – $y = \frac{۲x}{۱ + x^۲}$ (سرپانتین نیوتن)

۲۵۸ – $y = \frac{۱}{۱ - x^۲}$

۲۵۹ – $y = \frac{x}{۱ - x^۲}$

۲۶۰ – $y = \frac{۱}{۱ + x} - \frac{۲}{x} + \frac{۱}{۱ - x}$

۲۶۱ – $y = \frac{۱}{۱ + x} - \frac{۲}{x^۲} + \frac{۱}{۱ - x}$

۲۶۲ – $y = \frac{(x + ۱)(x - ۲)}{(x - ۱)(x + ۲)}$

۲۶۳ – طرح نمودار تابع

$$y = \frac{ax^۲ + bx + c}{a_۱x + b_۱} \quad (a_۱ \neq ۰)$$

را با درآوردن آن بصورت

$$y = kx + m + \frac{n}{x - x_۰}$$

رسم کنید.

مثال زیر را در نظر بگیرید

$$y=\frac{x^{٢}-٤x+٣}{x+١}$$

٢٦٤ – مطلوبست رسم نمودار قدر مطلق نیروی جاذبهٔ F یک نقطهٔ مادی که در فاصلهٔ x از مرکز جذب قرار دارد در صورتیکه بازای $x=١m$ ، $F=١٠\ \mathrm{kg}$ (قانون نیوتن) .

٢٦٥ – طبق قانون وان در والس بین حجم v یک گاز حقیقی و فشار p آن در دمای ثابت رابطهٔ

$$\left(p+\frac{a}{v^{٢}}\right)(v-b)=c$$

برقرار است. مطلوبست رسم نمودار تابع $p=p(v)$ بازای $a=٢$ ، $b=٠,١$ ، $c=١٠$.

مطلوبست رسم نمودار توابع گنگ زیر :

٢٦٦ – $y=\pm\sqrt{-x-٢}$ (سهمی)

٢٦٧ – $y=\pm x\sqrt{x}$ (سهمی نیل)

٢٦٨ – $y=\pm\frac{١}{٢}\sqrt{١٠٠-x^{٢}}$ (بیضی)

٢٦٩ – $y=\pm\sqrt{x^{٢}-١}$ (هذلولی)

٢٧٠ – $y=\pm\sqrt{\frac{١-x}{١+x}}$

٢٧١ – $y=\pm x\sqrt{١٠٠-x^{٢}}$

٢٧٢ – $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{١٠-x}}$ (سیسویید)

٢٧٣ – $y=\pm\sqrt{(x^{٢}-١)(٩-x^{٢})}$

٢٧٤ – مطلوبست رسم نمودار تابع درجه‌ای

$$y=x^{n}$$

بازای : الف) $n=١,\ ٣,\ ٥$ ؛ ب) $n=٢,\ ٤,\ ٦$

٢٧٥ – مطلوبست رسم نمودار تابع درجه‌ای

$$y=x^{n}$$

بازای : الف) $n=-١,\ -٣$ ؛ ب) $n=-٢,\ -٤$

۲۷٦ – مطلوبست رسم نمودار رادیکال

$$y = \sqrt[m]{x}$$

بازای : الف) $m = ۲, ٤$ ؛ ب) $m = ۳, ٥$

۲۷۷ – مطلوبست رسم نمودار رادیکال

$$y = \sqrt[m]{x^{k}}$$

اگر :

الف) $k = ۱$ ، $m = ۲$ ؛

ب) $k = ۳$ ، $m = ۲$ ؛

پ) $k = ۱$ ، $m = ۳$ ؛

ت) $k = ۲$ ، $m = ۳$ ؛

ث) $k = ٤$ ، $m = ۳$ ؛

ج) $k = ۲$ ، $m = ٤$ ؛

چ) $k = ۳$ ، $m = ٤$.

۲۷۸ – مطلوبست رسم نمودار تابع نمایی

$$y = a^{x}$$

بازای $a = \frac{۱}{۲}, ۱, ۲, e, ۱۰$

۲۷۹ – مطلوبست رسم نمودار تابع نمایی مرکب

$$y = e^{y_{۱}}$$

اگر :

الف) $y_{۱} = x^{۲}$ ؛

ب) $y_{۱} = -x^{۲}$ ؛

پ) $y_{۱} = \frac{۱}{x}$ ؛

ت) $y_{۱} = \frac{۱}{x^{۲}}$ ؛

ث) $y_{۱} = -\frac{۱}{x^{۲}}$ ؛

ج) $y_{۱} = \frac{۲x}{۱ - x^{۲}}$.

۲۸۰ – مطلوبست رسم نمودار تابع لگاریتمی

$$y = \log_{a} x$$

بازای $a = \frac{۱}{۲}, ۲, e, ۱۰$

۲۸۱ – مطلوبست رسم نمودار توابع :

الف) $y = \ln(-x)$ ؛ ب) $y = -\ln x$.

۲۸۲ – مطلوبست رسم نمودار تابع لگاریتمی مرکب

$$y = \ln y_۱$$

اگر :

الف) $y_۱ = ۱ + x^۲$ ؛

ب) $y_۱ = (x - ۱)(x - ۲)^۲(x - ۳)^۳$ ؛

پ) $y_۱ = \frac{۱ - x}{۱ + x}$ ؛

ت) $y_۱ = \frac{۱}{x^۲}$ ؛

ث) $y_۱ = ۱ + e^x$.

۲۸۳ – مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = \log_x ۲$$

۲۸۴ – مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = A \sin x$$

بازای $A = ۱, ۱۰, -۲$

۲۸۵ – مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = \sin(x - x_۰)$$

اگر $x_۰ = ۰, \frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۴}, \pi$

۲۸۶ – مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = \sin nx$$

اگر $n = ۱, ۲, ۳, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}$

۲۸۷ – مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = a \cos x + b \sin x$$

با در آوردن آن بصورت :

$$y = A \sin(x - x_۰)$$

مثال $y = ۶ \cos x + ۸ \sin x$ را در نظر بگیرید.

نمودار توابع مثلثاتی زیر را رسم کنید:

۲۸۸ – $y = \cos x$

۲۸۹ – $y = \operatorname{tg} x$

۲۹۰ – $y = \operatorname{ctg} x$

۲۹۱ – $y = \sec x$

۲۹۲ – $y = \csc x$

۲۹۳ – $y = \sin^{۲} x$

۲۹۴ – $y = \sin^{۳} x$

۲۹۵ – $y = \operatorname{ctg}^{۲} x$

۲۹۶ – $y = \sin x \times \sin ۳x$

۲۹۷ – $y = \pm \sqrt{\cos x}$

نمودار توابع زیر را رسم کنید:

۲۹۸ – $y = \sin x^{۲}$

۲۹۹ – $y = \sin \frac{۱}{x}$

۳۰۰ – $y = \cos \frac{\pi}{x}$

۳۰۰,۱ – $y = \sin x \times \sin \frac{۱}{x}$

۳۰۱ – $y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{x}$

۳۰۱,۱ – $y = \sec \frac{۱}{x}$

۳۰۲ – $y = x\left(۲ + \sin \frac{۱}{x}\right)$

۳۰۳ – $y = \pm \sqrt{۱ - x^{۲}} \sin \frac{\pi}{x}$

۳۰۴ – $y = \frac{\sin x}{x}$

۳۰۵ – $y = e^{x} \cos x$

۳۰۶ – $y = \pm ۲^{-x} \sqrt{\sin \pi x}$

۳۰۷ – $y = \frac{\cos x}{۱ + x^{۲}}$

۳۰۸ – $y = \ln(\cos x)$

۳۰۹ – $y = \cos(\ln x)$

۳۱۰ – $y = e^{\frac{۱}{\sin x}}$

نمودار توابع مستدیر معکوس زیر را رسم کنید:

۳۱۱ – $y = \arcsin x$

۳۱۲ – $y = \arccos x$

۳۱۳ – $y = \operatorname{arc\,tg} x$

۳۱۴ – $y = \operatorname{arc\,ctg} x$

۳۱۵ – $y = \arcsin \frac{۱}{x}$

۳۱۶ – $y = \arccos \frac{۱}{x}$

۳۱۷ – $y = \operatorname{arc\,ctg} \frac{۱}{x}$

۳۱۸ – $y = \arcsin(\sin x)$

۳۱۹ – $y = \arcsin(\cos x)$

۳۲۰ – $y = \arccos(\cos x)$

۳۲۱ – $y = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$

۳۲۲ – $y = \arcsin(۲ \sin x)$

۳۲۳ – مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = \arcsin y_{۱}$$

در صورتیکه:

الف) $y_۱ = ۱ - \frac{x}{۲}$؛ پ) $y_۱ = \frac{۱-x}{۱+x}$؛

ب) $y_۱ = \frac{۲x}{۱+x^۲}$؛ ت) $y_۱ = e^x$

۳۲٤ – مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = \operatorname{arc\,tg} y_۱$$

اگر:

الف) $y_۱ = x^۲$؛ پ) $y_۱ = \ln x$؛

ب) $y_۱ = \frac{۱}{x^۲}$؛ ت) $y_۱ = \frac{۱}{\sin x}$

۳۲٤,۱ – مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = x^۳ - ۳x + ۲$؛ ج) $y = \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{۱+x^۲}$؛

ب) $y = \frac{x^۳}{(۱-x)(۱+x)^۲}$؛ چ) $y = \frac{۱}{۱-۲^{\frac{x}{۱-x}}}$؛

پ) $y = \frac{x^۲}{|x|-۱}$؛ ح) $y = \lg(x^۲ - ۳x + ۲)$؛

ت) $y = \sqrt{x(۱-x^۲)}$؛ خ) $y = \arcsin\left(\frac{۳}{۲} - \sin x\right)$؛

ث) $y = ۳ \sin\left(\frac{x}{۲} + \frac{\pi}{٤}\right)$؛

د) $y = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{۱}{x-۱} + \frac{۱}{x-۲} + \frac{۱}{x-۳}\right)$؛

ذ) $y = \log_{\cos x} \sin x$؛

ر) $y = (\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$؛

۳۲٥ – از روی نمودار تابع $y = f(x)$ مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = -f(x)$؛ پ) $y = -f(-x)$.

ب) $y = f(-x)$؛

۳۲٦ – از روی نمودار تابع $y = f(x)$ مطلوبست رسم نمودار توابع زید

الف) $y = f(x - x_۰)$؛ پ) $y = f(۲x)$؛

ب) $y = y_۰ + f(x - x_۰)$؛ ت) $y = f(kx + b) \quad (k \neq ۰)$

۳۲٦,۱ – فرض کنیم

$$f(x) = \begin{cases} ۱ - |x|, & \text{بازای}\ |x| \leqslant ۱ \\ ۰ & \text{بازای}\ |x| > ۱ \end{cases}$$

مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = \frac{۱}{۲}\,[f(x-t) + f(x+t)]$$

بازای $t = ۰$ ، $t = ۱$ و $t = ۲$.

۳۲۷ – مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = ۲ + \sqrt{۱ - x}$ ؛

ب) $y = ۱ - e^{-x}$ ؛

پ) $y = \ln(۱ + x)$ ؛

ت) $y = -\mathrm{arc\,sin}\,(۱ + x)$ ؛

ث) $y = ۳ + ۲\cos ۳x$.

۳۲۸ – از روی نمودار تابع $y = f(x$ مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = [f(x)]$ ؛

ب) $y = \frac{۱}{۲}(|f(x)| + f(x))$ ؛

پ) $y = \frac{۱}{۲}(|f(x)| - f(x))$

۳۲۹ – از روی نمودار تابع $y = f(x)$ مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = f^{۲}(x)$ ؛

ب) $y = \sqrt{f(x)}$ ؛

پ) $y = \ln f(x)$ ؛

ت) $y = f(f(x))$ ؛

ث) $y = \mathrm{sgn}\, f(x)$ ؛

ج) $y = [f(x)]$.

۳۲۹,۱ – فرض کنیم

$$f(x) = (x - a)(b - x) \quad (a < b)$$

مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = f(x)$ ؛

ب) $y = f^{۲}(x)$ ؛

پ) $y = \frac{۱}{f(x)}$ ؛

ت) $y = \sqrt{f(x)}$ ؛

ث) $y = e^{f(x)}$ ؛

ج) $y = \lg f(x)$ ؛

چ) $y = \mathrm{arc\,ctg}\, f(x)$.

۳۲۹,۲ – مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = \mathrm{arc\,sin}\,[\sin f(x)]$ ؛

ب) $y = \mathrm{arc\,sin}\,[\cos f(x)]$ ؛

پ) $y = \mathrm{arc\,cos}\,[\sin f(x)]$ ؛

ت) $y = \mathrm{arc\,cos}\,[\cos f(x)]$ ؛

ث) $y = \mathrm{arc\,tg}\,[\mathrm{tg}\, f(x)]$ ،

اگر: ۱) $f(x) = x^{۲}$ ؛ ۲) $f(x) = x^{۳}$

۳۳۰ – از روی نمودار توابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = f(x) + g(x)$ ؛

ب) $y = f(x)\, g(x)$ ؛

پ) $y = f(g(x))$.

با استفاده از روش ترکیب نمودارها مطلوبست رسم نمودار توابع زیر :

۳۳۱ – $y = ۱ + x + e^x$ ۳۳۳ – $y = x + \sin x$

۳۳۲ – $y = (x + ۱)^{-۲} + (x - ۱)^{-۲}$ ۳۳۴ – $y = x + \operatorname{arc\,tg} x$

۳۳۵ – $y = \cos x + \frac{۱}{۲} \cos ۲x + \frac{۱}{۳} \cos ۳x$

۳۳۶ – $y = \sin x - \frac{۱}{۳} \sin ۳x + \frac{۱}{۵} \sin ۵x$

۳۳۷ – $y = \sin^۴ x + \cos^۴ x$ ۳۳۸ – $y = |۱ - x| + |۱ + x|$

۳۳۹ – $y = |۱ - x| - |۱ + x|$

۳۴۰ – مطلوبست رسم نمودار توابع هذلولی :

الف) $y = \operatorname{ch} x$ که در آن $\operatorname{ch} x = \frac{۱}{۲}(e^x + e^{-x})$ ؛

ب) $y = \operatorname{sh} x$ که در آن $\operatorname{sh} x = \frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x})$ ؛

پ) $y = \operatorname{th} x$ که در آن $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

با استفاده از روش ضرب نمودارها مطلوبست رسم نمودار توابع زیر :

۳۴۱ – $y = x \sin x$ ۳۴۵ – $y = e^{-x^۲} \cos x$

۳۴۲ – $y = x \cos x$ ۳۴۶ – $y = x \operatorname{sgn}(\sin x)$

۳۴۳ – $y = x^۲ \sin^۲ x$ ۳۴۷ – $y = [x] |\sin \pi x|$

۳۴۴ – $y = \frac{\sin x}{۱ + x^۲}$ ۳۴۸ – $y = \cos x \times \operatorname{sgn}(\sin x)$

۳۴۹ – فرض کنیم

$$f(x) = \begin{cases} ۱ - |x|, & \text{اگر} \quad |x| \leqslant ۱ \\ ۰ \quad , & \text{اگر} \quad |x| > ۱ \end{cases}$$

مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = f(x) f(a - x)$$

اگر :

الف) $a = ۰$ ؛ ب) $a = ۱$ ؛ پ) $a = ۲$.

۳۵۰ – مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = x + \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$$

مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y = \frac{۱}{f(x)}$$

اگر:

۳۵۱ – $f(x) = x^{۲}(۱ - x^{۲})$ ۳۵۴ – $f(x) = \ln x$

۳۵۲ – $f(x) = x(۱ - x)^{۲}$ ۳۵۵ – $f(x) = e^{x} \sin x$

۳۵۳ – $f(x) = \sin^{۲} x$

۳۵۶ – مطلوبست رسم نمودار تابع مرکب

$$y = f(u)$$

که در آن $u = ۲\sin x$ اگر:

$$f(u) = \begin{cases} -۱, & \text{بازای} \quad -\infty < u < -۱ \\ u, & \text{بازای} \quad -۱ \leqslant u \leqslant ۱ \\ ۱, & \text{بازای} \quad ۱ < u < +\infty \end{cases}$$

۳۵۷ – فرض کنیم

$$\varphi(x) = \frac{۱}{۲}(x + |x|) \quad \text{و} \quad \psi(x) = \begin{cases} x, & \text{اگر} \quad x < ۰ \\ x^{۲}, & \text{اگر} \quad x \geqslant ۰ \end{cases}$$

مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = \varphi[\varphi(x)]$ ؛   پ) $y = \psi[\varphi(x)]$ ؛

ب) $y = \varphi[\psi(x)]$ ؛   ت) $y = \psi[\psi(x)]$.

۳۵۸ – فرض کنیم

$$\varphi(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر} \quad |x| \leqslant ۱ \\ ۰, & \text{اگر} \quad |x| > ۱ \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} ۲ - x^{۲}, & \text{اگر} \quad |x| \leqslant ۲ \\ ۲, & \text{گار} \quad |x| > ۲ \end{cases}$$

مطلوبست رسم نمودار توابع زیر:

الف) $y = \varphi[\varphi(x)]$ ؛   پ) $y = \psi[\varphi(x)]$ ؛

ب) $y = \varphi[\psi(x)]$ ؛   ت) $y = \psi[\psi(x)]$.

۳۵۹ – تابع $f(x)$ که در حوزهٔ مثبت $x > ۰$ معین است در ناحیهٔ منفی $x < ۰$ بقسمی‌ادامه دهید که تابع حاصل: ۱) زوج؛ ۲) فرد باشد اگر:

الف) $f(x) = ۱ - x$ ؛   ت) $f(x) = \sin x$ ؛

ب) $f(x) = ۲x - x^{۲}$ ؛   ث) $f(x) = e^{x}$ ؛

پ) $f(x) = \sqrt{x}$ ؛   ج) $f(x) = \ln x$.

نمودار نظیر توابع را رسم کنید .

٣٦٠ – تعیین کنید که نمودار توابع زیر نسبت بکدام محور قائم متقارن میباشند :

الف) $y = ax^۲ + bx + c$ ؛

ب) $y = \frac{۱}{x^۲} + \frac{۱}{(۱ - x)^۲}$ ؛

پ) $y = \sqrt{a + x} + \sqrt{b - x} \quad (۰ < a < b)$ ؛

ت) $y = a + b \cos x$ ؛

٣٦١ تعیین کنید که نمودار توابع زیر نسبت بکدام مرکز متقارن می‌باشند :

الف) $y = ax + b$ ؛

ب) $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ؛

پ) $y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ ؛

ت) $y = \frac{۱}{x - ۱} + \frac{۱}{x - ۲} + \frac{۱}{x - ۳}$ ؛

ث) $y = ۱ + \sqrt[۳]{x - ۲}$.

٣٦٢ – مطلوبست رسم نمودار توابع دوره‌ای زیر :

الف) $y = |\sin x|$ ؛ ب) $y = \operatorname{sgn} \cos x$ ؛ پ) $y = f(x)$ ،

که در آن $f(x) = A\frac{x}{l}\left(۲ - \frac{x}{l}\right)$ اگر $۰ \leqslant x \leqslant ۲l$ و $f(x + ۲l) \equiv f(x)$ ؛

ت) $y = [x] - ۲\left[\frac{x}{۲}\right]$ ؛

ث) $y = (x)$ که در آن (x) فاصله از عدد x تا نزدیکترین عدد درست است .

٣٦٣ – ثابت کنید که اگر نمودار تابع $(-\infty < x < +\infty)$ $y = f(x)$ نسبت بدو محور قائم $x = a$ و $x = b$ $(b > a)$ متقارن باشد $f(x)$ تابع دوره‌ای است .

٣٦٤ – ثابت کنید که اگر نمودار تابع $(-\infty < x < +\infty)$ $y = f(x)$ نسبت بدو نقطهٔ $A(a, y_۰)$ و $B(b, y)$ $(b > a)$ متقارن باشد در اینصورت تابع $f(x)$ مجموع یک تابع خطی و یک تابع دوره‌ای می‌باشد . بخصوص اگر $y_۰ = y_۱$ باشد تابع $f(x)$ دوره‌ای است .

۳۶۵ – ثابت کنید که اگر نمودار تابع $(-\infty<x<+\infty)$ $y=f(x)$ نسبت به نقطهٔ $A(a, y_۰)$ و خط $(b\neq a)$ $x=b$ متقارن باشد در این صورت تابع $f(x)$ دوره‌ای است .

۳۶۶ – مطلوبست رسم نمودار تابع $(-\infty<x<+\infty)$ $y=f(x)$ اگر $f(x+۱)=۲f(x)$ و $f(x)=x(۱-x)$ بازای $۰\leqslant x\leqslant ۱$.

۳۶۷ – مطلوبست رسم نمودار تابع

$$y=f(x)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

اگر :

$$f(x+\pi)=f(x)+\sin x \text{ و } f(x)=۰ \text{ بازای } ۰\leqslant x\leqslant\pi \text{ .}$$

۳۶۸ – مطلوبست رسم نمودار تابع $y=y(x)$ اگر :

الف) $x=y-y^۳$ ؛ پ) $x=y-\ln y$ ؛

ب) $x=\frac{۱-y}{۱+y^۲}$ ؛ ت) $x^۲=\sin y$.

۳۶۹ – مطلوبست رسم نمودار توابع زیر که بصورت پارامتری داده شده‌اند :

الف) $y=۱-t^۲,\quad x=۱-t$ ؛

ب) $y=t+\frac{۱}{t^۲},\quad x=t+\frac{۱}{t}$ ؛

پ) $y=\sin t,\quad x=۱۰\cos t$ (بیضی) ؛

ت) $y=\operatorname{sh} t,\quad x=\operatorname{ch} t$ (هذلولی) ؛

ث) $y=۳\sin^۲ t,\quad x=۵\cos^۲ t$ ؛

ج) $y=۲(۱-\cos t),\quad x=۲(t-\sin t)$ (سیکلوئید) ؛

چ) $(t>۰)\quad y=\sqrt[t]{t+۱},\quad x=\sqrt[t+۱]{t}$.

۳۷۰ – مطلوبست رسم نمودار توابع ضمنی زیر :

الف) $x^۲-xy+y^۲=۱$ (بیضی) ؛

ب) $x^۳+y^۳-۳xy=۰$ (برگ دکارت) ؛

پ) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$ (سهمی) ؛

ت) $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=۴$ (آستروئید) ؛

ث) $\sin x=\sin y$ ؛ چ) $(y>۰ ، x>۰)$ $x^y=y^x$ ؛

ج) $\cos(\pi x^۲)=\cos(\pi y)$ ؛ ح) $x-|x|=y-|y|$.

۳۷۰,۱ – مطلوبست رسم نمودار توابع ضمنی زیر:

الف) $\min(x, y) = ۱$ ؛ پ) $\max(|x|, |y|) = ۱$ ؛
ب) $\max(x, y) = ۱$ ؛ ت) $\min(x^۲, y) = ۱$.

۳۷۱ – مطلوبست رسم نمودار تابع $r = r(\varphi)$ در دستگاه مختصات قطبی (r, φ) اگر:

الف) $r = \varphi$ (حلزونی ارشمیدس) ؛
ب) $r = \frac{\pi}{\varphi}$ (حلزونی هذلولی) ؛
پ) $(۰ \leqslant \varphi < +\infty)$ $r = \frac{\varphi}{\varphi + ۱}$ ؛
ت) $r = ۲^{\frac{\varphi}{۲\pi}}$ (حلزونی لگاریتمی) ؛
ث) $r = ۲(۱ + \cos\varphi)$ (کاردیوئید) ؛
ج) $r = ۱۰ \sin ۳\varphi$ (سه برگی) ؛
چ) $r^۲ = ۳٦ \cos ۲\varphi$ (لمنیسکات برنولی) ؛
ح) $(r > ۱)$ $\varphi = \frac{r}{r - ۱}$ ؛
خ) $\varphi = ۲\pi \sin r$

۳۷۱,۱ – در مختصات قطبی r, φ نمودار توابع زیر را رسم کنید:

الف) $\varphi = ٤r - r^۲$ ؛ پ) $r^۲ + \varphi^۲ = ۱۰۰$.
ب) $\varphi = \frac{۱۲x}{۱ + r^۲}$ ؛

۳۷۱,۲ – در مختصات قطبی r, φ نمودار توابع پارامتری (پارامتر $t \geqslant ۰$) زیر را رسم کنید:

الف) $\left.\begin{array}{l}\varphi = t\cos^۲ t \\ r = t\sin^۲ t\end{array}\right\}$ ب) $\left.\begin{array}{l}\varphi = ۱ - ۲^{-t}\sin\frac{\pi t}{۲} \\ r = ۱ - ۲^{-t}\cos\frac{\pi t}{۲}\end{array}\right\}$

۳۷۲ – معادلهٔ

$$x^۳ - ۳x + ۱ = ۰$$

را با رسم نمودار تابع $y = x^۳ - ۳x + ۱$ بطور تقریبی حل کنید.

معادلات زیر را با روش ترسیمی حل کنید:

۳۷۳ – $x^۳ - ٤x - ۱ = ۰$ ۳۷٥ – $x = ۲^{-x}$
۳۷٤ – $x^٤ - ٤x + ۱ = ۰$ ۳۷٦ – $\lg x = ۰{,}۱\, x$

۳۷۷ – $۱۰^{x} = x^{۲}$

۳۷۸ – $\operatorname{tg} x = x \ (۰ \leqslant x \leqslant \pi)$

دستگاه معادلات زیر را از راه ترسیمی حل کنید:

۳۷۹ – $۱۶ x^{۲} + y = ۴, \quad x + y^{۲} = ۱$

۳۸۰ – $y = ۱۰ (x^{۲} - x - ۲), \quad x^{۲} + y^{۲} = ۱۰۰$

بخش ۵ — حد تابع

بند ۱ — تابع کراندار. تابع $f(x)$ را در فاصلهٔ مفروض (a, b) وقتی کراندار نامند که اعدادی مانند m و M وجود داشته باشند بقسمی که بازای $x \in (a, b)$

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

عدد $m_{۰} = \inf\limits_{x \in (a, b)} \{f(x)\} = \max m$ را کران پایین تابع $f(x)$ و عدد $M_{۰} = \sup\limits_{x \in (a, b)} \{f(x)\} = \min M$ را کران بالای تابع $f(x)$ در فاصلهٔ مفروض (a, b) مینامند. تفاضل $M_{۰} - m_{۰}$ به نوسان $f(x)$ در فاصلهٔ (a, b) موسوم است.

بند ۲ — حد تابع در یک نقطه. هرگاه تابع $f(x)$ روی مجموعهٔ $X = \{x\}$ دارای نقطهٔ تجمع a معین باشد. نگارش

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \qquad (۱)$$

بدان معنا است که بازای هر عدد $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\delta = \delta(\varepsilon) > ۰$ وجود دارد بقسمی که بازای جمیع x هایی که بازای آنها $f(x)$ دارای معنا و نامساوی $۰ < |x - a| < \delta$ صادق باشد نامساوی

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

صادق است.

برای وجود حد تابع (۱) لازم و کافی است که بازای هر دنبالهٔ $x_n \to a$, $x_n \neq a \, (x_n \in X; \quad n = ۱, ۲, \ldots)$ تساوی زیر بر قرار باشد:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

دو حد مهم زیر وجود دارد:

۱) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\sin x}{x} = ۱$ ۲) $\lim\limits_{x \to ۰} (۱ + x)^{\frac{۱}{x}} = e$

معیار کوشی. حد تابع $f(x)$ در نقطهٔ a فقط و فقط وقتی وجود دارد که بازای هر $\varepsilon > ۰$ عدد $\delta = \delta(\varepsilon) > ۰$ پیدا شود بقسمی که

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

بمجرد اینکه $۰ < |x' - a| < \delta$ و $۰ < |x'' - a| < \delta$ که در آن x' و x'' نقاط دلخواهی از حوزهٔ تعریف $f(x)$ میباشند.

بند ۳ — حدود یک سو. عدد A' را حد چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ a نامند:

$$A' = \lim_{x \to a - ۰} f(x) = f(a - ۰)$$

اگر

$$|A' - f(x)| < \varepsilon \quad \text{بازای} \quad ۰ < a - x < \delta(\varepsilon)$$

بطریق مشابه عدد A'' را حد راست تابع $f(x)$ در نقطهٔ a نامند:

$$A'' \lim_{x \to a + ۰} f(x) = f(a + ۰)$$

اگر

$$|A'' - f(x)| < \varepsilon \quad \text{بازای} \quad ۰ < x - a < \delta(\varepsilon)$$

برای وجود حد تابع $f(x)$ در نقطهٔ a لازم و کافی است که

$$f(a - ۰) = f(a + ۰)$$

بند ٤ — حد نامتناهی. نگارش قرار دادی

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

بدین معناست که بازای هر $E > ۰$ نامساوی زیر بر قرار است. :

$$|f(x)| > E \quad \text{فقط اگر} \quad ۰ < |x - a| < \delta(E)$$

بند ٥ — حد جزٔ. اگر بازای دنبالهٔ نامشخص $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$ تساوی

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = B$$

برقرار باشد در این صورت عدد B (یا نماد ∞) را حد جزٔ (متناهی یا نامتناهی) تابع $f\{x\}$ در نقطهٔ a نامند.

کوچکترین و بزرگترین این حدود جزٔ را بترتیب (از چپ به راست) با

$$\underline{\lim}_{x \to a} f(x) \quad \text{و} \quad \overline{\lim}_{x \to a} f(x)$$

نمایش میدهند و بترتیب حد پائین و حد بالای تابع $f(x)$ در نقطهٔ a نامیده می‌شوند.

برای وجود حد (متناهی یا نامتناهی) تابع $f(x)$ در نقطهٔ a لازم و کافی است که

$$\underline{\lim}_{x \to a} f(x) = \overline{\lim}_{x \to a} f(x)$$

۳۸۱ – نشان دهید که تابع تعریف شده با شرایط

$$f(x) = n \quad \text{اگر} \quad x = \frac{m}{n}$$

که در آن n, m اعداد صحیح نسبت بهم اول میباشند و $n > ۰$ و
$f(x) = ۰$ اگر x گنگ باشد

متناهی است ولی در هر نقطهٔ x کراندار نیست (یعنی در همسایگی دلخواه این نقطه کراندار نیست).

۳۸۲ – اگر تابع $f(x)$ معین و بطور موضعی در هر نقطه از: الف) بازه‌ای، ب) قطعه‌ای کراندار باشد در اینصورت آیا این تابع بترتیب در بازه یا قطعهٔ مفروض کراندار است؟

مثالهای نظیر بیاورید.

۳۸۳ – نشان دهید که تابع

$$f(x) = \frac{۱ + x^۲}{۱ + x^٤}$$

در بازهٔ $-\infty < x < +\infty$ کراندار است.

۳۸٤ – نشان دهید که تابع

$$f(x) = \frac{۱}{x} \cos \frac{۱}{x}$$

در همسایگی دلخواه نقطهٔ $x = ۰$ کراندار نیست ولی بازای $x \to ۰$ بی‌نهایت‌بزرگ نمی‌باشد.

۳۸۵ – کراندار بودن تابع

$$f(x) = \ln x \sin^۲ \frac{\pi}{x}$$

را در بازهٔ $۰ < x < \varepsilon$ بررسی کنید.

۳۸۶ – نشان دهید که تابع

$$f(x)=\frac{x}{۱+x}$$

در حوزهٔ $۰ \leqslant x < +\infty$ دارای کران پائین $m=۰$ و کران بالای $M=۱$ است .

۳۸۷ – تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ معین و بطور یکنوا صعددی است . کران بالا و پائین آن روی این قطعه چقدر است ؟

کران بالا و پائین توابع زیر را تعیین کنید:

۳۸۸ – $f(x)=x^{۲}$ روی $(-۲, ۵)$

۳۸۹ – $f(x)=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$ روی $(-\infty, +\infty)$

۳۹۰ – $f(x)=\frac{۲x}{۱+x^{۲}}$ روی $(۰, +\infty)$

۳۹۱ – $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ روی $(۰, +\infty)$

۳۹۲ – $f(x)=\sin x$ روی $(۰, +\infty)$

۳۹۳ – $f(x)=\sin x+\cos x$ روی $[۰, ۲\pi]$

۳۹۴ – $f(x)=۲^{x}$ روی $(-۱, ۲)$

۳۹۵ – $f(x)=[x]$: الف) روی $(۰, ۲)$ و ب) روی $[۰, ۲]$

۳۹۶ – $f(x)=x-[x]$ روی $[۰, ۱]$

۳۹۷ – نوسان تابع

$$f(x)=x^{۲}$$

را روی بازه‌های :

الف) $(۱, ۳)$ ؛

ب) $(۱,۹; ۲,۱)$ ؛

پ) $(۱,۹۹; ۲,۰۱)$ ؛

ت) $(۱,۹۹۹; ۲,۰۰۱)$

بدست آورید. ؛

۳۹۸ – نوسان تابع

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{۱}{x}$$

را روی بازه‌های :

الف) $(-۱, ۱)$ ؛

ب) $(-۰,۱, ۰,۱)$ ؛

پ) $(-۰,۰۱\ ۰,۰۱)$ ؛

ت) $(-۰,۰۰۱, ۰,۰۰۱)$

تعیین کنید .

۳۹۹ – فرض کنیم $m[f]$ و $M(f)$ بترتیب کران پایین و بالای تابع $f(x)$ روی فاصلهٔ (a, b) باشد.

ثابت کنید اگر $f_{۱}(x)$ و $f_{۲}(x)$ توابع معین روی (a, b) باشند در اینصورت

$$m[f_{۱}+f_{۲}]\geqslant m[f_{۱}]+m[f_{۲}]$$

و

$$M[f_{۱}+f_{۲}]\leqslant M[f_{۱}]+M[f_{۲}]$$

نمونه‌های توابع $f_{۱}(x)$ و $f_{۲}(x)$ را بسازید که بازای آنها در رابطه‌های فوق حالت: الف) تساوی و ب) عدم تساوی برقرار باشد.

۴۰۰ – فرض کنیم تابع $f(x)$ روی حوزهٔ $(a, +\infty)$ معین و روی هر قطعهٔ $[a, b]$ کراندار باشد و

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)$$

$$M(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)$$

نمودار توابع $y=m(x)$ و $y=M(x)$ را اگر:
الف) $f(x)=\sin x$ و ب) $f(x)=\cos x$ رسم کنید.

۴۰۱ – بیاری زبان «$\varepsilon-\delta$» ثابت کنید که

$$\lim_{x\to ۲} x^{۲}=۴$$

جدول زیر را تکمیل کنید:

ε	۰,۱	۰,۰۱	۰,۰۰۱	۰,۰۰۰۱	...
δ					

۴۰۲ – بزبان «$E-\delta$» ثابت کنید که:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{(۱-x)^{۲}}=+\infty$$

جدول زیر را تکمیل کنید:

E	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	...
δ					

٤٠٣ – بیاری نامساویها احکام زیر را فرمول بندی کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ ؛

ب) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$ ؛

پ) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$.

بترتیب مثال بیاورید.

بیاری نامساویها احکام زیر را فرمول بندی کنید و مثال بیاورید:

٤٠٤ – الف) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ ؛

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ ؛

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

٤٠٥ – الف) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ ؛

ب) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ؛

پ) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ؛

ت) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ ؛

ث) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$ ؛

ج) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$ ؛

چ) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ ؛

ح) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$ ؛

خ) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$ ؛

٤٠٦ – الف) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ؛

ب) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ ؛

پ) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ ؛

ت) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ ؛

ث) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ؛

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ؛

چ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ ؛

ح) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ؛

خ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

٤٠٧ – فرض کنیم $y=f(x)$. بیاری نامساویها معنای احکام زیر را فرمول بندی کنید:

الف) $y\to b-0$ بازای $x\to a$ ؛

ب) $y\to b-0$ بازای $x\to a-0$ ؛

پ) $y\to b-0$ بازای $x\to a+0$ ؛

ت) $y\to b+0$ بازای $x\to a$ ؛

ث) $y\to b+0$ بازای $x\to a-0$ ؛

ج) $y\to b+0$ بازای $x\to a+0$ ؛

چ) $y\to b-0$ بازای $x\to\infty$ ؛

ح) $y\to b-0$ بازای $x\to-\infty$ ؛

خ) $y \to b - ۰$ بازای $x \to +\infty$ ؛
د) $y \to b + ۰$ بازای $x \to \infty$ ؛
ذ) $y \to b + ۰$ بازای $x \to -\infty$ ؛
ر) $y \to b + ۰$ بازای $x \to +\infty$.
به ترتیب مثال بیاورید.

۴۰۸ – فرض کنیم

$$P(x) = a_۰ x^n + a_۱ x^{n-۱} + \ldots + a_n$$

که در آن $a_i \, (a_۰ \neq ۰, \quad n \geqslant ۱, \; i = ۰, ۱, \ldots, n)$ اعداد حقیقی میباشند.
ثابت کنید که:

$$\lim_{x \to \infty} |P(x)| = +\infty$$

۴۰۹ – فرض کنیم

$$R(x) = \frac{a_۰ x^n + a_۱ x^{n-۱} + \ldots + a_n}{b_۰ x^m + b_۱ x^{m-۱} + \ldots + b_m}$$

که در آن $a_۰ \neq ۰$ و $b_۰ \neq ۰$.
ثابت کنید که

$$\lim_{x \to \infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{اگر} \quad n > m \\ \dfrac{a_۰}{b_۰}, & \text{اگر} \quad n = m \\ ۰, & \text{اگر} \quad n < m \end{cases}$$

۴۱۰ – فرض کنیم

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای‌هایی از x میباشند و

$$P(a) = Q(a) = ۰$$

عبارت زیر دارای چه مقادیری میتواند باشد؟

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

مقدار عبارات زیر را تعیین کنید:

٤١١ - الف) $\lim\limits_{x \to ٠} \dfrac{x^٢ - ١}{٢x^٢ - x - ١}$ ؛ ب) $\lim\limits_{x \to ١} \dfrac{x^٢ - ١}{٢x^٢ - x - ١}$ ؛

پ) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^٢ - ١}{٢x^٢ - x - ١}$.

٤١٢ - $\lim\limits_{x \to ٠} \dfrac{(١ + x)(١ + ٢x)(١ + ٣x) - ١}{x}$

٤١٣ - $\lim\limits_{x \to ٠} \dfrac{(١ + x)^٥ - (١ + ٥x)}{x^٢ + x^٥}$

٤١٤ - $\lim\limits_{x \to ٠} \dfrac{(١ + mx)^n - (١ + nx)^m}{x^٢}$ (m و n اعداد طبیعی میباشند) .

٤١٥ - $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x - ١)(x - ٢)(x - ٣)(x - ٤)(x - ٥)}{(٥x - ١)^٥}$

٤١٦ - $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(٢x - ٣)^{٢٠}(٣x + ٢)^{٣٠}}{(٢x + ١)^{٥٠}}$

٤١٧ - $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x + ١)(x^٢ + ١)\dots(x^n + ١)}{[(nx)^n + ١]^{\frac{n + ١}{٢}}}$

٤١٨ - $\lim\limits_{x \to ٣} \dfrac{x^٢ - ٥x + ٦}{x^٢ - ٨x + ١٥}$

٤١٩ - $\lim\limits_{x \to ١} \dfrac{x^٣ - ٣x + ٢}{x^٤ - ٤x + ٣}$

٤٢٠ - $\lim\limits_{x \to ١} \dfrac{x^٤ - ٣x + ٢}{x^٥ - ٤x + ٣}$

٤٢١ - $\lim\limits_{x \to ٢} \dfrac{x^٣ - ٢x^٢ - ٤x + ٨}{x^٤ - ٨x^٢ + ١٦}$

٤٢٢ - $\lim\limits_{x \to -١} \dfrac{x^٣ - ٢x - ١}{x^٥ - ٢x - ١}$

٤٢٣ - $\lim\limits_{x \to ٢} \dfrac{(x^٢ - x - ٢)^{٢٠}}{(x^٣ - ١٢x + ١٦)^{١٠}}$

٤٢٤ - $\lim\limits_{x \to ١} \dfrac{x + x^٢ + \dots + x^n - n}{x - ١}$

٤٢٤,١ - $\lim\limits_{x \to ١} \dfrac{x^{١٠٠} - ٢x + ١}{x^{٥٠} - ٢x + ١}$

٤٢٥ – $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{x^m - ۱}{x^n - ۱}$ (m و n اعداد طبیعی هستند).

٤٢٦ – $\lim\limits_{x \to a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-۱}(x-a)}{(x-a)^۲}$ (n عددیست طبیعی)

٤٢٧ – $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{x^{n+۱} - (n+۱)x + n}{(x-۱)^۲}$ (n عددیست طبعی)

٤٢٨ ۴ – $\lim\limits_{x \to ۱} \left(\frac{m}{۱-x^m} - \frac{n}{۱-x^n}\right)$ (n, m اعداد طبیعی هستند)

٤٢٩ – $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{۱}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{۲a}{n}\right)+\ldots+\left(x+\frac{(n-۱)a}{n}\right)\right]$

٤٣٠ – $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^۲+\left(x+\frac{۲a}{n}\right)^۲+\ldots+\left(x+\frac{(n-۱)a}{n}\right)^۲\right]$

<u>را هنمائی</u> – مثال ۲ را ببینید .

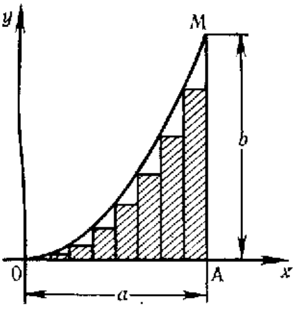
٤٣١ ۴ – $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{۱^۲+۳^۲+\ldots+(۲n-۱)^۲}{۲^۲+٤^۲+\ldots+(۲n)^۲}$

٤٣٢ ۹ – $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{۱^۳+۲^۳+\ldots+n^۳}{n^۳} - \frac{n}{٤}\right)$

<u>راهنمایی</u> – مثال ۳ را ببینید .

٤٣٣ – $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{۱^۳+٤^۳+۷^۳+\ldots+(۳n-۲)^۳}{[۱+٤+۷+\ldots+(۳n-۲)]^۲}$

٤٣٤ – مطلوبست تعیین مساحت مثلث منحنی الخط OAM (شکل ۳) محدود به سهمی $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^۲$ و محور Ox و خط $x = a$ با در نظر گرفتن آن بصورت حد مجموع مساحت مستطیل های محاطی به قاعدهٔ $\frac{a}{n}$ که در آن $n \to \infty$.



شکل ۳

مطلوبست محاسبهٔ حدود زیر:

٤٣٥ – $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+۱}}$

٤٣٦ – $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[٤]{x}}{\sqrt{۲x+۱}}$

٤٣٧ – $\lim_{x\to٤}\frac{\sqrt{۱+۲x}-۳}{\sqrt{x}-۲}$

٤٣٨ – $\lim_{x\to-۸}\frac{\sqrt{۱-x}-۳}{۲+\sqrt[۳]{x}}$

٤٣٩ – $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}}$

٤٤٠ – $\lim_{x\to۳}\frac{\sqrt{x+۱۳}-۲\sqrt{x+۱}}{x^{۲}-۹}$

٤٤١ – $\lim_{x\to-۲}\frac{\sqrt[۳]{x-٦}+۲}{x^{۳}+۸}$

٤٤٢ – $\lim_{x\to۱٦}\frac{\sqrt[٤]{x}-۲}{\sqrt{x}-٤}$

٤٤٣ – $\lim_{x\to۸}\frac{\sqrt{۹+۲x}-۵}{\sqrt[۳]{x}-۲}$

٤٤٤ – $\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt[n]{۱+x}-۱}{x}$

(n عددیست درست) .

٤٤٥ – $\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{۱-۲x-x^{۲}}-(۱+x)}{x}$

٤٤٦ – $\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{۸+۳x-x^{۲}}-۲}{x+x^{۲}}$

٤٤٧ – $\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt[۳]{۲۷+x}-\sqrt[۳]{۲۷-x}}{x+۲\sqrt[۳]{x}}$

٤٤٨ – $\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{\sqrt[۳]{۱+x}-\sqrt[۳]{۱-x}}$

٤٤٩ – $\lim_{x\to۷}\frac{\sqrt{x+۲}-\sqrt[۳]{x+۲۰}}{\sqrt[٤]{x+۹}-۲}$

٤٥٠ – $$\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt[۳]{۱-\frac{x}{۳}}-\sqrt[٤]{۱+\frac{x}{٤}}}{۱-\sqrt{۱-\frac{x}{۲}}}$$

٤٥١ – $\lim_{x\to۰}\frac{x^{۲}}{\sqrt[۵]{۱+۵x}-(۱+x)}$

٤٥٢ – $\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt[m]{۱+\alpha x}-\sqrt[n]{۱+\beta x}}{x}$ (m و n اعداد درستی میباشند) .

٤٥٣ – $\lim_{x\to۰}\frac{\sqrt[m]{۱+\alpha x}\sqrt[n]{۱+\beta x}}{x}$ (m و n اعداد درستی میباشند) .

٤٥٤ - هرگاه $P(x) = a_١x + a_٢x^٢ + \ldots + a_nx^n$ و m عدد درستی باشد ثابت کنید که

$$\lim_{x \to ٠} \frac{\sqrt{١ + P(x)} - ١}{x} = \frac{a_١}{m}$$

مطلوبست تعیین حدود:

٤٥٥ - $\lim_{x \to ١} \frac{\sqrt[m]{x} - ١}{\sqrt[n]{x} - ١}$ (m و n اعداد درستی میباشند) .

٤٥٥,١ - $\lim_{x \to ١} \left(\frac{٣}{١ - \sqrt{x}} - \frac{٢}{١ - \sqrt[٣]{x}} \right)$

٤٥٦ - $\lim_{x \to ١} \frac{(١ - \sqrt{x})(١ - \sqrt[٣]{x}) \ldots (١ - \sqrt[n]{x})}{(١ - x)^{n - ١}}$

٤٥٧ - $\lim_{x \to + \infty} [\sqrt{(x + a)(x + b)} - x]$

٤٥٨ - $\lim_{x \to + \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

٤٥٩ - $\lim_{x \to + \infty} x(\sqrt{x^٢ + ٢x} - ٢\sqrt{x^٢ + x} + x)$

٤٦٠ - $$\lim_{x \to + ٠} \left(\sqrt{\frac{١}{x} + \sqrt{\frac{١}{x} + \sqrt{\frac{١}{x}}}} - \sqrt{\frac{١}{x} - \sqrt{\frac{١}{x} + \sqrt{\frac{١}{x}}}} \right)$$

٤٦١ - $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt[٣]{x^٣ + x^٢ + ١} - \sqrt[٣]{x^٣ - x^٢ + ١} \right)$

٤٦٢ - $\lim_{x \to + \infty} \left(\sqrt[٣]{x^٣ + ٣x^٢} - \sqrt{x^٢ - ٢x} \right)$

٤٦٣ - $\lim_{x \to \infty} x^{\frac{١}{٣}} \left[(x + ١)^{\frac{٢}{٣}} - (x - ١)^{\frac{٢}{٣}} \right]$

٤٦٤ - $\lim_{x \to + \infty} x^{\frac{٣}{٢}} (\sqrt{x + ٢} - ٢\sqrt{x + ١} + \sqrt{x})$

٤٦٥ – $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_{١})\dots(x+a_n)}-x\right]$

٤٦٦ – $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x^{٢}-١})^n+(x+\sqrt{x^{٢}-١})^n}{x^n}$ (n عدديست طبيعی)

٤٦٧ – $\lim\limits_{x\to ٠}\dfrac{(\sqrt{١+x^{٢}}+x)^n-(\sqrt{١+x^{٢}}-x)^n}{x}$ (n عدديست طبيعی)

٤٦٨ – رفتار $x_{١}$ و $x_{٢}$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{٢}+bx+c=٠$ را که ضریب a — ی آن بسمت صفر میل میکند و ضرایب b و c مقادیر ثابتی هستند و ضمناً $b\neq ٠$ بررسی کنید .

٤٦٩ – مقادیر ثابت a و b را از شرط زیر بدست آورید :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{٢}+١}{x+١}-ax-b\right)=٠$$

٤٧٠ – مقادیر ثابت a_i و b_i $(i=١,٢)$ را از شرطهای زیر بدست آورید :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^{٢}-x+١}-a_{١}x-b_{١}\right)=٠$$

و

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^{٢}-x+١}-a_{٢}x-b_{٢}\right)=٠$$

مطلوبست محاسبهٔ حدود :

٤٧١ – $\lim\limits_{x\to ٠}\dfrac{\sin ٥x}{x}$

٤٧٢ – $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

٤٧٣ – $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m و n اعداد درستی میباشند) .

٤٧٤ – $\lim\limits_{x\to ٠}\dfrac{١-\cos x}{x^{٢}}$

٤٧٤,١ – $\lim\limits_{x\to ٠}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

٤٧٤,٢ – $\lim\limits_{x\to ٠} x\operatorname{ctg} ٣x$

٤٧٥ – $\lim\limits_{x\to ٠}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^{٣} x}$

٤٧٦ – $\lim\limits_{x\to ٠}\dfrac{\sin ٥x-\sin ٣x}{\sin x}$

٤٧٧ – $\lim\limits_{x\to ٠}\dfrac{\cos x-\cos ٣x}{x^{٢}}$

٤٧٨ – $\lim\limits_{x\to ٠}\dfrac{١+\sin x-\cos x}{١-\sin px-\cos px}$

٤٧٩ – $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{٤}}\operatorname{tg} ٢x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{٤}-x\right)$

٤٨٠ – $\lim\limits_{x\to ١}(١-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{٢}$

٤٨١ – مطلوبست اثبات تساویهای زیر :

الف) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$ ب) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

پ) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} a\ \left((n=٠,\ \pm ١,\ \pm ٢,\ \ldots,\ \ a\neq \frac{٢n-١}{٢}\pi\right)$

مطلوبست محاسبهٔ حدود :

٤٨٢ – $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$

٤٨٣ – $$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$$

٤٨٤ – $$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$$

٤٨٥ – $$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a}{x-a}$$

٤٨٦ – $$\lim_{x\to a}\frac{\sec x-\sec a}{x-a}$$

٤٨٧ – $$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{cosec} x-\operatorname{cosec} a}{x-a}$$

٤٨٨ – $$\lim_{x\to ٠}\frac{\sin(a+٢x)-٢\sin(a+x)+\sin a}{x^{٢}}$$

٤٨٩ – $$\lim_{x\to ٠}\frac{\cos(a+٢x)-٢\cos(a+x)+\cos a}{x^{٢}}$$

٤٩٠ – $$\lim_{x\to ٠}\frac{\operatorname{tg}(a+٢x)-٢\operatorname{tg}(a+x)+\operatorname{tg} a}{x^{٢}}$$

٤٩١ – $$\lim_{x\to ٠}\frac{\operatorname{ctg}(a+٢x)-٢\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg} a}{x^{٢}}$$

٤٩٢ – $$\lim_{x\to ٠}\frac{\sin(a+x)\sin(a+٢x)-\sin^{٢} a}{x}$$

٤٩٣ – $$\lim_{x\to \frac{\pi}{٦}}\frac{٢\sin^{٢}x+\sin x-١}{٢\sin^{٢}x+٣\sin x+١}$$

٤٩٤ – $$\lim_{x\to ٠}\frac{١-\cos x\cos ٢x\cos ٣x}{١-\cos x}$$

٤٩٥ – $$\lim_{x\to \frac{\pi}{٣}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{٣}\right)}{١-٢\cos x}$$

٤٩٦ – $$\lim_{x\to \frac{\pi}{٣}}\frac{\operatorname{tg}^{٣}x-٣\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{٦}\right)}$$

٤٩٧ – $$\lim_{x\to ٠}\frac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^{٢}a}{x^{٢}}$$

٤٩٨ – $$\lim_{x\to \frac{\pi}{٤}}\frac{١-\operatorname{ctg}^{٣}x}{٢-\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^{٣}x}$$

٤٩٩ – $$\lim_{x\to ٠}\frac{\sqrt{١+\operatorname{tg} x}-\sqrt{١+\sin x}}{x^{٣}}$$

٥٠٠ – $$\lim_{x\to ٠}\frac{x^{٢}}{\sqrt{١+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$

٥٠١ – $$\lim_{x\to ٠}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[٣]{\cos x}}{\sin^{٢}x}$$

٥۰۲ – $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{\sqrt{۱ - \cos x^{۲}}}{۱ - \cos x}$

٥۰۳ – $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{۱ - \sqrt{\cos x}}{۱ - \cos\left(\sqrt{x}\right)}$

٥۰٤ – $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{۱ - \cos x \sqrt{\cos ۲x}\sqrt[۳]{\cos ۳x}}{x^{۲}}$

٥۰٥ – $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sin\sqrt{x + ۱} - \sin\sqrt{x}\right)$

٥۰٦ – الف) $\lim\limits_{x \to ۰} \left(\frac{۱ + x}{۲ + x}\right)^{\frac{۱ - \sqrt{x}}{۱ - x}}$

٥۰۷ – $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x + ۲}{۲x - ۱}\right)^{x^{۲}}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۱} \left(\frac{۱ + x}{۲ + x}\right)^{\frac{۱ - \sqrt{x}}{۱ - x}}$

٥۰۸ – $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{۳x^{۲} - x + ۱}{۲x^{۲} + x + ۱}\right)^{\frac{x^{۳}}{۱ - x}}$

پ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{۱ + x}{۲ + x}\right)^{\frac{۱ - \sqrt{x}}{۱ - x}}$

٥۰۹ – $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sin^{n} \frac{۲\pi n}{۳n + ۱}\right)$

٥۱۰ – $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{٤} + ۰} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{۸} + x\right)\right]^{\operatorname{tg} ۲x}$

٥۱۳ – $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^{۲} + ۲x - ۱}{۲x^{۲} - ۳x - ۲}\right)^{\frac{۱}{x}}$

٥۱۱ – $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^{۲} - ۱}{x^{۲} + ۱}\right)^{\frac{x - ۱}{x + ۱}}$

٥۱٤ – $\lim\limits_{x \to ۰} \sqrt[x]{۱ - ۲x}$

٥۱۲ – $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^{۲} + ۱}{x^{۲} - ۲}\right)^{x^{۲}}$

٥۱٥ – $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x + a}{x - a}\right)^{x}$

٥۱٦ – $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{a_{۱}x + b_{۱}}{a_{۲}x + b_{۲}}\right)^{x} \quad (a_{۲} > ۰,\ a_{۱} > ۰)$

٥۱۷ – $\lim\limits_{x \to ۰} (۱ + x^{۲})^{\operatorname{ctg}^{۲} x}$

٥۱۸ – $\lim\limits_{x \to ۱} (۱ + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$

٥۲۱ – $\lim\limits_{x \to ۰} \left(\frac{\cos x}{\cos ۲x}\right)^{\frac{۱}{x^{۲}}}$

٥۱۹ – $\lim\limits_{x \to ۰} \left(\frac{۱ + \operatorname{tg} x}{۱ + \sin x}\right)^{\frac{۱}{\sin x}}$

٥۲۲ – $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{٤}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} ۲x}$

٥۱۹,۱ – $\lim\limits_{x \to ۰} \left(\frac{۱ + \operatorname{tg} x}{۱ + \sin x}\right)^{\frac{۱}{\sin^{۳} x}}$

٥۲۳ – $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

٥۲۰ – $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{۱}{x - a}}$

٥۲٤ – $\lim\limits_{x \to ۰} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{٤} - x\right)\right]^{\operatorname{ctg} x}$

٥٢٥ — $\lim_{x \to \infty} \left(\sin \frac{١}{x} + \cos \frac{١}{x}\right)^{x}$

٥٢٦ — $\lim_{x \to ٠} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

٥٢٧ — $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+x}{n-١}\right)^{n}$

٥٢٨ — $\lim_{n \to \infty} \cos^{n} \frac{x}{\sqrt{n}}$

٥٢٩ — $\lim_{x \to ٠} \frac{\ln(١+x)}{x}$

٥٣٠ — $\lim_{x \to +\infty} x[\ln(x+١) - \ln x]$

٥٣١ — $\lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a} \quad (a > ٠)$

٥٣٢ — $\lim_{x \to +\infty} [\sin \ln(x+١) - \sin \ln x]$

٥٣٣ — $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^{٢} - x + ١)}{\ln(x^{١٠} + x + ١)}$

٥٣٤ — $\lim_{x \to \infty} \left(\lg \frac{١٠٠ + x^{٢}}{١ + ١٠٠ x^{٢}}\right)$

٥٣٥ — $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(٢ + e^{٣x})}{\ln(٣ + e^{٢x})}$

٥٣٦ — $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(١ + \sqrt{x} + \sqrt[٣]{x}\right)}{\ln\left(١ + \sqrt[٣]{x} + \sqrt[٤]{x}\right)}$

٥٣٧ — $\lim_{h \to ٠} \frac{\log(x+h) + \log(x-h) - ٢\log x}{h^{٢}} \quad (x > ٠)$

٥٣٨ — $\lim_{x \to ٠} \frac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{٤} + ax\right)}{\sin bx}$

٥٣٩ — $\lim_{x \to ٠} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$

٥٤٠ — $\lim_{x \to ٠} \left(\ln \frac{nx + \sqrt{١ - n^{٢}x^{٢}}}{x + \sqrt{١ - x^{٢}}}\right)$

٥٤٠,١ — $\lim_{x \to ٠} \frac{\ln(nx + \sqrt{١ - n^{٢}x^{٢}})}{\ln(x + \sqrt{١ - x^{٢}})}$

٥٤١ — $\lim_{x \to ٠} \frac{a^{x} - ١}{x} \quad (a > ٠)$

٥٤٢ — $\lim_{x \to a} \frac{a^{x} - x^{a}}{x-a} \quad (a > ٠)$

٥٤٣ — $\lim_{x \to a} \frac{x^{x} - a^{a}}{x-a} \quad (a > ٠)$

٥٤٤ — $\lim_{x \to ٠} (x + e^{x})^{\frac{١}{x}}$

٥٤٥ — $\lim_{x \to ٠} \left(\frac{١ + x \times ٢^{x}}{١ + x \times ٣^{x}}\right)^{\frac{١}{x^{٢}}}$

٥٤٥,١ — $\lim_{x \to ٠} \left(\frac{١ + \sin x \cos \alpha x}{١ + \sin x \cos \beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^{٣} x}$

٥٤٥,٢ — $\lim_{x \to ١} \frac{\sin(\pi x^{\alpha})}{\sin(\pi x^{\beta})}$

٥٤٥,٣ — $\lim_{x \to ١} \frac{\sin^{٢}(\pi \times ٢^{x})}{\ln[\cos(\pi \times ٢^{x})]}$

٥٤٦ — $\lim_{n \to \infty} \operatorname{tg}^{n}\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{١}{n}\right)$

٥٤٧ — $\lim_{x \to ٠} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$

٥٤٨ — $\lim_{x \to a} \frac{x^{\alpha} - a^{\alpha}}{x^{\beta} - a^{\beta}} \quad (a > ٠)$

٥٤٩ — $\lim_{x \to b} \frac{a^{x} - a^{b}}{x-b} \quad (a > ٠)$

۵۵۰ – $(a>۰) \quad \lim_{h\to ۰} \frac{a^{x+h}+a^{x-h}-۲a^x}{h^۲}$

۵۵۱ – $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{۲x+a+b}}$

۵۵۲ – $(x>۰) \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-۱\right)$

۵۵۳ – $(x>۰) \quad \lim_{n\to\infty} n^۲\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+۱]{x}\right)$

۵۵۴ – $(a>۰,\ b>۰) \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-۱+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$

۵۵۵ – $(a>۰,\ b>۰) \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{۲}\right)^n$

۵۵۶ – $(c>۰,\ b>۰,\ a>۰) \quad \lim_{x\to ۰}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{۳}\right)^{\frac{۱}{x}}$

۵۵۷ – $(c>۰,\ b>۰,\ a>۰) \quad \lim_{x\to ۰}\left(\frac{a^{x+۱}+b^{x+۱}+c^{x+۱}}{a+b+c}\right)^{\frac{۱}{x}}$

۵۵۸ – $(b>۰,\ a>۰) \quad \lim_{x\to ۰}\left(\frac{a^{x^۲}+b^{x^۲}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{۱}{x}}$

۵۵۹ – $(b>۰,\ a>۰) \quad \lim_{x\to ۰}\frac{a^{x^۲}-b^{x^۲}}{(a^x-b^x)^۲}$

۵۶۰ – $(a>۰) \quad \lim_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$

۵۶۱ – الف) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(۱+۳^x)}{\ln(۱+۲^x)}$ ؛ ب) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(۱+۳^x)}{\ln(۱+۲x)}$

۵۶۲ – $\lim_{x\to+\infty}\ln(۱+۲^x)\ln\left(۱+\frac{۳}{x}\right)$

۵۶۳ – $\lim_{x\to ۱}(۱-x)\log_x ۲$

۵۶۴ – ثابت کنید که $(n>۰,\ a>۱) \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=۰$

۵۶۵ – ثابت کنید که $(\varepsilon>۰$ ، $a>۱) \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}$

مطلوبست محاسبهٔ حدود :

۵۶۶ – الف) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\ln(x^{۲}+e^{x})}{\ln(x^{۴}+e^{۲x})}$ ؛ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^{۲}+e^{x})}{\ln(x^{۴}+e^{۲x})}$

۵۶۷ – $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\ln(۱+xe^{x})}{\ln\left(x+\sqrt{۱+x^{۲}}\right)}$

۵۶۸ – $\lim\limits_{x\to +\infty} [(x+۲)\ln(x+۲)-۲(x+۱)\ln(x+۱)+x\ln x]$

۵۶۹ – $(a>۱)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\ln(x\ln a)\times\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{a}{x}}\right)\right]$

۵۷۰ – $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^{۲}+۱}}{x+\sqrt{x^{۲}-۱}}\times\ln^{-۲}\dfrac{x+۱}{x-۱}\right)$

۵۷۱ – $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{۱+x\sin x-۱}}{e^{x^{۲}}-۱}$

۵۷۲ – $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})}{x^{۳}}$

۵۷۳ – $\lim\limits_{x\to ۰} \left(۲e^{\frac{x}{x+۱}}-۱\right)^{\frac{x^{۲}+۱}{x}}$

۵۷۴ – $\lim\limits_{x\to ۱} (۲-x)^{\sec\frac{\pi x}{۲}}$

۵۷۵ – $(\beta>۰,\ \alpha>۰)$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(۱-\sin^{\alpha}x)(۱-\sin^{\beta}x)}}$

۵۷۶ – الف) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$ ؛ ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\operatorname{ch} x-۱}{x^{۲}}$ ؛

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\operatorname{th} x}{x}$ (مثال ۳۴۰ را ببینید).

۵۷۶,۱ – $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\operatorname{sh}^{۲} x}{\ln(\operatorname{ch} ۳x)}$ (مثال ۳۴۰ را ببینید).

۵۷۷ – $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x^{۲}+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^{۲}-x}}{\operatorname{ch} x}$

۵۷۷,۱ – الف) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sh} x-\operatorname{sh} a}{x-a}$ ؛ ب) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} a}{x-a}$

۵۷۷,۲ – $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\ln\operatorname{ch} x}{\ln\cos x}$

۵۷۹ – $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{e^{\sin ۲x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}$

۵۷۸ – $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-\ln\operatorname{ch} x)$

۵۸۰ – $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^{۲}}$

۵۸۱ – $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\frac{۱-x}{۱+x}$ ۵۸۳ – $\lim\limits_{x\to ۲}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-۴}{(x-۲)^{۲}}$

۵۸۲ – $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos\left(\sqrt{x^{۲}+x}-x\right)$ ۵۸۴ – $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$

۵۸۵ – $$\lim\frac{\operatorname{arc\,tg}(x+h)-\operatorname{arc\,tg}x}{h}$$

۵۸۶ – $$\lim_{x\to ۰}\frac{\ln\frac{۱+x}{۱-x}}{\operatorname{arc\,tg}(۱+x)-\operatorname{arc\,tg}(۱-x)}$$

۵۸۷ – $$\lim_{n\to\infty}\left[n\operatorname{arc\,tg}\frac{۱}{n(x^{۲}+۱)+x}\times\operatorname{tg}^{n}\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{x}{۲n}\right)\right]$$

۵۸۸ – $$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{۴}-\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x+۱}\right)$$

۵۸۹ – $$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{۴}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}\right)$$

۵۹۰ – $$\lim_{n\to\infty}\left[۱+\frac{(-۱)^{n}}{n}\right]^{\operatorname{cosec}\left(\pi\sqrt{۱+n^{۲}}\right)}$$

۵۹۱ – $$\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{۱۰۰}}e^{-\frac{۱}{x^{۲}}}$$

۵۹۲ – $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x$

۵۹۳ – الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^{۲}+x}-x\right)$ ؛ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^{۲}+x}-x\right)$

۵۹۴ – الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{۱+x+x^{۲}}-\sqrt{۱-x+x^{۲}}\right)$ ؛

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{۱+x+x^{۲}}-\sqrt{۱-x+x^{۲}}\right)$

۵۹۴٫۱ – مطلوبست محاسبهٔ

$$h=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lim_{x\to-\infty}f(x)$$

اگر

$$f(x)=\ln\frac{x+\sqrt{x^{۲}+a^{۲}}}{x+\sqrt{x^{۲}+b^{۲}}}$$

۵۹۵ – الف) $\lim\limits_{x\to ۱-۰}\operatorname{arc\,tg}\frac{۱}{۱-x}$ ؛ ب) $\lim\limits_{x\to ۱+۰}\operatorname{arc\,tg}\frac{۱}{۱-x}$

۵۹۶ – الف) $\lim_{x\to -۰} \frac{۱}{۱+e^{\frac{۱}{x}}}$ ؛ ب) $\lim_{x\to +۰} \frac{۱}{۱+e^{\frac{۱}{x}}}$

۵۹۷ – الف) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(۱+e^{x})}{x}$ ؛ ب) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(۱+e^{x})}{x}$

۵۹۸ – ثابت کنید که

الف) $\frac{۲x}{۱+x}\to ۲+۰$ بازای $x\to -\infty$ ؛

ب) $\frac{۲x}{۱+x}\to ۲-۰$ بازای $x\to +\infty$

۵۹۹ – ثابت کنید که

الف) $۲^{x}\to ۱-۰$ بازای $x\to -۰$ ؛

ب) $۲^{x}\to ۱+۰$ بازای $x\to +۰$

۶۰۰ – مطلوبست محاسبهٔ $f(۱+۰)$ ، $f(۱-۰)$ ، $f(۱)$ اگر $f(x)=x+[x^{۲}]$.

۶۰۱ – مطلوبست محاسبهٔ $f(n+۰)$ ، $f(n-۰)$ ، $f(n)$ اگر $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin \pi x)$.

مطلوبست محاسبهٔ

۶۰۲ – $\lim_{x\to ۰} x\sqrt{\cos\frac{۱}{x}}$

۶۰۳ – $\lim_{x\to ۰} x\left[\frac{۱}{x}\right]$

۶۰۴ – $\lim_{n\to \infty} \sin(\pi\sqrt{n^{۲}+۱})$

۶۰۵ – $\lim_{n\to \infty} \sin^{۲}(\pi\sqrt{n^{۲}+n})$

۶۰۶ – $\lim_{n\to \infty} \underbrace{\sin\sin\dots\sin x}_{n\ \text{بار}}$

۶۰۷ – اگر $\lim_{x\to a} \varphi(x)=A$ و $\lim_{x\to A} \psi(x)=B$ ، آیا از این جا نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to a} \psi(\varphi(x))=B$$

مثال زیر را در نظر بگیرید: $\varphi(x)=\frac{۱}{q}$ بازای $x=\frac{p}{q}$ که در آن p و q دو عدد درست نسبت بهم اول میباشند و $\varphi(x)=۰$ بازای x گنگ ؛ $\psi(x)=۱$ بازای $x\neq ۰$ و $\psi(x)=۰$ بازای $x=۰$ ؛ ضمناً $x\to ۰$.

۶۰۸ – قضیهٔ کوشی را اثبات کنید: اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ $(a, +\infty)$ معین و در هر بازهٔ متناهی (a, b) کراندار باشد در آنصورت

الف) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+١)-f(x)]$ ؛

ب) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{١}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+١)}{f(x)}\quad(f(x)\geqslant C>٠)$

بفرض آنکه حدهای سمت راست تساویها وجود دارند.

٦٠٩ – ثابت کنید که اگر :

الف) تابع $f(x)$ در حوزهٔ $x>a$ معین باشد ؛

ب) در هر حوزهٔ متناهی $a<x<b$ کراندار باشد ؛

پ) $\lim_{x\to+\infty}[f(x+١)-f(x)]=\infty$ در آنصورت

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$$

٦١٠ – ثابت کنید که اگر : ١) تابع $f(x)$ در حوزهٔ $x>a$ معین باشد ؛ ٢) در هر حوزهٔ متناهی $a<x<b$ کراندار باشد ؛ ٣) حد متناهی یا نامتناهی

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+١)-f(x)}{x^{n}}=l$$

وجود داشته باشد در این صورت

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+١}}=\frac{l}{n+١}$$

٦١١ – ثابت کنید که

الف) $\lim_{n\to\infty}\left(١+\frac{x}{n}\right)^{n}=e^{x}$ ؛

ب) $\lim_{n\to\infty}\left(١+x+\frac{x^{٢}}{٢!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}\right)=e^{x}$

٦١٢ – ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}n\sin(٢\pi en!)=٢\pi$$

راهنمایی – از دستور (*) مثال ٧٢ استفاده کنید.

مطلوبست رسم نمودار توابع :

٦١٣ – الف) $y=١-x^{١٠٠}$ ؛

ب) $y=\lim_{n\to\infty}(١-x^{٢n})\quad(-١\leqslant x\leqslant ١)$

۶۱۴ – الف) $(x \geqslant ۰)$ $y = \dfrac{x^{۱۰۰}}{۱ + x^{۱۰۰}}$ ؛

ب) $(x \geqslant ۰)$ $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^n}{۱ + x^n}$

۶۱۵ – $(x \neq ۰)$ $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$

۶۱۶ – $y = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{x^۲ + \dfrac{۱}{n^۲}}$

۶۱۷ – $(x \geqslant ۰)$ $y = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{۱ + x^n}$

۶۱۸ – $(x \geqslant ۰)$ $y = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{۱ + x^n + \left(\dfrac{x^۲}{۲}\right)^n}$

۶۱۹ – $(x \geqslant ۰)$ $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^{n+۲}}{\sqrt{۲^{۲n} + x^{۲n}}}$

۶۲۰ – الف) $y = \sin^{۱۰۰۰} x$ ؛ ب) $y = \lim\limits_{n \to \infty} \sin^{۲n} x$

۶۲۱ – $(x \geqslant ۰)$ $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln(۲^n + x^n)}{n}$

۶۲۲ – $y = \lim\limits_{n \to \infty} (x - ۱) \operatorname{arc\,tg} x^n$

۶۲۳ – $y = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{۱ + e^{n(x+۱)}}$

۶۲۴ – $y = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{x + e^{tx}}{۱ + e^{tx}}$

۶۲۵ – $(x > ۰)$ $y = \lim\limits_{t \to x} \dfrac{۱}{t - x} \ln \dfrac{t}{x}$

۶۲۵,۱ – $(x \geqslant ۰)$ $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x \operatorname{tg}^{۲n} \dfrac{\pi x}{۴} + \sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{۲n} \dfrac{\pi x}{۴} + ۱}$

۶۲۵,۲ – $y = \lim\limits_{n \to \infty} x \operatorname{sgn} | \sin^۲ (n! \pi x |$

۶۲۵,۳ – مطلوبست رسم منحنی

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = ۱$$

۶۲۶ – خط $y = kx + b$ را مجانب (مایل) منحنی $y = f(x)$ نامند اگر :

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (kx + b)] = ۰$$

با استفاده از این معادله تمام شرطهای لازم و کافی وجود مجانب را معلوم کنید.

۶۲۷ - مجانب‌های منحنی‌های زیر را معلوم و منحنی‌ها را رسم کنید:

الف) $y = \frac{x^۳}{x^۲ + x - ۲}$ ؛ ت) $y = \frac{xe^x}{e^x - ۱}$ ؛

ب) $y = \sqrt{x^۲ + x}$ ؛ ث) $y = \ln(۱ + e^x)$ ؛

پ) $y = \sqrt[۳]{x^۲ - x^۳}$ ؛ ج) $y = x + \arccos \frac{۱}{x}$

حدهای زیر را پیدا کنید:

۶۲۸ - $$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!} + \frac{x^{n+۲}}{(n+۲)!} + \dots + \frac{x^{۲^n}}{(۲n)!} \right]$$

۶۲۹ - $$\lim_{n \to \infty} [(۱ + x)(۱ + x^۲)(۱ + x^۴)\dots(۱ + x^{۲^n})]$$ اگر $|x| < ۱$

۶۳۰ - $$\lim_{n \to \infty} \left(\cos \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۴} \dots \cos \frac{x}{۲^n} \right)$$

۶۳۱ - فرض کنیم

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = ۱$$

که در آن $(m = ۱, ۲, \dots)$ $\psi(x) > ۰$ و $\alpha_{mn} \rightrightarrows ۰$ بازای $n \to \infty$ یعنی $|\alpha_{mn}| < \varepsilon$ بازای $m = ۱, ۲, \dots$ و $n > N(\varepsilon)$.

ثابت کنید که

$$\lim_{n \to \infty} [\varphi(\alpha_{۱n}) + \varphi(\alpha_{۲n}) + \dots + \varphi(\alpha_{nn})] =$$
$$= \lim_{n \to \infty} [\psi(\alpha_{۱n}) + \psi(\alpha_{۲n}) + \dots + \psi(\alpha_{nn})[\qquad (۱)$$

با فرض آنکه حد سمت راست تساوی (۱) وجود داشته باشد.

با استفاده از قضیهٔ قبل مطلوبست تعیین:

۶۳۲ - $$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=۱}^{n} \left(\sqrt[۳]{۱ + \frac{k}{n^۲}} - ۱ \right)$$

۶۳۳ - $$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=۱}^{n} \left(\sin \frac{ka}{n^۲} \right)$$

۶۳۴ - $$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=۱}^{n} \left(\frac{k}{a^{n^۲}} - ۱ \right) \qquad (a > ۰)$$

٦٣٥ – $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=١}^{n}\left(١+\frac{k}{n^{٢}}\right)$ ٦٣٦ – $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=١}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$

٦٣٧ – دنباله‌ٔ x_n بصورت تساویهای زیر داده شده است:

$$x_١=\sqrt{a},\quad x_٢=\sqrt{a+\sqrt{a}},\quad x_٣=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ \ldots\ (a>٠)$$

مطلوبست محاسبه‌ٔ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

٦٣٧,١ دنباله‌ٔ x_n به ترتیب زیر داده شده است:

$$x_١=٠,\quad x_٢=١,$$

$$x_n=\frac{١}{٢}(x_{n-١}+x_{n-٢})\quad (n=٢,\ ٣,\ \ldots)$$

مطلوبست محاسبه‌ٔ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

٦٣٧,٢ – دنباله‌ٔ y_n بیاری دنباله‌ٔ x_n با روابط زیر تعریف شده است:

$$y_٠=x_٠,\quad y_n=x_n-\alpha x_{n-١}\quad (n=١,\ ٢,\ \ldots)$$

که در آن $|\alpha|<١$. مطلوبست محاسبه‌ٔ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ اگر $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$

٦٣٧,٣ – دنباله‌ٔ x_n بترتیب زیر تعریف شده است:

$$x_٠=١,\qquad x_n=\frac{١}{١+x_{n-١}}\quad (n=١,\ ٢,\ \ldots)$$

مطلوبست محاسبه‌ٔ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

راهنمائی – تفاضل بین x_n و ریشه‌های معادله‌ٔ $x=\frac{١}{١+x}$ را در نظر بگیرید.

٦٣٨ – دنباله‌ٔ توابع

$$y_n=y_n(x)\quad (٠\leqslant x\leqslant ١)$$

بترتیب زیر تعریف میشود:

$$y_١=\frac{x}{٢},\quad y_n=\frac{x}{٢}-\frac{y_{n-١}^{٢}}{٢}\quad (n=٢,\ ٣,\ \ldots)$$

مطلوبست محاسبه‌ٔ $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

۶۳۹ – دنبالهٔ توابع $(۰ \leqslant x \leqslant ۱)$ $y_n = y_n(x)$ بترتیب زیر تعریف میشود:

$$y_{۱} = \frac{x}{۲}, \quad y_n = \frac{x}{۲} + \frac{y_{n-۱}^{۲}}{۲} \quad (n = ۲, ۳, \dots)$$

مطلوبست $\lim\limits_{n \to \infty} y_n$

۶۳۹,۱ – فرض کنیم $x > ۰$ و $(n = ۱, ۲, \dots)$ $y_n = y_{n-۱}(۲ - xy_{n-۱})$.
ثابت کنید که اگر $(i = ۰, ۱)$ $y_i > ۰$ در این صورت دنبالهٔ y_n
همگرا است و

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \frac{۱}{x}$$

راهنمائی – تفاضل $\frac{۱}{x} - y_n$ را بررسی کنید.

۶۳۹,۲ – برای پیدا کردن $y = \sqrt{x}$ که در آن $x > ۰$ روش زیر بکار
برده میشود: $y_{۰} > ۰$ دلخواه است و

$$y_n = \frac{۱}{۲}\left(y_{n-۱} + \frac{x}{y_{n-۱}}\right) \quad (n = ۱, ۲, \dots)$$

ثابت کنید که

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \sqrt{x}$$

راهنمائی – از دستور زیر استفاده کنید:

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-۱} - \sqrt{x}}{y_{n-۱} + \sqrt{x}}\right)^{۲} \quad (n \geqslant ۱)$$

۶۴۰ – برای حل تقریبی معادلهٔ کپلر

$$x - \varepsilon \sin x = m \quad (۰ < \varepsilon < ۱) \qquad (۱)$$

فرض میشود

$$x_{۰} = m, \quad x_{۱} = m + \varepsilon \sin x_{۰}, \ \dots, \ x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-۱}, \ \dots$$

(روش تقریبات متوالی)
ثابت کنید که $\xi = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ وجود دارد و عدد ξ تنها ریشهٔ معادلهٔ (۱) است.

٦٤١ - اگر $\omega_h[f]$ نوسان تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $|x-\xi|\leqslant h \quad (h>٠)$ باشد، در این صورت عدد

$$\omega_٠[f]=\lim_{h\to ٠}\omega_h[f]$$

نوسان تابع $f(x)$ در نقطهٔ ξ نامیده میشود.

مطلوبست محاسبهٔ نوسان تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=٠$ اگر:

الف) $f(x)=\sin\frac{١}{x}$ ؛

ب) $f(x)=\frac{١}{x^{٢}}\cos^{٢}\frac{١}{x}$ ؛

پ) $f(x)=x\left(٢+\sin\frac{١}{x}\right)$ ؛

ت) $f(x)=\frac{١}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{١}{x}$ ؛

ث) $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ ؛

ج) $f(x)=\frac{١}{١+e^{\frac{١}{x}}}$ ؛

چ) $f(x)=(١+|x|)^{\frac{١}{x}}$.

٦٤٢ - فرض کنیم $f(x)=\sin\frac{١}{x}$.

ثابت کنید که بازای جمیع اعداد α صادق در شرط $-١\leqslant\alpha\leqslant١$ میتوان دنبالهای مانند $x_n\to٠ \quad (n=١, ٢, \ldots)$ انتخاب کرد بقسمی که

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\alpha$$

٦٤٣ - مطلوبست تعیین

$$l=\varliminf_{x\to٠}f(x) \quad و \quad L=\varlimsup_{x\to٠}f(x)$$

اگر:

الف) $f(x)=\sin^{٢}\frac{١}{x}+\frac{٢}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{١}{x}$ ؛

ب) $f(x)=(٢-x^{٢})\cos\frac{١}{x}$ ؛ پ) $f(x)=\left(١+\cos^{٢}\frac{١}{x}\right)^{\sec^{٢}\frac{١}{x}}$.

٦٤٤ - مطلوبست تعیین

$$l=\varliminf_{x\to\infty}f(x) \quad و \quad L=\varlimsup_{x\to\infty}f(x)$$

اگر:

الف) $f(x)=\sin x$ ؛

ب) $f(x)=x^{٢}\cos^{٢}x$ ؛

پ) $f(x)=٢^{\sin x^{٢}}$ ؛

ت) $f(x)=\frac{x}{١+x^{٢}\sin^{٢}x} \quad (x\geqslant٠)$.

بخش ۶ — O — ی نمادی

بند ۱ — نگارش

$$\varphi(x)=O(\psi(x)) \quad \text{بازای} \quad x\in X$$

بدان معناست که ثابتی مانند A وجود دارد بقسمی که

$$|\varphi(x)|\leqslant A|\psi(x)| \quad \text{برای} \quad x\in X \qquad (۱)$$

بطریق مشابه اگر نامساوی (۱) در یک همسایگی U_a — ی نقطهٔ a بر قرار باشد می‌نویسیم :

$$\varphi(x)=O(\psi(x)) \quad \text{وقتی که} \quad x\to a \qquad (۲)$$

بالاخص اگر بازای $x\in U_a$ ، $\psi(x)\neq 0$ در آنصورت رابطهٔ (۲) بلاتردید برقرار است اگر $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ متناهی وجود داشته باشد. در چنین حالتی مینویسند : $\varphi(x)=O^*(\psi(x))$.

اگر

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^p}=k\neq 0 \quad (p>0)$$

در آنصورت $\varphi(x)$ را بی‌نهایت کوچک مرتبهٔ p نسبت به بی نهایت کوچک x مینامند. بطرز مشابهی اگر

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x^p}=k\neq 0 \quad (p>0)$$

در اینصورت $\psi(x)$ را بی‌نهایت بزرگ مرتبهٔ p نسبت به بی‌نهایت بزرگ x مینامند .

بند ۲ — نگارش

$$\varphi(x)=o(\psi(x)) \quad \text{وقتی که} \quad x\to a$$

بدان معناست که

$$\varphi(x)=\alpha(x)\,\psi(x) \quad (x\in U_a)$$

که در آن $\alpha(x)\to 0$ وقتی که $x\to a$. اگر بازای $x\in U_a$ ، $\psi(x)\neq 0$ در اینصورت تساوی (۳) هم ارز حکم

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$$

میباشد.

بند ۳ — توابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ را بازای $x\to a$ در صورتی هم ارز نامند $(\varphi(x)\sim\psi(x))$ که

$$\varphi(x)-\psi(x)=o(\psi(x)) \quad \text{بازای} \quad x\to a \qquad (٤)$$

اگر بازای $x\in U_a$ ، $\psi(x)\neq ٠$ در آنصورت از (٤) داریم

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=١$$

بازای $x\to ٠$ روابط هم ارز زیر درست میباشند:

$$\ln(١+x)\sim x;\quad \sqrt[n]{١+x}-١\sim\frac{x}{n}$$ ؛

$$a^x-١\sim x\ln a\quad (a>٠)$$ ؛

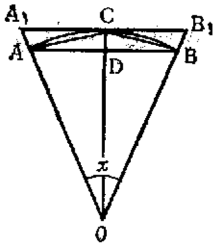
$$\operatorname{tg}x\sim x;\quad \sin x\sim x$$

بطور کلی

$$\varphi(x)+o(\varphi(x))\sim\varphi(x)$$

در تعیین حد نسبت دو تابع بی نهایت کوچک (یا بی نهایت بزرگ) بازای $x\to a$ میتوان بجای توابع مفروض هم‌ارز آنها را جایگزین ساخت .

٦٤٥ – هر گاه زاویهٔ مرکزی $AOB=x$ (شکل ٤) بی‌نهایت کوچک مرتبهٔ یک محسوب شود مطلوبست تعیین مرتبهٔ کوچکی کمیت‌های زیر : الف) وتر AB ؛ ب) سهم CD ؛ پ) مساحت قطاع AOB ؛ ت) مساحت مثلث ABC ؛ ث) مساحت ذوذنقهٔ ABB_1A_1 ؛ ج) مساحت قطعهٔ ABC .



شکل ٤

٦٤٦ – فرض کنیم $o(f(x))$ تابع دلخواهی باشد که بازای $x\to a$ دارای مرتبهٔ رشد پایین‌تر از تابع $f(x)$ است و $O(f(x))$ تابع دلخواهی باشد که بازای $x\to a$ دارای همان مرتبهٔ رشد تابع $f(x)$ است . با فرض $f(x)>٠$. نشان دهید که

الف) $o(o(f(x)))=o(f(x))$ ؛
ب) $O(o(f(x)))=o(f(x))$ ؛
پ) $o(O(f(x)))=o(f(x))$ ؛
ت) $O(O(f(x)))=O(f(x))$ ؛
ث) $O(f(x))+o(f(x))=O(f(x))$.

۶۴۷ – فرض کنیم $x \to ۰$ و $n > ۰$. نشان دهید که

الف) $CO(x^n) = O(x^n)$ ؛ ($C \neq ۰$ ثابت است)

ب) $(n < m)$ $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ؛

پ) $O(x^n)\,O(x^m) = O(x^{n+m})$.

۶۴۸ – فرض کنیم $x \to +\infty$ و $n > ۰$. نشان دهید که

الف) $CO(x^n) = O(x^n)$ ؛

ب) $(n > m)$ $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ؛

پ) $O(x^n)\,O(x^m) = O(x^{n+m})$.

۶۴۹ – نشان دهید که نماد $\sim$ دارای ویژگی‌های زیر است: ۱) بازتابی: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$ ؛ ۲) تقارن: هر گاه $\varphi(x) \sim \psi(x)$ آنگاه $\psi(x) \sim \varphi(x)$ ؛ ۳) قابلیت انتقال: هرگاه $\varphi(x) \sim \psi(x)$ و $\psi(x) \sim \chi(x)$ آنگاه $\varphi(x) \sim \chi(x)$

۶۵۰ – فرض کنیم $x \to ۰$. تساویهای زیر را اثبات کنید:

الف) $۲x - x^۲ = O(x)$ ؛

ب) $x \sin\sqrt{x} = O\left(x^{\frac{۳}{۲}}\right)$ ؛

پ) $x \sin\frac{۱}{x} = O(|x|)$ ؛

ت) $(\varepsilon > ۰)$ $\ln x = o\left(\frac{۱}{x^{\varepsilon}}\right)$ ؛

ث) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[۸]{x}$ ؛

ج) $\operatorname{arc\,tg}\frac{۱}{x} = O(۱)$ ؛

چ) $(۱ + x)^n = ۱ + nx + o(x)$.

۶۵۱ – فرض کنیم $x \to +\infty$. تساویهای زیر را اثبات کنید:

الف) $۲x^۳ - ۳x^۲ + ۱ = O(x^۲)$ ؛

ب) $\frac{x + ۱}{x^۲ + ۱} = O\left(\frac{۱}{x}\right)$ ؛

پ) $x + x^۲ \sin x = O(x^۲)$ ؛

ت) $\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{۱ + x^۲} = O\left(\frac{۱}{x^۲}\right)$ ؛

ث) $(\varepsilon > ۰)$ $\ln x = o(x^{\varepsilon})$ ؛

ج) $x^p e^{-x} = o\left(\frac{۱}{x^۲}\right)$ ؛

چ) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$ ؛

ح) $x^۲ + x \ln^{۱۰۰} x \sim x^۲$.

۶۵۲ – ثابت کنید که بازای مقادیر بقدر کافی بزرگ x نامساویهای زیر برقرار است:

الف) $x^۲ + ۱۰x + ۱۰۰ < ۰{,}۰۰۱\, x^۳$ ؛

ب) $\ln^{۱۰۰۰} x < \sqrt{x}$ ؛

پ) $x^{۱۰} e^x < e^{۲x}$.

۶۵۲٫۱ – دستور مجانبی زیر را اثبات کنید:

$$\sqrt{x^۲ + px + q} = x + \frac{p}{۲} + O\left(\frac{۱}{x}\right)$$

بازای $x \to +\infty$.

۶۵۳ – فرض کنیم $x \to ۰$. قسمت اصلی توابع زیر را بصورت Cx^n (C مقداریست ثابت) تعیین و مرتبهٔ کوچکی آنها را نسبت به متغیر x معلوم کنید:

الف) $۲x-۳x^۳+x^۵$؛

ب) $\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}$؛

پ) $\sqrt{۱-۲x}-\sqrt[۳]{۱-۳x}$؛

ت) $\operatorname{tg} x-\sin x$.

۶۵۴ – فرض کنیم $x \to ۰$. نشان دهید که بی‌نهایت کوچک‌های

الف) $f(x)=\frac{۱}{\ln x}$؛

ب) $f(x)=e^{-\frac{۱}{x^۲}}$

بازای جمیع مقادیر $n>۰$ با بی نهایت کوچک x^n قابل مقایسه نیستند، یعنی بازای هیچ مقدار n ، تساوی $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{f(x)}{x^n}=k$ که در آن k مقداریست متناهی و مخالف صفر، امکان‌پذیر نیست.

۶۵۵ – فرض کنیم $x \to ۱$. جملهٔ اصلی توابع زیر را بصورت $C(x-۱)^n$ تعیین و مرتبهٔ کوچکی آنها را نسبت به بی‌نهایت کوچک $x-۱$ معلوم کنید:

الف) $x^۳-۳x+۲$؛

ب) $\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}$؛

پ) $\ln x$؛

ت) e^x-e؛

ث) $x^x-۱$.

۶۵۶ – فرض کنیم $x \to +\infty$. جملهٔ اصلی توابع زیر را بصورت Cx^n تعیین و مرتبهٔ بزرگی آنها را نسبت به بی‌نهایت بزرگ x معلوم کنید.

الف) $x^۲+۱۰۰x+۱۰۰۰۰$؛

ب) $\frac{۲x^۵}{x^۳-۳x+۱}$؛

پ) $\sqrt[۳]{x^۲-x}+\sqrt{x}$؛

ت) $\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{x}}}$

۶۵۷ – فرض کنیم $x \to +\infty$. جملهٔ اصلی توابع زیر را بصورت $C\left(\frac{۱}{x}\right)^n$ تعیین و مرتبهٔ کوچکی آنها را نسبت به بی‌نهایت کوچک $\frac{۱}{x}$ معلوم کنید:

الف) $\frac{x+۱}{x^۴+۱}$؛

ب) $\sqrt{x+۱}-\sqrt{x}$؛

پ) $\sqrt{x+۲}-۲\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}$؛

ت) $\frac{۱}{x}\sin\frac{۱}{x}$

۶۵۸ – فرض کنیم $x \to ۱$. جملهٔ اصلی توابع زیر را بصورت $C\left(\frac{۱}{x-۱}\right)^n$ تعیین و مرتبهٔ بزرگی آنها را نسبت به بی‌نهایت بزرگ $\frac{۱}{x-۱}$ معلوم کنید:

الف) $\dfrac{x^۲}{x^۲-۱}$؛

ب) $\sqrt{\dfrac{۱+x}{۱-x}}$؛

پ) $\dfrac{x}{\sqrt[۳]{۱-x^۳}}$؛

ت) $\dfrac{۱}{\sin \pi x}$؛

ث) $\dfrac{\ln x}{(۱-x)^۲}$.

۶۵۹ – فرض کنیم $x\to+\infty$ و $(n=۱, ۲, \dots)$ $f_n(x)=x^n$. ثابت کنید که

۱) هر یک از توابع $f_n(x)$ سریعتر از تابع $f_{n-۱}(x)$ قبل خود رشد میکند؛ ۲) رشد تابع e^x از هر یک از توابع $(n=۱, ۲, \dots)$ $f_n(x)$ سریعتر است.

۶۶۰ – فرض کنیم $x\to+\infty$ و

$$f_n(x)=\sqrt[n]{x} \quad (n=۱, ۲, \dots)$$

ثابت کنید که ۱) هر یک از توابع $f_n(x)$ کند تر از تابع قبلی خود $f_{n-۱}(x)$ رشد میکند؛ ۲) رشد تابع $f(x)=\ln x$ از هر یک از $(n=۱, ۲, \dots)$ $f_n(x)$ کندتر است.

۶۶۱ – ثابت کنید بازای جمیع دنباله‌ها از توابع زیر:

$$f_۱(x),\ f_۲(x),\ \dots,\ f_n(x),\ \dots \quad (x_۰<x<+\infty)$$

تابعی مانند $f(x)$ را میتوان چنان تشکیل داد که بازای $x\to+\infty$ سریع‌تر از هر یک از توابع $(n=۱, ۲, \dots)$ $f_n(x)$ رشد کند.

بخش ۷ – پیوستگی توابع

بند ۱ – پیوسگی توابع. تابع $f(x)$ را بازای $x=x_۰$ (یا در نقطهٔ $x_۰$) وقتی پیوسته نامند که

$$\lim_{x\to x_۰} f(x)=f(x_۰) \qquad (۱)$$

یعنی وقتیکه تابع $f(x)$ بازای $x=x_۰$ معین و بازای هر $\varepsilon>۰$ عددی مانند $\delta=\delta(\varepsilon, x_۰)>۰$ وجود داشته باشد بقسمی که بازای $|x-x_۰|<\delta$ برای جمیع مقادیر بامعنی $f(x)$ داشته باشیم

$$|f(x)-f(x_۰)|<\varepsilon$$

تابع $f(x)$ را وقتی روی مجموعهٔ $X=\{x\}$ (فاصله، قطعه) پیوسته نامند که این تابع در هر نقطه از مجموعهٔ X پیوسته باشد.

اگر بازای یک مقدار $x=x_۰$ متعلق به حوزهٔ تعریف $X=\{x\}$ تابع $f(x)$ یا یکی از نقاط حدی این مجموعه تساوی (۱) برقرار نباشد (یعنی یا (الف) عدد $f(x_۰)$ وجود نداشته باشد، بعبارت دیگر تابع در $x=x_۰$ نامعین باشد، یا (ب) $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)$ وجود نداشته باشد و یا (پ) هر دو قسمت دستور (۱) دارای معنا باشد ولی تساوی بین آنها وجود نداشته باشد) در این صورت نقطهٔ $x_۰$ را نقطهٔ انفصال (ناپیوستگی) تابع $f(x)$ مینامند. انواع: ۱) نقطهٔ $x_۰$ نقطهٔ انفصال نوع اول است بشرطی که حدود متناهی یکطرفی برای آن وجود داشته باشد:

$$f(x_۰+۰)=\lim_{x\to x_۰+۰} f(x) \quad \text{و} \quad f(x_۰-۰)=\lim_{x\to x_۰-۰} f(x)\;؛$$

۲) هر نقطهٔ انفصال دیگر نقطهٔ انفصال نوع دوم است. تفاضل

$$f(x_۰+۰)-f(x_۰-۰)$$

را جهش تابع در نقطهٔ $x_۰$ نامند.

اگر تساوی

$$f(x_۰-۰)=f(x_۰+۰)$$

برقرار باشد، در این صورت نقطهٔ انفصال $x_۰$ را قابل حذف نامند. اگر حد اقل یکی از حدود $f(x_۰-۰)$ یا $f(x_۰+۰)$ برابر نماد ∞ باشد در این صورت $x_۰$ را نقطهٔ انفصال بی نهایت نامند.

اگر تساوی

$$f(x_۰-۰)=f(x_۰) \quad (\text{یا} \quad f(x_۰+۰)=f(x_۰))$$

بر قرار باشد تابع $f(x)$ را در نقطهٔ $x_۰$ پیوسته از چپ (یا از راست) نامند. برای پیوستگی تابع در نقطهٔ $x_۰$ تساوی سه عدد زیر لازم و کافی است:

$$f(x_۰-۰)=f(x_۰+۰)=f(x_۰)$$

بند ۲ — پیوستگی توابع ابتدائی. اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ بازای مقدار $x=x_۰$ پیوسته باشند در این صورت توابع

الف) $f(x)\pm g(x)$؛ ب) $f(x)\,g(x)$؛

پ) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_۰)\neq ۰)$ نیز بازای $x=x_۰$ پیوسته‌اند.

بویژه: الف) تابع درست گویا (یا تابع چند جمله‌ای)

$$P(x) = a_۰ + a_۱x + \dots + a_nx^n$$

بازای جمیع مقادیر x پیوسته است؛ ب) تابع کسری گویای

$$R(x) = \frac{a_۰ + a_۱x + \dots + a_nx^n}{b_۰ + b_۱x + \dots + b_mx^m}$$

بازای جمیع مقادیر x که مخرج را برابر صفر نکند پیوسته است.

بطور کلی توابع ابتدائی اصلی: x^n، $\sin x$، $\cos x$، $\operatorname{tg} x$، a^x، $\log_a x$، $\arcsin x$، $\arccos x$، $\operatorname{arctg} x$، ... در هر نقطه‌ای که معین باشند پیوسته‌اند.

نتیجهٔ بسیار کلی‌تر چنین است: اگر تابع $f(x)$ بازای $x = x_۰$ پیوسته و تابع $g(y)$ بازای $y = f(x_۰)$ پیوسته باشد در آنصورت تابع $g(f(x))$ بازای $x = x_۰$ پیوسته است.

بند ۳ — قضایای اساسی مربوط به توابع پیوسته. اگر تابع $f(x)$ روی قطعهٔ متناهی $[a, b]$ پیوسته باشد در این صورت: ۱) $f(x)$ در این قطعه کراندار است؛ ۲) در این قطعه به کران پائین m و کران بالای M خویش میرسد (قضیهٔ ویرشتراس)؛ ۳) در هر فاصلهٔ $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ جمیع مقادیر واقع بین $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ را اختیار میکند (قضیهٔ کوشی). بالاخص اگر $f(\alpha) f(\beta) < ۰$، در این صورت مقداری مانند $\gamma \, (\alpha < \gamma < \beta)$ پیدا خواهد شد بقسمی که $f(\gamma) = ۰$.

۶۶۲ – نمودار تابع پیوستهٔ $y = f(x)$ داده شده است. بازای نقطهٔ مفروض a و عدد $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $\delta > ۰$ از طریق نمایش هندسی مشخص کنید بقسمی که بازای $|x - a| < \delta$ داشته باشیم $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

۶۶۳ – میخواهیم پلاک فلزی مربع‌شکلی تهیه کنیم که ضلع آن $x_۰ = ۱۰ \text{ cm}$ باشد تا چه حدودی تغییر ضلع این پلاک مجاز است برای اینکه مساحت آن $y = x^۲$ از مساحت مورد نظر $y_۰ = ۱۰۰ \text{ cm}^۲$ بیشتر از: الف) $\pm ۱ \text{ cm}^۲$؛ ب) $\pm ۰{,}۱ \text{ cm}^۲$؛ پ) $\pm ۰{,}۰۱ \text{ cm}^۴$؛ ت) $\pm \varepsilon \text{ cm}^۲$ اختلاف نداشته باشد؟

۶۶۴ – یال مکعبی محصور بین $۲m$ و $۳m$ است. با چه خطای مطلق Δ یال این مکعب را میتوان اندازه‌گیری کرد برای آنکه حجم آنرا بتوان با خطای مطلقی محاسبه کرد که از $\varepsilon \text{ m}^۳$ تجاوز نکند در صورتیکه: الف) $\varepsilon = ۰{,}۱ \text{ m}^۳$؛ ب) $\varepsilon = ۰{,}۰۱ \text{ m}^۳$؛ پ) $\varepsilon = ۰{,}۰۰۱ \text{ m}^۳$؟

۶۶۵ – در چه همسایگی ماگزیمال نقطهٔ $x = ۱۰۰$ اختلاف عرض نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ از عرض $y_۰ = ۱۰$ کمتر از $\varepsilon = ۱۰^{-n}$ $(n \geqslant ۰)$ است؟ اندازهٔ این همسایگی را بازای $n = ۰, ۱, ۲, ۳$ تعیین کنید.

۶۶۶ – بیاری بحث «$\delta - \varepsilon$» ثابت کنید که تابع $f(x) = x^۲$ در نقطهٔ $x = ۰$ پیوسته است. جدول زیر را تکمیل کنید:

ε	۱	۰,۱	۰,۰۱	۰,۰۰۱	. . .
δ					

۶۶۷ – فرض کنیم $f(x) = \frac{۱}{x}$ و $\varepsilon = ۰,۰۰۱$. مطلوبست تعیین بزرگترین اعداد مثبت ممکنه $\delta = \delta(\varepsilon, x_۰)$ بازای $x_۰ = ۰,۱ \quad ۰,۰۱, ۰,۰۰۱, \ldots$ بقسمی که از نامساوی $|x - x_۰| < \delta$ نامساوی $|f(x) - f(x_۰)| < \varepsilon$ نتیجه شود. آیا میتوان برای $\varepsilon = ۰,۰۰۱$ مفروض عددی مانند $\delta > ۰$ چنان اختیار نمود که با جمیع مقادیر $x_۰$ از فاصلهٔ $(۰, ۱)$ سازگار باشد، یعنی بازای جمیع مقادیر $x_۰ \in (۰, ۱)$ اگر $|x - x_۰| < \delta$ در آنصورت $|f(x) - f(x_۰)| < \varepsilon$ ؟

۶۶۸ – بزبان «$\delta - \varepsilon$» در معنای مثبت عبارت زیر را فرمول بندی کنید: تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_۰$ معین است ولی در این نقطه پیوسته نیست.

۶۶۹ – هرگاه بازای اعداد نامشخص $\varepsilon > ۰$ بتوان اعداد نظیر $\delta = \delta(\varepsilon, x_۰) > ۰$ را چنان پیدا کرد که $|f(x) - f(x_۰)| < \varepsilon$ فقط اگر $|x - x_۰| < \delta$. آیا میتوان گفت که تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_۰$ وقتی پیوسته است که: الف) اعداد ε مجموعهٔ متناهی تشکیل دهند؛ ب) اعداد ε مجموعهٔ نامتناهی کسرهای ثنایی $\varepsilon = \frac{۱}{۲^n}$ $(n = ۱, ۲, \ldots)$ را تشکیل دهند.

۶۷۰ – تابع

$$f(x) = x + ۰,۰۰۱\,[x]$$

مفروض است.

نشان دهید که برای هر $\varepsilon > ۰,۰۰۱$ میتوان چنان عدد $\delta = \delta(\varepsilon, x) > ۰$ اختیار کرد که $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ فقط اگر $|x' - x| < \delta$، و برای $۰ < \varepsilon \leqslant ۰,۰۰۱$، بازای جمیع مقادیر x این عمل غیر ممکن است.

در کدام نقاط پیوستگی این تابع نقض میشود؟

۶۷۱ – فرض کنیم بازای هر عدد باندازه کافی کوچک $\delta > ۰$ چنان عدد $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_{۰}) > ۰$ وجود داشته باشد که هرگاه $|x - x_{۰}| < \delta$ آنگاه نامساوی $|f(x) - f(x_{۰})| < \varepsilon$ بر قرار گظدد. آیا از این جا نتیجه میشود که تابع $f(x)$ بازای $x = x_{۰}$ پیوسته است؟ نامساویهای مفروض حاکی از چه خاصیت تابع $f(x)$ میباشند؟

۶۷۲ – فرض کنیم بازای هر عدد $\varepsilon > ۰$ چنان عدد $\delta = \delta(\varepsilon, x_{۰}) > ۰$ وجود داشته باشد که هرگاه $|f(x) - f(x_{۰})| < \varepsilon$ آنگاه $|x - x_{۰}| < \delta$ ، آیا از این جا نتیجه میشود که تابع $f(x)$ بازای $x = x_{۰}$ پیوسته است؟ نامساویهای مفروض حاکی از چه خاصیت تابع میباشند؟

۶۷۳ – فرض کنیم بازای هر عدد $\delta > ۰$ چنان عدد $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_{۰}) > ۰$ وجود داشته باشد که هرگاه $|f(x) - f(x_{۰})| < \varepsilon$ آنگاه $|x - x_{۰}| < \delta$.
آیا از این جا نتیجه میشود که تابع $f(x)$ بازای $x = x_{۰}$ پیوسته است؟ نامساویهای مفروض حاکی از چه خاصیت تابع $f(x)$ میباشد؟
مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x, & \text{اگر } x \text{ گویا} \\ \pi - \operatorname{arc\,tg} x, & \text{اگر } x \text{ گنگ} \end{cases}$$

۶۷۴ – بیاری زبان «$\varepsilon - \delta$» پیوستگی توابع زیر را ثابت کنید:

الف) $ax + b$ ؛ ب) $x^{۲}$ ؛ پ) $x^{۳}$ ؛

ت) $\sqrt{x}$ ؛ ث) $\sqrt[۳]{x}$ ؛ ج) $\sin x$ ؛

چ) $\cos x$ ؛ ح) $\operatorname{arc\,tg} x$.

پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید و آنها را از طریق ترسیمی نمایش دهید:

۶۷۵ – $f(x) = |x|$

۶۷۶ – $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{۲} - ٤}{x - ۲}, & \text{اگر } x \neq ۲ \\ A, & \text{اگر } x = ۲ \end{cases}$$

۶۷۷ – $f(x) = \dfrac{۱}{(۱ + x)^{۲}}$ اگر $x \neq -۱$ و $f(-۱)$ اختیاری باشد.

۶۷۸ – الف) $f_{۱}(x) = \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$ اگر $x \neq ۰$ و $f_{۱}(۰) = ۱$ ؛

ب) $f_{۲}(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ اگر $x \neq ۰$ و $f_{۲}(۰) = ۱$.

۶۷۹ - $f(x)=\sin\frac{۱}{x}$ اگر $x\neq ۰$ و $f(۰)$ اختیاری میباشد.

۶۸۰ - $f(x)=x\sin\frac{۱}{x}$ اگر $x\neq ۰$ و $f(۰)=۰$.

۶۸۱ - $f(x)=e^{-\frac{۱}{x^۲}}$ اگر $x\neq ۰$ و $f(۰)=۰$.

۶۸۲ - $f(x)=\frac{۱}{۱+e^{\frac{۱}{x-۱}}}$ اگر $x\neq ۱$ و $f(۱)$ اختیاری میباشد .

۶۸۳ - $f(x)=x\ln x^۲$ اگر $x\neq ۰$ و $f(۰)=a$.

۶۸۴ - $f(x)=\operatorname{sgn} x$

۶۸۵ - $f(x)=[x]$

۶۸۶ - $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$

نقاط انفصال توابع زیر را تعیین و نوع این نقاطرا بررسی کنید:

۶۷۸ - $y=\frac{x}{(۱+x)^۲}$

۶۸۸ - $y=\frac{۱+x}{۱+x^۳}$

۶۸۹ - $y=\frac{x^۲-۱}{x^۳-۳x+۲}$

۶۹۰ - $y=\dfrac{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+۱}}{\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x}}$

۶۹۱ - $y=\frac{x}{\sin x}$

۶۹۲ - $y=\sqrt{\frac{۱-\cos\pi x}{۴-x^۲}}$

۶۹۳ - $y=\cos^۲\frac{۱}{x}$

۶۹۴ - $y=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$

۶۹۵ - $y=\dfrac{\cos\frac{\pi}{x}}{\cos\frac{\pi}{x}}$

۶۹۶ - $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{۱}{x}$

۶۹۷ - $y=\sqrt{x}\,\operatorname{arc\,tg}\frac{۱}{x}$

۶۹۸ - $y=e^{x+\frac{۱}{x}}$

۶۹۹ - $y=\frac{۱}{\ln x}$

۷۰۰ - $y=\frac{۱}{۱-e^{\frac{x}{۱-x}}}$

پیوستگی توابع زیر را بررسی و شکل تقریبی نمودار آنها را رسم کنید:

۷۰۱ - $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$

۷۰۲ - $y=x-[x]$

۷۰۳ - $y=x[x]$

۷۰۴ - $y=[x]\sin\pi x$

۷۰۵ - $y=x^۲-[x^۲]$

۷۰۶ - $y=\left[\frac{۱}{x}\right]$

۷۰۷ - $y = x\left[\frac{۱}{x}\right]$

۷۰۸ - $y = \operatorname{sgn}\left(\cos\frac{۱}{x}\right)$

۷۰۹ - $y = \left[\frac{۱}{x^{۲}}\right]\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$

۷۱۰ - $y = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}$

۷۱۱ - $y = \sec^{۲}\frac{۱}{x}$

۷۱۲ - $y = (-۱)^{[x^{۲}]}$

۷۱۳ - $y = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x-۱} + \frac{۱}{x-۲}\right)$

۷۱۴ - $y = \frac{۱}{x^{۲}\sin^{۲}x}$

۷۱۵ - $y = \frac{۱}{\sin(x^{۲})}$

۷۱۶ - $y = \ln\frac{x^{۲}}{(x+۱)(x-۳)}$

۷۱۷ - $y = e^{-\frac{۱}{x}}$

۷۱۸ - $y = ۱ - e^{-\frac{۱}{x^{۲}}}$

۷۱۹ - $y = \operatorname{th}\frac{۲x}{۱-x^{۲}}$

پیوستگی توابع زیر را بررسی و نمودار آنها را رسم کنید:

۷۲۰ - $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱}{x+x^{n}} \quad (x \geqslant ۰)$

۷۲۱ - $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{x}-n^{-x}}{n^{x}+n^{-x}}$

۷۲۲ - $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{۱+x^{۲n}}$

۷۲۳ - $y = \lim\limits_{n\to\infty}\cos^{۲n}x$

۷۲۴ - $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{۱+(۲\sin x)^{۲n}}$

۷۲۵ - $y = \lim\limits_{n\to\infty}[x\operatorname{arc\,tg}(n\operatorname{ctg}x)]$

۷۲۶ - $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+x^{۲}e^{nx}}{۱+e^{nx}}$

۷۲۷ - $y = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(۱+e^{xt})}{\ln(۱+e^{t})}$

۷۲۸ - $y = \lim\limits_{t\to+\infty}(۱+x)\operatorname{th}tx$

۷۲۹ - آیا تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۲x, & ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \text{ اگر} \\ ۲-x, & ۱ < x \leqslant ۲ \text{ اگر} \end{cases}$$

پیوسته است؟

۷۳۰ - فرض کنیم

$$f(x) = \begin{cases} e^{x}, & x < ۰ \text{ اگر} \\ a+x, & x \geqslant ۰ \text{ اگر} \end{cases}$$

عدد a را چگونه انتخاب کنیم تا تابع $f(x)$ پیوسته باشد؟

۷۳۱ – پیوستگی توابع زیر را بررسی و نوع نقاط انفصال آنها را تعیین کنید:

الف) $$f(x)=\begin{cases} x^{۲}, & ۰\leqslant x\leqslant ۱ \text{ اگر} \\ ۲-x, & ۱<x\leqslant ۲ \text{ اگر} \end{cases}$$

ب) $$f(x)=\begin{cases} x, & |x|\leqslant ۱ \text{ اگر} \\ ۱, & |x|>۱ \text{ اگر} \end{cases}$$

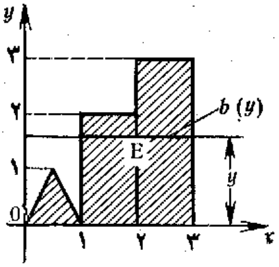
پ) $$f(x)=\begin{cases} \cos\frac{\pi x}{۲}, & |x|\leqslant ۱ \text{ اگر} \\ |x-۱|, & |x|>۱ \text{ اگر} \end{cases}$$

ت) $$f(x)=\begin{cases} \operatorname{ctg}^{۲}\pi x, & \text{برای } x \text{ نادرست} \\ ۰ \quad, & \text{برای } x \text{ درست} \end{cases}$$

ث) $$f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, & \text{برای } x \text{ گویا} \\ ۰ \quad, & \text{برای } x \text{ گنگ} \end{cases}$$

۷۳۲ – تابع $d=d(x)$ کوتاهترین فاصلهٔ نقطهٔ x محور عددی Ox از مجموعهٔ نقاط حاصله از قطعهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۱$ و $۲\leqslant x\leqslant ۳$ محور را نمایش میدهد. مطلوبست عبارت تحلیلی تابع d و رسم نمودار و بررسی پیوستگی آن.

۷۳۳ – شکل E از مثلث متساوی الساقین بقاعده ۱ و ارتفاع ۱ و دو مستطیل به قاعده‌های ۱ و ارتفاع های ۲ و ۳ (شکل ۵) تشکیل شده است. تابع $S=S(y)$ $(۰\leqslant y<+\infty)$ عبارت از مساحت بخشی از شکل E محصور بین خطوط افقی $Y=۰$ و $Y=y$؛ و تابع $b=b(y)$ $(۰\leqslant y<+\infty)$ عبارتست از طول مقطع شکل E با خط افقی $Y=y$؛ مطلوبست تعیین عبارت تحلیلی توابع S و b و رسم نمودار و بررسی پیوستگی آنها.



شکل ۵

۷۳۴ – ثابت کنید که تابع دیریکله

$$\chi(x)=\lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}\cos^{n}(\pi m!\,x)\right\}$$

بازای هر مقدار x منفصل است.

۷۳۵ – پیوستگی تابع زیر را بررسی کنید:

$$f(x)=x\chi(x)$$

که در آن $\chi(x)$ تابع دیریکله (مسئله قبل را ببینید) است. طرح نمودار این تابع را رسم کنید.

۷۳۶ – ثابت کنید که تابع ریمن

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{n}, & \text{اگر } x = \frac{m}{n} \text{ ، } m \text{ و } n \text{ نسبت بهم اولند} \\ ۰, & \text{اگر } x \text{ گنگ است} \end{cases}$$

بازای هر مقدار گویای x منفصل و بازای هر مقدار گنگ x پیوسته است. شکل تقریبی نمودار این تابع را رسم کنید.

۷۳۷ – پیوستگی تابع $f(x)$ را که بترتیب زیر داده شده است بررسی کنید:

$$f(x) = \frac{nx}{n+۱}$$

اگر x کسر گویای تحویل‌ناپذیر $\frac{m}{n}$ $(n \geqslant ۱)$ باشد، و

$$f(x) = [x]$$

اگر x عددیست گنگ. شکل تقریبی نمودار این تابع را رسم کنید.

۷۳۸ – تابع $f(x) = \frac{۱ - \cos x}{x^۲}$ بازای جمیع مقادیر آرگومان x جز $x = ۰$ معین است. چه مقداری در نقطهٔ $x = ۰$ باید به تابع $f(x)$ داد تا تابع بازای $x = ۰$ پیوسته باشد.

۸۳۹ – نشان دهید که بازای هر انتخاب دلخواه عدد $f(۱)$ تابع $f(x) = \frac{۱}{۱ - x}$ بازای $x = ۱$ منفصل است.

۷۴۰ – تابع $f(x)$ بازای $x = ۰$ مفهوم خود را از دست میدهد. مطلوبست تعیین عدد $f(۰)$ برای آنکه تابع بازای $x = ۰$ پیوسته گردد، در صورتیکه

الف) $f(x) = \frac{\sqrt{۱ + x} - ۱}{\sqrt[۳]{۱ + x} - ۱}$ ؛

ب) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} ۲x}{x}$ ؛

پ) $f(x) = \sin x \sin \frac{۱}{x}$ ؛

ت) $f(x) = (۱ + x)^{\frac{۱}{x}}$ ؛

ث) $f(x) = \frac{۱}{x^۲} e^{-\frac{۱}{x^۲}}$ ؛

ج) $f(x) = x^x \quad (x > ۰)$ ؛

چ) $f(x) = x \ln^۲ x$.

۷۴۱ – آیا مجموع دو تابع $f(x) + g(x)$ حتما در نقطهٔ $x_۰$ ناپیوسته خواهد بود اگر: الف) بازای $x = x_۰$ تابع $f(x)$ پیوسته و تابع $g(x)$ ناپیوسته باشد؛ ب) هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ بازای $x = x_۰$ ناپیوسته باشند؟ مثالهای نظیر را بسازید.

۷۴۲ – آیا حاصل ضرب دوتابع

$$f(x)\,g(x)$$

حتماً در نقطهٔ $x_{۰}$ ناپیوسته خواهد بود اگر :

الف) در این نقطه تابع $f(x)$ پیوسته و تابع $g(x)$ ناپیوسته باشد؛

ب) هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ بازای $x=x_{۰}$ ناپیوسته باشند؟ مثل‌های نظیر را بسازید .

۷۴۳ – آیا میتوان گفت که مجذور یک تابع ناپیوسته، یک تابع ناپیوسته است؟ تابعی مثال بیاورید که همه جا ناپیوسته و مجذور آن یک تابع پیوسته باشد.

۷۴۴ – پیوستگی توابع $f[g(x)]$ و $g[f(x)]$ را در حالات زیر بررسی کنید:

الف) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ و $g(x)=۱+x^{۲}$ ؛

ب) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ و $g(x)=x(۱-x^{۲})$ ؛

پ) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ و $g(x)=۱+x-[x]$.

۷۴۵ – پیوستگی تابع مرکب $y=f(u)$ را که در آن $u=\varphi(x)$ بررسی کنید، در صورتیکه

$$f(u)=\begin{cases} u, & ۰<u\leqslant ۱ \quad \text{بازای} \\ ۲-u, & ۱<u<۲ \quad \text{بازای} \end{cases}$$

و

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & \text{بازای } x \text{ گویا} \\ ۲-x, & \text{بازای } x \text{ گنگ} \end{cases}$$

$(۰<x<۱)$.

۷۴۶ – ثابت کنید که اگر $f(x)$ تابع پیوسته‌ای باشد، در آنصورت

$$F(x)=|f(x)|$$

نیز تابع پیوسته‌ای میباشد .

۷۴۷ – ثابت کنید که اگر $f(x)$ تابع پیوسته‌ای باشد، در آنصورت تابع

$$f_c(x)=\begin{cases} -c, & f(x)<-c \quad \text{اگر} \\ f(x), & |f(x)|\leqslant c \quad \text{اگر} \\ c, & f(x)>c \quad \text{اگر} \end{cases}$$

که در آن c عدد مثبت دلخواهی است نیز پیوسته میباشد .

۷۴۸ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد در آنصورت توابع

$$M(x) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\} \quad \text{و} \quad m(x) = \inf_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\}$$

نیز روی قطعهٔ $[a, b]$ پیوسته‌اند .

۷۴۹ – ثابت کنید که اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ پیوسته باشند در آنصورت توابع

$$\varphi(x) = \min[f(x),\ g(x)] \quad \text{و} \quad \psi(x) = \max[f(x),\ g(x)]$$

نیز پیوسته‌اند.

۷۵۰ – فرض کنیم تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ معین و کراندار باشد . ثابت کنید که توابع

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi < x} \{f(\xi)\} \quad \text{و} \quad M(x) = \sup_{a \leqslant \xi < x} \{f(\xi)\}$$

روی قطعهٔ $[a, b]$ پیوسته از چپ میباشند .

۷۵۱ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $a \leqslant x < +\infty$ پیوسته و حد متناهی

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

وجود داشته باشد در اینصورت این تابع در فاصلهٔ مذکور کراندار است .

۷۵۲ – فرض کنیم تابع $f(x)$ در بازهٔ $(x_0, +\infty)$ پیوسته و کراندار باشد . ثابت کنید که عدد T هر چه باشد چنان دنبالهٔ $x_n \longrightarrow +\infty$ یافت میشود که

$$\lim_{n \to \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0$$

۷۵۳ – فرض کنیم $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ توابع پیوسته دوره‌ای باشند که بازای $-\infty < x < +\infty$ معین هستند و

$$\lim_{x \to +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$$

ثابت کنید که :

$$\varphi(x) \equiv \psi(x)$$

۷۵۴ – ثابت کنید که جمیع نقاط انفصال تابع یکنوای کراندار نقاط انفصال نوع اول میباشند .

۷۵۵ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ دارای ویژگی‌های زیر باشد: ۱) معین و یکنوا روی قطعهٔ $[a, b]$ ؛ ۲) بعنوان مقادیر خویش تمام اعداد واقع بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار کند، در این صورت این تابع روی $[a, b]$ پیوسته است .

۷۵۶ - نشان دهید که تابع $f(x)=\sin\frac{۱}{x-a}$ ، اگر $x\neq a$ و $f(a)=۰$ ، روی هر قطعهٔ دلخواه $[a, b]$ جمیع مقادیر واقع بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار میکند منتها روی $[a, b]$ پیوسته نیست .

۷۵۷ - ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ روی فاصله (a, b) پیوسته باشد و $x_۱$ و $x_۲$ و ... و x_n مقادیر دلخواه آن از این فاصله باشند در آنصورت چنان عدد ξ را بین آنها میتوان یافت که :

$$f(\xi)=\frac{۱}{n}[f(x_۱)=f(x_۲)+\ldots+f(x_n)]$$

۷۵۸ - فرض کنیم $f(x)$ در فاصلهٔ (a, b) پیوسته و

$$l=\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{و} \quad L=\lim_{x\to a} f(x)$$

ثابت کنید بازای جمیع اعداد λ که $l\leqslant\lambda\leqslant L$ چنان دنبالهٔ $x_n\to a$ $(n=۱, ۲, \ldots)$ وجود دارد که :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lambda$$

بخش ۸ — تابع معکوس. توابع پارامتری

بند ۱ — وجود و پیوستگی تابع معکوس . هرگاه تابع $y=f(x)$ دارای ویژگی‌های زیر باشد : ۱) روی فاصلهٔ (a, b) معین و پیوسته باشد؛ ۲) روی این فاصله بمعنای اکید یکنوا باشد، آنگاه تابع معکوس تک‌مقداری $x=f^{-۱}(y)$ وجود دارد که معین، پیوسته و متناظراً به معنای اکید روی فاصلهٔ (A, B) یکنوا است که در آن $A=\lim_{x\to a+۰} f(x)$ و $B=\lim_{x\to b-۰} f(x)$

شاخهٔ تک‌مقداری پیوسته تابع چند مقداری معکوس تابع پیوسته مفروض $y=f(x)$ بر حسب تعریف عبارتست از تابع پیوسته تک‌مقداری دلخواه $x=g(y)$ که در حوزهٔ ماگزیمال وجودش معین باشد و در این حوزه در معادلهٔ $f[g(y)]=y$ صدق کند .

بند ۲ — پیوستگی تابعی که بصورت پارامتری داده شده است . اگر توابع $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ در فاصلهٔ (α, β) معین و پیوسته و تابع $\varphi(t)$ در این فاصله بطور اکید یکنوا باشد، در آن صورت دستگاه معادلات

$$y=\psi(t), \quad x=\varphi(t)$$

y را بعنوان تابع تک مقداری پیوسته از x :

$$y = \psi(\varphi^{-۱}(x))$$

در فاصلهٔ (a, b) مشخص میسازد، که در آن $b = \lim_{t \to \beta - x} \varphi(t)$ و $a = \lim_{t \to \alpha + ۰} \varphi(t)$

۷۵۹ – مطلوبست تابع معکوس تابع کسری خطی

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq ۰)$$

در کدام حالت تابع معکوس بر تابع مفروض منطبق میشود؟

۷۶۰ – مطلوبست تابع معکوس $x = x(y)$ ، در صورتیکه

$$y = x + [x]$$

۷۶۱ – نشان دهید که تابع پیوسته یکتای $(-\infty < x < +\infty)$ $y = y(x)$ صادق در معادلهٔ کپلر

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (۰ \leqslant \varepsilon < ۱)$$

وجود دارد.

۷۶۲ – نشان دهید که معادلهٔ

$$\operatorname{ctg} x = kx$$

بازای هر مقدار حقیقی k $(-\infty < k < +\infty)$ در بازهٔ $۰ < x < \pi$ دارای ریشهٔ یکتای پیوستهٔ $x = x(k)$ است .

۷۶۳ – آیا تابع نایکنوای $(-\infty < x < +\infty)$ $y = f(x)$ میتواند دارای تابع معکوس تک مقداری باشد؟ مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$y = \begin{cases} x, & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ -x, & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

۷۶۴ – در چه حالتی تابع $y = f(x)$ و تابع معکوس $x = f^{-۱}(y)$ هر دو یکی میشود؟

۷۶۵ – نشان دهید که تابع معکوس تابع ناپیوسته

$$y = (۱ + x^{۲}) \operatorname{sgn} x$$

تابعی است پیوسته .

۷۶۶ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ معین و اکیداً یکنوا روی قطعهٔ $[a, b]$ باشد و

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a) \quad (a \leqslant x_n \leqslant b)$$

در این صورت

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

شاخه‌های تک مقداری پیوستهٔ توابع معکوس توابع زیر را تعیین کنید:

۷۶۷ – $y = x^۲$

۷۶۸ – $y = ۲x - x^۲$

۷۶۹ – $y = \dfrac{۲x}{۱ + x^۲}$

۷۷۰ – $y = \sin x$

۷۷۱ – $y = \cos x$

۷۷۲ – $y = \operatorname{tg} x$

۷۷۳ – نشان دهید که مجموعهٔ مقادیر تابع پیوستهٔ

$$y = ۱ + \sin x$$

متناظر فاصلهٔ $(۰ < x < ۲\pi)$ ، قطعه است.

۷۷۴ – تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{۲}$$

۷۷۵ – تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \frac{۱}{x} = \frac{\pi}{۲} \operatorname{sgn} x \quad (x \neq ۰)$$

۷۷۶ – مطلوبست اثبات قضیهٔ جمع آرکتانژانت‌ها:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x + y}{۱ - xy} + \varepsilon\pi$$

که در آن $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ تابعی است که یکی از سه مقدار ۰ ، ۱ ، ۱– را اختیار میکند.

در ازای چه مقادیری از y بازای مقدار مفروض x تابع ε ممکن است منفصل باشد؟ روی صفحهٔ Oxy نواحی نظیر پیوستگی تابع ε را بسازید و مقدار این تابع را در نواحی بدست‌آمده تعیین کنید.

۷۷۷ – مطلوبست اثبات قضیهٔ جمع آرکسینوس‌ها:

$$\arcsin x + \arcsin y = (-۱)^{\varepsilon} \arcsin \left(x \sqrt{۱ - y^۲} + y \sqrt{۱ - x^۲}\right) + \varepsilon\pi$$

که در آن $(|y| \leqslant ۱, \ |x| \leqslant ۱)$

$\varepsilon = ۰$ اگر $xy \leqslant ۰$ یا $x^{۲} + y^{۲} \leqslant ۱$

و

$\varepsilon = \operatorname{sgn} x$ اگر $xy > ۰$ و $۱ < x^{۲} + y^{۲}$

۷۷۸ – مطلوبست اثبات قضیهٔ جمع آرککوسینوسها :

$$\arccos x + \arccos y = (-۱)^{\varepsilon} \arccos \left(xy - \sqrt{۱ - x^{۲}}\sqrt{۱ - y^{۲}}\right) + ۲\pi\varepsilon$$

$(|x| \leqslant ۱,\ |y| \leqslant ۱)$ که در آن

$\varepsilon = ۰$ اگر $x + y \geqslant ۰$

و

$\varepsilon = ۱$ اگر $x + y < ۰$

۷۷۹ – مطلوبست رسم نمودار توابع :

الف) $y = \arcsin x - \arcsin \sqrt{۱ - x^{۲}}$ ؛

ب) $y = \arcsin \left(۲x\sqrt{۱ - x^{۲}}\right) - ۲\arcsin x$

۷۸۰ – مطلوبست تعیین تابع $y = y(x)$ از معادلات :

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \operatorname{arcctg} t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

در چه حوزه‌ای این تابع معین است؟

۷۸۱ – فرض کنیم

$$x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t \quad (-\infty < t < +\infty)$$

در چه حوزه‌ای از تغییرات پارامتر t متغیر y را میتوان بعنوان تابع تک‌مقداری از متغیر x در نظر گرفت؟ عبارت y را بازای حوزه‌های مختلف پیدا کنید .

۷۸۲ – تحت چه شرایط لازم و کافی دستگاه معادلات

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha < t < \beta)$$

y را بعنوان تابع تک‌مقداری از x بیان میکند؟

مثال $x = \sin^{۲} t,\ y = \cos^{۲} t$ را در نظر بگیرید .

۷۸۳ – تحت چه شرایطی دو دستگاه معادلات

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a < t < b)$$

و

$$x = \varphi(\chi(\tau)), \quad y = \psi(\chi(\tau)) \quad (\alpha < \tau < \beta)$$

یک تابع $y = y(x)$ را مشخص میسازند ؟

۷۸۴ – فرض کنیم توابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ روی فاصلهٔ (a, b) معین و پیوسته باشند و

$$A = \inf_{a<x<b} \varphi(x), \quad B = \sup_{a<x<b} \varphi(x)$$

در چه حالتی چنان تابع $f(x)$ تک‌مقداری و معین در فاصلهٔ (A, B) وجود دارد که بازای $a<x<b$ داشته باشیم:

$$\psi(x) = f(\varphi(x))\,?$$

بخش ۹ – پیوستگی یکنواخت توابع

بند ۱ – تعریف پیوستگی یکنواخت. تابع $f(x)$ را روی یک مجموعه (فاصله، قطعه و غیره) $X = \{x\}$ وقتی پیوستهٔ یکنوخت نامند که $f(x)$ روی X معین بوده و برای هر $\varepsilon > 0$ چنان عدد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ وجود داشته باشد که بازای مقادیر دلخواه $x', x'' \in X$ از نامساوی

$$|x' - x''| < \delta$$

نامساوی زیر نتیجه شود:

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

بند ۲ – قضیه کانتور. تابع $f(x)$ که روی قطعهٔ کراندار $[a, b]$ معین و پیوسته است روی این قطعه پیوستهٔ یکنواخت میباشد.

۷۸۵ – در کارگاه کارخانه‌ای پلاک‌های مربعی شکل ساخته میشود که ضلع x آنها میتواند مقادیر در حدود از ۱ تا ۱۰ سانتیمتر را اختیار کند. با چه حد مجاز δ میتوان اضلاع این پلاک‌ها را عمل نمود تا مستقل از طول‌شان (در حدود مذکور) مساحت y آنها با مساحت منظور اختلاف کمتر از ε داشته باشد؟ مطلوبست محاسبهٔ عددی اگر:

الف) $\varepsilon = \mathrm{cm}^2$ ؛ ب) $\varepsilon =$ ۰٫۰۱ cm^2 ؛ ج) $\varepsilon =$ ۰٫۰۰۰۱ cm^2 .

۷۸۶ – بست (کوپلینگ) استوانه‌ای به پهنای ε و درازای δ روی منحنی $y = \sqrt[3]{x}$ کشیده شده و بر روی آن قسمی میلغزد که محور بست موازی محور Ox میماند. δ چقدر باشد تا این بست قسمتی از منحنی را که با نامساوی $-10 \leqslant x \leqslant 10$ تعیین میشود بطور آزادانه طی کند، در صورتیکه:

الف) $\varepsilon =$ ۱ ؛ ب) $\varepsilon =$ ۰٫۱ ؛ پ) $\varepsilon =$ ۰٫۰۱ ؛ ت) ε باندازهٔ دلخواه کوچک باشد؟

۷۸۷ – در معنای مثبت بزبان «$\varepsilon - \delta$» حکم زیر را فرمول‌بندی کنید: تابع $f(x)$ روی یک مجموعه (بازه، قطعه و غیره) پیوسته است ولی پیوستهٔ یکنواخت روی این مجموعه نیست.

۷۸۸ – نشان دهید که تابع

$$f(x) = \frac{۱}{x}$$

در فاصلهٔ (۰, ۱) پیوسته است ولی در این بازه پیوستهٔ یکنواخت نیست.

۷۸۹ – نشان دهید که تابع

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$$

در فاصلهٔ (۰, ۱) پیوسته و کراندار است، ولی در این فاصله، پیوستهٔ یکنواخت نیست.

۷۹۰ – نشان دهید که تابع

$$f(x) = \sin x^{۲}$$

در فاصلهٔ ناستناهی $-\infty < x < +\infty$ پیوسته و کراندار است، ولی در این فاصله پیوستهٔ یکنوخت نیست.

۷۹۱ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در حوزهٔ $a \leqslant x < +\infty$ معین و پیوسته باشد و حد متناهی

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

وجود داشته باشد در این صورت $f(x)$ در این حوزه پیوستهٔ یکنواخت است.

۷۹۲ – نشان دهید که تابع ناکراندار

$$f(x) = x + \sin x$$

در سراسر محور $-\infty < x < +\infty$ پیوستهٔ یکنواخت است.

۷۹۳ – آیا تابع $f(x) = x^{۲}$ روی فاصلهٔ الف) $(-l, l)$ که در آن عدد l مثبت و بقدر دلخواه بزرگ است، ب) در فاصلهٔ $(-\infty, +\infty)$ پیوستهٔ یکنواخت است؟

پیوستگی یکنواخت توابع زیر را در حوزه‌های داده شده بررسی کنید:

۷۹۴ – $f(x) = \frac{x}{۴ - x^{۲}} \quad (-۱ \leqslant x \leqslant ۱)$

۷۹۵ – $f(x) = \ln x \quad (۰ < x < ۱)$

۷۹۶ – $f(x)=\frac{\sin x}{x} \quad (۰<x<\pi)$

۷۹۷ – $f(x)=e^x\cos\frac{۱}{x} \quad (۰<x<۱)$

۷۹۸ – $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x \quad (-\infty<x<+\infty)$

۷۹۹ – $f(x)=\sqrt{x} \quad (۱\leqslant x<+\infty)$

۸۰۰ – $f(x)=x\sin x \quad (۰\leqslant x<+\infty)$

۸۰۱ – نشان دهید که تابع $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ در هر یک از فواصل

$$J_۱=(-۱<x<۰) \quad \text{و} \quad J_۲=(۰<x<۱)$$

بطور جداگانه پیوستهٔ یکنواخت است، ولی روی مجموع آنها

$$J_۱+J_۲=\{۰<|x|<۱\}$$

پیوسته یکنواخت نیست .

۸۰۱,۱ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ روی هر یک از قطعه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ پیوستهٔ یکنواخت باشد، در اینصورت این تابع در قطعهٔ جمعی $[a, b]$ پیوستهٔ یکنواخت خواهد بود .

۸۰۲ – برای $\varepsilon>۰$ مطلوبست تعیین $\delta=\delta(\varepsilon)$ بنحویکه در شرایط پیوستگی یکنواخت توابع $f(x)$ زیر در فواصل داده شده صادق باشد :

الف) $f(x)=۵x-۳ \quad (-\infty<x<+\infty)$

ب) $f(x)=x^۲-۲x-۱ \quad (-۲\leqslant x\leqslant ۵)$

پ) $f(x)=\frac{۱}{x} \quad (۰,۱\leqslant x\leqslant ۱)$

ت) $f(x)=\sqrt{x} \quad (۰\leqslant x<+\infty)$

ث) $f(x)=۲\sin x-\cos x \quad (-\infty<x<+\infty)$

ج) $f(x)=x\sin\frac{۱}{x}\,(x\neq ۰)$ و $f(۰)=۰ \quad (۰\leqslant x\leqslant\pi)$

۸۰۳ – قطعهٔ $[۱, ۱۰]$ را کافی است بچند قسمت متساوی تقسیم کنیم تا نوسان تابع $f(x)=x^۲$ در هر یک از این قسمت ها کمتر از ۰,۰۰۱ باشد؟

۸۰۴ – ثابت کنید که مجموع و حاصل ضرب هر تعداد متناهی توابع پیوستهٔ یکنوخت روی فاصلهٔ (a, b)، روی این فاصله پیوستهٔ یکنواخت است .

۸۰۵ – ثابت کنید که اگر تابع کراندار یکنوای $f(x)$ در فاصلهٔ متناهی یا نامتناهی (a, b) پیوسته باشد، در این صورت این تابع در فاصلهٔ (a, b) پیوستهٔ یکنواخت میباشد.

۸۰۶ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ روی بازهٔ متناهی (a, b) پیوستهٔ یکنواخت باشد، در آنصورت حدود

$$B = \lim_{x \to b-۰} f(x) \quad \text{و} \quad A = \lim_{x \to a+۰} f(x)$$

وجود دارد. آیا این قضیه برای بازهٔ نامتناهی (a, b) درست است؟

۸۰۶٫۱ – ثابت کنید برای آنکه تابع $f(x)$ معین و پیوسته در فاصلهٔ متناهی (a, b) بتواند بطور پیوسته در قطعهٔ $[a, b]$ ادامه یابد لازم و کافی است که تابع $f(x)$ در فاصلهٔ (a, b) پیوستهٔ یکنواخت باشد.

۸۰۷ – مدول پیوستگی تابع $f(x)$ روی فاصلهٔ (a, b) اصطلاحاً تابع

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_۱) - f(x_۲)|$$

را نامند که در آن $x_۱$ و $x_۲$ نقاط دلخواهی از (a, b) میباشند که با رابطهٔ $|x_۱ - x_۲| \leqslant \delta$ بهم مربوط میباشند.

ثابت کنید که برای پیوستگی یکنواخت تابع $f(x)$ روی فاصلهٔ (a, b) لازم و کافی است که

$$\lim_{\delta \to +۰} \omega_f(\delta) = ۰$$

۸۰۸ – مطلوبست محاسبهٔ ارزش مدول پیوستگی $\omega_f(\delta)$ (مسئله پیشین را ببینید) که بصورت زیر تعریف میشود:

$$\omega_f(\delta) \leqslant C\delta^\alpha$$

که در آن α, C مقادیر ثابتی میباشند در صورتیکه:

الف) $f(x) = x^۳ \quad (۰ \leqslant x \leqslant ۱)$

ب) $f(x) = \sqrt{x} \quad (a < x < +\infty)$ و $(۰ \leqslant x \leqslant a)$

پ) $f(x) = \sin x + \cos x \quad (۰ \leqslant x \leqslant ۲\pi)$

بخش ۱۰ — معادلات تابعی

۸۰۹ – ثابت کنید که تنها تابع پیوستهٔ $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ که بازای جمیع مقادیر حقیقی x و y در معادلهٔ

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (۱)$$

صدق کند، تابع خطی همگن زیر است

$$f(x) = ax$$

که در آن $a = f(۱)$ ثابت دلخواهی میباشد.

۸۱۰ – ثابت کنید که تابع یکنوای $f(x)$ صادق در معادلهٔ (۱)، خطی همگن است .

۸۱۱ – ثابت کنید که تابع $f(x)$ صادق در معادلهٔ (۱) و کراندار در فاصلهٔ هر قدر کوچک $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ، همگن خطی است .

۸۱۲ – ثابت کنید که تنها تابع پیوستهٔ $(-\infty < x < +\infty)$ $f(x)$ که بطور اتحادی برابر صفر نباشد و بازای جمیع مقادیر x و y در معادلهٔ

$$f(x+y) = f(x)\,f(y) \tag{۲}$$

صدق کند، تابع نمایی است

$$f(x) = a^x$$

که در آن $a = f(۱)$ ثابت مثبتی است .

۸۱۳ – ثابت کنید تابع کراندار در فاصلهٔ $(۰ , \varepsilon)$ که بطور اتحادی برابر صفر نباشد و در معادلهٔ (۲) صدق کند، نمایی است .

۸۱۴ – ثابت کنید که تنها تابع پیوستهٔ $(۰ < x < +\infty)$ $f(x)$ که بطور اتحادی برابر صفر نباشد و بازای جمیع مقادیر مثبت x و y در معادلهٔ

$$f(x\ \ y) = f(x) + f(y)$$

صدق کند، تابع لگاریتمی است :

$$f(x) = \log_a x$$

که در آن a ثابت مثبتی است.

۸۱۵ – ثابت کنید که تنها تابع پیوستهٔ $(۰ < x < +\infty)$ $f(x)$ که بطور اتحادی برابر صفر نباشد و بازای جمیع مقادیر مثبت x و y در معادلهٔ

$$f(xy) = f(x)\,f(y) \tag{۳}$$

صدق کند، تابع درجه‌ای است :

$$f(x) = x^a$$

که در آن a ثابت است .

۸۱۶ – مطلوبست تعیین تمام توابع پیوستهٔ $(-\infty < x < +\infty)$ $f(x)$ که بازای جمیع مقادیر حقیقی x و y در معادلهٔ (۳) صدق کنند .

۸۱۷ – نشان دهید که تابع ناپیوستهٔ

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

در معادله (۳) صادق است .

۸۱۸ - مطلوبست تعیین تمام توابع پیوستهٔ $(-\infty < x < +\infty)$ $f(x)$ که بازای جمیع مقادیر حقیقی x و y در معادلهٔ

$$f(x+y) + f(x-y) = ۲ f(x) f(y)$$

صدق کنند.

۸۱۹ - مطلوبست تعیین تمام توابع پیوستهٔ کراندار $(-\infty < x < +\infty)$ $g(x)$ و $f(x)$ که بازای جمیع مقادیر حقیقی x و y در دستگاه معادلات:

$$f(x+y) = f(x) f(y) - g(x) g(y)$$

$$g(x+y) = f(x) g(y) + f(y) g(x)$$

و علاوه بر آن در شرایط زیر صدق کنند:

$$g(\cdot) = \cdot \quad \text{و} \quad f(\cdot) = ۱$$

راهنمایی. تابع

$$F(x) = f^{۲}(x) + g^{۲}(x)$$

را در نظر بگیرید.

۸۲۰ - فرض کنیم

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

و

$$\Delta^{۲} f(x) = \Delta\{\Delta f(x)\}$$

بترتیب تفاضل‌های متناهی مرتبهٔ اول و دوم تابع $f(x)$ باشند.

ثابت کنید که اگر تابع $(-\infty < x < +\infty)$ $f(x)$ پیوسته باشد و

$$\Delta^{۲} f(x) \equiv \cdot$$

در آنصورت این تابع خطی است، یعنی

$$f(x) = ax + b$$

که در آن a و b ثابت میباشند.

فصل ۲

حساب دیفرانسیل توابع چند متغیره

بخش ۱ — مشتق توابع صریح

بند ۱ — تعریف مشتق . اگر x و $x_{۱} = x + \Delta x$ مقادیر متغیر مستقل باشند در آنصورت تفاضل

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

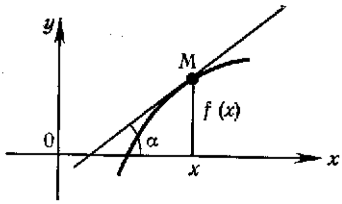
را نمو $y = f(x)$ روی قطعهٔ $[x, x_{۱}]$ نامند .

عبارت

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (۱)$$

اگر دارای معنا باشد مشتق، و خود تابع $f(x)$ را در این صورت تابع دیفرانسیل پذیر نامند .

از لحاظ هندسی عدد $f'(x)$ عبارتست از ضریب زاویهٔ مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ آن $x \, (\operatorname{tg} \alpha = f'(x))$ (شکل ٦) .



شکل ٦

بند ۲ — قاعده‌های اساسی تعیین مشتق. اگر c مقدار ثابت و توابع $u = u(x)$ ، $v = v(x)$ و $w = w(x)$ دارای مشتق باشند در آنصورت

۱) $c' = ۰$

۲) $(cu)' = cu'$

۳) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$

۴) $(uv)' = u'v + v'u$

۵) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^{۲}} \quad (v \neq ۰)$

۶) $(u^n)' = nu^{n-۱}u'$ (n عددیست ثابت) .

۷) اگر توابع $y = f(u)$ و $u = \varphi(x)$ دارای مشتق باشند در آنصورت

$$y'_x = y'_u \, u'_x$$

بند ۳ — دستورهای اساسی . اگر x متغیر مستقلی باشد، در آنصورت

I – $(x^n)' = nx^{n-۱}$ (n عددیست ثابت) .

II – $(\sin x)' = \cos x$

III – $(\cos x)' = \sin x$

IV – $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{۱}{\cos^{۲} x}$

V – $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{۱}{\sin^{۲} x}$

VI – $(\arcsin x)' = \dfrac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$

VII – $(\arccos x)' = -\dfrac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$

VIII – $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \dfrac{۱}{۱ + x^{۲}}$

IX – $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\dfrac{۱}{۱ + x^{۲}}$

X – $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > ۰)$

$(e^x)' = e^x$

XI – $(\log_a x)' = \dfrac{۱}{x \ln a} \quad (a > ۰)$

$(\ln x)' = \dfrac{۱}{x}$

XII – $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

XIII – $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

XIV – $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{۱}{\operatorname{ch}^{۲} x}$

XV – $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{۱}{\operatorname{sh}^{۲} x}$

بند ۴ — مشتقات یکسویی . عبارات

$$f'_{-}(x) = \lim_{\Delta x \to -۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{و} \quad f'_{+}(x) = \lim_{\Delta x \to +۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

به ترتیب به مشتق راست و چپ تابع $f(x)$ در نقطهٔ x موسومند .

برای وجود مشتق $f'(x)$ لازم و کافی است که

$$f'_{-}(x) = f'_{+}(x)$$

بند ۵ — مشتق نامتناهی. اگر تابع $f(x)$ در نقطهٔ x پیوسته باشد و

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty$$

در آنصورت گویند که تابع $f(x)$ در نقطهٔ x دارای مشتق نامتناهی (بی‌نهایت) است. در این حالت مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ x بر محور Ox عمود است .

۸۲۱ – مطلوبست نمو Δx آرگومان x و نمو نظیر Δy تابع $y = \lg x$ اگر x از ۱ تا ۱۰۰۰ تغییر کند .

۸۲۲ – مطلوبست نمو Δx آرگومان x و نمو نظیر Δy تابع $y = \frac{۱}{x^{۲}}$ اگر x از ۰,۰۱ تا ۰,۰۰۱ تغییر کند .

۸۲۳ – به متغیر x نمو Δx را میدهیم . مطلوبست تعیین نمو Δy در صورتیکه :

الف) $y = ax + b$ ؛ ب) $y = ax^{۲} + bx + c$ ؛ پ) $y = a^{x}$.

۸۲٤ – ثابت کنید که :

الف) $\Delta [f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$ ؛

ب) $\Delta [f(x)\, g(x)] = g(x + \Delta x)\, \Delta f(x) + f(x)\, \Delta g(x)$.

۸۲٥ – از نقاط $A(۲, ٤)$ و $A'(۲ + \Delta x, ٤ + \Delta y)$ منحنی $y = x^{۲}$ ، قاطع AA' گذشته است. مطلوبست تعیین ضریب زاویهٔ این قاطع در صورتیکه :

الف) $\Delta x = ۱$ ؛ ب) $\Delta x = ۰,۱$ ؛ پ) $\Delta x = ۰,۰۱$ ؛

ت) Δx باندازهٔ دلخواه کوچک باشد .

ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی مفروض در نقطهٔ A برابر چیست؟

۸۲٦ – قطعهٔ $۱ \leqslant x \leqslant ۱ + h$ از محور Ox بیاری تابع $y = x^{۳}$ روی محور Oy تصویر شده است. مطلوبست تعیین ضریب کشش متوسط و انجام محاسبهٔ عددی در صورتیکه :

الف) $h = ۰,۱$ ؛ ب) $h = ۰,۰۱$ ؛ پ) $h = ۰,۰۰۱$

ضریب کشش بازای این تصویر در نقطهٔ $x = ۱$ برابر چیست ؟

۸۲۷ – قانون حرکت یک نقطه روی محور Ox با دستور

$$x = ۱۰\, t + ٥\, t^{۲}$$

داده شده است که در آن t زمان بر حسب ثانیه و x مسافت بر حسب متر است. مطلوبست تعیین سرعت متوسط حرکت در فاصلهٔ زمانی $۲۰ \leqslant t \leqslant ۲۰ + \Delta t$ و انجام محاسبهٔ عددی در صورتیکه :

الف) $\Delta t = ۱$ ؛ ب) $\Delta t = ۰,۱$ ؛ پ) $\Delta t = ۰,۰۱$ ؛

سرعت حرکت در لحظهٔ $t = ۲۰$ چقدر است؟

۸۲۸ – از روی تعریف مشتق، مشتقات توابع زیر را مستقیماً بدست آورید :

الف) $x^{۲}$ ؛ ت) $\sqrt{x}$ ؛ چ) $\operatorname{ctg} x$ ؛

ب) $x^{۳}$ ؛ ث) $\sqrt[۳]{x}$ ؛ ح) $\arcsin x$ ؛

پ) $\frac{۱}{x}$ ؛ ج) $\operatorname{tg} x$ ؛ خ) $\arccos x$ ؛

د) $\operatorname{arctg} x$.

۸۲۹ – مطلوبست محاسبهٔ $f'(۱)$ ، $f'(۲)$ و $f'(۳)$ اگر

$$f(x) = (x - ۱)(x - ۲)^{۲}(x - ۳)^{۳}$$

۸۳۰ – مطلوبست محاسبهٔ $f'(۲)$ اگر

$$f(x) = x^{۲} \sin(x - ۲)$$

۸۳۱ – مطلوبست محاسبهٔ $f'(۱)$ اگر

$$f(x) = x + (x - ۱) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x + ۱}}$$

۸۳۲ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{x \to a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

در صورتیکه تابع $f(x)$ در نقطهٔ a دیفرانسیلپذیر باشد.

۸۳۳ – ثابت کنید که اگر n عدد طبیعی و تابع $f(x)$ دیفرانسیل‌پذیر باشد در آن صورت

$$\lim_{n \to \infty} n \left[f\left(x + \frac{۱}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x) \qquad (۱)$$

بر عکس اگر برای تابع $f(x)$ حد (۱) وجود داشته باشد آیا میتوان گفت که این تابع دارای مشتق است؟ مثال تابع دیریکله را در نظر بگیرید (فصل ۱ مسالهٔ ۷۳۴ را ببینید).

با استفاده از جدول مشتقات مشتقات توابع زیر را پیدا کنید:

۸۳۴ – $y = ۲ + x - x^{۲}$

$y'(۰)$ ، $y'\left(\frac{۱}{۲}\right)$ ، $y'(۱)$ ، $y'(-۱۰)$ چقدر است ؟

۸۳۵ – $y = \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۲}}{۲} - ۲x$

بازای چه مقادیری از x :

الف) $y'(x) = ۰$ ؛ ب) $y'(x) = -۲$ ؛ پ) $y'(x) = ۱۰$ ؟

۸۳۶ – $y = a^{۵} + ۵a^{۳}x^{۲} - x^{۵}$

۸۳۷ – $y = \frac{ax + b}{a + b}$

۸۳۸ – $y = (x - a)(x - b)$

۸۳۹ – $y = (x + ۱)(x + ۲)^{۲}(x + ۳)^{۳}$

۸۴۰ – $y = (x \sin\alpha + \cos\alpha)(x \cos\alpha - \sin\alpha)$

۸٤۱ – $y = (۱ + nx^m)(۱ + mx^n)$

۸٤۲ – $y = (۱ - x)(۱ - x^۲)^۲(۱ - x^۳)^۳$

۸٤۲,۱ – $y = (٥ + ۲x)^{۱۰}(۳ - ٤x)^{۲۰}$

۸٤۳ – $y = \frac{۱}{x} + \frac{۲}{x^۲} + \frac{۳}{x^۳}$

۸٤٤ – مطلوب است اثبات دستور

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^۲}$$

مطلوب است محاسبهٔ مشتقات توابع زیر :

۸٤٥ – $y = \frac{۲x}{۱ - x^۲}$

۸٤٦ – $y = \frac{۱ + x - x^۲}{۱ - x + x^۲}$

۸٤۷ – $y = \frac{x}{(۱ - x)^۲(۱ + x)^۳}$

۸٤۸ – $y = \frac{(۲ - x^۲)(۳ - x^۳)}{(۱ - x)^۲}$

۸٤۹ – $y = \frac{(۱ - x)^p}{(۱ + x)^q}$

۸٥۰ – $y = \frac{x^p(۱ - x)^q}{۱ + x}$

۸٥۱ – $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[۳]{x}$

۸٥۲ – $y = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$

۸٥۳ – $y = \sqrt[۳]{x^۲} - \frac{۲}{\sqrt{x}}$

۸٥٤ – $y = x\sqrt{۱ + x^۲}$

۸٥٥ – $y = (۱ + x)\sqrt{۲ + x^۲}\,\sqrt[۳]{۳ + x^۳}$

۸٥٦ – $y = \sqrt[m+n]{(۱ - x)^m(۱ + x)^n}$

۸٥۷ – $y = \frac{x}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}$

۸٥۸ – $y = \sqrt[۳]{\frac{۱ + x^۳}{۱ - x^۳}}$

۸٥۹ – $y = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲}\,(x + \sqrt{۱ + x^۲})}$

۸٦۰ – $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

۸٦۱ – $y = \sqrt[۳]{۱ + \sqrt[۳]{۱ + \sqrt[۳]{x}}}$

۸٦۲ – $y = \cos ۲x - ۲\sin x$

۸٦۳ – $y = (۲ - x^۲)\cos x + ۲x\sin x$

۸٦٤ – $y = \sin(\cos^۲ x) \times \cos(\sin^۲ x)$

۸٦٥ – $y = \sin^n x \cos nx$

۸٦٦ – $y = \sin[\sin(\sin x)]$

۸٦۷ – $y = \frac{\sin^۲ x}{\sin x^۲}$

۸٦۸ – $y = \frac{\cos x}{۲\sin^۲ x}$

۸٦۹ – $y = \frac{۱}{\cos^n x}$

۸۷۰ – $y = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$

۹

$y = \operatorname{tg}\frac{x}{۲} - \operatorname{ctg}\frac{x}{۲}$ ۸۷۱-

$y = \operatorname{tg} x - \frac{۱}{۳}\operatorname{tg}^{۳} x + \frac{۱}{۵}\operatorname{tg}^{۵} x$ ۸۷۲-

$y = ٤\sqrt[۳]{\operatorname{ctg}^{۲} x} + \sqrt[۳]{\operatorname{ctg}^{۸} x}$ ۸۷۳-

$y = \sec^{۲}\frac{x}{a} + \operatorname{cosec}^{۲}\frac{x}{a}$ ۸۷٤-

$y = \sin[\cos^{۲}(\operatorname{tg}^{۳} x)]$ ۸۷۵-

$y = e^{-x^{۲}}$ ۸۷۶-

$y = ۲^{\operatorname{tg}\frac{۱}{x}}$ ۸۷۷-

$y = e^{x}(x^{۲} - ۲x + ۲)$ ۸۷۸-

$y = \left[\frac{۱ - x^{۲}}{۲}\sin x - \frac{(۱ + x)^{۲}}{۲}\cos x\right]e^{-x}$ ۸۷۹-

$y = e^{x}\left(۱ + \operatorname{ctg}\frac{x}{۲}\right)$ ۸۸۰-

$y = \frac{\ln ۳ \times \sin x + \cos x}{۳^{x}}$ ۸۸۱-

$y = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{\sqrt{a^{۲} + b^{۲}}}$ ۸۸۲-

$y = e^{x} + e^{e^{x}} + e^{e^{e^{x}}}$ ۸۸۳-

$y = \left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b} \quad (b > ۰ \text{ ، } a > ۰)$ ۸۸٤-

$y = x^{a^{a}} + a^{x^{a}} + a^{a^{x}} \quad (a > ۰)$ ۸۸۵-

$y = \lg^{۳} x^{۲}$ ۸۸۶-

$y = \ln(\ln(\ln x))$ ۸۸۷-

$y = \ln(\ln^{۲}(\ln^{۳} x))$ ۸۸۸-

$y = \frac{۱}{۲}\ln(۱ + x) - \frac{۱}{٤}\ln(۱ + x^{۲}) - \frac{۱}{۲(۱ + x)}$ ۸۸۹-

$y = \frac{۱}{٤}\ln\frac{x^{۲} - ۱}{x^{۲} + ۱}$ ۸۹۰-

$y = \frac{۱}{٤(۱ + x^{٤})} + \frac{۱}{٤}\ln\frac{x^{٤}}{۱ + x^{٤}}$ ۸۹۱-

$y = \frac{۱}{۲\sqrt{۶}}\ln\frac{x\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}{x\sqrt{۳} + \sqrt{۲}}$ ۸۹۲-

$y = \frac{۱}{۱ - k}\ln\frac{۱ + x}{۱ - x} + \frac{\sqrt{k}}{۱ - k}\ln\frac{۱ + x\sqrt{k}}{۱ - x\sqrt{k}} \quad (۰ < k < ۱)$ ۸۹۳-

$y = \sqrt{x + ۱} - \ln(۱ + \sqrt{x + ۱})$ ۸۹٤-

$y = \ln(x + \sqrt{x^{۲} + ۱})$ ۸۹۵-

$y = x\ln(x + \sqrt{۱ + x^{۲}}) - \sqrt{۱ + x^{۲}}$ ۸۹۶-

٨٩٧ - $y = x\ln^{٢}(x+\sqrt{١+x^{٢}}) - ٢\sqrt{١+x^{٢}}\ln(x+\sqrt{١+x^{٢}}) + ٢x$

٨٩٨ - $y = \frac{x}{٢}\sqrt{x^{٢}+a^{٢}} + \frac{a^{٢}}{٢}\ln(x+\sqrt{x^{٢}+a^{٢}})$

٨٩٩ - $y = \frac{١}{٢\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$

٩٠٠ - $y = \frac{٢+٣x^{٢}}{x^{٤}}\sqrt{١-x^{٢}} + ٣\ln\frac{١+\sqrt{١-x^{٢}}}{x}$

٩٠١ - $y = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{٢}$ ٩٠٣ - $y = \frac{١}{٢}\operatorname{ctg}^{٢}x + \ln\sin x$

٩٠٢ - $y = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{٢}+\frac{\pi}{٤}\right)$ ٩٠٤ - $y = \ln\sqrt{\frac{١-\sin x}{١+\sin x}}$

٩٠٥ - $y = -\frac{\cos x}{٢\sin^{٢}x} + \ln\sqrt{\frac{١+\cos x}{\sin x}}$

٩٠٦ - $(٠ \leqslant |a| < |b|)$ $y = \ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^{٢}-a^{٢}}\sin x}{a+b\cos x}$

٩٠٧ - $y = \frac{١}{x}(\ln^{٣}x + ٣\ln^{٢}x + ٦\ln x + ٦)$

٩٠٨ - $y = \frac{١}{٤x^{٤}}\ln\frac{١}{x} - \frac{١}{١٦x^{٤}}$

٩٠٩ - $y = \frac{٣}{٢}\left(١-\sqrt[٣]{١+x^{٢}}\right)^{٢} + ٣\ln\left(١+\sqrt[٣]{١+x^{٢}}\right)$

٩١٠ - $y = \ln\left[\frac{١}{x} + \ln\left(\frac{١}{x} + \ln\frac{١}{x}\right)\right]$

٩١١ - $y = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$

٩١٢ - $y = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{٢} - \cos x \times \ln\operatorname{tg}x$

٩١٣ - $y = \arcsin\frac{x}{٢}$ ٩١٥ - $y = \operatorname{arctg}\frac{x^{٢}}{a}$

٩١٤ - $y = \arccos\frac{١-x}{\sqrt{٢}}$ ٩١٦ - $y = \frac{١}{\sqrt{٢}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{٢}}{x}$

٩١٧ - $y = \sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}$

٩١٨ - $y = x + \sqrt{١-x^{٢}} \times \arccos x$

۹۱۹- $y = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{۱+x}}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$

۹۲۰- $y=\arccos\frac{۱}{x}$

۹۲۱- $y=\arcsin(\sin x)$

۹۲۲- $y=\arccos(\cos^{۲}x)$

۹۲۳- $y=\arcsin(\sin x-\cos x)$

۹۲٤- $y=\arccos\sqrt{۱-x^{۲}}$

۹۲۵- $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{۱+x}{۱-x}$

۹۲٦- $y=\operatorname{arc\,ctg}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$

۹۲۷- $y=\frac{۲}{\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{۲}\right)\quad(a>b\geqslant ۰)$

۹۲۸- $y=\arcsin\frac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}$

۹۲۹- $y=\frac{۱}{\arccos^{۲}(x^{۲})}$

۹۳۰- $y=\operatorname{arc\,tg}x+\frac{۱}{۳}\operatorname{arc\,tg}(x^{۳})$

۹۳۱- $y=\ln(۱+\sin^{۲}x)-۲\sin x\times\operatorname{arc\,tg}(\sin x)$

۹۳۲- $y=\ln\left(\arccos\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)$

۹۳۳- $y=\ln\frac{x+a}{\sqrt{x^{۲}+b^{۲}}}+\frac{a}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b}$

۹۳٤- $y=\frac{x}{۲}\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}+\frac{a^{۲}}{۲}\arcsin\frac{x}{a}\qquad(a>۰)$

۹۳۵- $y=\frac{۱}{٦}\ln\frac{(x+۱)^{۲}}{x^{۲}-x+۱}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\operatorname{arc\,tg}\frac{۲x-۱}{\sqrt{۳}}$

۹۳٦- $y=\frac{۱}{٤\sqrt{۲}}\ln\frac{x^{۲}+x\sqrt{۲}+۱}{x^{۲}-x\sqrt{۲}+۱}-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{۲}}{x^{۲}-۱}$

۹۳۷- $y=x(\arcsin x)^{۲}+۲\sqrt{۱-x^{۲}}\arcsin x-۲x$

۹۳۸- $y=\frac{\arccos x}{x}+\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱-\sqrt{۱-x^{۲}}}{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}$

۹۳۹- $y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^{۲}-۱}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^{۲}-۱}}$

۹٤۰- $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{۱-x^{۲}}}+\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱-x}{۱+x}$

۹٤۱- $y=\frac{۱}{۱۲}\ln\frac{x^{٤}-x^{۲}+۱}{(x^{۲}+۱)^{۲}}-\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{۳}}{۲x^{۲}-۱}$

٩٤٢ – $y = \dfrac{x^{٦}}{١ + x^{١٢}} - \operatorname{arc\,ctg} x^{٦}$

٩٤٣ – $y = \ln \dfrac{١ - \sqrt[٣]{x}}{\sqrt{١ + \sqrt[٣]{x} + \sqrt[٣]{x^{٢}}}} + \sqrt{٣}\, \operatorname{arc\,tg} \dfrac{١ + ٢\sqrt[٣]{x}}{\sqrt{٣}}$

٩٤٤ – $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{١ + \sqrt{١ - x^{٢}}}$

٩٤٥ – $y = \operatorname{arc\,ctg} \dfrac{a - ٢x}{٢\sqrt{ax - x^{٢}}} \quad (a > ٠)$

٩٤٦ – $y = \dfrac{٣ - x}{٢} \sqrt{١ - ٢x - x^{٢}} + ٢ \arcsin \dfrac{١ + x}{\sqrt{٢}}$

٩٤٧ – $y = \dfrac{١}{٤} \ln \dfrac{\sqrt[٤]{١ + x^{٤}} + x}{\sqrt[٤]{١ + x^{٤}} - x} - \dfrac{١}{٢} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt[٤]{١ + x^{٤}}}{x}$

٩٤٨ – $y = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tg}^{٢} x)$

٩٤٩ – $y = \sqrt{١ - x^{٢}} \times \ln \sqrt{\dfrac{١ - x}{١ + x}} + \dfrac{١}{٢} \ln \dfrac{١ - \sqrt{١ - x^{٢}}}{١ + \sqrt{١ - x^{٢}}} +$
$+ \sqrt{١ - x^{٢}} + \arcsin x$

٩٥٠ – $y = x \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{١}{٢} \ln (١ + x^{٢}) - \dfrac{١}{٢} (\operatorname{arc\,tg} x)^{٢}$

٩٥١ – $y = \ln \left(e^{x} + \sqrt{١ + e^{٢x}}\right)$

٩٥٢ – $y = \operatorname{arc\,tg} \left(x + \sqrt{١ + x^{٢}}\right)$

٩٥٣ – $y = \arcsin \left(\dfrac{\sin a \sin x}{١ - \cos a \cos x}\right)$

٩٥٤ – $y = \dfrac{١}{٤\sqrt{٣}} \ln \dfrac{\sqrt{x^{٢} + ٢} - x\sqrt{٣}}{\sqrt{x^{٢} + ٢} + x\sqrt{٣}} + \dfrac{١}{٢} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{x^{٢} + ٢}}{x}$

٩٥٥ – $y = \dfrac{١}{٢\sqrt{٢}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x\sqrt{٢}}{\sqrt{١ + x^{٤}}} - \dfrac{١}{٤\sqrt{٢}} \ln \dfrac{\sqrt{١ + x^{٤}} - x\sqrt{٢}}{\sqrt{١ + x^{٤}} + x\sqrt{٢}}$

٩٥٦ – $y = \dfrac{x\sqrt{١ - x^{٢}}}{١ + x^{٢}} - \dfrac{٣}{\sqrt{٢}} \operatorname{arc\,ctg} \dfrac{x\sqrt{٢}}{\sqrt{١ - x^{٢}}}$

٩٥٧ – $y = \arccos (\sin x^{٢} - \cos x^{٢})$

۹۵۸ – $y=\operatorname{arc\,sin}(\sin x^{۲})+\operatorname{arc\,cos}(\cos x^{۲})$

۹۵۹ – $y=e^{m\operatorname{arc\,sin} x}[\cos(m\operatorname{arc\,sin} x)+\sin(m\operatorname{arc\,sin} x)]$

۹۶۰ – $y=\operatorname{arc\,tg} e^{x}-\ln\sqrt{\frac{e^{۲x}}{e^{۲x}+۱}}$

۹۶۰,۱ – $y=\sqrt{۱+\sqrt[۳]{۱+\sqrt[٤]{۱+x^{٤}}}}$

۹۶۰,۲ – $y=\operatorname{arc\,ctg}\frac{۱}{\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{۱}{x^{۲}}}}$

۹۶۰,۳ – $y=\ln^{۲}\left(\sec ۲\sqrt[۳]{x}\right)$

۹۶۱ – $y=x+x^{x}+x^{x^{x}}\qquad(x>۰)$

۹۶۲ – $y=x^{x^{a}}+x^{a^{x}}+a^{x^{x}}\qquad(x>۰\ \text{،}\ a>۰)$

۹۶۳ – $y=\sqrt[x]{x}\qquad(x>۰)$

۹۶٤ – $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$

۹۶۵ – $y=(\ln x)^{x}:x^{\ln x}$

۹۶۵,۱ – $y=\left[\frac{\operatorname{arc\,sin}(\sin^{۲}x)}{\operatorname{arc\,cos}(\cos^{۲}x)}\right]^{\operatorname{arc\,tg}^{۲}x}$

۹۶۶ – $y=\log_{x}e$

۹۶۷ – $y=\ln(\operatorname{ch} x)+\frac{۱}{۲\operatorname{ch}^{۲}x}$

۹۶۸ – $y=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^{۲}x}-\ln\left(\operatorname{cth}\frac{x}{۲}\right)$

۹۶۹ – $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th} x)$

۹۷۰ – $y=\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{۱}{\operatorname{ch} x}\right)$

۹۷۱ – $y=\frac{b}{a}x+\frac{۲\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\frac{x}{۲}\right)\ (۰\leqslant|b|<a)$

۹۷۲ – مشتق تابع

$$y=\ln\left(\cos^{۲}x+\sqrt{۱+\cos^{٤}x}\right)$$

را با وارد کردن متغیر واسطهٔ $u=\cos^{۲}x$ پیدا کنید .

با روش ذکر شده در مثال ۹۷۲ مطلوبست محاسبهٔ مشتق توابع زیر :

۹۷۳ - $$y=(\arccos x)^{۲}\left[\ln^{۲}(\arccos x)-\ln(\arccos x)+\frac{۱}{۲}\right]$$

۹۷٤ - $$y=\frac{۱}{۲}\operatorname{arctg}\left(\sqrt[٤]{۱+x^{٤}}\right)+\frac{۱}{٤}\ln\frac{\sqrt[٤]{۱+x^{٤}}+۱}{\sqrt{۱+x^{٤}}-۱}$$

۹۷۵ - $$y=\frac{e^{-x^{۲}}\arcsin\left(e^{-x^{۲}}\right)}{\sqrt{۱-e^{-۲x^{۲}}}}+\frac{۱}{۲}\ln\left(۱-e^{-۲x^{۲}}\right)$$

۹۷٦ - $$y=\frac{a^{x}}{۱+a^{۲x}}-\frac{۱-a^{۲x}}{۱+a^{۲x}}\operatorname{arcctg}a^{-x}$$

۹۷۷ - مطلوبست محاسبهٔ مشتق و رسم نمودار توابع و نمودار مشتق آنها در صورتیکه :

الف) $y=|x|$ ؛ ب) $y=x|x|$ ؛ پ) $y=\ln|x|$

۹۷۸ - مشتق توابع زیر را پیدا کنید :

الف) $y=|(x-۱)^{۲}(x+۱)^{۳}|$ ؛ ب) $y=|\sin^{۳}x|$ ؛ پ) $y=\arccos\frac{۱}{|x|}$ ؛ ت) $y=[x]\sin^{۲}\pi x$

مطلوبست محاسبهٔ مشتق و رسم نمودار توابع و نمودار مشتق آنها در صورتیکه :

۹۷۹ - $$y=\begin{cases}۱-x & \text{بازای}\quad -\infty<x<۱\\(۱-x)(۲-x) & \text{بازای}\quad ۱\leqslant x\leqslant ۲\\-(۲-x) & \text{بازای}\quad ۲<x<+\infty\end{cases}$$

۹۸۰ - $$y=\begin{cases}(x-a)^{۲}(x-b)^{۲} & \text{بازای}\quad a\leqslant x\leqslant b\\ ۰ & \text{خارج از قطعهٔ}\quad [a,b]\end{cases}$$

۹۸۱ - $$y=\begin{cases}x & \text{بازای}\quad x<۰\\\ln(۱+x) & \text{بازای}\quad x\geqslant ۰\end{cases}$$

۹۸۲ - $$y=\begin{cases}\operatorname{arctg}x & \text{بازای}\quad |x|\leqslant ۱\\\frac{\pi}{٤}\operatorname{sgn}x+\frac{x-۱}{۲} & \text{بازای}\quad |x|>۱\end{cases}$$

۹۸۳ - $$y=\begin{cases}x^{۲}e^{-x^{۲}} & \text{بازای}\quad |x|\leqslant ۱\\\frac{۱}{e} & \text{بازای}\quad |x|>۱\end{cases}$$

۹۸۴ – مشتق لگاریتم یک تابع مفروض را مشتق لگاریتمی این تابع مینامند :

$$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

مطلوبست محاسبهٔ مشتق لگاریتمی تابع y در صورتیکه :

الف) $y=x\sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}}$ ؛ ب) $y=\frac{x^{۲}}{۱-x}\sqrt[۳]{\frac{۳-x}{(۳+x)^{۲}}}$ ؛

پ) $y=(x-a_{۱})^{\alpha_{۱}}(x-a_{۲})^{\alpha_{۲}}\dots(x-a_{n})^{\alpha_{n}}$ ؛

ت) $y=\left(x+\sqrt{۱+x^{۲}}\right)^{n}$.

۹۸۵ – فرض کنیم $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ توابع دیفرانسیل‌پذیری از x باشند . مطلوبست محاسبهٔ مشتق تابع y در صورتیکه :

الف) $y=\sqrt{\varphi^{۲}(x)+\psi^{۲}(x)}$ ؛ ب) $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ؛

پ) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\quad(\psi(x)>۰\ ؛\ \varphi(x)\neq ۰)$

ت) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)\quad(\psi(x)>۰\ ؛\ \varphi(x)>۰)$

۹۸۶ – مطلوبست محاسبهٔ y' اگر :

الف) $y=f(x^{۲})$ ؛ پ) $y=f(e^{x})\times e^{f(x)}$ ؛

ب) $y=f(\sin^{۲}x)+f(\cos^{۲}x)$ ؛ ت) $y=f\{f[f(x)]\}$

که در آن $f(u)$ تابعی است دیفرانسیل‌پذیر .

۹۸۶٫۱ – مطلوبست محاسبهٔ $f'(۰)$ اگر :

$$f(x)=x(x-۱)(x-۲)\dots(x-۱۰۰۰)$$

۹۸۷ – قاعدهٔ مشتق گیری دترمینان مرتبهٔ n–ام زیر را اثبات کنید :

$$\begin{vmatrix} f_{۱۱}(x)\,f_{۱۲}(x)\,\dots\,f_{۱n}(x) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_{k۱}(x)\,f_{k۲}(x)\,\dots\,f_{kn}(x) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_{n۱}(x)\,f_{n۲}(x)\,\dots\,f_{nn}(x) \end{vmatrix}'=\sum_{k=۱}^{n}\begin{vmatrix} f_{۱۱}(x)\,f_{۱۲}(x)\,\dots\,f_{۱n}(x) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f'_{k۱}(x)\,f'_{k۲}(x)\,\dots\,f'_{kn}(x) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_{n۱}(x)\,f_{n۲}(x)\,\dots\,f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

۹۸۸ – مطلوبست محاسبهٔ $F'(x)$ اگر

$$F(x)=\begin{vmatrix} x-۱ & ۱ & ۲ \\ -۳ & x & ۳ \\ -۲ & -۳ & x+۱ \end{vmatrix}$$

۹۸۹ – مطلوبست محاسبهٔ $F'(x)$ اگر

$$F(x)=\begin{vmatrix} x & x^{۲} & x^{۳} \\ ۱ & ۲x & ۳x^{۲} \\ ۰ & ۲ & ۶x \end{vmatrix}$$

۹۹۰ – نمودار تابعی داده شده است . نمودار تقریبی مشتق آنرا رسم کنید .

۹۹۱ – نشان دهید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}\sin\dfrac{۱}{x} & \text{بازای} \quad x\neq ۰ \\ ۰ & \text{بازای} \quad x=۰ \end{cases}$$

دارای مشتق ناپیوسته است .

۹۹۲ – با چه شرطی تابع

$$f(x)=x^{n}\sin\frac{۱}{x} \quad (x\neq ۰) \quad \text{و} \quad f(۰)=۰$$

الف) بازای $x=۰$ پیوسته است ؛
ب) بازای $x=۰$ دیفرانسیل‌پذیر است ؛
پ) بازای $x=۰$ دارای مشتق پیوسته است ؟

۹۹۳ – با چه شرطی تابع

$$f(x)=|x|^{n}\sin\frac{۱}{|x|^{m}} \quad (x\neq ۰) \quad \text{و} \quad f(۰)=۰ \quad (m>۰)$$

دارای : الف) مشتق کراندار در همسایگی مبدأ مختصات است ؛ ب) مشتق ناکراندار در این همسایگی است ؟

۹۹٤ – مطلوبست محاسبهٔ $f'(a)$ اگر

$$f(x)=(x-a)\,\varphi(x)$$

که در آن تابع $\varphi(x)$ بازای $x=a$ پیوسته است .

۹۹۵ – نشان دهید که تابع

$$f(x)=|x-a|\,\varphi(x)$$

که در آن $\varphi(x)$ تابع پیوسته‌ای است و $\varphi(a)\neq ۰$ ، در نقطهٔ a دارای مشتق نیست .

مشتق‌های یکسویی $f'_{-}(a)$ و $f'_{+}(a)$ چقدر است؟

۹۹۶– تابع پیوسته‌ای ذکر کنید که در نقاط مفروض $a_{۱}, a_{۲} \dots a_n$ دارای مشتق نباشد .

۹۹۷– نشان دهید که تابع

$$f(x) = x^{۲}\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| \quad (x \neq ۰) \quad \text{و} \quad f(۰) = ۰$$

در همسایگی دلخواه نقطهٔ $x = ۰$ دارای نقاط دیفرانسیل‌ناپذیری میباشد ولی در خود این نقطه دیفرانسیل‌پذیر است .

شکل تقریبی نمودار این تابع را رسم کنید .

۹۹۸– نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲}, & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ ۰, & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

فقط بازای $x = ۰$ دارای مشتق است .

۹۹۹– دیفرانسیل‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید :

الف) $y = |(x-۱)(x-۲)^{۲}(x-۳)^{۳}|$ ؛

ب) $y = |\cos x|$ ؛

پ) $y = |\pi^{۲} - x^{۲}|\sin^{۲} x$ ؛

ت) $y = \arcsin(\cos x)$ ؛

ث) $$y = \begin{cases} \frac{x-۱}{٤}(x+۱)^{۲} & \text{بازای } |x| \leqslant ۱ \\ |x| - ۱ & \text{بازای } |x| > ۱ \end{cases}$$

برای تابع $f(x)$ مطلوبست تعیین مشتق چپ $f'_-(x)$ و مشتق راست $f'_+(x)$ در صورتیکه :

۱۰۰۰– $f(x) = |x|$

۱۰۰۱– $f(x) = [x]\sin\pi x$

۱۰۰۲– $f(x) = x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| \quad (x \neq ۰) \quad \text{و} \quad f(۰) = ۰$

۱۰۰۳– $f(x) = \sqrt{\sin x^{۲}}$

۱۰۰٤– $f(x) = \dfrac{x}{۱ + e^{\frac{۱}{x}}} \quad (x \neq ۰), \; f(۰) = ۰$

۱۰۰۵– $f(x) = \sqrt{۱ - e^{-x^{۲}}}$

۱۰۰۶– $f(x) = |\ln|x|| \quad (x \neq ۰)$

۱۰۰۷ — $f(x) = \arcsin \frac{۲x}{۱ + x^{۲}}$

۱۰۰۸ — $f(x) = (x - ۲) \operatorname{arc\,tg} \frac{۱}{x - ۲} \quad (x \neq ۲), \quad f(۲) = ۰$

۱۰۰۹ — نشان دهید که تابع $f(x) = x \sin \frac{۱}{x}$ بازای $x \neq ۰$ و $f(۰) = ۰$ ، بازای $x = ۰$ پیوسته است ولی در این نقطه دارای مشتق چپ و راست نیست .

۱۰۰۹٫۱ — فرض کنیم $x_۰$ نقطهٔ انفصال نوع اول تابع $f(x)$ باشد . عبارات

$$f'_{-}(x_۰) = \lim_{h \to -۰} \frac{f(x_۰ + h) - f(x_۰ - ۰)}{h}$$

و

$$f'_{+}(x_۰) = \lim_{h \to +۰} \frac{f(x_۰ + h) - f(x_۰ + ۰)}{h}$$

را مشتقات یکسویی (به ترتیب چپ و راست) تعمیم یافتهٔ تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_۰$ اصطلاح میکنند .

مطلوبست تعیین $f'_{-}(x_۰)$ و $f'_{+}(x_۰)$ در نقطهٔ انفصال $x_۰$ تابع $f(x)$ در صورتیکه :

الف) $f(x) = \frac{\sqrt{x^{۲} + x^{۳}}}{x}$ ؛ ب) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{۱ + x}{۱ - x}$ ؛

پ) $f(x) = \frac{۱}{۱ + e^{\frac{۱}{x}}}$

۱۰۱۰ — فرض کنیم

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲}, & \text{اگر} \quad x \leqslant x_۰ \\ ax + b, & \text{اگر} \quad x > x_۰ \end{cases}$$

ضرایب a و b را چگونه باید اختیار نمود تا در نقطهٔ $x = x_۰$ ، تابع $f(x)$ پیوسته و دیفرانسیل‌پذیر باشد ؟

۱۰۱۱ — فرض کنیم

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{اگر} \quad x \leqslant x_۰ \\ ax + b, & \text{اگر} \quad x > x_۰ \end{cases}$$

که در آن تابع $f(x)$ بازای $x=x_0$ دیفرانسیل‌پذیر از چپ است .
ضرایب a و b را چگونه باید اختیار نمود تا تابع $F(x)$ در نقطهٔ $x=x_0$ پیوسته و دیفرانسیل‌پذیر باشد ؟

۱۰۱۲ – بر روی قطعهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ التصاق دو نیم خط

$$y=k_1(x-a)\quad(-\infty<x<a) \quad \text{و} \quad y=k_2(x-b)\quad(b<x<+\infty)$$

را بکمک سهمی درجه سوم

$$y=A(x-a)(x-b)(x-c)$$

(که در آن پارامترهای A و c باید تعیین شوند) بسازید .

۱۰۱۳ – قسمت منحنی $(|x|>c)$ $y=\frac{m^2}{|x|}$ را با سهمی

$$y=a+bx^2 \quad (|x|\leqslant c)$$

(که در آن a و b پارامترهای نامعلومی میباشند) تکمیل کنید بطوریکه منحنی حاصل صاف باشد .

۱۰۱۴ – آیا میتوان گفت که مجموع

$$F(x)=f(x)+g(x)$$

در نقطهٔ $x=x_0$ دارای مشتق نیست در صورتیکه : الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 دارای مشتق بوده و تابع $g(x)$ در این نقطه دارای مشتق نباشد ؛
ب) هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ x_0 دارای مشتق نباشند ؟

۱۰۱۵ – آیا میتوان گفت که حاصل ضرب

$$F(x)=f(x)\,g(x)$$

در نقطهٔ $x=x_0$ دارای مشتق نیست در صورتیکه : الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ x_0 دارای مشتق باشد و تابع $g(x)$ در این نقطه دارای مشتق نباشد ؛
ب) هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطهٔ x_0 دارای مشتق نباشد ؟
مثالهای زیر را در نظر بگیرید : الف) $f(x)=x$ ؛ $g(x)=|x|$ ؛
ب) $f(x)=|x|$ ؛ $g(x)=|x|$ که در آن $x_0=0$.

۱۰۱۶ – راجع به دیفرانسیل‌پذیری تابع

$$F(x)=f(g(x))$$

در نقطهٔ مفروض $x=x_0$ چه میتوان گفت در صورتیکه : الف) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=g(x_0)$ دارای مشتق باشد و تابع $g(x)$ در نقطه $x=x_0$ دارای

مشتق نباشد ؛ ب) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = g(x_0)$ دارای مشتق نباشد و تابع $g(x)$ در نقطه $x = x_0$ دارای مشتق باشد ؛ پ) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = g(x_0)$ و تابع $g(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ دارای مشتق نباشند ؟

مثال‌های زیر را در نظر بگیرید :

الف) $f(x) = x^2$ ، $g(x) = |x|$ ؛ ب) $f(x) = |x|$ ، $g(x) = x^2$ ؛

پ) $f(x) = 2x + |x|$ ، $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$ که در آن $x_0 = 0$.

۱۰۱۷ – در کدام نقاط نمودار تابع

$$y = x + \sqrt[3]{\sin x}$$

دارای مماس قایم است ؟

این نمودار را رسم کنید .

۱۰۱۸ – آیا تابع $f(x)$ در نقطهٔ انفصال خود میتواند دارای : الف) مشتق متناهی ؛ ب) مشتق نامتناهی باشد ؟

مثال $f(x) = \operatorname{sgn} x$ را در نظر بگیرید .

۱۰۱۹ – اگر تابع $f(x)$ در بازهٔ محدود (a, b) دیفرانسیل‌پذیر باشد و

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

آیا حتماً

۱) $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \infty$ ؛ ۲) $\overline{\lim\limits_{x \to a}} |f'(x)| = \infty$ ؟

مثال $f(x) = \frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$ بازای $x \to 0$ را در نظر بگیرید .

۱۰۲۰ – اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ محدود (a, b) دیفرانسیل‌پذیر باشد و

$$\lim_{x \to a} f'(x) = \infty$$

آیا حتماً

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ ؟}$$

مثال $f(x) = \sqrt[3]{x}$ بازای $x \to 0$ را در نظر بگیرید .

۱۰۲۱ – فرض کنیم تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $(x_0, +\infty)$ دیفرانسیل‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ وجود داشته باشد ، در این صورت آیا از این جا نتیجه میشود که $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ وجود دارد ؟

مثال زیر را در نظر بگیرید :

$$f(x) = \frac{\sin(x^{۲})}{x}$$

۱۰۲۲ – فرض کنیم تابع کراندار $f(x)$ در بازهٔ $(x_{۰}\ ,\ +\infty)$ دیفرانسیل‌پذیر بوده و $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ وجود داشته باشد ، آیا از این جا نتیجه میشود که $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ متناهی یا نامتناهی وجود دارد ؟

مثال زیر را در نظر بگیرید :

$$f(x) = \cos(\ln x)$$

۱۰۲۳ – آیا از طرفین نامساویهای تابعی میتوان مشتق گرفت ؟

۱۰۲۴ – دستورهای محاسبهٔ مجموعهای زیر را بدست آورید :

$$P_n = ۱ + ۲x + ۳x^{۲} + \ldots + nx^{n-۱}$$

و

$$Q_n = ۱^{۲} + ۲^{۲}x + ۳^{۲}x^{۲} + \ldots + n^{۲}x^{n-۱}$$

راهنمایی – $(x + x^{۲} + \ldots + x^n)'$ را در نظر بگیرید .

۱۰۲۵ – دستورهای محاسبهٔ مجموعهای زیر را بدست آورید :

$$S_n = \sin x + \sin ۲x + \ldots + \sin nx$$

و

$$T_n = \cos x + ۲\cos ۲x + \ldots + n\cos nx$$

۱۰۲۵٫۱ – دستور محاسبهٔ مجموع زیر را بدست آورید :

$$S_n = \operatorname{ch} x + ۲\operatorname{ch} ۲x + \ldots + n\operatorname{ch} nx$$

راهنمایی – $S_n = (\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} ۲x + \ldots + \operatorname{sh} nx)'$

۱۰۲۶ – با استفاده از اتحاد

$$\cos\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۴}\ \ldots\ \cos\frac{x}{۲^n} = \frac{\sin x}{۲^n \sin\frac{x}{۲^n}}$$

دستور محاسبهٔ مجموع زیر را بدست آورید :

$$S_n = \frac{۱}{۲}\operatorname{tg}\frac{x}{۲} + \frac{۱}{۴}\operatorname{tg}\frac{x}{۴} + \ldots + \frac{۱}{۲^n}\operatorname{tg}\frac{x}{۲^n}$$

۱۰۲۷ – ثابت کنید که مشتق یک تابع دیفرانسیل‌پذیر زوج ، یک تابع فرد و مشتق یک تابع دیفرانسیل‌پذیر فرد یک تابع زوج است .
این حقیقت را تعبیر هندسی کنید .

۱۰۲۸ – ثابت کنید که مشتق یک تابع دیفرانسیل‌پذیر دوره‌ای یک تابع دوره‌ای با همان دوره است .

۱۰۲۹ – اگر شعاع دایره‌ای بطور یکنواخت با سرعت ۲cm/sec افزایش یابد ، در آن صورت سرعت افزیش مساحت دایره در لحظه‌ایکه $R =$ ۱۰ cm گردد چقدر خواهد بود ؟

۱۰۳۰ – اگر یک ضلع مربع مستطیل با سرعت ۱m/sec تقلیل و ضلع دیگر آن با سرعت ۲m/sec افزایش یابد ، در آن صورت سرعت تغییر مساحت و قطر مربع مستطیل در لحظه‌ایکه ضلع اولی $x =$ ۲۰m و ضلع دومی $y =$ ۱۵m گردد چقدر خواهد بود ؟

۱۰۳۱ – از یک بندر و در یک زمان کشتی A در سمت شمال و کشتی B در سمت مشرق حرکت میکنند . فاصلهٔ بین آنها با چه سرعتی ترقی میکند در صورتیکه سرعت کشتی A برابر با ۳۰km/h و سرعت کشتی B برابر ۴۰km/h میباشد ؟

۱۰۳۲ – فرض کنیم

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{اگر} \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۲ \\ ۲x - ۲, & \text{اگر} \quad ۲ < x < +\infty \end{cases}$$

و $S(x)$ مساحت سطح محدود به منحنی $y = f(x)$ و محور Ox و خط عمود بر محور Ox و مار بر نقطهٔ $x\ (x \geqslant ۰)$ باشد .
عبارت تحلیلی تابع $S(x)$ را تشکیل دهید و مشتق $S'(x)$ را محاسبه و نمودار تابع $y = S'(x)$ را رسم کنید .

۱۰۳۳ – تابع $S(x)$ عبارتست از مساحت سطح محدود به کمان دایرهٔ $y = \sqrt{a^۲ - x^۲}$ و محور Ox و دو عمود بر محور Ox مار بر نقاط ۰ و $x\ (|x| \leqslant a)$.
عبارت تحلیلی تابع $S(x)$ را تشکیل داده و مشتق $S'(x)$ آنرا محاسبه و نمودار این مشتق را رسم کنید .

بخش ۲ — مشتق توابع معکوس . مشتق توابع پارامتری . مشتق توابع ضمنی

بند ۱ — مشتق تابع معکوس . تابع دیفرانسیل‌پذیر $y = f(x)\ (a < x < b)$ با مشتق $f'(x) \neq ۰$ دارای تابع معکوس پیوستهٔ تک مقداری $x = f^{-۱}(y)$ است ، ضمناً تابع معکوس نیز دیفرانسیل‌پذیر و دستور زیر درست است :

$$x'_y = \frac{۱}{y'_x}$$

بند ۲ — مشتق تابع پارامتری . دستگاه معادلات

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad (\alpha < t < \beta)$$

که در آن $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ توابع دیفرانسیل‌پذیر و $\varphi'(t) \neq ۰$ است و y را در حوزه‌ای بعنوان تابع تک مقداری دیفرانسیل‌پذیر از x :

$$y = \psi(\varphi^{-۱}(x))$$

مشخص میسازد . بعلاوه مشتق این تابع از دستور زیر بدست میاید :

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

بند ۳ — مشتق تابع ضمنی . اگر تابع دیفرانسیل‌پذیر $y = y(x)$ در معادلهٔ

$$F(x, y) = ۰$$

صادق باشد در این صورت مشتق $y' = y'(x)$ این تابع ضمنی را میتوان از معادلهٔ

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = ۰$$

که در آن $F(x, y)$ بعنوان تابع مرکبی از متغیر x در نظر گرفته میشود بدست آورد .

(برای توضیح بیشتر در بارهٔ مشتق‌گیری توابع ضمنی قسمت دوم فصل ۶ بخش ۳ را ببینید) .

۱۰۳٤ — نشان دهید که تابع تک‌مقداری $y = y(x)$ تعریف شده با معادلهٔ

$$y^۳ + ۳y = x$$

وجود دارد . مشتق y'_x آنرا بدست آورید .

۱۰۳۵ — نشان دهید که تابع تک مقداری $y = y(x)$ تعریف شده با معادلهٔ

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (۰ \leqslant \varepsilon < ۱)$$

وجود دارد . مشتق y'_x آنرا بدست آورید .

۱۰۳۶ – مطلوبست تعیین حوزهٔ وجود تابع معکوس $x = x(y)$ و محاسبهٔ مشتق آن در صورتیکه :

الف) $y = x + \ln x \quad (x > ۰)$ ؛ پ) $y = \operatorname{sh} x$ ؛

ب) $y = x + e^{x}$ ؛ ت) $y = \operatorname{th} x$.

۱۰۳۷ – شاخه‌های پیوستهٔ تک‌مقداری تابع معکوس $x = x(y)$ را جدا نموده و مشتق آنها را محاسبه و نمودار آنها را رسم کنید در صورتیکه :

الف) $y = ۲x^{۲} - x^{۴}$ ؛ ب) $y = \frac{x^{۲}}{۱ + x^{۲}}$ ؛

پ) $y = ۲e^{-x} - e^{-۲x}$

۱۰۳۸ – طرح نمودار تابع $y = y(x)$ را رسم و مشتق y'_x آنرا پیدا کنید در صورتیکه $x = -۱ + ۲t - t^{۲}$ ؛ $y = ۲ - ۳t + t^{۳}$. مقدار $y'_x(x)$ بازای $x = ۰$ و $x = -۱$ چقدر است ؟ در کدام نقطهٔ $M(x, y)$ مشتق $y'_x(x) = ۰$ ؟

مشتق y'_x توابع زیر را پیدا کنید (پارامترها مثبتند) :

۱۰۳۹ – $y = \sqrt{۱ - \sqrt[۳]{t}}, \qquad x = \sqrt[۳]{۱ - \sqrt{t}},$

۱۰۴۰ – $y = \cos^{۲} t, \qquad x = \sin^{۲} t,$

۱۰۴۱ – $y = b \sin t, \qquad x = a \cos t,$

۱۰۴۲ – $y = b \operatorname{sh} t, \qquad x = a \operatorname{ch} t,$

۱۰۴۳ – $y = a \sin^{۳} t, \qquad x = a \cos^{۳} t,$

۱۰۴۴ – $y = a(۱ - \cos t), \qquad x = a(t - \sin t),$

۱۰۴۵ – $y = e^{۲t} \sin^{۲} t, \qquad x = e^{۲t} \cos^{۲} t,$

۱۰۴۶ – $y = \arccos \frac{۱}{\sqrt{۱ + t^{۲}}}, \qquad x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{۱ + t^{۲}}},$

۱۰۴۷ – نشان دهید که تابع $y = y(x)$ که با دستگاه معادلات زیر مشخص میگردد

$$x = ۲t + |t|, \qquad y = ۵t^{۲} + ۴t|t|$$

بازای $t = ۰$ دیفرانسیل‌پذیر است منتها مشتق آن را در این نقطه با دستورهای معمولی نمیتوان بدست آورد .

مشتقات y'_x توابع زیر را که بصورت ضمنی داده شده‌اند پیدا کنید :

۱۰۴۸ – $x^{۲} + ۲xy - y^{۲} = ۲x$

مقدار مشتق y' بازای $x = ۲$ و $y = ۴$ و بازای $x = ۲$ و $y = ۰$ چقدر است ؟

۱۰۴۹ – $y^{۲} = ۲px$ (سهمی)

۱۰۵۰ – $\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$ (بیضی)

۱۰۵۱ – $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (سهمی)

۱۰۵۲ – $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}}$ (آسترویید)

۱۰۵۳ – $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ (حلزونی لگاریتمی)

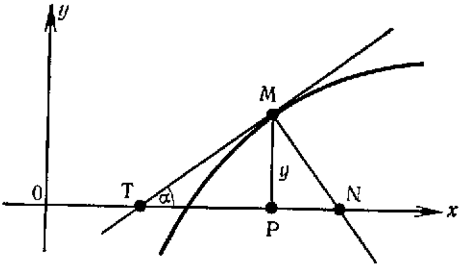
۱۰۵۴ – مطلوبست محاسبهٔ y'_x در صورتیکه :

الف) $r = a\varphi$ (حلزونی ارشمیدس) ؛
ب) $r = a(۱+\cos\varphi)$ (کاردیویید) ؛
پ) $r = ae^{m\varphi}$ (حلزونی لگاریتمی)

که در آن $r = \sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ و $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ مختصات قطبی میباشند .

بخش ۳ — معنای هندسی مشتق .

بند ۱ — معادلات مماس و قائم . معادلات مماس MT و قائم MN بر نمودار تابع دیفرانسیل‌پذیر $y = f(x)$ در نقطهٔ $M(x, y)$ (شکل ۷) به ترتیب عبارتند از :



شکل ۷

$$Y - y = y'(X - x)$$

و

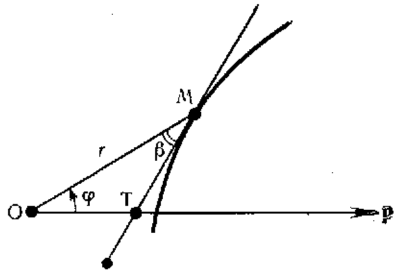
$$Y - y = -\frac{۱}{y'}(X - x)$$

که در آن X ، Y مختصات جاری مماس یا قائم و $y' = f'(x)$ مقدار مشتق در نقطهٔ تماس است .

بند ۲ – قطعات مماس و قائم . منظور از قطعات مماس و قائم : تحت مماس PT ؛ تحت قائم PN ، مماس MT ، قائم MN میباشد (شکل ۷) . با توجه به $\operatorname{tg}\alpha = y'$ برای آنها مقادیر زیر بدست میآید :

$$PN = |yy'| \qquad ، \quad PT = \left|\frac{y}{y'}\right|$$

$$MN = |y|\sqrt{۱ + y'^{۲}} \quad ، \; MT = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{۱ + y'^{۲}}$$



شکل ۸

بند ۳ – زاویهٔ بین مماس و شعاع حامل نقطهٔ تماس . اگر $r = f(\varphi)$ معادلهٔ منحنی در دستگاه مختصات قطبی و β زاویهٔ حاصله از مماس MT و شعاع حامل OM نقطهٔ تماس M باشد (شکل ۸) در اینصورت

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{r'}$$

۱۰۵۵ – معادلات مماس و قائم بر منحنی

$$y = (x + ۱)\sqrt[۳]{۳ - x}$$

را در نقاط : الف) $A(-۱, ۰)$ ؛ ب) $B(۲, ۳)$ ؛ پ) $C(۳, ۰)$ بنویسید .

۱۰۵۶ – در کدام نقاط منحنی

$$y = ۲ + y - x^{۲}$$

مماس بر آن الف) موازی محور Ox است ؛ ب) موازی نیمساز ربع اول است ؟

۱۰۵۷ – ثابت کنید که سهمی

$$y = a(x - x_۱)(x - x_۲) \quad (x_۱ < x_۲,\ a \neq ۰)$$

محور Ox را تحت زوایای متساوی α و β $\left(۰ < \beta < \frac{\pi}{۲} \text{ و } ۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}\right)$ قطع میکند.

۱۰۵۸ – قسمتهائی را از منحنی

$$y = ۲\sin x \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

تعیین کنید که در آن «شیب منحنی» (یعنی $|y'|$) از ۱ تجاوز کند.

۱۰۵۹ – تفاضل توابع

$$y = x \quad \text{و} \quad y_۱ = x + ۰{,}۰۱ \sin ۱۰۰۰\,\pi x$$

از ۰٫۰۱ بیشتر نیست. راجع به تفاضل ماگزیمال مشتق‌های این توابع چه میتوان گفت؟

نمودار نظیر آنها را رسم کنید.

۱۰۶۰ – منحنی

$$y = \ln x$$

محور Ox را تحت چه زاویه‌ای قطع میکنید؟

۱۰۶۱ – تحت چه زاویه‌هائی منحنی‌های

$$y = x^۲ \quad \text{و} \quad x = y^۲$$

یکدیگر را قطع میکنند؟

۱۰۶۲ – تحت چه زوایائی منحنی‌های

$$y = \cos x \quad \text{و} \quad y = \sin x$$

یکدیگر را قطع میکنند؟

۱۰۶۳ – بازای چه انتخابی از پارامتر n منحنی

$$y = \operatorname{arc\,tg} nx \quad (n > ۰)$$

محور Ox را تحت زاویهٔ بزرگتر از ۸۹° قطع میکند؟

۱۰۶۳٫۱ – نشان دهید که منحنی

$$y = |x|^\alpha$$

الف) بازای $۰ < \alpha < ۱$ بر محور Oy مماس است؛

ب) بازای $۱ < \alpha < +\infty$ بر محور Ox مماس است.

١٠٦٣,٢ – نشان دهید که منحنی

$$y=\begin{cases} |x|^{\alpha}, & x\neq ٠ \text{ اگر } \\ ١, & x=٠ \text{ اگر } \end{cases}$$

بر محور Oy در نقطهٔ $A(٠ , ١)$ مماس است .

١٠٦٤ – زاویهٔ بین مماس‌های چپ و راست بر منحنی‌های :

الف) $y=\sqrt{١-e^{-a^٢x^٢}}$ در نقطهٔ $x=٠$ ؛

ب) $y=\arcsin\frac{٢x}{١+x^٢}$ در نقطهٔ $x=١$ ، را تعیین کنید .

١٠٦٥ – نشان دهید که مماس بر حلزونی لگاریتمی

$$r=ae^{m\varphi}$$

(a و m ثابتند) با شعاع حامل نقطهٔ تماس زاویهٔ ثابتی میسازد .

١٠٦٦ – با تعیین طول تحت مماس بر منحنی

$$y=ax^{n}$$

روشی برای رسم مماس بر این منحنی بیان کنید .

١٠٦٧ – در سهمی

$$y^٢=٢px$$

ثابت کنید که :

الف) تحت مماس مساوی دو برابر طول نقطهٔ تماس است ؛ ب) تحت قائم مقدار ثابتی دارد . روشی برای رسم مماس بر سهمی بیان کنید .

١٠٦٨ – ثابت کنید که منحنی نمایی

$$y=a^{x} \quad (a>٠)$$

دارای تحت مماس ثابتی است . روشی برای رسم مماس بر منحنی نمایی بیان کنید .

١٠٦٩ – طول قائم بر منحنی زنجیری

$$y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$$

را در نقطهٔ دلخواه آن $M(x_{\cdot}, y_{\cdot})$ تعیین کنید .

١٠٧٠ – ثابت کنید که در آسترویید

$$x^{\frac{٢}{٣}}+y^{\frac{٢}{٣}}=a^{\frac{٢}{٣}} \quad (a>٠)$$

طول قطعهٔ مماس محدود به محورهای مختصات مقدار ثابتی است .

۱۰۷۱ – بازای چه رابطه‌ای بین ضرایب a ، b و c سهمی

$$y = ax^۲ + bx + c$$

بر محور Ox مماس میشود ؟

۱۰۷۲ – بازای چه شرطی سهمی درجهٔ سوم

$$y = x^۳ + px + q$$

بر محور Ox مماس است ؟

۱۰۷۳ – بازای چه مقدار پارامتر a سهمی

$$y = ax^۲$$

بر منحنی $y = \ln x$ مماس است ؟

۱۰۷٤ – ثابت کنید که منحنی‌های

$$y = f(x) \quad (f(x) > ۰)$$

و

$$y = f(x) \sin ax$$

که در آن $f(x)$ تابعی است دیفرانسیل‌پذیر ، در نقاط مشترک بر هم مماس هستند .

۱۰۷۵ – نشان دهید که دسته هذلولی‌های

$$x^۲ - y^۲ = a$$

و

$$xy = b$$

شبکهٔ متعامد تشکیل میدهند یعنی منحنی‌های این دسته‌ها تحت زاویهٔ قائم متقاطعند .

۱۰۷٦ – ثابت کنید که دسته سهمیهای

$$y^۲ = ٤a(a - x) \quad (a > ۰)$$

و

$$y^۲ = ٤b(b + x) \quad (b > ۰)$$

شبکهٔ متعامدی تشکیل میدهند .

۱۰۷۷ – معادلات مماس و قائم بر منحنی

$$x = ۲t - t^۲, \quad y = ۳t - t^۳$$

را در نقاط : الف) $t = ۰$ ؛ ب) $t = ۱$ بنویسید .

۱۰۷۸ – معادلات مماس و قائم بر منحنی

$$x = \frac{۲t + t^{۲}}{۱ + t^{۳}}, \quad y = \frac{۲t - t^{۲}}{۱ + t^{۳}}$$

را در نقاط : الف) $t = ۰$ ؛ ب) $t = ۱$ ؛ پ) $t = \infty$ بنویسید .

۱۰۷۹ – معادلهٔ مماس بر سیکلویید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(۱ - \cos t)$$

را در نقطهٔ اختیاری $t = t_{۰}$ بنویسید . روش رسم مماس بر سیکلویید را بیان کنید .

۱۰۸۰ – ثابت کنید که تراکتریس

$$x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{۲} + \cos t\right), \quad y = a\sin t \quad (۰ < t < \pi,\ a > ۰)$$

دارای قطعه مماس بطول ثابتی است .

معادلات مماس و قائم بر منحنی‌های زیر را در نقطهٔ داده شده بنویسید .

۱۰۸۱ – $\frac{x^{۲}}{۱۰۰} + \frac{y^{۲}}{٦٤} = ۱, \quad M(٦;\ ٦,٤)$

۱۰۸۲ – $xy + \ln y = ۱, \quad M(۱;\ ۱)$

بخش ٤ — دیفرانسیل تابع

بند ۱ — دیفرانسیل تابع . اگر نمو تابع $y = f(x)$ از متغیر مستقل x را بتوان بشکل

$$\Delta y = A(x)\,dx + o(dx)$$

نمایش داد که در آن $dx = \Delta x$ ، در آنصورت بخش اصلی خطی این نمو را دیفرانسیل تابع y اصطلاح میکنند :

$$dy = A(x)\,dx$$

برای وجود دیفرانسیل تابع $y = f(x)$ لازم و کافی است که مشتق متناهی $y' = f'(x)$ وجود داشته باشد ، ضمناً داریم :

$$dy = y'\,dx \qquad (۱)$$

دستور (۱) در حالتیکه متغیر x تابعی از متغیر مستقل جدیدی باشد نیز معتبر است (خاصیت تغییرناپذیری دیفرانسیل اول) .

بند ۲ — برآورد نموهای کوچک تابع . برای محاسبهٔ نموهای کوچک تابع دیفرانسیل‌پذیر $f(x)$ میتوان دستور

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x$$

را مورد استفاده قرار داد که خطای نسبی آن با شرط $f'(x)\neq ۰$ بازای $|\Delta x|$ باندازهٔ کافی کوچک هر قدر که بخواهید کوچک است .

بخصوص اگر متغیر مستقل x با خطای مطلق حد $|\Delta x|$ معین شود در آنصورت Δy و δy بترتیب خطاهای مطلق و نسبی حد تابع $y=f(x)$ بطور تقریبی با دستورهای زیر بیان میشوند :

$$\Delta y = y'\,\Delta x$$

و

$$\delta y = |[\ln|y|]'|\,\Delta x = \left|\frac{y'}{y}\right|\Delta x$$

۱۰۸۳ — برای تابع

$$f(x)=x^{۳}-۲x+۱$$

مطلوبست محاسبهٔ : ۱) $\Delta f(۱)$ ؛ ۲) $df(۱)$ و مقایسهٔ آنها در صورتیکه :
الف) $\Delta x=۱$ ؛ ب) $\Delta x=۰,۱$ ؛ پ) $\Delta x=۰,۰۱$.

۱۰۸۴ — معادله حرکتی با دستور

$$x=۵t^{۲}$$

داده شده است که در آن t بر حسب ثانیه و x بر حسب متر میباشد .
برای لحظهٔ زمان $t=۲\sec$ مطلوبست تعیین Δx نمو مسافت و dx دیفرانسیل مسافت و مقایسهٔ آنها در صورتیکه :
الف) $\Delta t=۱$ sec ؛ ب) $\Delta t=۰,۱$ sec ؛ پ) $\Delta t=۰,۰۰۱$ sec

دیفرانسیل توابع y زیر را پیدا کنید :

۱۰۸۵ — $y=\frac{۱}{x}$

۱۰۸۶ — $y=\frac{۱}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\quad (a\neq ۰)$

۱۰۸۷ — $y=\frac{۱}{۲a}\ln\frac{x-a}{x+a}$

۱۰۸۸ — $y=\ln|x+\sqrt{x^{۲}+a}|$

۱۰۸۹ — $y=\arcsin\frac{x}{a}\quad (a\neq ۰)$

۱۰۹۰ — مطلوبست تعیین
الف) $d(xe^{x})$ ب) $d(\sin x-x\cos x)$

پ) $d\left(\frac{۱}{x^۳}\right)$

ت) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$

ث) $d\left(\sqrt{a^۲+x^۲}\right)$

ج) $d\left(\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}\right)$

چ) $d\ln(۱-x^۲)$

ح) $d\left(\arccos\frac{۱}{|x|}\right)$

خ) $d\left[\frac{\sin x}{۲\cos^۲ x}+\frac{۱}{۲}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{٤}\right)\right|\right]$

بفرض آنکه u ، v ، w توابع دیفرانسیل‌پذیری از x باشند مطلوبست تعیین دیفرانسیل تابع y در صورتیکه :

۱۰۹۱ – $y=uvw$

۱۰۹۲ – $y=\frac{u}{v^۲}$

۱۰۹۳ – $y=\frac{۱}{\sqrt{u^۲+v^۲}}$

۱۰۹٤ – $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{v}$

۱۰۹٥ – $y=\ln\sqrt{u^۲+v^۲}$

۱۰۹٦ – مطلوبست محاسبهٔ :

الف) $\frac{d}{dx^۳}(x^۳-۲x^٦-x^۹)$ ؛

ب) $\frac{d}{d(x^۲)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ ؛

پ) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$ ؛

ت) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$ ؛

ث) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

۱۰۹۷ – در قطاع دایره‌ای بشعاع $R=۱۰۰\text{cm}$ زاویهٔ مرکزی $\alpha=٦۰^\circ$ است . در صورتیکه : الف) شعاع دایره ۱ cm بزرگتر شود ؛ ب) زاویهٔ α $۳۰'$ کوچکتر گردد ، تغییرات مساحت قطاع چقدر است ؟

جواب دقیق و تقریبی را بدهید .

۱۰۹۸ – دورهٔ تناوب آونگ (بر حسب ثانیه) با دستور

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

تعیین میشود که در آن l طول آونگ به سانتیمتر و $g=۹۸۱\ \text{cm/sec}^۲$ شتاب ثقل است .

طول $l=۲۰\ \text{cm}$ آونگ را چقدر باید تغییر داد تا دورهٔ تناوب T آونگ باندازهٔ ۰٫۰٥ sec بیشتر شود ؟

با تعویض نمو تابع با دیفرانسیل ، مقادیر زیر را بطور تقریبی پیدا کنید :

١٠٩٩ – $\sqrt[٣]{١,٠٢}$

١١٠٠ – $\sin ٢٩^\circ$

١١٠١ – $\cos ١٥١^\circ$

١١٠٢ – $\operatorname{arc\,tg} ١,٠٥$

١١٠٣ – $\lg ١١$

١١٠٤ – دستور تقریبی زیر را ثابت کنید :

$$\sqrt{a^٢+x}\approx a+\frac{x}{٢a}\quad (a>٠)$$

که در آن $|x|\ll a$ (رابطهٔ $A\ll B$ بین A و B مثبت بدان معناست که A در مقایسه با B خیلی کوچک است) .

بکمک این دستور بطور تقریبی عبارات :

الف) $\sqrt{٥}$ ؛ ب) $\sqrt{٣٤}$ ؛ پ) $\sqrt{١٢٠}$ را محاسبه نموده و با مقادیر داده شده در جدول مقایسه کنید .

١١٠٤,١ – ثابت کنید

$$\sqrt{a^٢+x}=a+\frac{x}{٢a}-r\quad (a>٠,\ x>٠)$$

که در آن

$$٠<r<\frac{x^٢}{٨a^٣}$$

١١٠٥ – دستور تقریبی زیر را ثابت کنید

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-١}}\quad (a>٠)$$

که در آن $|x|\gg a$.

بکمک این دستور عبارتهای زیر را بطور تقریبی حساب کنید :

الف) $\sqrt[٣]{٩}$ ؛ ب) $\sqrt[٤]{٨٠}$ ؛ پ) $\sqrt[٧]{١٠٠}$ ؛ ت) $\sqrt[١٠]{١٠٠٠}$

١١٠٦ – مربعی بضلع $x=٢,٤\,\mathrm{m}\pm ٠,٠٥\,\mathrm{m}$ مفروض است . با چه خطای مطلق و نسبی حد میتوان مساحت این مربع را محاسبه نمود ؟

١١٠٧ – با چه خطای نسبی مجاز شعاع R کره را اندازه بگیریم تا حجم آن با دقت تا ١ % تعیین گردد ؟

١١٠٨ – برای تعیین شتاب ثقل بکمک نوسان آونگ از دستور

$$g=\frac{٢\pi^٢l}{T^٢}$$

استفاده میشود که در آن l طول آونگ و T دورهٔ تناوب کامل نوسان آونگ است . خطای نسبی δ در اندازه‌گیری : الف) طول l ؛ ب) دورهٔ تناوب T ، چه تاثیری در مقدار g دارد ؟

۱۱۰۹ – مطلوبست تعیین خطای مطلق لگاریتم دهدهی عدد $x\,(x > ۰)$ در صورتیکه خطای نسبی این عدد δ باشد .

۱۱۱۰ – ثابت کنید که دقت تعیین زوایا از روی جدول لگاریتم تانژانت بیشتر از جدول لگاریتم سینوس با همان تعداد ارقام دهدهی میباشد .

بخش ۵ — مشتق و دیفرانسیل مراتب بالاتر

بند ۱ — تعاریف پایه . مشتق‌های مراتب بالاتر تابع $y = f(x)$ بطور پیاپی با روابط زیر (با فرض آنکه اعمال نظیر دارای معنا باشند !) تعریف میشوند :

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-۱)}(x)\}' \quad (n = ۲,\ ۳,\ \ldots)$$

اگر تابع $f(x)$ دارای مشتق پیوستهٔ $f^{(n)}(x)$ روی بازهٔ (a, b) باشد بطور خلاصه می‌نویسند : $f(x) \in C^{(n)}(a, b)$. بویژه اگر $f(x)$ دارای مشتقات پیوسته از هر مرتبه روی (a, b) باشد در آنصورت نگارش $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$ را بکار میبرند .

دیفرانسیل های مراتب بالاتر تابع $y = f(x)$ بطور پیاپی از دستورهای زیر تعیین میشوند

$$d^n y = d(d^{n-۱} y) \quad (n = ۲,\ ۳,\ \ldots)$$

که در آن $d'y = dy = y'\,dx$ اختیار شده است .

اگر x متغیر مستقلی باشد در آنصورت فرض میشود :

$$d^۲ x = d^۳ x = \ldots = ۰$$

در این حالت دستورهای زیر درست میباشند :

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \quad \text{و} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

بند ۲ — دستورهای پایه .

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > ۰); \quad (e^x)^{(n)} = e^x - \text{I}$$

$$(\sin x)^n = \sin\left(x + \frac{n\pi}{۲}\right) - \text{II}$$

III – $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{۲}\right)$

IV – $(x^m)^{(n)} = m(m-۱)\ldots(m-n+۱)x^{m-n}$

V – $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-۱)^{n-۱}(n-۱)!}{x^n}$

بند ۳ – دستور لایب‌نیتز . اگر توابع $u=\varphi(x)$ و $v=\psi(x)$ دارای مشتقات مرتبه n – ام (n بار دیفرانسیل‌پذیر) باشد در آنصورت

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=۰}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$$

که در آن $u^{(۰)}=u$ و $v^{(۰)}=v$ و C_n^i تعداد ترکیب‌های n عنصر i به i میباشد .

بطریق مشابهی برای دیفرانسیل $d^n(uv)$ داریم :

$$d^n(uv) = \sum_{i=۰}^{n} C_n^i d^{n-i}u\, d^i v$$

که در آن $d^۰u=u$ و $d^۰v=v$ فرض شده است .

مطلوبست تعیین y'' در صورتیکه :

۱۱۱۱ – $y = x\sqrt{۱+x^۲}$

۱۱۱۲ – $y = \frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$

۱۱۱۳ – $y = e^{-x^۲}$

۱۱۱۴ – $y = \operatorname{tg} x$

۱۱۱۵ – $y = (۱+x^۲)\operatorname{arc\,tg} x$

۱۱۱۶ – $y = \frac{\operatorname{arc\,sin} x}{\sqrt{۱-x^۳}}$

۱۱۱۷ – $y = x\ln x$

۱۱۱۸ – $y = \ln f(x)$

۱۱۱۹ – $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$

۱۱۲۰ – مطلوبست محاسبهٔ $y(۰)$ و $y'(۰)$ و $y''(۰)$ در صورتیکه

$$y = e^{\sin x}\cos(\sin x)$$

فرض کنیم $u=\varphi(x)$ و $v=\psi(x)$ توابع دو بار دیفرانسیل‌پذیر باشند؛ مطلوبست تعیین y'' در صورتیکه :

۱۱۲۱ – $y = u^۲$

۱۱۲۲ – $y = \ln\frac{u}{v}$

۱۱۲۳ – $y = \sqrt{u^۲+v^۲}$

۱۱۲۴ – $y = u^v \quad (u>۰)$

فرض کنیم $f(x)$ تابع سه بار دیفرانسیل‌پذیری باشد . مطلوبست تعیین y'' و y''' در صورتیکه :

۱۱۲۵ – $y=f(x^{۲})$

۱۱۲۶ – $y=f\left(\frac{۱}{x}\right)$

۱۱۲۷ – $y=f(e^{x})$

۱۱۲۸ – $y=f(\ln x)$

۱۱۲۹ – $y=f(\varphi(x))$ که در آن $\varphi(x)$ تابعی است به تعداد کافی بار دیفرانسیل پذیر .

۱۱۳۰ – مطلوبست $d^{۲}y$ برای تابع

$$y=e^{x}$$

در دو حالت : الف) x متغیر مستقلی است ؛ ب) x آرگومان واسطه است .

با در نظر گرفتن x بعنوان متغیر مستقل مطلوبست تعیین $d^{۲}y$ در صورتیکه :

۱۱۳۱ – $y=\sqrt{۱+x^{۲}}$

۱۱۳۲ – $y=\frac{\ln x}{x}$

۱۱۳۳ – $y=x^{x}$

فرض کنیم u و v توابع دو بار دیفرانسیل‌پذیری از متغیر x باشند ، مطلوبست تعیین $d^{۲}y$ در صورتیکه :

۱۱۳۴ – $y=uv$

۱۱۳۵ – $y=\frac{u}{v}$

۱۱۳۶ – $y=u^{m}v^{n}$ (m و n ثابتند) .

۱۱۳۷ – $y=a^{u} \quad (a>۰)$

۱۱۳۸ – $y=\ln\sqrt{u^{۲}+v^{۲}}$

۱۱۳۹ – $y=\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{v}$

مطلوبست تعیین مشتق‌های y'_{x} ، $y''_{x^{۲}}$ ، $y'''_{x^{۳}}$ از تابع $y=y(x)$ که بصورت پارامتری داده شده است اگر :

۱۱۴۰ – $x=۲t-t^{۲}, \qquad y=۳t-t^{۳}$

۱۱۴۱ – $x=a\cos t, \qquad y=a\sin t$

۱۱۴۲ – $x=a(t-\sin t), \qquad y=a(۱-\cos t)$

۱۱۴۳ – $x=e^{t}\cos t, \qquad y=e^{t}\sin t$

۱۱۴۴ – $x=f'(t), \qquad y=tf'(t)-f(t)$

۱۱۴۵ – فرض کنیم تابع $y=f(x)$ به تعداد کافی بار دیفرانسیل‌پذیر باشد . مطلوبست تعیین مشتقات x' ، x'' ، x''' ، $x^{(۴)}$ از تابع معکوس $x=f^{-۱}(y)$ بفرض آنکه این مشتقات وجود دارند .

مطلوبست تعیین y'_x ، $y''_{x^۲}$ ، $y'''_{x^۳}$ از تابع $y=y(x)$ که بصورت ضمنی داده شده است :

۱۱۴۶ – $x^۲+y^۲=۲۵$. مقادیر y' و y'' و y''' در نقطهٔ $M(۳,۴)$ چقدرند ؟

۱۱۴۷ – $y^۲=۲px$

۱۱۴۸ – $x^۲-xy+y^۲=۱$

مطلوبست تعیین y'_x و $y''_{x^۲}$ در صورتیکه :

۱۱۴۹ – $y^۲+۲\ln y=x^۴$

۱۱۵۰ – $\sqrt{x^۲+y^۲}=ae^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$ $(a>۰)$

۱۱۵۱ – فرض کنیم تابع $f(x)$ معین و بازای $x\leqslant x_۰$ دو بار دیفرانسیل‌پذیر باشد . ضرایب a ، b و c را چگونه باید اختیار نمود تا تابع

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{اگر} \quad x\leqslant x_۰ \\ a(x-x_۰)^۲+b(x-x_۰)+c, & \text{اگر} \quad x>x_۰ \end{cases}$$

دو بار دیفرانسیل‌پذیر باشد .

۱۱۵۲ – قانون حرکت مستقیم‌الخط نقطه‌ای عبارت است از

$$s=۱۰+۲۰t-۵t^۲$$

مطلوبست تعیین سرعت و شتاب حرکت . مقدار سرعت و شتاب در لحظهٔ $t=۲$ چقدر است ؟

۱۱۵۳ – نقطهٔ $M(x,y)$ با حرکت یکنواخت دایرهٔ $x^۲+y^۲=a^۲$ را در T ثانیه یک دور میزند . مطلوبست سرعت v و شتاب j تصویر نقطهٔ M روی محور Ox در صورتیکه در لحظهٔ $t=۰$ نقطه وضع $M_۰(a,۰)$ را دارا باشد .

۱۱۵۴ – نقطهٔ مادی وزین $M(x,y)$ در صفحهٔ قایم Oxy تحت زاویهٔ α با افق و با سرعت اولیهٔ $v_۰$ پرتاب شده است . معادلهٔ حرکت را (با صرف نظر کردن از مقاومت هوا) تشکیل داده و مقدار سرعت v و شتاب j و همچنین مسیر حرکت را تعیین کنید .

۱۱۵۵ – معادلهٔ حرکت نقطه‌ای چنین است :

$$x=۴\sin\omega t-۳\cos\omega t,\quad y=۳\sin\omega t+۴\cos\omega t$$

(ω مقداریست ثابت) .

مسیر حرکت و مقدار سرعت و شتاب را تعیین کنید .

مشتقات مراتب ذکر شده را از توابع زیر تعیین کنید :

۱۱۵۶ - $y = x(۲x-۱)^{۲}(x+۳)^{۳}$ ، تعیین کنید : $y^{(۶)}$ و $y^{(۷)}$

۱۱۵۷ - $y = \frac{a}{x^{m}}$ ، تعیین کنید : y'''

۱۱۵۸ - $y = \sqrt{x}$ ، تعیین کنید : $y^{(۱۰)}$

۱۱۵۹ - $y = \frac{x^{۲}}{۱-x}$ ، تعیین کنید : $y^{(۸)}$

۱۱۶۰ - $y = \frac{۱+x}{\sqrt{۱-x}}$ ، تعیین کنید : $y^{(۱۰۰)}$

۱۱۶۱ - $y = x^{۲}e^{۲x}$ ، تعیین کنید : $y^{(۲۰)}$

۱۱۶۲ - $y = \frac{e^{x}}{x}$ ، تعیین کنید : $y^{(۱۰)}$

۱۱۶۳ - $y = x\ln x$ ، تعیین کنید : $y^{(۵)}$

۱۱۶۴ - $y = \frac{\ln x}{x}$ ، تعیین کنید : $y^{(۵)}$

۱۱۶۵ - $y = x^{۲}\sin ۲x$ ، تعیین کنید : $y^{(۵۰)}$

۱۱۶۶ - $y = \frac{\cos ۳x}{\sqrt[۳]{۱-۳x}}$ ، تعیین کنید : y'''

۱۱۶۷ - $y = \sin x \sin ۲x \sin ۳x$ ، تعیین کنید : $y^{(۱۰)}$

۱۱۶۸ - $y = x\,\mathrm{sh}\,x$ تعیین کنید : $y^{(۱۰۰)}$

۱۱۶۹ - $y = e^{x}\cos x$ ، تعیین کنید : $y^{(۴)}$

۱۱۷۰ - $y = \sin^{۲}x\ln x$ ، تعیین کنید : $y^{(۶)}$.

در مثال‌های زیر x را بعنوان متغیر مستقل در نظر گرفته ، دیفرانسیل های مرتبهٔ ذکرشده را پیدا کنید :

۱۱۷۱ - $y = x^{۵}$ ، تعیین کنید : $d^{۵}y$

۱۱۷۲ - $y = \frac{۱}{\sqrt{x}}$ ، تعیین کنید : $d^{۳}y$

۱۱۷۳ - $y = x\cos ۲x$ ، تعیین کنید : $d^{۱۰}y$

۱۱۷۴ - $y = e^{x}\ln x$ ، تعیین کنید : $d^{۴}y$

۱۱۷۵ - $y = \cos x \times \mathrm{ch}\,x$ ، تعیین کنید : $d^{۶}y$

در مثال‌های زیر اگر u تابعی باندازهٔ کافی بار دیفرانسیل‌پذیر از x باشد ، دیفرانسیل های مراتب ذکرشده را پیدا کنید :

۱۱۷۶ – $y = u^{۲}$ ، تعیین کنید : $d^{۱۰}y$

۱۱۷۷ – $y = e^{u}$ ، تعیین کنید : $d^{٤}y$

۱۱۷۸ – $y = \ln u$ ، تعیین کنید : $d^{۳}y$

۱۱۷۹ – مطلوبست تعیین $d^{۲}y$ ، $d^{۳}y$ ، $d^{٤}y$ از تابع $y = f(x)$ در صورتیکه x تابعی از یک متغیر مستقلی در نظر گرفته شود .

۱۱۸۰ – اگر x متغیر مستقلی فرض نشود ، مشتقات y'' و y''' تابع $y = f(x)$ را بر حسب دیفرانسیل های متوالی متغیرهای x و y بیان کنید .

۱۱۸۱ – نشان دهید که تابع

$$y = C_{۱} \cos x + C_{۲} \sin x$$

که در آن $C_{۱}$ و $C_{۲}$ مقادیر ثابت دلخواهی هستند در معادلهٔ زیر صادق است :

$$y'' + y = ۰$$

۱۱۸۲ – نشان دهید که تابع

$$y = C_{۱} \operatorname{ch} x + C_{۲} \operatorname{sh} x$$

که در آن $C_{۱}$ و $C_{۲}$ مقادیر ثابت دلخواهی هستند در معادلهٔ زیر صادق است :

$$y'' - y = ۰$$

۱۱۸۳ – نشان دهید که تابع

$$y = C_{۱} e^{\lambda_{۱} x} + C_{۲} e^{\lambda_{۲} x}$$

که در آن $C_{۱}$ ، $C_{۲}$ ثابت‌های دلخواهی و $\lambda_{۱}$ ، $\lambda_{۲}$ ثابت میباشند در معادلهٔ زیر صادق است :

$$y'' - (\lambda_{۱} + \lambda_{۲}) y' + \lambda_{۱} \lambda_{۲} y = ۰$$

۱۱۸٤ – نشان دهید که تابع

$$y = x^{n} [C_{۱} \cos (\ln x) + C_{۲} \sin (\ln x)]$$

که در آن $C_{۱}$ و $C_{۲}$ ثابت‌های دلخواهی و n ثابت میباشد در معادلهٔ زیر صادق است :

$$x^{۲} y'' + (۱ - ۲n) x y' + (۱ + n^{۲}) y = ۰$$

۱۱۸۵ - نشان دهید که تابع

$$y = e^{\frac{x}{\sqrt{۲}}}\left(C_۱ \cos\frac{x}{\sqrt{۲}} + C_۲ \sin\frac{x}{\sqrt{۲}}\right) +$$

$$+ e^{-\frac{x}{\sqrt{۲}}}\left(C_۳ \cos\frac{x}{\sqrt{۲}} + C_۴ \sin\frac{x}{\sqrt{۲}}\right)$$

که در آن $C_۱$ ، $C_۲$ ، $C_۳$ و $C_۴$ ثابت‌های دلخواهی میباشند در معادلهٔ زیر صادق است :

$$y^{\mathrm{IV}} + y = ۰$$

۱۱۸۶ - ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ دارای مشتق مرتبهٔ n - ام باشد . در آنصورت

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$$

۱۱۸۷ - مطلوبست تعیین $P^{(n)}(x)$ اگر

$$P(x) = a_۰x^n + a_۱x^{n-۱} + \ldots + a_n$$

مطلوبست تعیین $y^{(n)}$ اگر

۱۱۸۸ - $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

۱۱۸۹ - $y = \dfrac{۱}{x(x-۱)}$

۱۱۹۰ - $y = \dfrac{۱}{x^۲ - ۳x + ۲}$

<u>راهنمایی</u> — تابع را به کسرهای ساده تجزیه کنید .

۱۱۹۱ - $y = \dfrac{۱}{\sqrt{۱-۲x}}$

۱۱۹۲ - $y = \dfrac{x}{\sqrt[۳]{۱+x}}$

۱۱۹۳ - $y = \sin^۲ x$

۱۱۹۴ - $y = \cos^۲ x$

۱۱۹۵ - $y = \sin^۳ x$

۱۱۹۶ - $y = \cos^۳ x$

۱۱۹۷ - $y = \sin ax \sin bx$

۱۱۹۸ - $y = \cos ax \cos bx$

۱۱۹۹ - $y = \sin ax \cos bx$

۱۲۰۰ - $y = \sin^۲ ax \cos bx$

۱۲۰۱ - $y = \sin^۴ x + \cos^۴ x$

۱۲۰۲ - $y = x \cos ax$

۱۲۰۳ - $y = x^۲ \sin ax$

۱۲۰۴ - $y = (x^۲ + ۲x + ۲)e^{-x}$

۱۲۰۵ - $y = \dfrac{e^x}{x}$

۱۲۰۶ - $y = e^x \cos x$

۱۲۰۷ - $y = e^x \sin x$

۱۲۰۸ - $y = \ln\dfrac{a+bx}{a-bx}$

۱۲۰۹ – $y = e^{ax}P(x)$ که در آن $P(x)$ چندجمله‌ای است .

۱۲۱۰ – $y = x\,\mathrm{sh}\,x$

مطلوبست تعیین d^ny اگر :

۱۲۱۱ – $y = x^ne^x$ ۱۲۱۲ – $y = \frac{\ln x}{x}$

۱۲۱۳ – مساوی‌های زیر را ثابت کنید :

۱) $$[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)} = e^{ax}(a^۲+b^۲)^{\frac{n}{۲}}\sin(bx+c+n\varphi)$$

و

۲) $$[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)} = e^{ax}(a^۲+b^۲)^{\frac{n}{۲}}\cos(bx+c+n\varphi)$$

که در آن $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ و $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

۱۲۱۴ – مطلوبست تعیین $y^{(n)}$ اگر

الف) $y = \mathrm{ch}\,ax\cos bx$

ب) $y = \mathrm{ch}\,ax\sin bx$

۱۲۱۵ – با تبدیل تابع $f(x) = \sin^{۲p}x$ که در آن p عددیست طبیعی به چند جمله‌ای مثلثاتی $f(x) = \sum_{k=۰}^{p} A_k\cos ۲kx$ مطلوبست تعیین $f^{(n)}(x)$.

راهنمایی – فرض کنید $\sin x = \frac{۱}{۲i}(t-\bar{t})$ که در آن $t = \cos x + i\sin x$ و $\bar{t} = \cos x - i\sin x$ و از دستور موآور استفاده کنید .

۱۲۱۶ – مطلوبست تعیین $f^{(n)}(x)$ اگر :

الف) $f(x) = \sin^{۲p+۱}x$

ب) $f(x) = \cos^{۲p}x$

ث) $f(x) = cos^{۲p+۱}x$

که در آن p عدد درست مثبتی است (مسئله قبل را ببینید) .

اگر

$$f(x) = f_۱(x) + if_۲(x)$$

که در آن $i = \sqrt{-۱}$ و $f_۱(x)$ و $f_۲(x)$ توابع حقیقی از متغیر حقیقی x میباشند ، درآنصورت بنا به تعریف داریم :

$$f'(x) = f_۱'(x) + if_۲'(x)$$

۱۲۱۷ – با استفاده از اتحاد

$$\frac{۱}{x^{۲}+۱}=\frac{۱}{۲i}\left(\frac{۱}{x-i}-\frac{۱}{x+i}\right)$$

ثابت کنید که

$$\left(\frac{۱}{x^{۲}+۱}\right)^{(n)}=\frac{(-۱)^{n}n!}{(۱+x^{۲})^{\frac{n+۱}{۲}}}\sin[(n+۱)\operatorname{arc\,ctg} x]$$

راهنمایی – دستور موآور را بکار بندید .

۱۲۱۸ – مشتق مرتبهٔ n ـ ام از تابع زیر را پیدا کنید :

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$$

مطلوبست محاسبهٔ $f^{(n)}(۰)$ اگر :

۱۲۱۹ – الف) $f(x)=\frac{۱}{(۱-۲x)(۱+x)}$ ؛ ب) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱-x}}$.

۱۲۲۰ – الف) $f(x)=x^{۲}e^{ax}$ ؛ ب) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ ؛ پ) $f(x)=\arcsin x$.

۱۲۲۱ – الف) $f(x)=\cos(m \arcsin)$ ؛ ب) $f(x)=\sin(m \arcsin x)$.

۱۲۲۲ – الف) $f(x)=(\operatorname{arc\,tg} x)^{۲}$ ؛ ب) $f(x)=(\arcsin x)^{۲}$.

۱۲۲۳ – مطلوبست محاسبهٔ $f^{(n)}(a)$ اگر

$$f(x)=(x-a)^{n}\varphi(x)$$

که در آن تابع $\varphi(x)$ در همسایگی نقطهٔ a دارای مشتق پیوستهٔ مرتبهٔ $(n-۱)$ – ام است .

۱۲۲۴ – ثابت کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲n}\sin\frac{۱}{x}, & \text{اگر} \quad x\neq ۰ \\ ۰, & \text{اگر} \quad x=۰ \end{cases}$$

(n عددیست طبیعی) در نقطهٔ $x=۰$ دارای مشتق‌های تا مرتبهٔ n – ام وارده میباشد و دارای مشتق مرتبهٔ $(n+۱)$ – ام نیست .

۱۲۲۵ – ثابت کنید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{۱}{x^{۲}}}, & \text{اگر} \quad x\neq ۰ \\ ۰, & \text{اگر} \quad x=۰ \end{cases}$$

بازای $x=۰$ بطور نامتناهی دیفرانسیل‌پذیر است .

نمودار این تابع را رسم کنید .

۱۲۲۶ - ثابت کنید که چندجمله‌ای چبیشف

$$T_m(x) = \frac{۱}{۲^{m-۱}} \cos(m \arccos x) \quad (m = ۱, ۲, \dots)$$

در معادلهٔ زیر صادق است :

$$(۱ - x^۲) T''_m - xT'_m(x) + m^۲ T_m(x) = ۰$$

۱۲۲۷ - ثابت کنید که چندجمله‌ای لژاندر

$$P_m(x) = \frac{۱}{۲^m m!} [(x^۲ - ۱)^m]^{(m)} \quad (m = ۰, ۱, ۲, \dots)$$

در معادلهٔ دیفرانسیل زیر صادق است :

$$(۱ - x^۲) P''_m(x) - ۲x P'_m(x) + m(m + ۱) P_m(x) = ۰$$

راهنمایی - از تساوی $(x^۲ - ۱) u' = ۲mxu$ که در آن $u = (x^۲ - ۱)^m$ ، $m + ۱$ بار مشتق بگیرید .

۱۲۲۸ - چندجمله‌ای چبیشف - لاگر با دستور

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)} \quad (m = ۰, ۱, ۲, \dots)$$

تعریف میشود . عبارت صریحی برای چندجمله‌ای $L_m(x)$ پیدا کنید . ثابت کنید که $L_m(x)$ در معادلهٔ زیر صدق میکند :

$$xL''_m(x) + (۱ - x) L'_m(x) + mL(x) = ۰$$

راهنمایی - از تساوی $xu' + (x - m)u = ۰$ استفاده کنید که در آن $u = x^m e^{-x}$.

۱۲۲۹ - فرض کنیم $y = f(u)$ و $u = \varphi(x)$ توابع n بار دیفرانسیل‌پذیر میباشند .

ثابت کنید که

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=۱}^{n} A_k(x) f^{(k)}(u)$$

که در آن ضرایب $A_k(x) \quad (k = ۰, ۱, \dots, n)$ مستقل از تابع $f(u)$ میباشند .

۱۲۳۰ - ثابت کنید که برای مشتق n - ام تابع مرکب $y = f(x^۲)$ دستور زیر درست است :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (۲x)^n f^{(n)}(x^۲) + \frac{n(n-۱)}{۱!} (۲x)^{n-۲} f^{(n-۱)}(x^۲) +$$

$$+ \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۲!} (۲x)^{n-٤} f^{(n-۲)}(x^۲) + \dots$$

۱۲۳۱ – چندجمله‌ای چبیشف – هرمیت با دستور

$$H_m(x) = (-۱)^m e^{x^۲}\left(e^{-x^۲}\right)^{(m)} \quad (m = ۰,\ ۱,\ ۲,\ \dots)$$

تعریف میشود . عبارت صریحی برای چندجمله‌ای $H_m(x)$ پیدا کنید .
ثابت کنید $H_m(x)$ در معادلهٔ زیر صادق است :

$$H''_m(x) - ۲xH'_m(x) + ۲mH_m(x) = ۰$$

راهنمایی – تساوی $u' + ۲xu = ۰$ را بکار برید که در آن $u = e^{-x^۲}$.

۱۲۳۲ – ثابت کنید

$$\left(x^{n-۱}e^{\frac{۱}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-۱)^n}{x^{n+۱}}\, e^{\frac{۱}{x}}$$

راهنمایی – روش استقرای ریاضی را بکار برید .

۱۲۳۲,۱ – دستور زیر را ثابت کنید :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n \ln x\right) = n!\left(\ln x + \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k}\right) \quad (x > ۰)$$

۱۲۳۲,۲ – دستور زیر را ثابت کنید :

$$\frac{d^{۲n}}{dx^{۲n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{(۲n)!}{x^{۲n+۱}}\left[C_n(x)\sin x - S_n(x)\cos x\right]$$

که در آن

$$C_n(x) = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \dots + (-۱)^n \frac{x^{۲n}}{(۲n)!}$$

و

$$S_n(x) = x - \frac{x^۳}{۳!} + \dots + (-۱)^{n-۱} \frac{x^{۲n-۱}}{(۲n-۱)!}$$

۱۲۳۳ – فرض کنیم $\frac{d}{dx} = D$ بمعنای عمل مشتق گیری و

$$f(D) = \sum_{k=۰}^{n} p_k(x)\, D^k$$

چندجمله‌ای نمادی دیفرانسیلی باشد که در آن $p_k(x) \quad (k = ۰,\ ۱,\ \dots,\ n)$ توابع پیوسته‌ای از x است .

ثابت کنید که

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D+\lambda)\,u(x)$$

که در آن λ ثابت است .

۱۲۳۴ — ثابت کنید که اگر در معادلهٔ

$$\sum_{k=۰}^{n} a_k x^k y'_x = ۰$$

فرض کنیم

$$x = e^t$$

که در آن t متغیر مستقلی است در اینصورت این معادله بصورت

$$\sum_{k=۰}^{n} a_k D(D-۱)\ldots(D-k+۱)\,y = ۰$$

در میآید که در آن $D = \frac{d}{dt}$.

بخش ۶ — قضایای رول ، لاگرانژ و کوشی

بند ۱ — قضیه رول . اگر : ۱) تابع $f(x)$ روی قطعه $[a, b]$ معین و پیوسته ؛ ۲) $f(x)$ دارای مشتق متناهی $f'(x)$ در داخل این قطعه ؛ ۳) $f(a)=f(b)$ باشد در اینصورت دست کم یک عدد c از بازه (a, b) وجود دارد چنان که

$$f'(c) = ۰$$

بند ۲ — قضیه لاگرانژ . اگر : ۱) تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ معین و پیوسته ؛ ۲) $f(x)$ دارای مشتق متناهی $f'(x)$ روی بازهٔ (a, b) باشد در اینصورت

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c) \quad \text{که در آن} \quad a<c<b$$

(دستور نموهای متناهی) .

بند ۳ — قضیهٔ کوشی. اگر : ۱) توابع $f(x)$ و $g(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ معین و پیوسته ؛ ۲) $f(x)$ و $g(x)$ دارای مشتقات متناهی $f'(x)$ و $g'(x)$ روی بازهٔ (a, b) ؛ ۳) بازای $a<x<b$ ، $f'^{۲}(x)+g'^{۲}(x) \neq ۰$ ؛ ۴) $g(a)\neq g(b)$ باشد در اینصورت

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{که در آن} \quad a<c<b$$

۱۲۳۵ – درستی قضیهٔ رول را برای تابع زیر تحقیق کنید :

$$f(x) = (x - ۱)(x - ۲)(x - ۳)$$

۱۲۳۶ – تابع

$$f(x) = ۱ - \sqrt[۳]{x^۲}$$

بازای $x_۱ = -۱$ و $x_۲ = ۱$ برابر صفر میشود ولی با وجود این بازای $-۱ \leqslant x \leqslant ۱$ ، $f'(x) \neq ۰$. تضاد ظاهری با قضیهٔ رول را توضیح دهید .

۱۲۳۷ – فرض کنیم تابع $f(x)$ دارای مشتق متناهی $f'(x)$ در هر نقطهٔ بازهٔ متناهی یا نامتناهی (a, b) باشد و

$$\lim_{x \to a + ۰} f(x) = \lim_{x \to b - ۰} f(x)$$

ثابت کنید که

$$f'(c) = ۰$$

که در آن c نقطه‌ایست از بازهٔ (a, b) .

۱۲۳۸ – فرض کنیم : ۱) تابع $f(x)$ معین و دارای مشتق پیوستهٔ مرتبهٔ $(n - ۱)$ – ام $f^{(n-۱)}(x)$ روی قطعهٔ $[x_۰ , x_n]$ باشد ؛ ۲) $f(x)$ دارای مشتق مرتبهٔ n – ام $f^{(n)}(x)$ در بازهٔ $(x_۰ , x_n)$ باشد ، و ۳) تساوی‌های زیر مجرا باشد :

$$f(x_۰) = f(x_۱) = \ldots = f(x_n) \quad (x_۰ < x_۱ < \ldots < x_n)$$

ثابت کنید که در بازهٔ $(x_۰ , x_n)$ دست کم یک نقطهٔ ξ وجود دارد چنان که

$$f^{(n)}(\xi) = ۰$$

۱۲۳۹ – فرض کنیم : ۱) تابع $f(x)$ معین و دارای مشتق پیوستهٔ مرتبهٔ $(p + q)$ – ام $f^{(p+q)}(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ باشد ؛ ۲) $f(x)$ دارای مشتق مرتبهٔ $(p + q + ۱)$ – ام $f^{(p+q+۱)}(x)$ در بازهٔ (a, b) باشد ؛ ۳) تساویهای زیر مجرا باشند :

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(p)}(a) = ۰$$

و

$$f(b) = f'(b) = \ldots = f^{(q)}(b) = ۰$$

ثابت کنید که در چنین حالتی

$$f^{(p+q+۱)}(c)=۰$$

که در آن c نقطه‌ایست از بازهٔ (a, b) .

۱۲۴۰ – ثابت کنید که اگر جمیع ریشه‌های چندجمله‌ای

$$P_n(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\dots+a_n \quad (a_۰\neq ۰)$$

با ضرایب حقیقی a_k $(k=۰, ۱, \dots, n)$ حقیقی باشند در آنصورت مشتق‌های متوالی آن $P_n'(x), \dots, P_n''(x), \dots P_n^{(n-۱)}(x)$ نیز فقط دارای ریشه‌های حقیقی میباشند .

۱۲۴۱ – ثابت کنید که در چندجمله‌ای لژاندر

$$P_n(x)=\frac{۱}{۲^n n!}\frac{d}{dx^n}\{(x^۲-۱)^n\}$$

تمام ریشه‌ها حقیقی و محصور در بازهٔ $(-۱, ۱)$ میباشند .

۱۲۴۲ – ثابت کنید که در چندجمله‌ای چبیشف ــ لاگر

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$$

تمام ریشه‌ها مثبتند .

۱۲۴۳ – ثابت کنید که چندجمله‌ای چبیشف ــ هرمیت

$$H_n(x)=(-۱)^ne^{x^۲}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^۲}\right)$$

تمام ریشه‌ها حقیقی‌اند .

۱۲۴۴ – بر منحنی $y=x^۳$ نقطه‌ای پیدا کنید که در آن مماس با وتر واصل نقاط $A(-۱, -۱)$ و $B(۲, ۸)$ موازی باشد .

۱۲۴۵ – آیا دستور نموهای متناهی برای تابع

$$f(x)=\frac{۱}{x}$$

روی قطعهٔ $[a, b]$ اگر $ab<۰$ ، درست است ؟

۱۲۴۶ – مطلوبست تعیین تابع $\theta=\theta(x, \Delta x)$ بقسمی که

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x f'(x+\theta\Delta x) \quad (۰<\theta<۱)$$

اگر :

الف) $(a \neq ۰)$ $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ پ) $f(x) = \frac{۱}{x}$

ب) $f(x) = x^{۳}$

ت) $f(x) = e^{x}$

۱۲۴۶,۱ فرض کنیم $(-\infty, +\infty)$ $f(x) \in C^{(۱)}$ و برای هر x و h اتحاد

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'(x)$$

درست باشد . ثابت کنید که

$$f(x) = ax + b$$

که در آن a و b مقادیر ثابتی هستند .

۱۲۴۶,۲ – فرض کنیم $(-\infty, +\infty)$ $f(x) \in C^{(۲)}$ و برای هر x و h اتحاد

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'\left(x + \frac{h}{۲}\right)$$

درست باشد .

ثابت کنید که

$$f(x) = ax^{۲} + bx + c$$

که در آن a ، b و c ثابتند .

۱۲۴۷ – ثابت کنید که اگر $x \geqslant ۰$ ، در اینصورت

$$\sqrt{x+۱} - \sqrt{x} = \frac{۲}{۲\sqrt{x+\theta(x)}}$$

که در آن

$$\frac{۱}{۴} \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{۱}{۲}$$

ضمناً

$$\lim_{x \to ۰} \theta(x) = \frac{۱}{۴}, \quad \lim_{x \to +\infty} \theta(x) = \frac{۱}{۲}$$

۱۲۴۸ – فرض کنیم :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۳ - x^{۲}}{۲}, & \text{بازای} \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \\ \frac{۱}{x}, & \text{بازای} \quad ۱ < x < +\infty \end{cases}$$

مطلوبست تعیین مقدار میانی cـی دستور نموهای متناهی برای تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[۰, ۲]$.

۱۲۴۹ – فرض کنیم $f(x)-f(۰)=xf'(\xi(x))$ که در آن $۰<\xi(x)<x$. ثابت کنید که اگر

$$f(x)=x\sin(\ln x) \quad \text{بازای} \quad x>۰ \quad \text{و} \quad f(۰)=۰$$

در آنصورت تابع $\xi=\xi(x)$ در هر فاصلهٔ باندازهٔ دلخواه کوچک $(۰, \varepsilon)$ که در آن $\varepsilon>۰$ منفصل است .

۱۲۵۰ – فرض کنیم تابع $f(x)$ دارای مشتق پیوستهٔ $f'(x)$ در فاصلهٔ (a, b) باشد . آیا بازای هر نقطهٔ ξ از (a, b) میتوان دو نقطهٔ دیگر $x_۱$ و $x_۲$ از این فاصله را چنان تعیین نمود که

$$\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=f'(\xi) \quad (x_۱<\xi<x_۲)$$

مثال $f(x)=x^۳$ $(-۱\leqslant x\leqslant ۱)$ را در نظر بگیرید که در آن $\xi=۰$.

۱۲۵۱ – نامساویهای زیر را ثابت کنید :

الف) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$

ب) $py^{p-۱}(x-y)\leqslant x^p-y^p\leqslant px^{p-۱}(x-y)$
اگر $۰<y<x$ و $p>۱$

پ) $|\operatorname{arc\,tg} a-\operatorname{arc\,tg} b|\leqslant|a-b|$

ت) $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$ اگر $۰<b<a$

۱۲۵۲ – توضیح دهید که چرا قضیهٔ کوشی برای توابع

$$f(x)=x^۲ \quad \text{و} \quad g(x)=x^۳$$

روی قطعهٔ $[-۱, ۱]$ درست نیست .

۱۲۵۳ – فرض کنیم تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[x_۱, x_۲]$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، ضمناً $x_۱x_۲>۰$. ثابت کنید که

$$\frac{۱}{x_۱-x_۲}\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ \\ f(x_۱) & f(x_۲) \end{vmatrix}=f(\xi)-f'(\xi)$$

که در آن $x_۱<\xi<x_۲$

۱۲۵۴ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ متناهی (a, b) دیفرانسیل‌پذیر باشد ولی کراندار نباشد در آنصورت مشتق آن $f'(x)$ نیز در فاصلهٔ (a, b) کراندار نیست . قضیهٔ عکس درست نیست (مثال بیاورید) .

۱۲۵۵ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ متناهی یا نامتناهی (a, b) دارای مشتق کراندار $f'(x)$ باشد در آنصورت $f(x)$ روی (a, b) پیوستهٔ یکنواخت است .

۱۲۵۶ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ نامتناهی $(x_\circ, +\infty)$ دیفرانسیل‌پذیر باشد و

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \circ$$

در آنصورت

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \circ$$

یعنی $f(x) = o(x)$ بازای $x \to +\infty$.

۱۲۵۷ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ نامتناهی $(x_\circ, +\infty)$ دیفرانسیل‌پذیر باشد و بازای $x \to +\infty$ داشته باشیم $f(x) = o(x)$ در آنصورت

$$\varliminf_{x \to +\infty} |f'(x)| = \circ$$

بالاخص اگر $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = k$ وجود داشته باشد در آنصورت $k = \circ$.

۱۲۵۸ – الف) ثابت کنید که اگر : ۱) تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[x_\circ, X]$ معین و پیوسته باشد ؛ ۲) $f(x)$ دارای مشتق متناهی $f'(x)$ در فاصلهٔ $(x_\circ, X)$ باشد ؛ ۳) حد متناهی یا نامتناهی

$$\lim_{x \to x_\circ + \circ} f'(x) = f'(x_\circ + \circ)$$

وجود داشته باشد در آنصورت مشتق یکسویی متناهی یا نامتناهی $f'_+(x_\circ)$ وجود دارد و

$$f'_+(x_\circ) = f'(x_\circ + \circ)$$

ب) نشان دهید که برای تابع

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{۱ + x}{۱ - x} \quad (x \neq ۱) \text{ و } f(۱) = \circ$$

حد متناهی

$$\lim_{x \to ۱} f'(x)$$

وجود دارد منتها تابع $f(x)$ دارای مشتقات یکسویی متناهی $f'_-(۱)$ و $f'_+(۱)$ نمیباشد .

تعبیر هندسی این حقیقت را بیان کنید .

۱۲۵۹ - ثابت کنید که اگر بازای $a<x<b$ داشته باشیم $f'(x) = ۰$ در اینصورت

بازای $a<x<b$ ، $f(x) = \text{const}$

۱۲۶۰ - ثابت کنید که تنها تابع $(-\infty<x<+\infty)$ $f(x)$ که دارای مشتق ثابت

$$f'(x) = k$$

میباشد عبارتست از تابع خطی

$$f(x) = kx + b$$

۱۲۶۱ - در بارهٔ تابع $f(x)$ اگر $f^{(n)}(x) = ۰$ چه میتوان گفت ؟

۱۲۶۱٫۱ - فرض کنیم $f(x) \in C^{(\infty)}(-\infty, +\infty)$ و برای هر x عدد طبیعی $n_x (n_x \leqslant n)$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$f^{(n_x)}(x) = ۰$$

ثابت کنید که تابع $f(x)$ چند جمله‌ای است .

۱۲۶۲ - ثابت کنید که تنها تابع $(-\infty<x<+\infty)$ $y = y(x)$ صادق در معادلهٔ

$$y' = \lambda y \quad (\lambda = \text{const})$$

عبارتست از تابع نمایی

$$y = Ce^{\lambda x}$$

که در آن C ثابت دلخواهی است .

راهنمایی — $(ye^{-\lambda x})'$ را در نظر بگیرید .

۱۲۶۳ - تحقیق کنید که توابع

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{۱+x}{۱-x}$$

و

$$g(x) = \operatorname{arc\,tg} x$$

در حوزه‌های

۱) $x<۱$ و ۲) $x>۱$

دارای مشتق یکسان میباشند .

بستگی بین دو تابع را نتیجه بگیرید .

۱۲۶۴ – اتحادهای زیر را ثابت کنید :

الف) $۲\,\mathrm{arc\,tg}\,x + \mathrm{arc\,sin}\,\frac{۲x}{۱+x^۲} = \pi\,\mathrm{sgn}\,x$ بازای $|x| \geqslant ۱$

ب) $۳\,\mathrm{arc\,cos}\,x - \mathrm{arc\,cos}\,(۳x - ۴x^۳) = \pi$

۱۲۶۵ – ثابت کنید که اگر : ۱) تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد ؛ ۲) دارای مشتق متناهی $f'(x)$ داخل آن باشد ؛ ۳) خطی نباشد ، در آنصورت در فاصلهٔ (a, b) دست کم یک نقطهٔ c وجود دارد چنان که

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

تعبیر هندسی این حقیقت را بیان کنید .

۱۲۶۶ – ثابت کنید که اگر : ۱) تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ دارای مشتق دوم $f''(x)$ باشد و ۲) $f'(a) = f'(b) = ۰$ باشد ، در آنصورت در فاصلهٔ (a, b) حد اقل یک نقطهٔ c وجود دارد چنان که

$$|f''(c)| \geqslant \frac{۴}{(b-a)^۲}\,|f(b) - f(a)|$$

۱۲۶۷ – اتومبیلی حرکتش را از نقطهٔ مبداء شروع کرده و مسیر خود را در t ثانیه باخر میرساند و مسافت s m را طی میکند . ثابت کنید که در یک لحظهٔ نامشخص زمان مقدار مطلق شتاب حرکت اتومبیل از

$$\frac{۴s}{t^۲}\ \mathrm{m/sec}^۲$$

کمتر نبوده است .

بخش ۷ – صعود و نزول توابع . نامساویها

بند ۱ – صعود و نزول توابع . تابع $f(x)$ را روی قطعهٔ $[a, b]$ وقتی صعودی (نزولی) نامند که

$$f(x_۲) > f(x_۱) \quad \text{بازای} \quad a \leqslant x_۱ < x_۲ \leqslant b$$

(یا متناظراً $f(x_۲) < f(x_۱)$ بازای $a \leqslant x_۱ < x_۲ \leqslant b$) .

اگر تابع دیفرانسیل‌پذیر $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ صعود (نزول) کند در آنصورت

$$f'(x) \geqslant ۰ \quad \text{بازای} \quad a \leqslant x \leqslant b$$

$$(\text{یا} \quad f'(x) \leqslant ۰ \quad \text{بازای} \quad a \leqslant x \leqslant b)$$

بند ۲ — نشانهٔ کافی صعود (نزول) توابع. اگر تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ پیوسته و در داخل آن دارای مشتق مثبت (منفی) $f'(x)$ باشد در آنصورت تابع $f(x)$ صعودی (نزولی) روی $[a, b]$ است.

حوزه‌های یکنوایی به معنای اکید (صعود یا نزول) توابع زیر را تعیین کنید:

۱۲۶۸ — $y = ۲ + x - x^۲$

۱۲۶۹ — $y = ۳x - x^۳$

۱۲۷۰ — $y = \frac{۲x}{۱ + x^۲}$

۱۲۷۱ — $y = \frac{\sqrt{x}}{x + ۱۰۰} \quad (x \geqslant ۰)$

۱۲۷۲ — $y = x + \sin x$

۱۲۷۳ — $y = x + |\sin ۲x|$

۱۲۷۴ — $y = \cos\frac{\pi}{x}$

۱۲۷۵ — $y = \frac{x^۲}{۲^x}$

۱۲۷۶ — $y = x^n e^{-x} \ (x \geqslant ۰, n > ۰)$

۱۲۷۷ — $y = x^۲ - \ln x^۲$

۱۲۷۸ — $f(x) = x\left(\sqrt{\frac{۳}{۲}} + \sin \ln x\right)$ اگر $x > ۰$ و $f(۰) = ۰$

۱۲۷۹ — ثابت کنید که با ازدیاد تعداد n اضلاع، محیط p_n در n — ضلعی منتظم محیط در دایره صعود و محیط P_n در n — ضلعی منتظم محیط بر همان دایره نزول میکند. با استفاده از این امر ثابت کنید که p_n و P_n بازای $n \to \infty$ دارای حد مشترکی میباشند.

۱۲۸۰ — ثابت کنید که تابع

$$\left(۱ + \frac{۱}{x}\right)^x$$

روی فاصله‌های $(-\infty, -۱)$ و $(۰, +\infty)$ صعودی است.

۱۲۸۱ — ثابت کنید که تابع گویای درست

$$P(x) = a_۰ + a_۱x + \dots + a_nx^n \quad (n \geqslant ۱,\ a_n \neq ۰)$$

در فاصله‌های $(-\infty, -x_۰)$ و $(x_۰, +\infty)$ که در آن $x_۰$ عدد مثبت بقدر کافی بزرگی است یکنوا (به معنای اکید) است.

۱۲۸۲ — ثابت کنید که تابع گویای

$$R(x) = \frac{a_۰ + a_۱x + \dots + a_nx^n}{b_۰ + b_۱x + \dots + b_mx^m} \quad (a_nb_m \neq ۰)$$

که مخالف ثابت همسان است در فاصله‌های $(-\infty, -x_۰)$ و $(x_۰, +\infty)$ که در آن $x_۰$ عدد مثبت بقدر کافی بزرگی است یکنوا (به معنای اکید) است.

۱۲۸۳ — آیا مشتق تابع یکنوا حتماً یکنواست؟ مثال $f(x) = x + \sin x$ را در نظر بگیرید.

۱۲۸۴ – ثابت کنید که اگر $\varphi(x)$ تابع صعودی یکنوای دیفرانسیل‌پذیر باشد و

$$|f'(x)| \leqslant \varphi'(x) \quad \text{بازای} \quad x \geqslant x_0$$

در آنصورت

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \varphi(x)-\varphi(x_0)$$

بازای $x \geqslant x_0$.

تعبیر هندسی این حقیقت را بیان کنید .

۱۲۸۵ – فرض کنیم تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $a \leqslant x < +\infty$ پیوسته و علاوه بر آن بازای $x > a$ داشته باشیم $f'(x) > k > 0$ که در آن k مقدار ثابتی است .

ثابت کنید که اگر $f(a) < 0$ در آنصورت معادلهٔ $f(x) = 0$ دارای فقط و فقط یک ریشهٔ حقیقی در فاصلهٔ $\left(a,\ a-\frac{f(a)}{k}\right)$ میباشد .

۱۲۸۶ – تابع $f(x)$ را در نقطهٔ x_0 وقتی صعودی نامند که در همسایگی $|x-x_0| < \delta$ علامت نمو تابع $\Delta f(x_0) = f(x)-f(x_0)$ با علامت نمو آرگومان $\Delta x_0 = x-x_0$ یکی باشد .

ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ $(a<x<b)$ در هر نقطه از یک فاصلهٔ متناهی یا نامتناهی (a, b) صعودی باشد در آنصورت تابع در این فاصله صعودی است .

۱۲۸۷ – نشان دهید که تابع

$$f(x) = x + x^2 \sin\frac{2}{x} \quad \text{اگر} \quad x \neq 0 \quad \text{و} \quad f(0) = 0$$

در نقطهٔ $x = 0$ صعودی است ولی در هر فاصلهٔ $(-\varepsilon, \varepsilon)$ در برگیرندهٔ این نقطه که در آن $\varepsilon > 0$ کوچک دلخواهی است، صعودی نیست .

طرح نمودار این تابع را رسم کنید .

۱۲۸۸ – مطلوبست اثبات قضیه : اگر ۱) توابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ ، n بار دیفرانسیل‌پذیر باشند ؛ ۲) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ $(k=0, 1, \dots, n-1)$ ؛ ۳) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ بازای $x > x_0$ ، در اینصورت نامساوی زیر را داریم :

$$\varphi(x) > \psi(x) \quad \text{بازای} \quad x > x_0$$

۱۲۸۹ – نامساویهای زیر را اثبات کنید :

الف) $e^x > ۱ + x$ بازای $x \neq ۰$

ب) $x - \frac{x^۲}{۲} < \ln(۱ + x) < x$ بازای $x > ۰$

پ) $x - \frac{x^۳}{۶} < \sin x < x$ بازای $x > ۰$

ت) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^۳}{۳}$ بازای $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$

ث) $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{۱}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{۱}{\beta}}$
بازای $x > ۰$ ، $y > ۰$ و $۰ < \alpha < \beta$

نامساویهای از الف) تا ت) را تعبیر هندسی کنید .

۱۲۹۰ – نامساوی زیر را ثابت کنید :

$$\frac{۲}{\pi} x < \sin x < x \quad \text{بازای} \quad ۰ < x < \frac{\pi}{۲}$$

۱۲۹۱ – ثابت کنید که بازای $x > ۰$ نامساوی زیر برقرار است :

$$\left(۱ + \frac{۱}{x}\right)^x < e < \left(۱ + \frac{۱}{x}\right)^{x+۱}$$

۱۲۹۲ – در دو تصاعد حسابی و هندسی تعداد جملات و جملات طرفین نظیر به نظیر یکسان و جمیع جملات مثبتند . ثابت کنید که مجموع جملات تصاعد حسابی بیشتر از مجموع جملات تصاعد هندسی است .

۱۲۹۳ – از روی نامساوی

$$\sum_{k=۱}^{n} (a_k x + b_k)^۲ \geqslant ۰$$

که در آن $x, a_k, b_k \ (k = ۱, \dots, n)$ حقیقی هستند نامساوی کوشی را ثابت کنید :

$$\left(\sum_{k=۱}^{n} a_k b_k\right)^۲ \leqslant \sum_{k=۱}^{n} a_k^۲ \sum_{k=۱}^{n} b_k^۲$$

۱۲۹٤ – ثابت کنید که میانگین حسابی اعداد مثبت از میانگین کوادراتیک این اعداد بزرگتر نیست یعنی

$$\frac{۱}{n} \sum_{k=۱}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{۱}{n} \sum_{k=۱}^{n} x_k^۲}$$

۱۲۹۵ – ثابت کنید که میانگین هندسی اعداد مثبت از میانگین حسابی این اعداد بزرگتر نیست یعنی

$$\sqrt[n]{x_۱x_۲\dots x_n}\leqslant\frac{۱}{n}(x_۱+x_۲+\dots+x_n)$$

راهنمایی – روش استقرای ریاضی را بکار برید .

۱۲۹۶ – میانگین مرتبهٔ s دو عدد مثبت a و b عبارتست از تابعی که با تساوی‌های

$$s\neq ۰ \quad \text{اگر} \quad \Delta_s(a,\ b)=\left(\frac{a^s+b^s}{۲}\right)^{\frac{۱}{s}}$$

و

$$\Delta_۰(a,\ b)=\lim_{s\to ۰}\Delta_s(a,\ b)$$

تعریف میشود .

بخصوص : بازای $s=-۱$ میانگین هارمونیک ، بازای $s=۰$ میانگین هندسی (اثبات کنید !) ، بازای $s=۱$ میانگین حسابی و بازای $s=۲$ میانگین کوادراتیک را خواهیم داشت .

ثابت کنید که

۱) $\min(a,\ b)\leqslant\Delta_s(a,\ b)\leqslant\max(a,\ b)$

۲) تابع $\Delta_s(a,\ b)$ بازای $a\neq b$ تابع صعودی از متغیر s است ؛

۳) $\lim\limits_{s\to-\infty}\Delta_s(a,\ b)=\min(a,\ b)$

$\lim\limits_{s\to+\infty}\Delta_s(a,\ b)=\max(a,\ b)$

راهنمایی – عبارت زیر را در نظر بگیرید :

$$\frac{d}{ds}[\ln\Delta_s(a,\ b)]$$

۱۲۹۷ – نامساویهای زیر را ثابت کنید :

الف) $x^\alpha-۱>\alpha(x-۱)$ بازای $x>۱,\ \alpha\geqslant ۲$

ب) $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{x-a}$ اگر $x>a>۰,\ n>۱$

پ) $۱+۲\ln x\leqslant x^۲$ بازای $x>۰$

بخش ۸ — جهت تقعر (گودی) . نقطه‌های عطف

بند ۱ — شرط کافی تقعر . نمودار تابع دیفرانسیل‌پذیر $y = f(x)$ را روی قطعهٔ $[a, b]$ وقتی مقعر بسمت بالا (مقعر بسمت پایین) نامند که قطعهٔ منحنی

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

در بالای (متناظراً در پائین) مماس رسم شده در یک نقطهٔ دلخواه این قطعهٔ منحنی قرار داشته باشد . شرط کافی تقعر نمودار بطرف بالا (پایین) با فرض وجود مشتق دوم $f''(x)$ عبارتست از بر آورده شدن نامساوی

$$f''(x) > ۰ \quad (f''(x) < ۰) \quad \text{بازای} \quad a < x < b$$

بند ۲ — شرط کافی نقطهٔ عطف . نقطه‌ای که در آن جهت تقعر نمودار تابع عوض میشود نقطهٔ عطف نامیده میشود . نقطهٔ $x_۰$ که بازای آن یا $f''(x_۰) = ۰$ یا $f''(x_۰)$ وجود ندارد در صورتی نقطهٔ عطف است که $f''(x)$ بازای گذر از نقطهٔ $x_۰$ علامت خود را عوض کند .

۱۲۹۸ — جهت تقعر منحنی

$$y = ۱ + \sqrt[۳]{x}$$

را در نقاط $A(-۱, ۰)$ و $B(۱, ۲)$ و $C(۰, ۰)$ بررسی کنید .

فواصل تقعر با علامت معین و نقاط عطف نمودار توابع زیر را پیدا کنید :

۱۲۹۹ — $y = ۳x^۲ - x^۳$

۱۳۰۰ — $y = \dfrac{a^۳}{a^۲ + x^۲} \quad (a > ۰)$

۱۳۰۱ — $y = x + x^{\frac{۵}{۳}}$

۱۳۰۲ — $y = \sqrt{۱ + x^۲}$

۱۳۰۳ — $y = x + \sin x$

۱۳۰۴ — $y = e^{-x^۲}$

۱۳۰۵ — $y = \ln(۱ + x^۲)$

۱۳۰۶ — $y = x \sin(\ln x) \quad (x > ۰)$

۱۳۰۷ — $y = x^x \quad (x > ۰)$

۱۳۰۸ — نشان دهید که منحنی

$$y = \frac{x + ۱}{x^۲ + ۱}$$

دارای سه نقطهٔ عطف واقع بر یک استقامت است .

نمودار این تابع را رسم کنید .

۱۳۰۹ – بازای چه مقدار پارامتر h « منحنی احتمال »

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^۲x^۲} \quad (h > ۰)$$

دارای نقاط عطف $x = \pm\sigma$ است ؟

۱۳۱۰ – جهت تقعر سیکلویید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(۱ - \cos t) \quad (a > ۰)$$

را بررسی کنید .

۱۳۱۱ – فرض کنیم تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $a \leqslant x < +\infty$ دو بار دیفرانسیل‌پذیر باشد ، ضمناً : ۱) $f(a) = A > ۰$ ؛ ۲) $f'(a) < ۰$ ؛ ۳) $f''(x) \leqslant ۰$ بازای $x > a$.

ثابت کنید که معادلهٔ $f(x) = ۰$ در فاصلهٔ $(a, +\infty)$ دارای فقط و فقط یک ریشهٔ حقیقی میباشد .

۱۳۱۲ – تابع $f(x)$ را وقتی محدب بطرف پایین (بالا) روی فاصلهٔ (a, b) نامند که برای نقاط دلخواه $x_۱$ و $x_۲$ از این فاصله و اعداد دلخواه $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ $(\lambda_۱ > ۰ ، \lambda_۲ > ۰ ، \lambda_۱ + \lambda_۲ = ۱)$ نامساوی

$$f(\lambda_۱ x_۱ + \lambda_۲ x_۲) < \lambda_۱ f(x_۱) + \lambda_۲ f(x_۲)$$

(یا بترتیب ، نامساوی متقابل

$$f(\lambda_۱ x_۱ + \lambda_۲ x_۲) > \lambda_۱ f(x_۱) + \lambda_۲ f(x_۲)$$

برقرار باشد .

ثابت کنید که : ۱) تابع $f(x)$ تحدبش روی (a, b) بطرف پائین است اگر $f''(x) > ۰$ بازای $a < x < b$ ؛ ۲) تابع $f(x)$ تحدبش روی (a, b) بطرف بالا است اگر $f''(x) < ۰$ بازای $a < x < b$.

۱۳۱۳ – نشان دهید که توابع

$$x \ln x \; ، \; e^x \; ، \; x^n \quad (n > ۵)$$

روی فاصلهٔ $(۰, +\infty)$ محدب بطرف پایین ، و توابع

$$\ln x, \quad x^n (۰ < n < ۱)$$

روی فاصلهٔ $(۰, +\infty)$ محدب بطرف بالا میباشند .

۱۳۱۴ – نامساویهای زیر را ثابت و توجیه هندسی کنید :

انف) $\frac{۱}{۲}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{۲}\right)^n \quad (x > ۰ \; ، y > ۰ \; ، x \neq y \; ، n > ۱)$

ب) $\frac{e^x+e^y}{۲} > e^{\frac{x+y}{۲}}$ $(x \neq y)$

پ) $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{۲}$ در صورتیکه $x > ۰$ و $y > ۰$

۱۳۱۴,۱ – فرض کنیم بازای $a \leqslant x \leqslant b$ داشته باشیم $f''(x) \geqslant ۰$. ثابت کنید که بازای هر $x_۱$ و $x_۲ \in [a, b]$ داریم :

$$f\left(\frac{x_۱+x_۲}{۲}\right) \leqslant \frac{۱}{۲} [f(x_۱)+f(x_۲)]$$

۱۳۱۵ – ثابت کنید که تابع محدب کراندار، در همه جا پیوسته و دارای مشتقات یکسویی چپ و راست میباشد .

۱۳۱۶ – فرض کنیم تابع $f(x)$ در فاصلهٔ (a, b) دو بار دیفرانسیل‌پذیر باشد و $f''(\xi) \neq ۰$ که در آن $a < \xi < b$.

ثابت کنید که در فاصلهٔ (a, b) دو مقدار $x_۱$ و $x_۲$ میتوان یافت چنان که

$$\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱} = f'(\xi)$$

۱۳۱۷ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ نامتناهی $(x_۰, +\infty)$ دو بار دیفرانسیل‌پذیر باشد و

$$\lim_{x \to x_۰+۰} f(x) = ۰, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = ۰$$

در آنصورت در فاصلهٔ $(x_۰, +\infty)$ حداقل یک نقطهٔ ξ وجود دارد چنان که $f''(\xi) = ۰$.

بخش ۹ — رفع ابهام

قاعدهٔ اول لوپیتال $\left(\text{رفع ابهام صورت مبهم } \frac{۰}{۰}\right)$. اگر : ۱) توابع $f(x)$ و $g(x)$ در یک همسایگی U_ε^* نقطهٔ a که در آن a یک عدد یا نماد ∞ است معین و پیوسته باشند و بازای $x \to a$ هر دو تابع بسمت صفر میل کنند:

---

* منظور از همسایگی U_ε نقطهٔ a مجموعهٔ اعداد x است که در نامساوی : ۱) $|x-a| < \varepsilon$ اگر a عدد باشد و ۲) $|x| > \frac{۱}{\varepsilon}$ اگر a نماد ∞ باشد ، صدق کنند .

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=۰$$

۲) در همسایگی U_ε نقطهٔ a و احتمالا جز در خود نقطهٔ a مشتقات $g'(x)$ و $f'(x)$ وجود داشته باشند و ضمناً بازای $x\neq a$ تواماً صفر نشوند ؛

۳) حد متناهی یا نامتناهی

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

وجود داشته باشد ، در آنصورت داریم

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قاعدهٔ دوم لوپیتال (رفع ابهام صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$) . اگر : ۱) توابع $f(x)$ و $g(x)$ بازای $x\to a$ هر دو بسمت بی‌نهایت میل کنند :

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

که در آن a عدد یا نماد ∞ است .

۲) مشتقات $f'(x)$ و $g'(x)$ بازای جمیع x های متعلق به همسایگی U_ε نقطهٔ a و مخالف a وجود داشته باشند ، ضمناً

$f'^{۲}(x)+g'^{۲}(x)\neq ۰$ بازای $x\subset U_\varepsilon$ و $x\neq a$

۳) حد متناهی یا نامتناهی

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

وجود داشته باشد ، در آنصورت

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قواعد مشابه برای حدود یکسویی درست است .

رفع ابهام صورت مبهم $۰\times\infty$ ، $\infty-\infty$ ، ۱^{∞} ، $۰^{۰}$ و غیره از راه تبدیلات جبری و لگاریتمی به رفع ابهام دو نوع پایهٔ زیر منجر میگردد :

$$\frac{۰}{۰} \quad \text{و} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

مطلوبست محاسبهٔ مقدار عبارتهای زیر :

۱۳۱۸ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$

۱۳۱۹ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^۲}$

۱۳۲۰ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

۱۳۲۱ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۳\operatorname{tg} ۴x - ۱۲\operatorname{tg} x}{۳\sin ۴x - ۱۲\sin x}$

۱۳۲۲ – $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{\operatorname{tg} ۳x}{\operatorname{tg} x}$

۱۳۲۳ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{x \operatorname{ctg} x - ۱}{x^۲}$

۱۳۲۴ – $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\sqrt[۳]{\operatorname{tg} x} - ۱}{۲\sin^۲ x - ۱}$

۱۳۲۵ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{x(e^x + ۱) - ۲(e^x - ۱)}{x^۳}$

۱۳۲۶ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۱ - \cos x^۲}{x^۲ \sin x^۲}$

۱۳۲۷ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\arcsin ۲x - ۲\arcsin x}{x^۳}$

۱۳۲۸ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۱}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{a}} - \sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{b}}\right)$

۱۳۲۹ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{a^x - a^{\sin x}}{x^۳} \quad (a > ۰)$

۱۳۳۰ – $\lim\limits_{x \to ۱} \left(\dfrac{x^x - x}{\ln x - x + ۱}\right)$

۱۳۳۱ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$

۱۳۳۲ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

۱۳۳۳ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^۴}$

۱۳۳۴ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{۱}{x}\left(\dfrac{۱}{\operatorname{th} x} - \dfrac{۱}{\operatorname{tg} x}\right)$

۱۳۳۵ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{\operatorname{Arsh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{Arsh}(\operatorname{hin} x)}{\operatorname{sh} x - \sin x}$

که در آن $\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{۱ + x^۲}\right)$

۱۳۳۶ – $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon} \quad (\varepsilon > ۰)$

۱۳۳۷ – $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^{ax}} \ (a > ۰,\ n > ۰)$

۱۳۳۸ – $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{e^{-\frac{۱}{x^۲}}}{x^{۱۰۰}}$

۱۳۳۹ – $\lim\limits_{x \to +\infty} x^۲ e^{-۰.۰۱x}$

۱۳۴۰ – $\lim\limits_{x \to ۱-۰} \ln x \times \ln(۱ - x)$

۱۳۴۱ – $\lim\limits_{x \to +۰} x^\varepsilon \ln x \quad (\varepsilon > ۰)$

۱۳۴۲ – $\lim\limits_{x \to +۰} x^x$

۱۳۴۳ – $\lim\limits_{x \to ۰} x^{x^x - ۱}$

۱۳۴۴ – $\lim\limits_{x \to ۰} \left(x^{x^x} - ۱\right)$

$$\lim_{x\to+\cdot} x^{\frac{k}{١+\ln x}}$$ — ١٣٤٥

$$\lim_{x\to١} x^{\frac{١}{١-x}}$$ — ١٣٤٦

$$\lim_{x\to١} (٢-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{٢}}$$ — ١٣٤٧

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{٤}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}٢x}$$ — ١٣٤٨

$$\lim_{x\to\cdot} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$$ — ١٣٤٩

$$\lim_{x\to+\cdot} \left(\ln\frac{١}{x}\right)^{x}$$ — ١٣٥٠

$$\lim_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{٢x+١}\right)^{\frac{١}{x}}$$ — ١٣٥١

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$$ — ١٣٥٢

$$\lim_{x\to\cdot} \left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{١}{x^٢}}$$ — ١٣٥٣

$$\lim_{x\to\cdot} \left(\frac{١}{x}-\frac{١}{e^x-١}\right)$$ — ١٣٥٤

$$\lim_{x\to١} \left(\frac{١}{\ln x}-\frac{١}{x-١}\right)$$ — ١٣٥٥

$$\lim_{x\to\cdot} \left(\operatorname{ctg} x-\frac{١}{x}\right)$$ — ١٣٥٦

$$\lim_{x\to\cdot} \left[\frac{١}{\ln\left(x+\sqrt{١+x^٢}\right)}-\frac{١}{\ln(١+x)}\right]$$ — ١٣٥٧

$$\lim_{x\to a} \frac{a^x-x^a}{x-a} \quad (a>\cdot)$$ — ١٣٥٨

$$\lim_{x\to\cdot} \frac{(١+x)^{\frac{١}{x}}-e}{x}$$ — ١٣٥٩

$$\lim_{x\to\cdot} \frac{(a+x)^x-a^x}{x^٢} \quad (a>\cdot)$$ — ١٣٦٠

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{٢}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x\right)^{x}$$ — ١٣٦١

$$\lim_{x\to+\infty} (\operatorname{th} x)^{x}$$ — ١٣٦٢

$$\lim_{x\to\cdot} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{١}{x^٢}}$$ — ١٣٦٣

$$\lim_{x\to\cdot} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{١}{x^٢}}$$ — ١٣٦٣,١

$$\lim_{x\to\cdot} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{١}{x^٢}}$$ — ١٣٦٣,٢

$$\lim_{x\to\cdot} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right)^{\frac{١}{x^٢}}$$ — ١٣٦٣,٣

$$\lim_{x\to\cdot} \left(\frac{\operatorname{Arsh} x}{x}\right)^{\frac{١}{x^٢}}$$ — ١٣٦٣,٤

که در آن $\operatorname{Arsh} x=\ln\left(x+\sqrt{١+x^٢}\right)$

$$\lim_{x\to\cdot} \left[\frac{(١+x)^{\frac{١}{x}}}{e}\right]^{\frac{١}{x}}$$ — ١٣٦٤

$$\lim_{x\to\cdot} \left(\frac{٢}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{١}{x}}$$ — ١٣٦٥

$$\lim_{x\to\cdot} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{١}{x^٢}}$$ — ١٣٦٦

$$\lim_{x\to\cdot} \frac{\ln\operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}$$ — ١٣٦٧

۱۳۶۸ – $\lim\limits_{x\to ۰}\left(\frac{۱+e^x}{۲}\right)^{\operatorname{cth} x}$ ۱۳۶۸,۱ – $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$

۱۳۶۹ – $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt[۳]{x^۳+x^۲+x+۱}-\sqrt{x^۲+x+۱}\times\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$

۱۳۷۰ – $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(x+a)^{۱+\frac{۱}{x}}-x^{۱+\frac{۱}{x+a}}\right]$

۱۳۷۱ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{x\to ۰}\frac{y}{x}$$

در صورتیکه منحنی $y=f(x)$ بازای $x\to ۰$ تحت زاویهٔ α به مبدأ مختصات $(۰ , ۰)$ وارد شود

$$\left(\lim_{x\to ۰} f(x)=f(۰)=۰\right)$$

۱۳۷۲ – ثابت کنید که

$$\lim_{x\to +۰} x^{f(x)}=۱$$

در صورتیکه منحنی پیوستهٔ $y=f(x)$ بازای $x\to +۰$ به مبدأ مختصات $\left(\lim\limits_{x\to +۰} f(x)=۰\right)$ وارد شده و بازای $۰<x<\varepsilon$ بتمامی در داخل زاویهٔ حادهٔ حاصله از خطوط $y=-kx$ و $y=kx$ $(k\neq\infty)$ قرار گیرد .

۱۳۷۳ – ثابت کنید که اگر برای تابع $f(x)$ مشتق مرتبهٔ دوم $f''(x)$ وجود داشته باشد در آنصورت

$$f''(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)+f(x-h)-۲f(x)}{h^۲}$$

۱۳۷۳,۱ – دیفرانسیل پذیری تابع

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x}-\frac{۱}{e^x-۱}, & \text{اگر}\quad x\neq ۰\\ \frac{۱}{۲}, & \text{اگر}\quad x=۰\end{cases}$$

را در نقطه $x=۰$ بررسی کنید .

۱۳۷۳,۲ – مجانب منحنی زیر را پیدا کنید :

$$x=\frac{x^{۱+x}}{(۱+x)^x}\quad (x>۰)$$

۱۳۷۴ – امکان کاربرد قاعدهٔ لوپیتال را در مثال‌های زیر بررسی کنید :

الف) $\lim\limits_{x \to ۰} \dfrac{x^{۲} \sin \frac{۱}{x}}{\sin x}$ ؛

ب) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$ ؛

پ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-۲x}(\cos x + ۲\sin x) + e^{-x^{۲}} \sin^{۲} x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)}$ ؛

ت) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{۱ + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x)\, e^{\sin x}}$

۱۳۷۵ – حد نسبت مساحت قطعهٔ دایره‌ای به وتر b و سهم h را به مساحت مثلث متساوی‌الساقین محاط در این قطعه وقتی کمان قطعه با ثابت بودن شعاع R بسمت صفر میل کند پیدا کنید و با استفاده از نتیجه حاصله دستور تقریبی مساحت قطعه را بدست آورید :

$$S \approx \frac{۲}{۳} bh$$

بخش ۱۰ — دستور تیلر

بند ۱ — دستور موضعی تیلر . اگر : ۱) تابع $f(x)$ در یک همسایگی $|x - x_{۰}| < \varepsilon$ نقطهٔ $x_{۰}$ معین باشد ؛ ۲) $f(x)$ در این همسایگی دارای مشتقات $f'(x), \dots, f^{(n-۱)}(x)$ لغایت مرتبهٔ $(n - ۱)$ ـ ام باشد ؛ ۳) در نقطهٔ $x_{۰}$ مشتق مرتبهٔ n ـ ام $f^{(n)}(x_{۰})$ وجود داشته باشد ، در آنصورت

$$f(x) = \sum_{k=۰}^{n} a_k (x - x_{۰})^k + o(x - x_{۰})^n$$

که در آن

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_{۰})}{k!} \quad (k = ۰, ۱, \dots, n)$$

بویژه بازای $x_{۰} = ۰$ داریم :

$$f(x) = \sum_{k=۰}^{n} \frac{f^{(k)}(۰)}{k!} x^k + o(x^n)$$

بازای شرایط مذکور نمایش (۱) یکتاست .

اگر در نقطهٔ $x_۰$ مشتق $f^{(n+۱)}(x_۰)$ وجود داشته باشد در آن صورت جملهٔ باقیمانده در دستور (۱) را میتوان بشکل $O^*((x-x_۰)^{n+۱})$ اختیار کرد.

از دستور موضعی تیلر (۲) پنج بسط مهم زیر بدست میآید:

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) - \mathrm{I}$$

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \ldots + (-۱)^{n-۱} \frac{x^{۲n-۱}}{(۲n-۱)!} + o(x^{۲n}) - \mathrm{II}$$

$$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \ldots + (-۱)^n \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} + (x^{۲n+۱}) - \mathrm{III}$$

$$(۱+x)^m = ۱ + mx + \frac{m(m-۱)}{۲!} x^۲ + \ldots \qquad - \mathrm{IV}$$

$$\ldots + \frac{m(m-۱)\ldots(m-n+۱)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\ln(۱+x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \ldots + (-۱)^{n-۱} \frac{x^n}{n} + o(x^n) - \mathrm{V}$$

بند ۲ — دستور تیلر. اگر: ۱) تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[n, b]$ معین باشد؛ ۲) $f(x)$ روی این قطعه دارای مشتقات پیوستهٔ $f'(x)$، ...، $f^{(n-۱)}(x)$ باشد؛ ۳) بازای $n < x < b$ مشتق متناهی $f^{(n)}(x)$ وجود داشته باشد، در آنصورت

$$f(x) = \sum_{k=۰}^{n-۱} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-n)^k + R_n(x) \quad (n \leqslant x \leqslant b)$$

که در آن

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-n)^n \quad (۰ < \theta < ۱)$$

(جملهٔ باقیمانده در شکل لاگرانژ) یا

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta_۱(x-a))}{(n-۱)!}(۱-\theta_۱)^{n-۱}(x-n)^n \quad (۰ < \theta_۱ < ۱)$$

(جملهٔ باقیمانده در شکل کوشی).

۱۳۷۶ — چندجملهای

$$P(x) = ۱ + ۳x + ۵x^۲ - ۲x^۳$$

را بر حسب قوای مثبت و درست دوجملهای $x+۱$ بسط دهید.

بسط توابع زیر را تا جملهٔ مرتبهٔ ذکر شده با خود آن جمله بر حسب قوای درست و مثبت متغیر x بنویسید :

۱۳۷۷ - $f(x)=\frac{۱+x+x^{۲}}{۱-x+x^{۲}}$ تا جملهٔ دارای $x^{٤}$ ، مقدار $f^{(٤)}(۰)$ چقدر است ؟

۱۳۷۸ - $\frac{(۱+x)^{۱۰۰}}{(۱-۲x)^{٤۰}(۱+۲x)^{٦۰}}$ تا جملهٔ دارای $x^{۲}$.

۱۳۷۹ - $(n>۰)$ $\sqrt[m]{n^{m}+x}$ تا جملهٔ دارای $x^{۲}$.

۱۳۸۰ - $\sqrt{۱-۲x+x^{۳}}-\sqrt[۳]{۱-۳x+x^{۲}}$ تا جملهٔ دارای $x^{۳}$.

۱۳۸۱ - $e^{۲x-x^{۲}}$ تا جملهٔ دارای $x^{٥}$.

۱۳۸۲ - $\frac{x}{e^{x}-۱}$ تا جملهٔ دارای $x^{٤}$.

۱۳۸۳ - $\sqrt[۳]{\sin x^{۳}}$ تا جملهٔ دارای $x^{۱۳}$.

۱۳۸٤ - $\ln\cos x$ تا جملهٔ دارای $x^{٦}$.

۱۳۸٥ - $\sin(\sin x)$ تا جملهٔ دارای $x^{۳}$.

۱۳۸٦ - $\operatorname{tg} x$ تا جملهٔ دارای $x^{٥}$.

۱۳۸۷ - $\ln\frac{\sin x}{x}$ تا جملهٔ دارای $x^{٦}$.

۱۳۸۸ - مطلوبست سه‌جمله از بسط تابع $f(x)=\sqrt{x}$ بر حسب قوای درست و مثبت تفاضل $x-۱$.

۱۳۸۹ - تابع $f(x)=x^{x}-۱$ را بر حسب قوای مثبت و درست دوجمله‌ای $x-۱$ تا جملهٔ $(x-۱)^{۳}$ بسط دهید .

۱۳۹۰ - تابع $y=\operatorname{ach}\frac{x}{a}$ $(a>۰)$ را در همسایگی نقطهٔ $x=۰$ بطور تقریبی با سهمی درجه دوم عوض کنید .

۱۳۹۱ - تابع $f(x)=\sqrt{۱+x^{۲}}-x$ $(x>۰)$ را بر حسب قوای درست و مثبت کسر $\frac{۱}{x}$ تا جملهٔ $\frac{۱}{x^{۳}}$ بسط دهید .

۱۳۹۲ - مطلوبست بسط تابع $f(h)=\ln(x+h)$ $(x>۰)$ بر حسب قرای درست و مثبت نمو h تا جملهٔ دارای h^{n} (n عددیست طبیعی) .

۱۳۹۳ - فرض کنیم

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$$

$(۰<\theta<۱)$ ، ضمناً $f^{(n+۱)}(x)\neq ۰$.

ثابت کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\theta=\frac{۱}{n+۱}$$

۱۳۹۳,۱ – فرض کنیم بازای $x\to ۰$ داشته باشیم :

$$f(x)=۱+kx+o(x)$$

ثابت کنید که

$$\lim_{x\to ۰}[f(x)]^{\frac{۱}{x}}=e^k$$

۱۳۹۳,۲ – فرض کنید $f(x)\in C^{(۲)}[۰,۱]$ و $f(۰)=f(۱)=۰$ ، ضمناً $|f''(x)|\leqslant A$ بازای $x\in(۰,۱)$. ثابت کیند که بازای $(۰\leqslant x\leqslant ۱)$ $|f'(x)|\geqslant\frac{A}{۲}$.

۱۳۹۳,۳ – فرض کنیم $(-\infty<x<+\infty)$ $f(x)$ تابع دو بار دیفرانسیل‌پذیر باشد و

$$M_k=\sup_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty\quad(k=۰,\ ۱,\ ۲)$$

نامساوی زیر را ثابت کنید :

$$M_۱^۲\leqslant ۲M_۰M_۲$$

۱۳۹٤ – مطلوبست برآورد خطای مطلق دستورهای تقریبی زیر :

الف) $e^x\approx ۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ بازای $۰\leqslant x\leqslant ۱$ ؛

ب) $\sin x\approx x-\frac{x^۳}{٦}$ بازای $|x|\leqslant\frac{۱}{۲}$ ؛

پ) $\operatorname{tg}x\approx x+\frac{x^۳}{۳}$ بازای $|x|\leqslant ۰,۱$ ؛

ت) $\sqrt{۱+x}\approx ۱+\frac{x}{۲}-\frac{x^۲}{۸}$ بازای $۰\leqslant x\leqslant ۱$.

۱۳۹۵ – بازای چه مقدار x دستور تقریبی زیر با تقریب ۱۰۰۰,۰ درست است :

$$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲}$$

۱۳۹۵,۱ – ثابت کنید

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-۱}} - r$$

$(n \geqslant ۲ ، a > ۰ ، x > ۰)$ که در آن $۰ < r < \frac{n-۱}{۲n^۲} \times \frac{x^۲}{a^{۲n-۱}}$.

۱۳۹٦ – بیاری دستور تیلر عبارات زیر را بطور تقریبی حساب و خطا را بر آورد کنید :

الف) $\sqrt[۳]{۳۵}$ ؛

ب) $\sqrt[۵]{۲۰۰}$ ؛

پ) $\sqrt[۱۲]{٤۰۰۰}$ ؛

ت) $\sqrt{e}$ ؛

ث) $\sin ۱۸^\circ$ ؛

ج) $\ln ۱,۲$ ؛

چ) $\operatorname{arc\,tg} ۰,۸$ ؛

ح) $\arcsin ۰,٤۵$

خ) $(۱,۱)^{۱,۲}$ ؛

۱۳۹۷ – مطلوبست محاسبهٔ

الف) e با تقریب $۱۰^{-۹}$ ؛

ب) $\sin ۱^\circ$ با تقریب $۱۰^{-۸}$ ؛

پ) $\cos ۹^\circ$ با تقریب $۱۰^{-۵}$ ؛

ت) $\sqrt{۵}$ با تقریب $۱۰^{-٤}$ ؛

ث) $\lg ۱۱$ با تقریب $۱۰^{-۵}$

با استفاده از بسطهای I – V حدود زیر را پیدا کنید :

۱۳۹۸ – $$\lim_{x \to ۰} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^۲}{۲}}}{x^٤}$$

۱۳۹۹ – $$\lim_{x \to ۰} \frac{e^x \sin x - x(۱ + x)}{x^۳}$$

۱٤۰۰ – $$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{۳}{۲}} \left(\sqrt{x+۱} + \sqrt{x-۱} - ۲\sqrt{x}\right)$$

۱٤۰۱ – $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[٦]{x^٦ + x^۵} - \sqrt[٦]{x^٦ - x^۵}\right)$$

۱٤۰۲ – $$\lim_{x \to +\infty} \left[\left(x^۳ - x^۲ + \frac{x}{۲}\right) e^{\frac{۱}{x}} - \sqrt{x^٦ + ۱}\right]$$

١٤٠٣ – $\lim\limits_{x\to ٠} \dfrac{a^x+a^{-x}-٢}{x^٢} \quad (a>٠)$

١٤٠٤ – $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x-x^٢\ln\left(١+\dfrac{١}{x}\right)\right]$

١٤٠٥ – $\lim\limits_{x\to ٠} \left(\dfrac{١}{x}-\dfrac{١}{\sin x}\right)$

١٤٠٦ – $\lim\limits_{x\to ٠} \dfrac{١}{x}\left(\dfrac{١}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$

١٤٠٦,١ – $\lim\limits_{x\to ٠} \dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[٣]{١-x^٢}}{x^٥}$

١٤٠٦,٢ – $\lim\limits_{x\to ٠} \dfrac{١-(\cos x)^{\sin x}}{x^٣}$

١٤٠٦,٣ – $\lim\limits_{x\to ٠} \dfrac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x)-x}{x^٣}$

جملهٔ اصلی مقدار y را که بازای $x\to ٠$ بی نهایت کوچک میباشد بصورت Cx^n (C مقداریست ثابت) تعیین کنید ، در صورتیکه :

١٤٠٧ – $y=\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)$

١٤٠٨ – $y=(١+x)^x-١$

١٤٠٩ – $y=١-\dfrac{(١+x)^{\frac{١}{x}}}{e}$

١٤١٠ – در ازای چه مقادیری از ضرایب a و b مقدار عبارت

$$x-(a+b\cos x)\sin x$$

بی نهایت کوچک مرتبهٔ ٥ ـ ام نسبت به x خواهد بود ؟

١٤١٠,١ – ضرایب A و B را چنان انتخاب کنید که بازای $x\to ٠$ تساوی مجانبی زیر برقرار باشد :

$$\operatorname{ctg} x=\frac{١+Ax^٢}{x+Bx^٣}+O(x^٥)$$

١٤١٠,٢ – در ازای چه مقادیری از ضرایب A ، B ، C و D دستور مجانبی زیر بازای $x\to ٠$ درست است :

$$e^x=\frac{١+Ax+Bx^٢}{١+Cx+Dx^٢}+O(x^٥)$$

۱۴۱۱ – بفرض آنکه $|x|$ مقدار کوچکی باشد ، دستورهای تقریبی ساده‌ای برای محاسبهٔ عبارتهای زیر معلوم کنید :

الف) $(R > ۰)$ $\frac{۱}{R^۲} - \frac{۱}{(R+x)^۲}$ ؛ پ) $\frac{A}{x}\left[۱ - \left(۱ + \frac{x}{۱۰۰}\right)^{-n}\right]$ ؛

ب) $\sqrt[۳]{\frac{۱+x}{۱-x}} - \sqrt[۳]{\frac{۱-x}{۱+x}}$ ؛ ت) $\frac{\ln ۲}{\ln\left(۱ + \frac{x}{۱۰۰}\right)}$

۱۴۱۲ – بفرض انکه از لحاظ قدر مطلق کوچک باشد ، دستور تقریبی بشکل

$$x = \alpha \sin x + \beta \operatorname{tg} x$$

را با تقریب تا جملهٔ دارای $x^۵$ معلوم کنید .

این دستور را برای تقویم تقریبی کمانهای دارای کمیت کوچک زاویه‌ای بکار برید .

۱۴۱۳ – خطای نسبی این قایدهٔ چبیشف را بر آورد کنید : کمان دایره‌ای تقریباً برابر است با مجموع ساقهای مثلث متساوی الساقین که بر وتر این کمان ساخته شده و ارتفاع آن $\sqrt{\frac{۴}{۳}}$ سهم وتر را تشکیل میدهد .

بخش ۱۱ — اکسترمم توابع . بیشترین و کمترین مقدار توابع .

بند ۱ — شرط لازم اکسترمم . گویند که تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_۰$ دارای اکسترمم (ماگزیمم یا مینیمم) است اگر تابع در همسایگی دوطرفهٔ نقطهٔ $x_۰$ معین و بازای جمیع نقاط x از یک حوزهٔ $۰ < |x - x_۰| < \delta$ بترتیب (از چپ به راست) نامساویهای

$$f(x) < f(x_۰) \quad \text{یا} \quad f(x) > f(x_۰)$$

بر قرار باشد .

در نقطهٔ اکسترمم مشتق $f'(x_۰) = ۰$ هرگاه این مشتق وجود داشته باشد .

بند ۲ — شرایط کافی اکسترمم . قاعدهٔ اول . اگر : ۱) تابع $f(x)$ در یک همسایگی $|x - x_۰| < \delta$ نقطهٔ $x_۰$ معین و پیوسته باشد بقسمی که $f'(x_۰) = ۰$ یا مشتق نداشه باشد (نقطه بحرانی) ؛ ۲) $f(x)$ در حوزهٔ $۰ < ۱ |x - x_۰| < \delta$ دارای مشتق متناهی $f'(x)$ باشد ۳) مشتق $f'(x)$ علامت معینی را در سمت چپ $x_۰$ و سمت راست $x_۰$ حفظ کند ، در آنصورت رفتار تابع $f(x)$ بصورت جدول زیر مشخص میشود :

نتیجه	علامت مشتق		
	$x > x_۰$	$x < x_۰$	
اکسترمم ندارد	$+$	$+$	I
ماگزیمم	$-$	$+$	II
مینیمم	$+$	$-$	III
اکسترمم ندارد	$-$	$-$	IV

قاعد دوم . اگر تابع $f(x)$ دارای مشتق مرتبهٔ دوم $f''(x)$ بوده و در یک نقطه $x_۰$ شرایط زیر بر قرار باشد :

$$f'(x_۰) = ۰ \quad و \quad f''(x_۰) \neq ۰$$

در آنصورت در این نقطه $f(x)$ دارای اکسترمم میباشد که بازای $f''(x_۰) < ۰$ ماگزیمم و بازای $f''(x_۰) > ۰$ مینیمم است .

قاعدهٔ سوم. هرگاه $f(x)$ در یک فاصلهٔ $|x - x_۰| < \delta$ دارای مشتقات $f'(x), \dots , f^{(n-۱)}(x)$ و در نقطهٔ $x_۰$ دارای مشتق $f^{(n)}(x_۰)$ باشد ، ضمناً

$$f^{(k)}(x_۰) = ۰ \quad (k = ۱, \dots , n - ۱) \quad f^{(n)}(x_۰) \neq ۰$$

در چنین حالتی : ۱) اگر n عدد زوجی باشد در آنصورت $f(x)$ در نقطهٔ $x_۰$ دارای اکسترمم میباشد که بازای $f^{(n)}(x_۰) < ۰$ ماگزیمم و بازای $f^{(n)}(x_۰) > ۰$ مینیمم است . ۲) اگر n عدد فردی باشد در آنصورت تابع در نقطهٔ $x_۰$ اکسترمم ندارد .

بند ۳ — اکسترمم مطلق . بیشترین (کمترین) مقدار تابع پیوستهٔ $f(x)$ در قطعهٔ $[a, b]$ یا در نقطهٔ بحرانی این تابع (یعنی آنجا که مشتق $f'(x)$ یابرابر صفر است یا وجود ندارد) یا در نقاط مرزی a و b قطعهٔ مفروض میباشد .

توابع زیر را از لحاظ اکسترمم بررسی کنید :

۱۴۱۴ — $y = ۲ + x - x^{۲}$

۱۴۱۵ — $y = (x - ۱)^{۳}$

۱۴۱۶ — $y = (x - ۱)^{۴}$

۱۴۱۷ — $y = x^{m}(۱ - x)^{n}$ (m و n اعداد درست مثبت میباشند)

۱۴۱۸ — $y = \cos x + \operatorname{ch} x$

۱۴۱۹ — $y = (x + ۱)^{۱۰} e^{-x}$

۱۴۲۰ – $y=\left(۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\dots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ (n عددیست طبیعی)

۱۴۲۱ – $y=|x|$

۱۴۲۲ – $y=x^{\frac{۱}{۳}}(۱-x)^{\frac{۲}{۳}}$

۱۴۲۳ – تابع

$$f(x)=(x-x_۰)^n\varphi(x)$$

را در نقطهٔ $x=x_۰$ (n عددیست طبیعی) که در آن $\varphi(x)$ بازای $x=x_۰$ پیوسته و $\varphi(x_۰)\neq ۰$ ، از لحاظ اکسترمم بررسی کنید.

۱۴۲۴ – هرگاه $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ و $f'(x)=\frac{P_۱(x)}{Q^۲(x)}$ و $x_۰$ نقطهٔ سکون تابع $f(x)$ باشد یعنی $P_۱(x_۰)=۰$ و $Q(x_۰)\neq ۰$.
ثابت کنید که

$$\operatorname{sgn} f''(x_۰)=\operatorname{sgn} P'_۱(x_۰)$$

۱۴۲۵ – اگر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_۰$ دارای ماگزیمم باشد آیا میتوان گفت که در یک همسایگی بقدر کافی کوچک این نقطه در سمت چپ $x_۰$ ، تابع $f(x)$ صعودی و در سمت راست آن نزولی است ؟
مثال زیر را در نظر بگیرید :

$$f(x)=۲-x^۲\left(۲+\sin\frac{۱}{x}\right)$$ اگر $x\neq ۰$ و $f(۰)=۲$

۱۴۲۶ – ثابت کنید که تابع

$$f(x)=e^{-\frac{۱}{x^۲}}$$ اگر $x\neq ۰$ و $f\,۰)=۰$

در نقطهٔ $x=۰$ دارای مینیمم است و تابع

$$g(x)=xe^{-\frac{۱}{x^۲}}$$ اگر $x\neq ۰$ و $g(۰)=۰$

در نقطهٔ $x=۰$ دارای اکسترمم نیست ، با آنکه

$$f^{(n)}(۰)=۰,\quad g^{(n)}(۰)=۰\quad (n=۱,۲,\dots)$$

نمودار این توابع را رسم کنید .

۱۴۲۷ – توابع زیر را از لحاظ اکسترمم بررسی کنید :

الف) $f(x)=e^{-\frac{۱}{|x|}}\left(\sqrt{۲}+\sin\frac{۱}{x}\right)$ بازای $x\neq ۰$ و $f(۰)=۰$

ب) $f(x)=e^{-\frac{۱}{|x|}}\left(\sqrt{۲}+\cos\frac{۱}{x}\right)$ بازای $x\neq ۰$ و $f(۰)=۰$

نمودار این توابع را رسم کنید .

۱٤۲۸ - تابع

$$f(x)=|x|\left(۲+\cos\frac{۱}{x}\right) \quad \text{اگر} \quad x\neq ۰ \quad \text{و} \quad f(۰)=۰$$

را از لحاظ اکسترمم بررسی کنید .

نمودار این تابع را رسم کنید .

اکسترمم توابع زیر را پیدا کنید :

۱٤۲۹ - $y=x^{۳}-٦x^{۲}+۹x-٤$

۱٤۳۰ - $y=۲x^{۲}-x^{٤}$

۱٤۳۱ - $y=x(x-۱)^{۲}(x-۲)^{۳}$

۱٤۳۲ - $y=x+\frac{۱}{x}$

۱٤۳۳ - $y=\frac{۲x}{۱+x^{۲}}$

۱٤۳٤ - $y=\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x^{۲}+۲x+۱}$

۱٤۳٥ - $y=\sqrt{۲x-x^{۲}}$

۱٤۳٦ - $y=\sqrt[۳]{x-۱}$

۱٤۳۷ - $y=xe^{-x}$

۱٤۳۸ - $y=\sqrt{x}\,\ln x$

۱٤۳۹ - $y=\frac{\ln^{۲}x}{x}$

۱٤٤۰ - $y=\cos x+\frac{۱}{۲}\cos ۲x$

۱٤٤۱ - $y=\frac{۱۰}{۱+\sin^{۲}x}$

۱٤٤۲ - $y=\operatorname{arc\,tg} x-\frac{۱}{۲}\ln(۱+x^{۲})$

۱٤٤۳ - $y=e^{x}\sin x$

۱٤٤٤ - $y=|x|e^{-|x-۱|}$

کمترین و بیشترین مقدار توابع زیر را پیدا کنید :

۱٤٤٥ - $f(x)=۲^{x}$ روی قطعهٔ $[-۱;\ ٥]$

۱٤٤٦ - $f(x)=x^{۲}-٤x+٦$ روی قطعهٔ $[-۳;\ ۱۰]$

۱٤٤۷ - $f(x)=|x^{۲}-۳x+۲|$ روی قطعهٔ $[-۱۰;\ ۱۰]$

۱٤٤۸ - $f(x)=x+\frac{۱}{x}$ روی قطعهٔ $[۰,۰۱;\ ۱۰۰]$

۱٤٤۹ - $f(x)=\sqrt{٥-٤x}$ روی قطعهٔ $[-۱;\ ۱]$

کران پایین (inf) و کران بالای (sup) توابع زیر را پیدا کنید :

۱۴۵۰ – $f(x) = xe^{-۰٫۰۱x}$ روی فاصلهٔ $(۰, +\infty)$

۱۴۵۱ – $f(x) = \left(۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ روی فاصلهٔ $(۰, +\infty)$

۱۴۵۲ – $f(x) = \frac{۱ + x^۲}{۱ + x^۴}$ روی فاصلهٔ $(۰, +\infty)$

۱۴۵۳ – $f(x) = e^{-x^۲} \cos x^۲$ روی فاصلهٔ $(-\infty, +\infty)$

۱۴۵۴ – مطلوبست تعیین کران بالا و کران پائین تابع $f(\xi) = \frac{۱ + \xi}{۳ + \xi^۲}$ روی فاصلهٔ $x < \xi < +\infty$

نمودار توابع زیر را رسم کنید :

$$m(x) = \inf_{x < \xi < +\infty} f(\xi) \quad و \quad M(x) = \sup_{x < \xi < +\infty} f(\xi)$$

۱۴۵۴٫۱ – فرض کنیم

$$M_k = \sup \| f^{(k)}(x) \|, \quad k = ۰, ۱, ۲, \dots$$

مطلوبست تعیین $M_۰$ ، $M_۱$ و $M_۲$ اگر $f(x) = e^{-x^۲}$.

۱۴۵۵ – مطلوبست تعیین بزرگترین جملهٔ هر یک از دنباله‌های زیر :

الف) $(n = ۱, ۲, \dots)$ $\frac{n^{۱۰}}{۲^n}$ ؛

ب) $(n = ۱, ۲, \dots)$ $\frac{\sqrt{n}}{n + ۱۰۰۰۰}$ ؛

پ) $(n = ۱, ۲, \dots)$ $\sqrt[n]{n}$

۱۴۵۶ – مطلوبست اثبات نامساویهای زیر :

الف) $|۳x - x^۳| \leqslant ۲$ بازای $|x| \leqslant ۲$ ؛

ب) $\frac{۱}{۲^{p-۱}} \leqslant x^p + (۱ - x)^p \leqslant ۱$ اگر $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ و $p > ۱$ ؛

پ) $x^m (a - x)^n \leqslant \frac{m^n n^n}{(m + n)^{m + n}} a^{m + n}$ بازای $m > ۰$, $n > ۰$ و $۰ \leqslant x \leqslant a$ ؛

ت) $x + a \geqslant \sqrt[n]{x^n + a^n} \geqslant \frac{x + a}{۲^{\frac{n-۱}{n}}}$ $(n > ۱ ، a > ۰ ، x < ۰)$ ؛

ث) $|a \sin x + b \cos x| \leqslant \sqrt{a^۲ + b^۲}$

۱۴۵۶,۱ – نامساوی زیر را بازای $-\infty<x<+\infty$ ثابت کنید :

$$\frac{۲}{۳}\leqslant\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}+x+۱}\leqslant ۲$$

۱۴۵۷ – مطلوبست تعیین «انحراف از صفر» چند جمله‌ای

$$P(x)=x(x-۱)^{۲}(x+۲)$$

روی قطعهٔ $[-۲, ۱]$ یعنی تعیین

$$E_p=\sup_{-۲\leqslant x\leqslant ۱}|P(x)|$$

۱۴۵۸ – در ازای چه مقدار ضریب q ، چندجمله‌ای

$$P(x)=x^{۲}+q$$

روی قطعهٔ $[-۱, ۱]$ دارای کمترین انحراف از صفر است ، یعنی

$$E_p=\sup_{-۱\leqslant x\leqslant ۱}|P(x)|=\min$$

۱۴۵۹ – انحراف مطلق دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ عبارتست از عدد

$$\Delta=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|$$

مطلوبست تعیین انحراف مطلق توابع

$$f(x)=x^{۲} \quad \text{و} \quad g(x)=x^{۳}$$

روی قطعهٔ $[۰, ۱]$.

۱۴۶۰ – تابع

$$f(x)=x^{۲}$$

را روی قطعهٔ $[x_{۱}, x_{۲}]$ بطور تقریبی چنان با تابع خطی

$$g(x)=(x_{۱}+x_{۲})x+b$$

جایگزین کنید که انحراف مطلق توابع $f(x)$ و $g(x)$ (مساله قبل را ببینید) کمترین باشد و این کمترین انحراف مطلق را تعیین کنید .

۱۴۶۱ – مینیمم تابع زیر را تعیین کنید :

$$f(x)=\max\{۲|x|, |۱+x|\}$$

تعداد ریشه‌های حقیقی معادلات زیر را تعیین کرده و آنها را جدا کنید :

۱۴۶۲ – $x^۳ - ۶x^۲ + ۹x - ۱۰ = ۰$

۱۴۶۳ – $x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + h = ۰$

۱۴۶۴ – $۳x^۴ - ۴x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x - ۲۰ = ۰$

۱۴۶۵ – $x^۵ - ۵x = a$

۱۴۶۶ – $\ln x = kx$

۱۴۶۷ – $e^x = ax^۲$

۱۴۶۸ – $\sin^۳ x \times \cos x = a$ بازای $۰ \leqslant x \leqslant \pi$

۱۴۶۹ – $\operatorname{ch} x = kx$

۱۴۷۰ – در چه شرایطی معادلهٔ

$$x^۳ + px + q = ۰$$

دارای : الف) یک ریشهٔ حقیقی است ؛ ب) دارای سه ریشهٔ حقیقی است ؟ حوزه‌های متناظر را در صفحهٔ (p, q) مشخص کنید .

بخش ۱۲ — رسم نمودار توابع از روی نقاط مشخص

برای رسم نمودار توابع $y = f(x)$ بایستی : ۱) حوزهٔ وجود این تابع را تعیین و رفتار تابع را در نقاط مرزی حوزهٔ وجود بررسی نمود ؛ ۲) تقارن و دورهٔ نمودار را معلوم نمود ؛ ۳) نقاط انفصال و فواصل پیوستگی را تعیین نمود ؛ ۴) صفرها و حوزه‌های ثابت العلامت ثابت را تعیین نمود ؛ ۵) نقاط اکسترمم را پیدا نمود و فواصل صعود و نزول تابع را تشخیص داد ؛ ۶) نقاط عطف و فواصل تقعر با علامت معین نمودار تابع را تعیین نمود ؛ ۷) در صورت وجود مجانب‌های تابع را پیدا نمود ؛ ۸) سایر ویژگی‌های نمودار تابع را نشان داد.

در مسائل ستاره‌دار نقاط عطف بطور تقریبی تعیین شوند .

نمودار توابع زیر را رسم کنید :

۱۴۷۱ – $y = ۳x - x^۳$

۱۴۷۲ – $y = ۱ + x^۲ + \dfrac{x^۴}{۲}$

۱۴۷۳ – $y = (x + ۱)(x - ۲)^۲$

*۱۴۷۴ – $y = \dfrac{۲ - x^۲}{۱ + x^۴}$

*۱۴۷۵ – $y = \dfrac{x^۲ - ۱}{x^۲ - ۵x + ۶}$

*۱۴۷۶ – $y = \dfrac{x}{(۱ + x)(۱ - x)^۲}$

۱۴۷۷ – $y = \dfrac{x^۴}{(۱ + x)^۳}$

۱۴۷۸ – $y = \left(\dfrac{۱ + x}{۱ - x}\right)^۴$

۱۴۷۹ – $y = \dfrac{x^۲(x - ۱)}{(x + ۱)^۲}$

١٤٨٠- $y=\frac{x}{(١-x^٢)^٢}$

١٤٨١- $y=\frac{(x+١)^٣}{(x-١)^٢}$

١٤٨٢*- $y=\frac{x^٤+٨}{x^٣+١}$

١٤٨٣- $y=\frac{١}{١+x}-\frac{١٠}{٣x^٢}+\frac{١}{١-x}$

١٤٨٤- $y=(x-٣)\sqrt{x}$

١٤٨٥- $y=\pm\sqrt{٨x^٢-x^٤}$

١٤٨٥,١- $y=\frac{x-٢}{\sqrt{x^٢+١}}$

١٤٨٦- $y=\pm\sqrt{(x-١)(x-٢)(x-٣)}$

١٤٨٧*- $y=\sqrt[٣]{x^٣-x^٢-x+١}$

١٤٨٨- $y=\sqrt[٣]{x^٢}-\sqrt[٣]{x^٢+١}$

١٤٨٩- $y=(x+٢)^{\frac{٢}{٣}}-(x-٢)^{\frac{٢}{٣}}$

١٤٩٠- $y=(x+١)^{\frac{٢}{٣}}+(x-١)^{\frac{٢}{٣}}$

١٤٩١- $y=\frac{x}{\sqrt{x^٢-١}}$

١٤٩٢- $y=\frac{x^٢\sqrt{x^٢-١}}{٢x^٢-١}$

١٤٩٣- $y=\frac{|١+x|^{\frac{٣}{٢}}}{\sqrt{x}}$

١٤٩٤- $y=١-x+\sqrt{\frac{x^٣}{٣+x}}$

١٤٩٥- $y=\sqrt[٣]{\frac{x^٢}{x+١}}$

١٤٩٦*- $y=\sqrt{\frac{x^٤+٣}{x^٢+١}}$

١٤٩٧- $y=\sin x+\cos^٢ x$

١٤٩٨- $y=(٧+٢\cos x)\sin x$

١٤٩٩- $y=\sin x+\frac{١}{٣}\sin ٣x$

١٥٠٠- $y=\cos x-\frac{١}{٢}\cos ٢x$

١٥٠١- $y=\sin^٤ y+\cos^٤ x$

١٥٠٢- $y=\sin x\times\sin ٣x$

١٥٠٣- $y=\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{٤}\right)}$

١٥٠٤- $y=\frac{\cos x}{\cos ٢x}$

١٥٠٤,١- $y=\frac{\sin x}{٢+\cos x}$

١٥٠٥- $y=٢x-\operatorname{tg} x$

١٥٠٦- $y=e^{٢x-x^٢}$

١٥٠٧- $y=(١+x^٢)e^{-x^٢}$

١٥٠٨- $y=x+e^{-x}$

١٥٠٩- $y=x^{\frac{٢}{٣}}e^{-x}$

١٥٠٩,١- $y=e^{-٢x}\sin^٢ x$

١٥١٠- $y=\frac{e^x}{١+x}$

١٥١١- $y=\sqrt{١-e^{-x^٢}}$

١٥١٢- $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

١٥١٣- $y=\ln\left(x+\sqrt{x^٢+١}\right)$

١٥١٤- $y=\sqrt{x^٢+١}\times\ln\left(x+\sqrt{x^٢+١}\right)$

۱۵۱۵ – $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{۱-x^۲}}$

۱۵۱۶ – $y=x+\operatorname{arc\,tg} x$

۱۵۱۷ – $y=\frac{x}{۲}+\operatorname{arc\,ctg} x$

۱۵۱۸ – $y=x\operatorname{arc\,tg} x$

۱۵۱۹ – $y=\arcsin\frac{۲x}{۱+x^۲}$

۱۵۲۰ – $y=\arccos\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$

۱۵۲۱ – $y=(x+۲)^{e^{\frac{۱}{x}}}$

۱۵۲۲ – $y=۲^{\sqrt{x^۲+۱}-\sqrt{x^۲-۱}}$

۱۵۲۳* – $y=\ln\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲+۱}$

۱۵۲۴ – $y=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^۲-x^۲}\quad(a>۰)$

۱۵۲۵ – $y=\arccos\frac{۱-x}{۱-۲x}$

۱۵۲۶ – $y=x^x$

۱۵۲۷* – $y=x^{\frac{۱۲}{x}}$

۱۵۲۸ – $y=(۱+x)^{\frac{۱}{x}}$

۱۵۲۹* – $y=x\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^x\quad(x>۰)$

۱۵۳۰* – $y=\frac{e^{\frac{۱}{۱-x^۲}}}{۱+x^۲}$ (بدون بررسی تقعر) .

مطلوبست رسم منحنی‌هائیکه بصورت پارامتری داده شده‌اند :

۱۵۳۱ – $x=\frac{(t+۱)^۲}{۴},\quad y=\frac{(t-۱)^۲}{۴}$

۱۵۳۲ – $x=۲t-t^۲,\quad y=۳t-t^۳$

۱۵۳۳* – $x=\frac{t^۲}{t-۱},\quad y=\frac{t}{t^۲-۱}$

۱۵۳۴ – $y=\frac{t^۲}{۱-t^۲},\quad y=\frac{۱}{۱+t^۲}$

۱۵۳۵ – $x=t+e^{-t},\quad y=۲t+e^{-۲t}$

۱۵۳۶ – $x=a\cos ۲t,\quad y=a\cos ۳t\quad(a>۰)$

۱۵۳۷ – $x=\cos^۴ t,\quad y=\sin^۴ t$

۱۵۳۸ – $y=t\ln t,\quad y=\frac{\ln t}{t}$

۱۰۳۹ – $x = \frac{a}{\cos^{۳}t}, \quad y = a\,\mathrm{tg}^{۳}t \quad (a > ۰)$

۱۰۴۰ – $x = a(\mathrm{sh}\,t - t), \quad y = a(\mathrm{ch}\,t - ۱) \quad (a > ۰)$

معادلات منحنی‌های زیر را بصورت پارامتری در آورده و این منحنی‌ها را رسم کنید:

۱۰۴۱ – $x^{۳} + y^{۳} - ۳axy = ۰ \quad (a > ۰)$

راهنمائی – فرض کنید $y = tx$.

۱۰۴۲ – $x^{۲} + y^{۲} = x^{۴} + y^{۴}$ ۱۰۴۳ – $x^{۲}y^{۲} = x^{۳} - y^{۳}$

۱۰۴۴ – $x^{y} = y^{x} \quad (x > ۰,\ y > ۰)$

۱۰۴۵ – مطلوبست رسم نمودار منحنی

$$\mathrm{ch}^{۲}x - \mathrm{ch}^{۲}y = ۱$$

نمودار توابع را که در دستگاه مختصات قطبی $(r \geqslant ۰)$ (φ, r) داده شده‌اند رسم کنید:

۱۰۴۶ – $r = a + b\cos\varphi \quad (۰ < a \leqslant b)$

۱۰۴۷ – $r = a\sin ۳\varphi \quad (a > ۰)$

۱۰۴۸ – $r = \frac{a}{\sqrt{\cos ۳\varphi}} \quad (a > ۰)$

*۱۰۴۹ – $r = a\frac{\mathrm{th}\,\varphi}{\varphi - ۱}$ که در آن $\varphi > ۱$ $(a > ۰)$

*۱۰۵۰ – $\varphi = \arccos\frac{\mathrm{r} - ۱}{\mathrm{r}^{۲}}$

مطلوبست رسم نمودار دستهٔ منحنی‌های زیر (a پارامتر متغیری است):

۱۰۵۱ – $y = x^{۲} - ۲x + a$ ۱۰۵۴ – $y = \frac{x}{۲} + e^{-ax}$

۱۰۵۲ – $y = x + \frac{a^{۲}}{x}$

۱۰۵۳ – $y = x \pm \sqrt{a(۱ - x^{۲})}$ ۱۰۵۵ – $y = xe^{-\frac{x}{a}}$

بخش ۱۳ – مسائلی در بارهٔ ماگزیمم و می‌نیمم توابع

۱۰۵۶ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ نامنفی باشد در آنصورت تابع

$$F(x) = Cf^{۲}(x) \quad (C > ۰)$$

دقیقاً دارای همان نقاط اکسترمم تابع $f(x)$ است .

۱۵۵۷ – ثابت کنید که اگر تابع $\varphi(x)$ بازای $-\infty < x < +\infty$ بمعنای اکید صعودی یکنوا باشد در آنصورت نقاط اکسترمم توابع

$$f(x) \quad \text{و} \quad \varphi(f(x))$$

یکی است .

۱۵۵۸ – بیشترین مقدار حاصل ضرب درجهٔ m و n $(n > ۰,\ m > ۰)$ دو عدد مثبت را که مجموع آنها مقداری ثابت و برابر a است پیدا کنید .

۱۵۵۹ – کمترین مقدار مجموع درجه m و n $(n > ۰,\ m > ۰)$ دو عدد مثبت را که حاصلضرب آنها برابر مقدار ثابت a است پیدا کنید .

۱۵۶۰ – در کدام دستگاه لگاریتمی عددی وجود دارد که برابر لگاریتم خودش باشد ؟

۱۵۶۱ – از جمیع مستطیل‌های با مساحت مفروض S ، آن یکی را که دارای کمترین محیط است تعیین کنید .

۱۵۶۲ – مثلث قائم الزاویه با بیشترین مساحت را در صورتیکه مجموع یک ضلع و وتر آن مقدار ثابتی باشد پیدا کنید .

۱۵۶۳ – بازای کدام اندازه‌های خطی ، ظرف سربستهٔ استوانه‌ای شکل با گنجایش مفروض V دارای کمترین مساحت کل میگردد ؟

۱۵۶۴ – در قطعهٔ دایره‌ای که از نیمدایره تجاوز نکند مستطیل با بیشترین مساحت را محاط کنید .

۱۵۶۵ – در بیضی

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$$

مستطیلی محاط کنید که اضلاع آن موازی محورهای بیضی و دارای بیشترین مساحت باشد .

۱۵۶۶ – در مثلث به قاعدهٔ b و ارتفاع h مستطیل با بیشترین محیط را محاط کنید .

امکان حل این مسئله را بررسی کنید .

۱۵۶۷ – از تیر چوبی گرد بقطر d باهوئی* با مقطع عرضی مستطیلی بقاعده b و ارتفاع h در میآوریم . بازای چه اندازه‌هائی باهو دارای بیشترین

---

* — الوارهای بریده شده برای ساختن در و پنجره و غیره و همچنین چوب دستی ساربانان را باهو گویند (مترجم) .

استحکام خواهد بود ، در صورتیکه استحکام آن متناسب با $bh^{۲}$ میباشد ؟

۱۵۶۸ – در نیمکره بشعاع R مکعب مستطیل بقاعدهٔ مربع با بیشترین حجم را محاط کنید .

۱۵۶۹ – در کره بشعاع R استوانه با بیشترین حجم را محاط کنید .

۱۵۷۰ – در کره بشعاع R استوانه با بیشترین مساحت کل را محاط کنید .

۱۵۷۱ – بر کرهٔ مفروض مخروط با کمترین حجم را محیط کنید .

۱۵۷۲ – بیشترین حجم مخروط با مولد مفروض l را پیدا کنید .

۱۵۷۳ – در مخروط قائم دوار با زاویهٔ ۲α در مقطع محوری و با شعاع قاعدهٔ R ، استوانه با بیشترین سطح کل را محاط کنید .

۱۵۷۴ – کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(p, p)$ را از سهمی $y^{۲} = ۲px$ پیدا کنید .

۱۵۷۵ – کوتاه‌ترین و درازترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲, ۰)$ را از دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲} = ۱$ پیدا کنید .

۱۵۷۶ – بلندترین وتر بیضی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$ $(۰<b<a)$ گذرنده بر راس $B(۰, -b)$ را پیدا کنید .

۱۵۷۷ – از نقطهٔ $M(x, y)$ متعلق به بیضی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$ مماسی رسم کنید که با محورهای مختصات ، مثلثی با کمترین سطح را تشکیل دهد .

۱۵۷۸ – جسمی که بشکل استوانهٔ قائم دوار است از بالا به نیمکره‌ای منتهی است . بازای چه اندازه‌های خطی این جسم با حجم مفروض V دارای کمترین سطح کل است ؟

۱۵۷۹ – مقطع عرضی کانال روبازی بشکل ذوذنقهٔ متساوی‌الساقین است . بازای چه شیب φ پهلوها ، « محیط خیس » مقطع کمترین خواهد بود در صورتیکه مساحت ((مقطع زندهٔ)) آب در کانال برابر S و سطح آب در ارتفاع h باشد ؟

۱۵۸۰ – «پیچش» دور گرد بستهٔ محصورکنندهٔ سطح S عبارتست از نسبت محیط این دورگرد به طول دایرهٔ محصورکنندهٔ سطح S .

ذوذنقه متساوی‌السقین $ABCD$ $(AD \| BC)$ با کمترین پیچش چه شکلی دارد در صورتیکه قاعدهٔ $AD = ۲a$ و زاویهٔ حاده $BAD = \alpha$ باشد ؟

۱۵۸۱ – از دایرهٔ بشاع R چه قطاعی باید برید تا از قسمت باقی مانده بتوان قیفی با بیشترین گنجایش را ساخت ؟

۱۵۸۲ – کارخانهٔ A از راه آهنی که از جنوب به شمال میرود و از شهر B میگذرد کمترین فاصله اش $a\,km$ است . تحت چه زاویهٔ φ نسبت

براه آهن باید راه فرعی کارخانه را ساخت تا حمل و نقل (ترابری) بار از A تا B بیشتر مقرون به صرفه باشد ، در صورتیکه هزینهٔ حمل و نقل بازای یک کیلومتر مسافت با راه آهن تنی q ریال و از راه فرعی تنی p ریال $(p > q)$ بوده و شهر B در b کیلومتری شمال کارخانهٔ A قرار داشته باشد ؟

۱۵۸۳ – دو کشتی بر امتداد دو خط مستقیم که با هم زاویهٔ θ میسازند با سرعت‌های ثابت u و v حرکت میکنند . مطلوبست تعیین حداقل فاصله بین دو کشتی در صورتیکه در یک لحظه نامشخص فاصلهٔ آنها از نقطهٔ تقاطع مسیرهایشان به ترتیب a و b باشد .

۱۵۸۴ – در نقاط A و B دو منبع نورانی قرار دارند که بترتیب دارای شدت S_1 و S_2 شمع میباشند . بر قطعهٔ $AB = a$ نقطه‌ای مانند M پیدا کنید که کمترین روشنائی را داشته باشد .

۱۵۸۵ – نقطهٔ نوارانی بر خط‌المرکزین دو کره غیر متقاطع بشعاعهای R و r $(R > r)$ و در خارج دو کره قرار دارد . بازای چه وضعی از نقطه ، مجموع سطح های روشن‌شدهٔ دو کره بیشترین مقدار را دارد ؟

۱۵۸۶ – در چه ارتفاعی بر بالای میز گرد بشعاع a باید لامپ الکتریکی را آویخت تا روشنائی اطراف میز بیشترین باشد ؟

راهنمائی – شدت روشنائی با دستور

$$I = k\frac{\sin\varphi}{r^2}$$

بیان میشود، که در آن φ زاویهٔ شیب اشعه و r فاصلهٔ منبع نور تا سطح روشن‌شده و k شدت منبع نورانی است .

۱۵۸۷ – از رودخانهٔ بعرض a متر کانالی عمود بر آن بعرض b متر ساخته شده است . بیشترین طول یک کشتی که بتواند وارد این کانال شود چقدر است ؟

۱۵۸۸ – هزینهٔ شبانه روزی حرکت کشتی از دو قسمت تشکیل میشود : هزینهٔ ثابت برابر a ریال و هزینهٔ متغیر که متاسب با مکعب سرعت افزایش مییابد . بازای چه سرعت v حرکت کشتی بیشتر مقرون بصرفه خواهد بود ؟

۱۵۸۹ – باری بوزن P بر صفحهٔ افقی ناهمواری قرار دارد ، میخواهیم با صرف نیرو آنرا جا بجا کنیم . اگر ضریب اصطکاک جسم برابر k باشد

بازای چه شیب این نیرو نسبت به افق مقدار این نیرو کمترین است ؟

۱۵۹۰ — در کاسه نیمکره‌ای بشعاع a میله‌ای بطول $l > ۲a$ قرار داده شده است . وضع تعادل میله را تعیین کنید .

بخش ۱۴ — تماس منحنی‌ها . دایرهٔ انحنا . گسترده .

بند ۱ — تماس مرتبهٔ n — ام . منحنی‌های

$$y=\psi(x), \quad y=\varphi(x)$$

را وقتی در نقطهٔ $x_۰$ مماس مرتبه n — ام (بمعنای اکید) نامند که $(k=۰, ۱, \dots, n)$ $\varphi^{(k)}(x_۰)=\psi^{(k)}(x_۰)$ و $\varphi^{(n+۱)}(x_۰)\neq\psi^{(n+۱)}(x_۰)$. در این حالت بازای $x \to x_۰$ داریم :

$$\varphi(x)-\psi(x)=O^{*}[x-x_۰]^{n+۱}$$

بند ۲ — دایرهٔ انحنا . دایرهٔ

$$(x-\xi)^۲+(y+\eta)^۲=R^۲$$

که با منحنی مفروض $y=f(x)$ تماسی داشته باشد که از مرتبه دومْ کمتر نباشد به دایرهٔ انحنا در نقطهٔ نظیر موسوم است . شعاع این دایره

$$R=\frac{(۱+y'^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{|y''|}$$

به شعاع انحنا و مقدار $k=\frac{۱}{R}$ به انحنا موسوم است .

بند ۳ — گسترده . مکان هندسی مرکز (ξ, η) دایره‌های انحنا (مرکزهای انحنا)

$$\xi=x-\frac{y'(۱+y'^۲)}{y''}, \quad \eta=y+\frac{۱+y'^۲}{y''}$$

را گسترده منحنی مفروض $y=f(x)$ نامند .

۱۵۹۱ — پارامترهای k و b خط

$$y=kx+b$$

را چنان انتخاب کنید که خط با منحنی

$$y = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۲$$

دارای تماس مرتبهٔ بیش از یک باشد .

۱۵۹۲ – بازای چه مقدار ضریب‌های a ، b و c سهمی

$$y = ax^{۲} + bx + c$$

با منحنی $y = e^{x}$ در نقطهٔ $x = x_{۰}$ دارای تماس مرتبهٔ دوم است ؟

۱۵۹۳ – محور Ox در نقطهٔ $x = ۰$ با هر یک از منحنی‌های زیر دارای تماسی از چه مرتبه است ؟

الف) $y = ۱ - \cos x$ ؛ ب) $y = \operatorname{tg} x - \sin x$ ؛

پ) $y = e^{x} - \left(۱ + x + \frac{x^{۲}}{۲}\right)$

۱۵۹۴ – ثابت کنید که منحنی $y = e^{-\frac{۱}{x^{۲}}}$ بازای $x \neq ۰$ و $y = ۰$ بازای $x = ۰$ در نقطهٔ $x = ۰$ با محور Ox دارای تماس مرتبهٔ بی‌نهایت بزرگ است .

۱۵۹۵ – مطلوبست تعیین شعاع و مرکز انحنای هذلولی

$$xy = ۱$$

در نقاط : الف) $M(۱, ۱)$ ؛ ب) $N(۱۰۰, ۰{,}۰۱)$.

مطلوبست محاسبهٔ شعاع انحنای منحنی‌های زیر :

۱۵۹۶ – سهمی $y^{۲} = ۲px$

۱۵۹۷ – بیضی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$

۱۵۹۸ – هذلولی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}} - \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$

۱۵۹۹ – آسترویید $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}}$.

۱۶۰۰ – بیضی $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$

۱۶۰۱ – سیکلویید $x = a(t - \sin t), \quad y = a(۱ - \cos t)$

۱۶۰۲ – گسترندهٔ دایرهٔ $x = a(\cos t + t\sin t)$

۱۶۰۳ – ثابت کنید که شعاع انحنای منحنی درجهٔ دوم

$$y^۲ = ۲px - qx^۲$$

با مکعب طول قائم متناسب است .

۱۶۰۴ – دستور شعاع انحنای منحنی‌ای را که در مختصات قطبی داده شده است بنویسید .

شعاعهای انحنای منحنی‌هائی را که در مختصات قطبی داده شده اند تعیین کنید (پارامترها مثبتند) :

۱۶۰۵ – حازونی ارشمیدس $r = a\varphi$.

۱۶۰۶ – حلزونی لگاریتمی $r = ae^{m\varphi}$.

۱۶۰۷ – کاردیویید $r = a(۱ + \cos\varphi)$

۱۶۰۸ – لمنیسکات $r^۲ = a^۲ \cos ۲\varphi$

۱۶۰۹ – روی منحنی $y = \ln x$ نقطه‌ای پیدا کنید که انحنا در آن بیشترین باشد .

۱۶۱۰ – مقدار ماگزیمال انحنای سهمی درجهٔ سوم $y = \frac{kx^۳}{۶}$ $(۰ \leqslant x < +\infty, k > ۰)$ مساوی $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ است . مطلوبست نقطهٔ x که در آن این انحنای ماگزیمال حاصل میشود

مطلوبست تشکیل معادله های :

۱۶۱۱ – گستردهٔ سهمی $y^۲ = ۲px$.

۱۶۱۲ – گستردهٔ بیضی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$.

۱۶۱۳ – گستردهٔ آسترویید $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}}$.

۱۶۱۴ – گستردهٔ تراکتریس

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^۲ - y^۲}}{y} - \sqrt{a^۲ - y^۲}$$

۱۶۱۵ – گستردهٔ حلزونی لگاریتمی $r = a^{m\varphi}$

۱۶۱۶ – ثابت کنید گستردهٔ سیکلویید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(۱ - \cos t)$$

نیز سیکلویید است که با سیکلویید مفروض فقط وضع متفاوت دارد .

بخش ۱۰ — حل تقریبی معادلات

بند ۱ — قاعدهٔ بخش‌های متناسب (روش وترها) . اگر تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ پیوسته بوده و

$$f(a) f(b) < ۰$$

و ضمناً $f'(x) \neq ۰$ بازای $a < x < b$ در آنصورت معادلهٔ

$$f(x) = ۰ \qquad (۱)$$

دارای فقط و فقط یک ریشهٔ حقیقی ξ در فاصلهٔ (a, b) است . برای تقریب اولیهٔ این ریشه میتوان مقدار

$$x_۱ = a + \delta_۱$$

را اختیار کرد که در آن

$$\delta_۱ = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)} (b - a)$$

با کار برد مجدد این روش در آن فاصله از فاصله‌های $(a, x_۱)$ یا $(x_۱, b)$ که در دو انتهای آن تابع $f(x)$ مختلف العلامه است تقریب دوم $x_۲$ از ریشهٔ ξ را میتوان بدست آورد و همین طور تا آخر. برای برآورد تقریب n — ام x_n دستور

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}$$

درست است که در آن $|f'(x)|$ $m = \inf\limits_{a < x < b}$ ، ضمناً

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi$$

بند ۲ — قاعدهٔ نیوتن (روش مماسها) . اگر روی قطعهٔ $[a, b]$ داشته باشیم $f''(x) \neq ۰$ و $f(a) f''(a) > ۰$ در آنصورت برای تقریب اولیهٔ $\xi_۱$ ریشهٔ ξ معادلهٔ (۱) میتوان مقدار زیر را اختیار کرد

$$\xi_۱ = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

با تکرار این طریقه دنبالهٔ مقادیر تقریبی $\xi_n (n = ۱, ۲, ...)$ بدست می‌آید که بسرعت بسمت ریشهٔ ξ میگرایند و دقت آنها را میتوان از دستور (۲) برآورد نمود .

برای جهت‌گیری تقریبی ، رسم نمودار تابع $y = f(x)$ مفید است .

با استفاده از روش بخشهای متناسب ، ریشه‌های معادلات زیر را با تقریب تا ۰,۰۰۱ تعیین کنید :

۱۶۱۷ - $x^{۳} - ۶x + ۲ = ۰$

۱۶۱۸ - $x^{۴} - x - ۱ = ۰$

۱۶۱۹ - $x - ۰,۱ \sin x = ۲$

۱۶۲۰ - $\cos x = x^{۲}$

با استفاده از روش نیوتن با تقریب ذکر شده ریشه‌های معادلات زیر را بدست آورید :

۱۶۲۱ - $x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}} = ۱۰x$ (با تقریب تا $۱۰^{-۳}$)

۱۶۲۲ - $x \lg x = ۱$ (با تقریب تا $۱۰^{-۴}$)

۱۶۲۳ - $\cos x \times \operatorname{ch} x = ۱$ (با تقریب تا $۱۰^{-۳}$) (دو ریشهٔ مثبت)

۱۶۲۴ - $x + e^{x} = ۰$ (با تقریب تا $۱۰^{-۵}$)

۱۶۲۵ - $x \operatorname{th} x = ۱$ (با تقریب تا $۱۰^{-۶}$)

۱۶۲۶ - با تقریب تا ۰,۰۰۱ سه ریشهٔ مثبت اول معادلهٔ زیر را پیدا کنید :

$$\operatorname{tg} x = x$$

۱۶۲۷ - با تقریب تا $۱۰^{-۳}$ دو ریشهٔ مثبت معادلهٔ زیر را پیدا کنید :

$$\operatorname{ctg} x = \frac{۱}{x} - \frac{x}{۲}$$

فصل ۳

انتگرالهای نامعین

بخش ۱ — انتگرالهای نامعین ساده

بند ۱ — مفهوم انتگرال نامعین . اگر تابع $f(x)$ روی فاصله (a, b) معین و پیوسته باشد و $F'(x) = f(x)$ بازای $a < x < b$ در آنصورت

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad a < x < b$$

که در آن C مقدار ثابت دلخواهی است .

بند ۲ — خواص اساسی انتگرالهای نامعین :

الف) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx$ ؛ ب) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$ ؛

پ) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx \quad (A = \text{const};\ A \neq ۰)$ ؛

ت) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

بند ۳ — جدول انتگرال های ساده :

I — $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱} + C \quad (n \neq -۱)$$

II — $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq ۰)$$

III — $$\int \frac{dx}{۱+x^۲} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + C \\ -\operatorname{arc\,tg} x + C \end{cases}$$

IV — $$\int \frac{dx}{۱-x^۲} = \frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{۱+x}{۱-x}\right| + C$$

V — $$\int \frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^٢ \pm ١}} = \ln|x + \sqrt{x^٢ \pm ١}| + C \text{ –VI}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > ٠,\ a \neq ١); \quad \int e^x\,dx = e^x + C \text{ – VII}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \text{ – VIII} \qquad \int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C \text{ – XII}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \text{ – IX} \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C \text{ – XIII}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^٢ x} = -\operatorname{ctg} x + C \text{ – X} \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^٢ x} = -\operatorname{cth} x + C \text{ – XIV}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^٢ x} = \operatorname{tg} x + C \text{ – XI} \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^٢ x} = \operatorname{th} x + C \text{ –XV}$$

بند ٤ — روش‌های اساسی انتگرال‌گیری .

الف) روش وارد کردن آرگومان (آوند) جدید . اگر

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

در آنصورت

$$\int f(u)\,du = F(u) + C$$

که در آن $u = \varphi(x)$

ب) روش تجزیه . اگر

$$f(x) = f_١(x) + f_٢(x)$$

در آنصورت

$$\int f(x)\,dx = \int f_١(x)\,dx + \int f_٢(x)\,dx$$

پ) روش جایگزینی . اگر $f(x)$ پیوسته باشد در آنصورت با فرض

$$x = \varphi(t)$$

که در آن $\varphi(t)$ با مشتق خود $\varphi'(t)$ پیوسته است نتیجه میشود :

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

ت) روش انتگرال‌گیری جزء به جزء . اگر u و v توابع دیفرانسیل پذیری از x باشند در آن صورت

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

با کاربرد جدول انتگرالهای ساده انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱۶۲۸ – $\int (۳ - x^۲)^۳ \, dx$

۱۶۲۹ – $\int x^۲ (۵ - x)^۴ \, dx$

۱۶۳۰ – $\int (۱ - x)(۱ - ۲x)(۱ - ۳x) \, dx$

۱۶۳۱ – $\int \left(\frac{۱ - x}{x}\right)^۲ dx$

۱۶۳۲ – $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^۲}{x^۲} + \frac{a^۳}{x^۳}\right) dx$

۱۶۳۳ – $\int \frac{x + ۱}{\sqrt{x}} \, dx$

۱۶۳۴ – $\int \frac{\sqrt{x} - ۲\sqrt[۳]{x^۲} + ۱}{\sqrt[۴]{x}} \, dx$

۱۶۳۵ – $\int \frac{(۱ - x)^۳}{x\sqrt[۳]{x}} \, dx$

۱۶۳۶ – $\int \left(۱ - \frac{۱}{x^۲}\right)\sqrt{x\sqrt{x}} \, dx$

۱۶۳۷ – $\int \frac{\left(\sqrt{۲x} - \sqrt[۳]{۳x}\right)^۲}{x} \, dx$

۱۶۳۸ – $\int \frac{\sqrt{x^۴ + x^{-۴} + ۲}}{x^۳} \, dx$

۱۶۳۹ – $\int \frac{x^۲ \, dx}{۱ + x^۲}$

۱۶۴۰ – $\int \frac{x^۲ \, dx}{۱ - x^۲}$

۱۶۴۱ – $\int \frac{x^۲ + ۳}{x^۲ - ۱} \, dx$

۱۶۴۲ – $\int \frac{\sqrt{۱ + x^۲} + \sqrt{۱ - x^۲}}{\sqrt{۱ - x^۴}} \, dx$

۱۶۴۳ – $\int \frac{\sqrt{x^۲ + ۱} - \sqrt{x^۲ - ۱}}{\sqrt{x^۲ - ۱}} \, dx$

۱۶۴۴ – $\int (۲^x + ۳^x)^۲ \, dx$

۱۶۴۵ – $\int \frac{۲^{x+۱} - ۵^{x-۱}}{۱۰^x} \, dx$

۱۶۴۶ – $\int \frac{e^{۳x} + ۱}{e^x + ۱} \, dx$

۱۶۴۷ – $\int (۱ + \sin x + \cos x) \, dx$

۱۶۴۸ – $\int \sqrt{۱ - \sin ۲x} \, dx$

۱۶۴۹ – $\int \operatorname{ctg}^۲ x \, dx$

۱۶۵۰ – $\int \operatorname{tg}^۲ x \, dx$

۱۶۵۱ – $\int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x) \, dx$

۱۶۵۲ – $\int \operatorname{th}^۲ x \, dx$

۱۶۵۳ – $\int \operatorname{cth}^۲ x \, dx$

۱۶۵۴ – ثابت کنید اگر

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

در آنصورت

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{۱}{a} F(ax + b) + C \quad (a \neq ۰)$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۱۶۵۵ – $\int \frac{dx}{x+a}$

۱۶۵۶ – $\int (۲x-۳)^{۱۰}\, dx$

۱۶۵۷ – $\int \sqrt[۳]{۱-۳x}\, dx$

۱۶۵۸ – $\int \frac{dx}{\sqrt{۲-۵x}}$

۱۶۵۹ – $\int \frac{dx}{(۵x-۲)^{\frac{۵}{۲}}}$

۱۶۶۰ – $\int \frac{\sqrt[۵]{۱-۲x+x^{۲}}}{۱-x}\, dx$

۱۶۶۱ – $\int \frac{dx}{۲+۳x^{۲}}$

۱۶۶۲ – $\int \frac{dx}{۲-۳x^{۲}}$

۱۶۶۳ – $\int \frac{dx}{\sqrt{۲-۳x^{۲}}}$

۱۶۶۴ – $\int \frac{dx}{\sqrt{۳x^{۲}-۲}}$

۱۶۶۵ – $\int (e^{-x}+e^{-۲x})\, dx$

۱۶۶۶ – $\int (\sin ۵x - \sin ۵\alpha)\, dx$

۱۶۶۷ – $\int \frac{dx}{\sin^{۲}\left(۲x+\frac{\pi}{۴}\right)}$

۱۶۶۸ – $\int \frac{dx}{۱+\cos x}$

۱۶۶۹ – $\int \frac{dx}{۱-\cos x}$

۱۶۷۰ – $\int \frac{dx}{۱+\sin x}$

۱۶۷۱ – $\int [\operatorname{sh}(۲x+۱)+\operatorname{ch}(۲x-۱)]\, dx$

۱۶۷۲ – $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{۲}\frac{x}{۲}}$

۱۶۷۳ – $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{۲}\frac{x}{۲}}$

با تبدیل مناسب در عبارت تحت انتگرال ، انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱۶۷۴ – $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$

۱۶۷۵ – $\int x^{۲}\sqrt[۳]{۱+x^{۳}}\, dx$

۱۶۷۶ – $\int \frac{x\, dx}{۳-۲x^{۲}}$

۱۶۷۷ – $\int \frac{x\, dx}{(۱+x^{۲})^{۲}}$

۱۶۷۸ – $\int \frac{x\, dx}{۴+x^{۴}}$

۱۶۷۹ – $\int \frac{x^{۳}\, dx}{x^{۸}-۲}$

۱۶۸۰ – $\int \frac{dx}{(۱+x)\sqrt{x}}$

راهنمایی – $\frac{dx}{\sqrt{x}} = ۲d(\sqrt{x})$

۱۶۸۱ – $\int \sin\frac{۱}{x} \times \frac{dx}{x^{۲}}$

۱۶۸۲ – $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{۲}+۱}}$

۱۶۸۳ — $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^۲-۱}}$

۱۶۸۴ — $\int \frac{dx}{(x^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}}$

۱۶۸۵ — $\int \frac{x\,dx}{(x^۲-۱)^{\frac{۳}{۲}}}$

۱۶۸۶ — $\int \frac{x^۲\,dx}{(۸x^۳+۲۷)^{\frac{۲}{۳}}}$

۱۶۸۷ — $\int \frac{dx}{\sqrt{x(۱+x)}}$

۱۶۸۸ — $\int \frac{dx}{\sqrt{x(۱-x)}}$

۱۶۸۹ — $\int xe^{-x^۲}dx$

۱۶۹۰ — $\int \frac{e^x\,dx}{۲+e^x}$

۱۶۹۱ — $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

۱۶۹۲ — $\int \frac{dx}{\sqrt{۱+e^{۲x}}}$

۱۶۹۳ — $\int \frac{\ln^۲ x}{x}dx$

۱۶۹۴ — $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$

۱۶۹۵ — $\int \sin^۵ x\cos x\,dx$

۱۶۹۶ — $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^۳ x}}dx$

۱۶۹۷ — $\int \operatorname{tg} x\,dx$

۱۶۹۸ — $\int \operatorname{ctg} x\,dx$

۱۶۹۹ — $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[۳]{\sin x-\cos x}}dx$

۱۷۰۰ — $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^۲\sin^۲ x+b^۲\cos^۲ x}}dx$

۱۷۰۰,۱ — $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos ۲x}}dx$

۱۷۰۰,۲ — $\int \frac{\cos x}{\cos ۲x}dx$

۱۷۰۰,۳ — $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} ۲x}}dx$

۱۷۰۱ — $\int \frac{dx}{\sin^۲ x\sqrt[٤]{\operatorname{ctg} x}}$

۱۷۰۲ — $\int \frac{dx}{\sin^۲ x+۲\cos^۲ x}$

۱۷۰۳ — $\int \frac{dx}{\sin x}$

۱۷۰۴ — $\int \frac{dx}{\cos x}$

۱۷۰۵ — $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$

۱۷۰۶ — $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$

۱۷۰۷ — $\int \frac{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^٤ x+\operatorname{ch}^٤ x}}$

۱۷۰۸ — $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^۲ x\sqrt[۳]{\operatorname{th}^۲ x}}$

۱۷۰۹ — $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{۱+x^۲}dx$

۱۷۱۰ – $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^{۲}\sqrt{۱-x^{۲}}}$

۱۷۱۱ – $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{۱+x^{۲}}\right)}{۱+x^{۲}}}\,dx$

۱۷۱۲ – $\int \frac{x^{۲}+۱}{x^{٤}+۱}\,dx$

راهنمائی –

$$\left(۱+\frac{۱}{x^{۲}}\right)dx = d\left(x-\frac{۱}{x}\right)$$

۱۷۱۳ – $\int \frac{x^{۲}-۱}{x^{٤}+۱}\,dx$

۱۷۱٤ – $\int \frac{x^{٤}\,dx}{(x^{۵}+۱)^{٤}}$

۱۷۱۵ – $\int \frac{x^{\frac{n}{۲}}\,dx}{\sqrt{۱+x^{n+۲}}}$

۱۷۱٦ – $\int \frac{۱}{۱-x^{۲}}\ln\frac{۱+x}{۱-x}\,dx$

۱۷۱۷ – $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{۲+\cos ۲x}}$

۱۷۱۸ – $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^{٤} x+\cos^{٤} x}$

۱۷۱۹ – $\int \frac{۲^{x}\times ۳^{x}}{۹^{x}-٤^{x}}\,dx$

۱۷۲۰ – $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{۱+x^{۲}+\sqrt{(۱+x^{۲})^{۳}}}}$

با کاربرد روش تجزیه ، انتگرالهای زیر را حساب کنید :

۱۷۲۱ – $\int x^{۲}(۲-۳x^{۲})^{۲}\,dx$

۱۷۲۱,۱ – $\int x(۱-x)^{۱۰}\,dx$

۱۷۲۲ – $\int \frac{۱+x}{۱-x}\,dx$

۱۷۲۳ – $\int \frac{x^{۲}}{۱+x}\,dx$

۱۷۲٤ – $\int \frac{x^{۳}}{۳+x}\,dx$

۱۷۲۵ – $\int \frac{(۱+x)^{۲}}{۱+x^{۲}}\,dx$

۱۷۲٦ – $\int \frac{(۲-x)^{۲}}{۲-x^{۲}}\,dx$

۱۷۲۷ – $\int \frac{x^{۲}}{(۱-x)^{۱۰۰}}\,dx$

۱۷۲۸ – $\int \frac{x^{۵}}{x+۱}\,dx$

۱۷۲۹ – $\int \frac{dx}{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱}}$

۱۷۳۰ – $\int x\sqrt{۲-۵x}\,dx$

راهنمائی –

$$x\equiv-\frac{۱}{۵}(۲-۵x)+\frac{۲}{۵}$$

۱۷۳۱ – $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[۳]{۱-۳x}}$

۱۷۳۲ – $\int x^{۳}\sqrt[۳]{۱+x^{۲}}\,dx$

۱۷۳۳ – $\int \frac{dx}{(x-۱)(x+۳)}$

راهنمائی –

$$۱\equiv\frac{۱}{٤}[(x+۳)-(x-۱)]$$

۱۷۳۴ - $\int \frac{dx}{x^{۲}+x-۲}$

۱۷۳۵ - $\int \frac{dx}{(x^{۲}+۱)(x^{۲}+۲)}$

۱۷۳۶ - $\int \frac{dx}{(x^{۲}-۲)(x^{۲}+۳)}$

۱۷۳۷ - $\int \frac{x\,dx}{(x+۲)(x+۳)}$

۱۷۳۸ - $\int \frac{x\,dx}{x^{٤}+۳x^{۲}+۲}$

۱۷۳۹ - $\int \frac{dx}{(x+a)^{۲}(x+b)^{۲}} \quad (a \neq b)$

۱۷٤۰ - $\int \frac{dx}{(x^{۲}+a^{۲})(x^{۲}+b^{۲})} \quad (a^{۲} \neq b^{۲})$

۱۷٤۱ - $\int \sin^{۲} x\,dx$

۱۷٤۲ - $\int \cos^{۲} x\,dx$

۱۷٤۳ - $\int \sin x \sin(x+\alpha)\,dx$

۱۷٤٤ - $\int \sin ۳x \times \sin ۵x\,dx$

۱۷٤۵ - $\int \cos\frac{x}{۲} \times \cos\frac{x}{۳}\,dx$

۱۷٤٦ - $\int \sin\left(۲x-\frac{\pi}{٦}\right)\cos\left(۳x+\frac{\pi}{٤}\right)dx$

۱۷٤۷ - $\int \sin^{۳} x\,dx$

۱۷٤۸ - $\int \cos^{۳} x\,dx$

۱۷٤۹ - $\int \sin^{٤} x\,dx$

۱۷۵۰ - $\int \cos^{٤} x\,dx$

۱۷۵۱ - $\int \operatorname{ctg}^{۲} x\,dx$

۱۷۵۲ - $\int \operatorname{tg}^{۳} x\,dx$

۱۷۵۳ - $\int \sin^{۲} ۳x \sin^{۳} ۲x\,dx$

۱۷۵٤ - $\int \frac{dx}{\sin^{۲} x \cos^{۲} x}$

<u>راهنمائی</u> -

$۱ \equiv \sin^{۲} x + \cos^{۳} x$

۱۷۵۵ - $\int \frac{dx}{\sin^{۲} x \times \cos x}$

۱۷۵٦ - $\int \frac{dx}{\sin x \cos^{۳} x}$

۱۷۵۷ - $\int \frac{\cos^{۳} x}{\sin x}\,dx$

۱۷۵۸ - $\int \frac{dx}{\cos^{٤} x}$

۱۷۵۹ - $\int \frac{dx}{۱+e^{x}}$

۱۷٦۰ - $\int \frac{(۱+e^{x})^{۲}}{۱+e^{۲x}}\,dx$

۱۷٦۱ - $\int \operatorname{sh}^{۲} x\,dx$

۱۷٦۲ - $\int \operatorname{ch}^{۲} x\,dx$

۱۷٦۳ - $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} ۲x\,dx$

۱۷٦٤ - $\int \operatorname{ch} x \times \operatorname{ch} ۳x\,dx$

۱۷٦۵ - $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{۲} x \operatorname{ch}^{۲} x}$

با کاربرد جایگزینی مناسبی انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱۷۶۶ – $\int x^{۲}\sqrt[۳]{۱-x}\,dx$

۱۷۶۷ – $\int x^{۳}(۱-۵x^{۲})^{۱۰}\,dx$

۱۷۶۸ – $\int \frac{x^{۲}}{\sqrt{۲-x}}\,dx$

۱۷۶۹ – $\int \frac{x^{۵}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\,dx$

۱۷۷۰ – $\int x^{۵}(۲-۵x^{۳})^{\frac{۲}{۳}}\,dx$

۱۷۷۱ – $\int \cos^{۵}x\times\sqrt{\sin x}\,dx$

۱۷۷۲ – $\int \frac{\sin x\cos^{۳}x}{۱+\cos^{۲}x}\,dx$

۱۷۷۳ – $\int \frac{\sin^{۲}x}{\cos^{۶}x}\,dx$

۱۷۷۴ – $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{۱+\ln x}}$

۱۷۷۵ – $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{۲}}+e^{x}}$

۱۷۷۶ – $\int \frac{dx}{\sqrt{۱+e^{x}}}$

۱۷۷۷ – $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\times\frac{dx}{۱+x}$

با کاربرد جایگزینی‌های مثلثاتی $x=a\sin t$ ، $x=a\operatorname{tg}t$ ، $x=a\sin^{۲}t$ و غیره ، انتگرالهای زیر را پیدا کنید (پارامترها مثبت هستند) :

۱۷۷۸ – $\int \frac{dx}{(۱-x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$

۱۷۷۹ – $\int \frac{x^{۲}\,dx}{\sqrt{x^{۲}-۲}}$

۱۷۸۰ – $\int \sqrt{a^{۲}-x^{۲}}\,dx$

۱۷۸۱ – $\int \frac{dx}{(x^{۲}+a^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$

۱۷۸۲ – $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$

۱۷۸۳ – $\int x\sqrt{\frac{x}{۲a-x}}\,dx$

۱۷۸۴ – $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

راهنمائی – جایگزینی $x-a=(b-a)\sin^{۲}t$ را بکار برید .

۱۷۸۵ – $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$

با کاربرد جایگزینی‌های هذلولی $x=a\operatorname{sh}t$ ، $x=a\operatorname{ch}t$ و غیره ، انتگرالهای زیر را پیدا کنید (پارامترها مثبت هستند) :

۱۷۸۶ – $\int \sqrt{a^{۲}+x^{۲}}\,dx$

۱۷۸۷ – $\int \frac{x^{۲}}{\sqrt{a^{۲}+x^{۲}}}\,dx$

۱۷۸۸ – $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx$

۱۷۸۹ – $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$

۱۷۹۰ – $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx$

راهنمائي – فرض کنید $x+a=(b-a)\operatorname{sh}^{۲} t$

با کاربرد روش انتگرال‌گیری جزء به جزء انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱۷۹۱ – $\int \ln x\,dx$

۱۷۹۲ – $\int x^{n}\ln x\,dx \quad (n\neq -۱)$

۱۷۹۳ – $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{۲} dx$

۱۷۹۴ – $\int \sqrt{x}\,\ln^{۲} x\,dx$

۱۷۹۵ – $\int xe^{-x}\,dx$

۱۷۹۶ – $\int x^{۲}e^{-۲x}\,dx$

۱۷۹۷ – $\int x^{۳}e^{-x^{۲}}\,dx$

۱۷۹۸ – $\int x\cos x\,dx$

۱۷۹۹ – $\int x^{۲}\sin ۲x\,dx$

۱۸۰۰ – $\int x\operatorname{sh} x\,dx$

۱۸۰۱ – $\int x^{۳}\operatorname{ch} ۳x\,dx$

۱۸۰۲ – $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$

۱۸۰۳ – $\int \arcsin x\,dx$

۱۸۰۴ – $\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx$

۱۸۰۵ – $\int x^{۲}\arccos x\,dx$

۱۸۰۶ – $\int \frac{\arcsin x}{x^{۲}}\,dx$

۱۸۰۷ – $\int \ln\left(x+\sqrt{۱+x^{۲}}\right)dx$

۱۸۰۸ – $\int x\ln\frac{۱+x}{۱-x}\,dx$

۱۸۰۹ – $\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx$

۱۸۱۰ – $\int \sin x\times \ln(\operatorname{tg} x)\,dx$

مطلوبست تعیین انتگرالهای زیر :

۱۸۱۱ – $\int x^{۵}e^{x^{۳}}\,dx$

۱۸۱۲ – $\int (\arcsin x)^{۲}\,dx$

۱۸۱۳ – $\int x(\operatorname{arc\,tg} x)^{۲}\,dx$

۱۸۱۴ – $\int x^{۲}\ln\frac{۱-x}{۱+x}\,dx$

۱۸۱۵ – $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{۱+x^{۲}}\right)}{\sqrt{۱+x^{۲}}}\,dx$

۱۸۱۶ – $\int \frac{x^{۲}}{(۱+x^{۲})^{۲}}\,dx$

۱۸۱۷ – $\int \frac{dx}{(a^{۲}+x^{۲})^{۲}}$

۱۸۱۸ – $\int \sqrt{a^۲-x^۲}\,dx$

۱۸۱۹ – $\int \sqrt{x^۲+a}\,dx$

۱۸۲۰ – $\int x^۲\sqrt{a^۲+x^۲}\,dx$

۱۸۲۱ – $\int x\sin^۲ x\,dx$

۱۸۲۲ – $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

۱۸۲۳ – $\int x\sin\sqrt{x}\,dx$

۱۸۲۴ – $\int \frac{xe^{\operatorname{arc\,tg} x}}{(۱+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\,dx$

۱۸۲۵ – $\int \frac{e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{(۱+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

۱۸۲۶ – $\int \sin(\ln x)\,dx$

۱۸۲۷ – $\int \cos(\ln x)\,dx$

۱۸۲۸ – $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

۱۸۲۹ – $\int e^{ax}\sin bx\,dx$

۱۸۳۰ – $\int e^{۲x}\sin^۲ x\,dx$

۱۸۳۱ – $\int (e^x-\cos x)^۲\,dx$

۱۸۳۲ – $\int \frac{\operatorname{arc\,ctg} e^x}{e^x}\,dx$

۱۸۳۳ – $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^۲ x}\,dx$

۱۸۳۴ – $\int \frac{x\,dx}{\cos^۲ x}$

۱۸۳۵ – $\int \frac{xe^x}{(x+۱)^۲}\,dx$

تعیین انتگرال‌های زیر بر اساس در آوردن سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم بصورت کانونیک و کاربرد دستورهای زیر پایه گذاری شده است :

I – $$\int \frac{dx}{a^۲+x^۲}=\frac{۱}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C \quad (a\neq ۰)$$

II – $$\int \frac{dx}{a^۲-x^۲}=\frac{۱}{۲a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \quad (a\neq ۰)$$

III – $$\int \frac{x\,dx}{a^۲\pm x^۲}=\pm\frac{۱}{۲}\ln|a^۲\pm x^۲|+C$$

IV – $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^۲-x^۲}}=\arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>۰)$$

V – $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^۲\pm a^۲}}=\ln\left|x+\sqrt{x^۲\pm a^۲}\right|+C \quad (a>۰)$$

VI – $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^۲\pm x^۲}}=\pm\sqrt{a^۲\pm x^۲}+C$$

$$\int \sqrt{a^{۲}-x^{۲}}\,dx=\frac{x}{۲}\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}+\frac{a^{۲}}{۲}\arcsin\frac{x}{a}+C\quad (a>۰)$$ – VII

$$\int \sqrt{x^{۲}\pm a^{۲}}\,dx=\frac{x}{۲}\sqrt{x^{۲}\pm a^{۲}}\pm\frac{a^{۲}}{۲}\ln\left|x+\sqrt{x^{۲}\pm a^{۲}}\right|+C$$ – VIII

مطلوبست تعیین انتگرالهای زیر :

۱۸۳۶ – $\int \frac{dx}{a+bx^{۲}}\quad (ab\neq ۰)$

۲۸۳۷ – $\int \frac{dx}{x^{۲}-x+۲}$

۱۸۳۸ – $\int \frac{dx}{۳x^{۲}-۲x-۱}$

۱۸۳۹ – $\int \frac{x\,dx}{x^{٤}-۲x^{۲}-۱}$

۱۸۴۰ – $\int \frac{(x+۱)}{x^{۲}+x+۱}\,dx$

۱۸۴۱ – $\int \frac{x\,dx}{x^{۲}-۲x\cos\alpha+۱}$

۱۸۴۲ – $\int \frac{x^{۳}\,dx}{x^{٤}-x^{۲}+۲}$

۱۸۴۳ – $\int \frac{x^{٥}\,dx}{x^{٦}-x^{۳}-۲}$

۱۸۴۴ – $\int \frac{dx}{۳\sin^{۲}x-۸\sin x\cos x+٥\cos^{۲}x}$

۱۸۴۵ – $\int \frac{dx}{\sin x+۲\cos x+۳}$

۱۸۴۶ – $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^{۲}}}\quad (b\neq ۰)$

۱۸۴۷ – $\int \frac{dx}{\sqrt{۱-۲x-x^{۲}}}$

۱۸۴۸ – $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^{۲}}}$

۱۸۴۹ – $\int \frac{dx}{\sqrt{۲x^{۲}-x+۲}}$

۱۸۵۰ – ثابت کنید که اگر

$$y=ax^{۲}+bx+c\quad (a\neq ۰)$$

در آنصورت

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{۱}{\sqrt{a}}\ln\left(\frac{y'}{۲}+\sqrt{ay}\right)+C$$ بازای $a>۰$

و

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{۱}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-y'}{\sqrt{b^{۲}-٤ac}}+C$$ بازای $a<۰$

١٨٥١ — $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{٥+x-x^٢}}$

١٨٥٢ — $\int \frac{x+١}{\sqrt{x^٢+x+١}}\,dx$

١٨٥٣ — $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{١-٣x^٢-٢x^٤}}$

١٨٥٣,١ — $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{١+\sin x+\cos^٢ x}}$

١٨٥٤ — $\int \frac{x^٣\,dx}{\sqrt{x^٤-٢x^٢-١}}$

١٨٥٥ — $\int \frac{x+x^٣}{\sqrt{١+x^٢-x^٤}}\,dx$

١٨٥٦ — $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^٢+x+١}}$

١٨٥٧ — $\int \frac{dx}{x^٢\sqrt{x^٢+x-١}}$

١٨٥٨ — $\int \frac{dx}{(x+١)\sqrt{x^٢+١}}$

١٨٥٩ — $\int \frac{dx}{(x-١)\sqrt{x^٢-٢}}$

١٨٦٠ — $\int \frac{dx}{(x+٢)^٢\sqrt{x^٢+٢x-٥}}$

١٨٦١ — $\int \sqrt{٢+x-x^٢}\,dx$

١٨٦٢ — $\int \sqrt{٢+x+x^٢}\,dx$

١٨٦٣ — $\int \sqrt{x^٤+٢x^٢-١}\;x\,dx$

١٨٦٤ — $\int \frac{١-x+x^٢}{x\sqrt{١+x-x^٢}}\,dx$

١٨٦٥ — $\int \frac{x^٢+١}{x\sqrt{x^٤+١}}\,dx$

بخش ٢ — انتگرال گیری توابع گویا

با کاربرد روش ضرایب نامعین انتگرال‌های زیر را پیدا کنید :

١٨٦٦ — $\int \frac{٢x+٣}{(x-٢)(x+٥)}\,dx$

١٨٦٧ — $\int \frac{x\,dx}{(x+١)(x+٢)(x+٣)}$

١٨٦٨ — $\int \frac{x^{١٠}\,dx}{x^٢+x-٢}$

١٨٦٩ — $\int \frac{x^٣+١}{x^٣-٥x^٢+٦x}\,dx$

١٨٧٠ — $\int \frac{x^٤}{x^٤+٥x^٢+٤}\,dx$

١٨٧١ — $\int \frac{x\,dx}{x^٣-٣x+٢}$

١٨٧٢ — $\int \frac{x^٢+١}{(x+١)^٢(x-١)}\,dx$

١٨٧٣ — $\int \left(\frac{x}{x^٢-٣x+٢}\right)^٢ dx$

١٨٧٤ — $\int \frac{dx}{(x+١)(x+٢)^٢(x+٣)^٣}$

١٨٧٥ — $\int \frac{dx}{x^٥+x^٤-٢x^٣-٢x^٢+x+١}$

١٨٧٦ — $\int \frac{x^٢+٥x+٤}{x^٤+٥x^٢+٤}\,dx$

١٨٧٧ — $\int \frac{dx}{(x+١)(x^٢+١)}$

۱۸۷۸ – $\int \frac{dx}{(x^{۲}-٤x+٤)(x^{۲}-٤x+٥)}$

۱۸۷۹ – $\int \frac{x\,dx}{(x-۱)^{۲}\,(x^{۲}+۲x+۲)}$

۱۸۸۰ – $\int \frac{dx}{x\,(۱+x)\,(۱+x+x^{۲})}$

۱۸۸۱ – $\int \frac{dx}{x^{۳}+۱}$

۱۸۸۲ – $\int \frac{x\,dx}{x^{۳}-۱}$

۱۸۸۳ – $\int \frac{dx}{x^{٤}-۱}$

۱۸۸٤ – $\int \frac{dx}{x^{٤}+۱}$

۱۸۸٥ – $\int \frac{dx}{x^{٤}+x^{۲}+۱}$

۱۸۸٦ – $\int \frac{dx}{x^{٦}+۱}$

۱۸۸۷ – $\int \frac{dx}{(۱+x)\,(۱+x^{۲})(۱+x^{۳})}$

۱۸۸۸ – $\int \frac{dx}{x^{٥}-x^{٤}+x^{۳}-x^{۲}+x-۱}$

۱۸۸۹ – $\int \frac{x^{۲}\,dx}{x^{٤}+۳x^{۳}+\frac{۹}{۲}\,x^{۲}+۳x+۱}$

۱۸۹۰ – بچه شرطی انتگرال

$$\int \frac{ax^{۲}+bx+c}{x^{۳}\,(x-۱)^{۲}}\,dx$$

تابع گویا میشود ؟

با کاربرد روش اوستروگرادسکی ، مطلوبست تعیین انتگرالهای زیر :

۱۸۹۱ – $\int \frac{x\,dx}{(x-۱)^{۲}\,(x+۱)^{۳}}$

۱۸۹۲ – $\int \frac{dx}{(x^{۳}+۱)^{۲}}$

۱۸۹۳ – $\int \frac{dx}{(x^{۲}+۱)^{۳}}$

۱۸۹٤ – $\int \frac{x^{۲}\,dx}{(x^{۲}+۲x+۲)^{۲}}$

۱۸۹٥ – $\int \frac{dx}{(x^{٤}+۱)^{۲}}$

۱۸۹٦ – $\int \frac{x^{۲}+۳x-۲}{(x-۱)\,(x^{۲}+x+۱)^{۲}}\,dx$

۱۸۹۷ – $\int \frac{dx}{(x^{٤}-۱)^{۳}}$

قسمت جبری انتگرالهای زیر را جدا کنید :

۱۸۹۸ – $\int \frac{x^{۲}+۱}{(x^{٤}+x^{۲}+۱)^{۲}}\,dx$

۱۸۹۹ – $\int \frac{dx}{(x^{۳}+x+۱)^{۳}}$

۱۹۰۰ – $\int \frac{٤x^{٥}-۱}{(x^{٥}+x+۱)^{۲}}\,dx$

۱۹۰۱ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$$

۱۹۰۲ – بچه شرطی انتگرال

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\,dx$$

تابع گویا میشود ؟

با طریق مختلف انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱۹۰۳ – $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx$

۱۹۰۴ – $\int \frac{x\,dx}{x^8-1}$

۱۹۰۵ – $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+3}$

۱۹۰۶ – $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx$

۱۹۰۷ – $\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx$

۱۹۰۸ – $\int \frac{x^4\,dx}{(x^{10}-10)^2}$

۱۹۰۹ – $\int \frac{x^{11}\,dx}{x^8+3x^4+2}$

۱۹۱۰ – $\int \frac{x^9\,dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$

۱۹۱۱ – $\int \frac{x^{2n}-1}{x^n+1}\,dx$

۱۹۱۲ – $\int \frac{x^{3n}-1}{(x^{2n}+1)^2}\,dx$

۱۹۱۳ – $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}$

۱۹۱۴ – $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$

۱۹۱۵ – $\int \frac{1+x^7}{x(1+x^7)}\,dx$

۱۹۱۶ – $\int \frac{x^4-1}{(xx^4-5)(x^5-5x+1)}\,dx$

۱۹۱۷ – $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx$

۱۹۱۸ – $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx$

۱۹۱۹ – $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,dx$

۱۹۲۰ – $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$

۱۹۲۱ – برای محاسبهٔ انتگرال

$$I_n=\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad (a\neq 0)$$

یک دستور بازگشت استخراج کنید . با استفاده از این دستور مطلوبست محاسبهٔ

$$I_3=\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}$$

راهنمایی – از اتحاد زیر استفاده کنید :

$$٤a(ax^{۲}+bx+c)=(۲ax+b)^{۲}+(٤ac-b^{۲})$$

۱۹۲۲ – جایگزینی $t=\frac{x+a}{x+b}$ را برای محاسبهٔ انتگرال

$$I=\int\frac{dx}{(x+a)^{m}(x+b)^{n}}$$

بکار برید (m و n اعداد طبیعی هستند) .

با استفاده از این جایگزینی مطلوبست محاسبهٔ

$$\int\frac{dx}{(x-۲)^{۲}(x+۳)^{۳}}$$

۱۹۲۳ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\int\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+۱}}dx$$

در صورتیکه $P_n(x)$ چندجمله‌ای درجهٔ n نسبت به x باشد .

راهنمایی – دستور تیلر را بکار برید .

۱۹۲٤ – فرض کنیم $R(x)=R^*(x^{۲})$ که در آن R^* تابعی است گویا . بسط تابع $R(x)$ بصورت کسرهای گویا دارای چه ویژگیهائی است ؟

۱۹۲۵ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\int\frac{dx}{۱+x^{۲n}}$$

که در آن n عدد مثبت درستی است .

بخش ۳ – انتگرال گیری توابع گنگ

بکمک تبدیل توابع تحت انتگرال به توابع گویا انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱۹۲۶ – $\int\frac{dx}{۱+\sqrt{x}}$

۱۹۲۷ – $\int\frac{dx}{x\left(۱+۲\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}\right)}$

۱۹۲۸ – $\int\frac{x\sqrt[۳]{۲+x}}{x+\sqrt[۳]{۲+x}}dx$

۱۹۲۹ – $\int \frac{۱-\sqrt{x+۱}}{۱+\sqrt[۳]{x+۱}}\,dx$

۱۹۳۰ – $\int \frac{dx}{\left(۱+\sqrt[٤]{x}\right)^{۳}\sqrt{x}}$

۱۹۳۱ – $\int \frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱}}\,dx$

<u>راهنمائی</u>– فرض کنید

$$x=\left(\frac{u^{۲}-۱}{۲u}\right)^{۲}$$

۱۹۳۲ – $\int \frac{dx}{\sqrt[۳]{(x+۱)^{۲}(x-۱)^{۳}}}$

۱۹۳۳ – $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^{۳}(a-x)}}\ (a>۰)$

۱۹۳٤ – $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^{n+۱}(x-b)^{n-۱}}}$

۱۹۳۵ – $\int \frac{dx}{۱+\sqrt{x}+\sqrt{۱+x}}$

۱۹۳۶ – ثابت کنید که انتگرال

$$\int R\left[x,\ \ (x-a)^{\frac{p}{n}}\ (x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx$$

که در آن R تابع گویا و p ، q ، n اعداد درستی میباشند به شرط

$$p+q=kn$$

که در آن k عدد درستی است یک تابع ابتدائی است .

انتگرالهای توابع گنگ ساده درجه دوم زیر را پیدا کنید :

۱۹۳۷ – $\int \frac{x^{۲}}{\sqrt{۱+x+x^{۲}}}\,dx$

۱۹۳۸ – $\int \frac{dx}{(x+۱)\sqrt{x^{۲}+x+۱}}$

۱۹۳۹ – $\int \frac{dx}{(۱-x)^{۲}\sqrt{۱-x^{۲}}}$

۱۹٤۰ – $\int \frac{\sqrt{x^{۲}+۲x+۲}}{x}\,dx$

۱۹٤۱ – $\int \frac{x\,dx}{(۱+x)\sqrt{۱-x-x^{۲}}}$

۱۹٤۲ – $\int \frac{۱-x+x^{۲}}{\sqrt{۱+x-x^{۲}}}\,dx$

با کاربرد دستور

$$\int \frac{P_n(x)}{y}\,dx=Q_{n-۱}(x)\,y+\lambda\int\frac{dx}{y}$$

که در آن $y=\sqrt{ax^{۲}+bx+c}$ ، $P_n(x)$ چندجمله‌ای درجهٔ n و $Q_{n-۱}(x)$ چندجمله‌ای درجهٔ $n-۱$ و λ یک عدد میباشد انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱۹۴۳ – $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$

۱۹۴۴ – $\int \frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

۱۹۴۵ – $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

۱۹۴۶ – $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$

۱۹۴۷ – $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$

۱۹۴۸ – $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

۱۹۴۹ – $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$

۱۹۵۰ – $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$

۱۹۵۱ – با چه شرطی انتگرال

$$\int \frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

تابع جبری میشود ؟

مطلوبست محاسبهٔ $\int \frac{P(x)}{Q(x)\,y}\,dx$ که در آن $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ با تجزیهٔ تابع گویای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ به کسرهای ساده :

۱۹۵۲ – $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$

۱۹۵۳ – $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$

۱۹۵۴ – $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\,dx$

۱۹۵۵ – $\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$

۱۹۵۶ – $\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

۱۹۵۷ – $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

۱۹۵۸ – $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$

۱۹۵۹ – $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$

۱۹۶۰ – $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,dx$

با درآوردن سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم بصورت کانونیک انتگرالهای زیر را حساب کنید :

۱۹۶۱ – $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$

۱۹٦۲ –
$$\int \frac{x^{۲}\,dx}{(٤-۲x+x^{۲})\sqrt{۲+۲x-x^{۲}}}$$

۱۹٦۳ –
$$\int \frac{(x+۱)\,dx}{(x^{۲}+x+۱)\sqrt{x^{۲}+x+۱}}$$

۱۹٦٤ – بکمک جایگزینی کسری خطی $x=\dfrac{\alpha+\beta t}{۱+t}$ مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int \frac{dx}{(x^{۲}-x+۱)\sqrt{x^{۲}+x+۱}}$$

۱۹٦٥ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\int \frac{dx}{(x^{۲}+۲)\sqrt{۲x^{۲}-۲x+٥}}$$

با کاربرد جایگزینی‌های اولری :

۱) $\sqrt{ax^{۲}+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+z$ اگر $a>۰$

۲) $\sqrt{ax^{۲}+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$ اگر $c>۰$

۳) $\sqrt{a(x-x_{۱})(x-x_{۲})}+z(x-x_{۱})$

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۱۹٦٦ –
$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^{۲}+x+۱}}$$

۱۹٦۷ –
$$\int \frac{dx}{۱+\sqrt{۱-۲x-x^{۲}}}$$

۱۹٦۸ –
$$\int x\sqrt{x^{۲}-۲x+۲}\,dx$$

۱۹٦۹ –
$$\int \frac{x-\sqrt{x^{۲}+۳x+۲}}{x+\sqrt{x^{۲}+۳x+۲}}\,dx$$

۱۹۷۰ –
$$\int \frac{dx}{[۱+\sqrt{x(۱+x)}]^{۲}}$$

با کاربرد روشهای مختلف انتگرال‌های زیر را پیدا کنید :

۱۹۷۱ –
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{۲}+۱}+\sqrt{x^{۲}-۱}}$$

۱۹۷۲ –
$$\int \frac{x\,dx}{(۱-x^{۳})\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

۱۹۷۳ –
$$\int \frac{dx}{\sqrt{۲}+\sqrt{۱-x}+\sqrt{۱+x}}$$

۱۰۷٤ –
$$\int \frac{x+\sqrt{۱+x+x^{۲}}}{۱+x+\sqrt{۱+x+x^{۲}}}\,dx$$

۱۹۷٥ –
$$\int \frac{\sqrt{x(x+۱)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+۱}}\,dx$$

۱۹۷٦ –
$$\int \frac{(x^{۲}-۱)\,dx}{(x^{۲}+۱)\sqrt{x^{٤}+۱}}$$

$$\int \frac{(x^{۲}+۱)\,dx}{(x^{۲}-۱)\sqrt{x^{٤}+۱}} \quad \text{– ۱۹۷۷}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{٤}+۲x^{۲}-۱}} \quad \text{– ۱۹۷۸}$$

$$\int \frac{(x^{۲}+۱)\,dx}{x\sqrt{x^{٤}+x^{۲}+۱}} \quad \text{– ۱۹۷۹}$$

۱۹۸۰ – ثابت کنید که پیدا کردن انتگرال

$$\int R\,(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx$$

که در آن R تابع گویایی است به انتگرال‌گیری تابع گویا منجر میشود .

انتگرال دوجمله‌ای دیفرانسیل

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$$

را که در آن m ، n و p اعداد گویا هستند تنها در سه حالت زیر میتوان به انتگرال‌گیری توابع گویا بدل نمود (قضیهٔ چبیشف) :

حالت ۱ – هرگاه p عدد درستی باشد فرض میکنیم $x = z^N$ که در آن N مخرج مشترک کسرهای m و n است .

حالت ۲ – هرگاه $\frac{m+۱}{n}$ عدد درستی باشد فرض میکنیم $a+bx^n+z^N$ که در آن N مخرج کسر p است .

حالت ۳ – هرگاه $\frac{m+۱}{n}$ عدد درستی باشد جایگزینی $ax^{-n}+b=z^N$ را بکار میبریم که در آن N مخرج کسر p است .

اگر $n=۱$ ، در اینصورت این حالت‌ها هم‌ارز حالت‌های زیر است :
۱) p عددیست درست ؛ ۲) m عددیست درست ؛ ۳) $m+p$ عددیست درست .

انتگرال‌های زیر را پیدا کنید :

$$\int \sqrt{x^{۳}+x^{٤}}\,dx \quad \text{– ۱۹۸۱}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\left(۱+\sqrt[۳]{x}\right)^{۲}}\,dx \quad \text{– ۱۹۸۲}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{۱+\sqrt[۳]{x^{۲}}}} \quad \text{– ۱۹۸۳}$$

$$\int \frac{x^{۵}\,dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}} \quad \text{– ۱۹۸٤}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[۳]{۱+x^{۳}}} \quad \text{– ۱۹۸۵}$$

١٩٨٦ — $\int \frac{dx}{\sqrt[٤]{١ + x^{٤}}}$

١٩٨٧ — $\int \frac{dx}{x\sqrt[٦]{١ + x^{٦}}}$

١٩٨٨ — $\int \frac{dx}{x^{٣}\sqrt[٥]{١ + \frac{١}{x}}}$

١٩٨٩ — $\int \sqrt[٣]{٣x - x^{٢}}\, dx$

١٩٩٠ — در چه حالاتی انتگرال

$$\int \sqrt{١ + x^m}\, dx$$

که در آن m عدد گویا است تابع ابتدائی میشود ؟

بخش ٤ — انتگرال‌گیری توابع مثلثاتی

انتگرالهای بصورت

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

که در آن m و n اعداد درستی هستند بکمک تبدیلات فنی یا کاربرد دستورهای کاهشی محاسبه میشوند .

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

١٩٩١ — $\int \cos^{٥} x\, dx$

١٩٩٢ — $\int \sin^{٦} x\, dx$

١٩٩٣ — $\int \cos^{٦} x\, dx$

١٩٩٤ — $\int \sin^{٢} x \cos^{٤} x\, dx$

١٩٩٥ — $\int \sin^{٤} x \cos^{٥} x\, dx$

١٩٩٦ — $\int \sin^{٥} x \cos^{٥} x\, dx$

١٩٩٧ — $\int \frac{\sin^{٣} x}{\cos^{٤} x}\, dx$

١٩٩٨ — $\int \frac{\cos^{٤} x}{\sin^{٣} x}\, dx$

١٩٩٩ — $\int \frac{dx}{\sin^{٣} x}$

٢٠٠٠ — $\int \frac{dx}{\cos^{٣} x}$

٢٠٠١ — $\int \frac{dx}{\sin^{٤} x \cos^{٤} x}$

٢٠٠٢ — $\int \frac{dx}{\sin^{٣} x \cos^{٥} x}$

٢٠٠٣ — $\int \frac{dx}{\sin x \cos^{٤} x}$

٢٠٠٤ — $\int \operatorname{tg}^{٥} x\, dx$

٢٠٠٥ — $\int \operatorname{ctg}^{٦} x\, dx$

$$\int \frac{\sin^{۴} x}{\cos^{۶} x}\, dx$$ – ۲۰۰۶

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^{۳} x \cos^{۵} x}}$$ – ۲۰۰۷

$$\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[۳]{\sin^{۲} x}}$$ – ۲۰۰۸

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$$ – ۲۰۰۹

$$\frac{dx}{\sqrt[۳]{\operatorname{tg} x}}$$ – ۲۰۱۰

۲۰۱۰ – دستورهای کاهشی برای انتگرالهای زیر :

الف) $I_n = \int \sin^n x\, dx$ ؛ ب) $K_n = \int \cos^n x\, dx$ $(n > ۲)$

یافته و بیاری آنها انتگرالهای زیر را محاسبه کنید :

$$\int \sin^{۶} x \quad \text{و} \quad \int \cos^{۸} x\, dx$$

۲۰۱۲ – دستورهای کاهشی برای انتگرال های

الف) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ ؛ ب) $K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n > ۲)$

یافته و بیاری آنها انتگرالهای زیر را محاسبه کنید :

$$\int \frac{dx}{\sin^{۵} x} \quad \text{و} \quad \int \frac{dx}{\cos^{۷} x}$$

انتگرالهای زیر بکمک دستورهای

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \quad \text{– I}$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] \quad \text{– II}$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{۱}{۲}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \quad \text{– III}$$

محاسبه میشوند .

انتگرالهای زیر پیدا کنید :

$$\int \sin ۵x \cos x\, dx$$ – ۲۰۱۳

$$\int \cos x \cos ۲x \cos ۳x\, dx$$ – ۲۰۱۴

$$\int \sin x \sin \frac{x}{۲} \sin \frac{x}{۳}\, dx$$ – ۲۰۱۵

$$\int \sin x \sin(x+a) \sin(x+b)\, dx$$ – ۲۰۱۶

$$\int \cos^{۲} ax \cos^{۲} bx\, dx$$ – ۲۰۱۷

$$\int \sin^{۳} ۲x \times \cos^{۲} ۳x\, dx$$ – ۲۰۱۸

انتگرالهای زیر با کاربرد اتحادها محاسبه میشوند:

$$\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin[(x+\alpha) - (x+\beta)]$$

و

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos[(x+\alpha) - (x+\beta)]$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۲۰۱۹ - $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

۲۰۲۰ - $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$

۲۰۲۱ - $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

۲۰۲۲ - $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$

۲۰۲۳ - $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}$

۲۰۲۴ - $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)\, dx$

انتگرالهای بشکل

$$\int R(\sin x, \ \cos x)\, dx$$

که در آن R تابعی گویا است در حالت کلی بیاری جایگزینی $\operatorname{tg}\frac{x}{۲} = t$ به انتگرال‌گیری توابع گویا منجر میشود .

الف) اگر تساوی

$$R(-\sin x, \ \cos x) \equiv -R(\sin x, \ \cos x)$$

یا

$$R(\sin x, \ -\cos x) \equiv -R(\sin x, \ \cos x)$$

بر قرار باشد در آنصورت بهتر است بترتیب جایگزینی $\cos x = t$ یا $\sin x = t$ را بکار برد .

ب) اگر تساوی

$$R(-\sin x, \ -\cos x) \equiv R(\sin x, \ \cos x)$$

بر قرار باشد بهتر است جایگزینی $\operatorname{tg} x = t$ را بکار برد .

انتگرالهای زیر را پیدا کنید:

۲۰۲۵ - $\int \frac{dx}{۲\sin x - \cos x + ۵}$

۲۰۲۶ - $\int \frac{dx}{(۲ + \cos x)\sin x}$

۲۰۲۸ – $\int \frac{dx}{۱ + \varepsilon \cos x}$

الف) $۱ < \varepsilon < ۰$ ؛ ب) $\varepsilon > ۱$

۲۰۲۷ – $\int \frac{\sin^۲ x}{\sin x + ۲ \cos x} dx$

۲۰۲۹ – $\int \frac{\sin^۲ x}{۱ + \sin^۲ x} dx$

۲۰۳۵ – $\int \frac{dx}{\sin^٤ x + \cos^٤ x}$

۲۰۳۰ – $\int \frac{dx}{a^۲ \sin^۲ x + b^۲ \cos^۲ x}$

۲۰۳٦ – $\int \frac{\sin^۲ x \cos^۲ x}{\sin^۸ x + \cos^۸ x} dx$

۲۰۳۱ – $\int \frac{\cos^۲ x \, dx}{(a^۲ \sin^۲ x + b^۲ \cos^۲ x)^۲}$

۳۰۳۷ – $\int \frac{\sin^۲ x - \cos^۲ x}{\sin^٤ x + \cos^٤ x} dx$

۲۰۳۲ – $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

۲۰۳۸ – $\int \frac{\sin x \cos x}{۱ + \sin^٤ x} dx$

۲۰۳۳ – $\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^۲}$

۲۰۳۹ – $\int \frac{dx}{\sin^٦ x + \cos^٦ x}$

۲۰۳٤ – $\int \frac{\sin x \, dx}{\sin^۳ x + \cos^۳ x}$

۲۰٤۰ – $\int \frac{dx}{(\sin^۲ x + ۲ \cos^۲ x)^۲}$

۲۰٤۱ – انتگرال

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

را با تبدیل مخرج بصورت لگاریتمی پیدا کنید .

۲۰٤۲ – ثابت کنید که

$$\int \frac{a_۱ \sin x + b_۱ \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C$$

که در آن A ، B ، C ثابتند .

راهنمایی – فرض کنید

$$a_۱ \sin x + b_۱ \cos x = A (a \sin x + b \cos x) + B (a \cos x - b \sin x)$$

که در آن A ، B ثابتند .

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۲۰۳٤ – $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + ۲ \cos x} dx$

۲۰٤٤ – $\int \frac{dx}{۳ + ۵ \operatorname{tg} x}$

۲۰٤۳,۱ – $\int \frac{\sin x}{\sin x - ۳ \cos x} dx$

۲۰٤۵ – $\int \frac{a_۱ \sin x + b_۱ \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^۲} dx$

۲۰۴۶ – ثابت کنید که

$$\int \frac{a_{۱} \sin x + b_{۱} \cos x + c_{۱}}{a \sin x + b \cos x + c}\, dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| +$$

$$+ C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$$

که در آن A ، B ، C ضرایب ثابتی هستند .

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۲۰۴۷ – $\displaystyle\int \frac{\sin x + ۲ \cos x - ۳}{\sin x - ۲ \cos x + ۳}\, dx$

۲۰۴۸ – $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{۲} + \sin x + \cos x}\, dx$

۲۰۴۹ – $\displaystyle\int \frac{۲ \sin x + \cos x}{۳ \sin x + ۴ \cos x - ۲}\, dx$

۲۰۵۰ – ثابت کنید که

$$\int \frac{a_{۱} \sin^{۲} x + ۲ b_{۱} \sin x \cos x + c_{۱} \cos^{۲} x}{a \sin x + b \cos x}\, dx =$$

$$= A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

که در آن A ، B ، C ضرایب ثابتی هستند .

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۲۰۵۱ – $\displaystyle\int \frac{\sin^{۲} x - ۴ \sin x \cos x + ۳ \cos^{۲} x}{\sin x + \cos x}\, dx$

۲۰۵۲ – $\displaystyle\int \frac{\sin^{۲} x + \sin x \cos x + ۲ \cos^{۲} x}{\sin x + ۲ \cos x}\, dx$

۲۰۵۳ – ثابت کنید که اگر $(a - c)^{۲} + b^{۲} \neq ۰$ در آنصورت

$$\int \frac{a_{۱} \sin x + b_{۱} \cos x}{a \sin^{۲} x + ۲ b \sin x \cos x + c \cos^{۲} x}\, dx =$$

$$= A \int \frac{du_{۱}}{k_{۱} u_{۱}^{۲} + \lambda_{۱}} + B \int \frac{du_{۲}}{k_{۲} u_{۲}^{۲} + \lambda_{۲}}$$

که در آن A ، B ضرایب ثابت نامعین و $\lambda_{۱}$ ، $\lambda_{۲}$ ریشه‌های معادلهٔ زیر میباشند :

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = ۰ \quad (\lambda_{۱} \neq \lambda_{۲})$$

$$u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x, \quad k = \frac{۱}{a - \lambda} \quad (i = ۱,\ ۲)$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۲۰۵۴ – $\displaystyle\int \frac{۲\sin x - \cos x}{۳\sin^{۲} x + ۴\cos^{۲} x}\, dx$

۲۰۵۵ – $\displaystyle\int \frac{(\sin x + \cos x)\, dx}{۲\sin^{۲} x - ۴\sin x \cos x + ۵\cos^{۲} x}$

۲۰۵۶ – $\displaystyle\int \frac{\sin x - ۲\cos x}{۱ + ۴\sin x \cos x}\, dx$

۲۰۵۷ – ثابت کنید که

$$\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n}} = \frac{A\sin x + B\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-۱}} + C\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^{n-۲}}$$

که در آن A ، B ، C ضرایب ثابت ناسعین میباشند .

۲۰۵۸ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\int \frac{dx}{(\sin x + ۲\cos x)^{۳}}$$

۲۰۵۹ – ثابت کنید که

$$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n}} = \frac{A\sin x}{(a + b\cos x)^{n-۱}} +$$
$$+ B\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-۱}} + C\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-۱}}\ (|a| \neq |b|)$$

و تعیین کنید ضرایب A ، B ، C را در صورتیکه n عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد .

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۲۰۶۰ – $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x \sqrt{۱ + \sin^{۲} x}}$

۲۰۶۱ – $\displaystyle\int \frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x \sqrt{\operatorname{tg} x}}\, dx$

۲۰۶۲ – $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{۲ + \sin ۲x}}$

۲۰۶۳ – $\displaystyle\int \frac{dx}{(۱ + \varepsilon\cos x)^{۲}}\ (۰ < \varepsilon < ۱)$

۲۰۶۴ – $\displaystyle\int \frac{\cos^{n-۱} \frac{x+a}{۲}}{\sin^{n+۱} \frac{x-a}{۲}}\, dx$

<u>راهنمایی</u> – فرض کنید $t = \dfrac{\cos \frac{x+a}{۲}}{\sin \frac{x-a}{۲}}$

۲۰۶۵ – دستور کاهشی برای انتگرال

$${}_n = \int \left(\frac{\sin \frac{x-a}{۲}}{\sin \frac{x+a}{۲}} \right)^n dx$$

بیابید (n عددیست طبیعی) .

بخش ۵ – انتگرال گیری توابع متعالی مختلف

۲۰۶۶ – ثابت کنید که اگر $P(x)$ چندجمله‌ای درجهٔ n باشد در آنصورت

$$\int P(x)\, e^{ax}\, dx = e^{ax} \left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^۲} + \dots + (-۱)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+۱}} \right] + C$$

۲۰۶۷ – ثابت کنید که اگر $P(x)$ چندجمله‌ای درجهٔ n باشد در آنصورت

$$\int P(x) \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^۲} + \frac{P^{(۴)}(x)}{a^۴} - \dots \right] + \\ + \frac{\cos ax}{a^۲} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^۲} + \frac{P^{(۵)}(x)}{a^۴} - \dots \right] + C$$

و

$$\int P(x) \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^۲} + \frac{P^{(۴)}(x)}{a^۴} - \dots \right] + \\ + \frac{\sin ax}{a^۲} \left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^۲} + \frac{P^{(۵)}(x)}{a^۴} - \dots \right] + C$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۲۰۶۸ – $\int x^۳ e^{۳x}\, dx$

۲۰۶۹ – $\int (x^۳ - ۲x + ۲) e^{-x}\, dx$

۲۰۷۰ – $\int x^۵ \sin ۵x\, dx$

۲۰۷۱ – $\int (۱ + x^۲)^۲ \cos x\, dx$

۲۰۷۲ – $\int x^۷ e^{-x^۲}\, dx$

۲۰۷۳ – $\int x^۲ e^{\sqrt{x}}\, dx$

۲۰۷۴ – $\int e^{ax} \cos^۲ bx\, dx$

۲۰۷۵ – $\int e^{ax} \sin^۳ bx\, dx$

۲۰۷۶ – $\int x e^x \sin x\, dx$

۲۰۷۷ – $\int x^۲ e^x \cos x\, dx$

۲۰۷۸ - $\int xe^x \sin^۲ x\, dx$

۲۰۷۹ - $\int (x - \sin x)^۳\, dx$

۲۰۸۰ - $\int \cos^۲ \sqrt{x}\, dx$

۲۰۸۱ - ثابت کنید که اگر R تابع گویا و اعداد $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ دارای مضرب مشترک باشند در آنصورت انتگرال

$$\int R\left(e^{a_۱ x}, e^{a_۲ x}, \ldots, e^{a_n x}\right) dx$$

تابع ابتدائی است.

انتگرالهای زیر را پیدا کنید:

۲۰۸۲ - $\int \frac{dx}{(۱+e^x)^۲}$

۲۰۸۳ - $\int \frac{e^{۲x}}{۱+e^x}\, dx$

۲۰۸٤ - $\int \frac{dx}{e^{۲x}+e^x-۲}$

۲۰۸۵ - $\int \frac{dx}{۱+e^{\frac{x}{۲}}+e^{\frac{x}{۳}}+e^{\frac{x}{٦}}}$

۲۰۸٦ - $\int \frac{۱+e^{\frac{x}{۲}}}{\left(۱+x^{\frac{x}{٤}}\right)^۲}\, dx$

۲۰۸۷ - $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-۱}}$

۲۰۸۸ - $\int \sqrt{\frac{e^x-۱}{e^x+۱}}\, dx$

۲۰۸۹ - $\int \sqrt{e^{۲x}+٤e^x-۱}\, dx$

۲۰۹۰ - $\int \frac{dx}{\sqrt{۱+e^x}+\sqrt{۱-e^x}}$

۲۰۹۱ - ثابت کنید که انتگرال

$$\int R(x)\, e^{ax}\, dx$$

که در آن R تابع گویایی است که مخرج آن تنها دارای ریشه‌های حقیقی است بر حسب توابع ابتدائی و تابع متعالی

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\, dx = \operatorname{li}(e^{ax}) + C$$

بیان میشود که در آن

$$\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\ln x}$$

۲۰۹۲ – در چه حالتی انتگرال

$$\int P\left(\frac{۱}{x}\right) e^{x}\, dx$$

که در آن $P\left(\frac{۱}{x}\right) = a_۰ + \frac{a_۱}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x_n}$ و $a_۰, a_۱, \ldots, a_n$ مقادیر ثابت هستند، تابع ابتدائی میشود؟

انتگرالهای زیر را پیدا کنید:

۲۰۹۳ $\int \left(۱ - \frac{۲}{x}\right)^{۲} e^{x}\, dx$

۲۰۹۴ – $\int \left(۱ - \frac{۱}{x}\right) e^{-x}\, dx$

۲۰۹۵ – $\int \frac{e^{۲x}}{x^{۲} - ۳x + ۲}\, dx$

۲۰۹۶ – $\int \frac{xe^{x}}{(x+۱)^{۲}}\, dx$

۲۰۹۷ – $\int \frac{x^{۴} e^{۲x}}{(x-۲)^{۲}}\, dx$

مطلوبست تعیین انتگرالهای شامل توابع $\ln f(x)$، $\operatorname{arc\,tg} f(x)$، $\arcsin f(x)$، $\arccos f(x)$ که در آن $f(x)$ تابعی است جبری:

۲۰۹۸ – $\int \ln^{n} x\, dx$ (n عددیست طبیعی)

۲۰۹۹ – $\int x^{۳} ln^{۳} x\, dx$

۲۱۰۰ – $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{۳} dx$

۲۱۰۱ – $\int \ln\left[(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}\right] \times \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

۲۱۰۲ – $\int \ln^{۲}\left(x + \sqrt{۱ + x^{۲}}\right) dx$

۲۱۰۳ – $\int \ln\left(\sqrt{۱ - x} + \sqrt{۱ + x}\right) dx$

۲۱۰۴ – $\int \frac{\ln x}{(۱ + x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\, dx$

۲۱۰۵ – $\int x \operatorname{arc\,tg}(x + ۱)\, dx$

۲۱۰۶ – $\int \sqrt{x} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}\, dx$

۲۱۰۷ – $\int x \arcsin(۱ - x)\, dx$

۲۱۰۸ – $\int \arcsin \sqrt{x}\, dx$

۲۱۰۹ – $\int x \arccos \frac{۱}{x}\, dx$

۲۱۱۰ – $\int \arcsin \frac{۲\sqrt{x}}{۱ + x}\, dx$

۲۱۱۱ – $\int \frac{\arccos x}{(۱ - x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\, dx$

۲۱۱۲ – $\int \frac{x \arccos x}{(۱ - x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\, dx$

۲۱۱۳ - $\int x \operatorname{arc\,tg} x \ln(۱+x^۲)\,dx$

۲۱۱٤ - $\int x \ln\frac{۱+x}{۱-x}\,dx$

۲۱۱۵ - $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{۱+x^۲}\right)dx}{(۱+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

مطلوبست تعیین انتگرالهای شامل توابع هذلولی:

۲۱۱۶ - $\int \operatorname{sh}^۲ x \operatorname{ch}^۲ x\,dx$

۲۱۱۷ - $\int \operatorname{ch}^٤ x\,dx$

۲۱۱۸ - $\int \operatorname{sh}^۳ x\,dx$

۲۱۱۹ - $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} ۲x \operatorname{sh} ۳x\,dx$

۲۱۲۰ - $\int \operatorname{th} x\,dx$

۲۱۲۱ - $\int \operatorname{cth}^۲ x\,dx$

۲۱۲۲ - $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\,dx$

۲۱۲۳ - $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + ۲\operatorname{ch} x}$

۲۱۲۳,۱ - $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^۲ x - ٤\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + ۹\operatorname{ch}^۲ x}$

۲۱۲۳,۲ - $\int \frac{dx}{۰,۱ + \operatorname{ch} x}$

۲۱۲۳,۳ - $\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{۳\operatorname{sh} x - ٤\operatorname{ch} x}$

۲۱۲٤ - $\int \operatorname{sh} ax \sin bx\,dx$

۲۱۲۵ - $\int \operatorname{sh} ax \cos bx\,dx$

بخش ۶ — مثالهای مختلف انتگرال گیری توابع

انتگرالهای زیر را تعیین کنید:

۲۱۲۶ - $\int \frac{dx}{x^۶(۱+x^۲)}$

۲۱۲۷ - $\int \frac{x^۲\,dx}{(۱-x^۲)^۳}$

۲۱۲۸ - $\int \frac{dx}{۱+x^٤+x^۸}$

۲۱۲۹ - $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}}$

۲۱۳۰ - $\int x^۲\sqrt{\frac{x}{۱-x}}\,dx$

۲۱۳۱ - $\int \frac{x+۲}{x^۲\sqrt{۱-x^۲}}\,dx$

۲۱۳۲ - $\int \sqrt{\frac{x}{۱-x\sqrt{x}}}\,dx$

۲۱۳۳ - $\int \frac{x^۵\,dx}{\sqrt{۱+x^۲}}$

۲۱۳٤ - $\int \frac{dx}{\sqrt[۳]{x^۲(۱-x)}}$

۲۱۳۵ - $\int \frac{dx}{x\sqrt{۱+x^۳+x^۶}}$

۲۱۳۶ - $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^٤-۲x^۲-۱}}$

۲۱۳۷ - $\int \frac{۱+\sqrt{۱-x^۲}}{۱-\sqrt{۱-x^۲}}\,dx$

۲۱۳۸ - $\int \frac{(۱+x)\,dx}{x+\sqrt{x+x^۲}}$

۲۱۳۹ - $\int \frac{\ln(۱+x+x^۲)}{(۱+x)^۲}\,dx$

۲۱۴۰ - $\int (۲x+۳)\arccos(۲x-۳)\,dx$

۲۱۴۱ - $\int x\ln(۴+x^۴)\,dx$

۲۱۴۲ - $\int \frac{\arcsin x}{x^۲}\times\frac{۱+x^۲}{\sqrt{۱-x^۲}}\,dx$

۲۱۴۳ - $\int \frac{x\ln(۱+\sqrt{۱+x^۲})}{\sqrt{۱+x^۲}}\,dx$

۲۱۴۴ - $\int x\sqrt{x^۲+۱}\,\ln\sqrt{x^۲-۱}\,dx$

۲۱۴۵ - $\int \frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}\ln\frac{x}{\sqrt{۱-x}}\,dx$

۲۱۴۶ - $\int \frac{dx}{(۲+\sin x)^۲}$

۲۱۴۷ - $\int \frac{\sin ۴x}{\sin^۸ x+\cos^۸ x}\,dx$

۲۱۴۸ - $\int \frac{dx}{\sin\sqrt{۱+\cos x}}$

۲۱۴۹ - $\int \frac{ax^۲+b}{x^۲+۱}\operatorname{arc\,tg} x\,dx$

۲۱۵۰ - $\int \frac{ax^۲+b}{x^۲-۱}\ln\left|\frac{x-۱}{x+۱}\right|dx$

۲۱۵۱ - $\int \frac{x\ln x}{(۱+x^۲)^۲}\,dx$

۲۱۵۲ - $\int \frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{۱+x^۲}}\,dx$

۲۱۵۳ - $\int \frac{\sin ۲x}{\sqrt{۱+\cos^۴ x}}\,dx$

۲۱۵۴ - $\int \frac{x^۳\arccos x}{\sqrt{۱-x^۲}}\,dx$

۲۱۵۵ - $\int \frac{x^۴\operatorname{arc\,tg} x}{۱+x^۲}\,dx$

۲۱۵۶ - $\int \frac{x\operatorname{arc\,ctg} x}{(۱+x^۲)^۲}\,dx$

۲۱۵۷ - $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{۱+x^۲})}{(۱-x^۲)^۲}\,dx$

۲۱۵۸ - $\int \sqrt{۱-x^۲}\arcsin x\,dx$

۲۱۵۹ - $\int x(۱+x^۲)\operatorname{arc\,ctg} x\,dx$

۲۱۶۰ - $\int x^x(۱+\ln x)\,dx$

۲۱۶۱ - $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx$

۲۱۶۲ - $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{۲}}}{e^{\frac{x}{۲}}(۱+e^x)}\,dx$

۲۱۶۳ - $\int \frac{dx}{(e^{x+۱}+۱)^۲-(e^{x-۱}+۱)^۲}$

۲۱۶۴ - $\int \sqrt{\operatorname{th}^۲ x+۱}\,dx$

۲۱۶۵ - $\int \frac{۱+\sin x}{۱+\cos x}\times e^x\,dx$

۲۱۶۶ - $\int |x|\,dx$

۲۱۶۷ - $\int x|x|\,dx$

۲۱۶۸ - $\int (x+|x|)^۲\,dx$

۲۱۶۹ - $\int \{|۱+x|-|۱-x|\}\,dx$

۲۱۷۰ - $\int e^{-|x|}\,dx$

۲۱۷۱ - $\int \max(۱,\, x^۲)\,dx$

۲۱۷۲ – $\int \varphi(x)\,dx$ که در آن $\varphi(x)$ فاصلهٔ عدد x تا نزدیکترین عدد درست است.

۲۱۷۳ – $\int [x]\,|\sin \pi x|\,dx \quad (x \geqslant ۰)$

۲۱۷۴ – $\int f(x)\,dx$ که در آن

$$f(x)=\begin{cases} ۱-x^{۲} & \text{بازای} \quad |x|\leqslant ۱ \\ ۱-|x| & \text{بازای} \quad |x|>۱ \end{cases}$$

۲۱۷۵ – $\int f(x)\,dx$ که در آن

$$f(x)=\begin{cases} ۱\,, & \text{اگر} \quad -\infty<x<۰ \\ x+۱, & \text{اگر} \quad ۰\leqslant x\leqslant ۱ \\ ۲x\,, & \text{اگر} \quad ۱<x<+\infty \end{cases}$$

۲۱۷۶ – مطلوبست محاسبهٔ $\int x f''(x)\,dx$

۲۱۷۷ – مطلوبست محاسبهٔ $\int f'(۲x)\,dx$

۲۱۷۸ – مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$ اگر $f'(x^{۲})=\frac{۱}{x} \quad (x>۰)$

۲۱۷۹ – مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$ اگر $f'(\sin^{۲} x)=\cos^{۲} x$

۲۱۸۰ – مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$ اگر

$$f'(\ln x)=\begin{cases} ۱, & \text{بازای} \quad ۰<x\leqslant ۱ \\ x, & \text{بازای} \quad ۱<x<+\infty \end{cases}$$

و $f(۰)=۰$

۲۱۸۰٫۱ – هرگاه $f(x)$ تابع پیوستهٔ یکنوا و $f^{-۱}(x)$ تابع معکوس آن باشد ثابت کنید که اگر

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

در آنصورت

$$\int f^{-۱}(x)\,dx=xf^{-۱}(x)-F(f^{-۱}(x))+C$$

مثالهای: الف) $f(x)=x^{n}$ $(n>۰)$ ؛ ب) $f(x)=e^{x}$ ؛ پ) $f(x)=\arcsin x$ ؛ ت) $f(x)=\operatorname{Ar\,th} x$ را در نظر بگیرید.

فصل ٤

انتگرالهای معین

بخش ۱ — انتگرال معین بعنوان حد مجموع

بند ۱ — انتگرال بمعنای ریمن. اگر تابع $f(x)$ روی $[a, b]$ معین و $a = x_۰ < x_۱ < x_۲ < \ldots < x_n = b$ باشد در آنصورت انتگرال تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ عبارتست از عدد

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \to ۰} \sum_{i=۰}^{n-۱} f(\xi_i)\,\Delta x_i \qquad (۱)$$

که در آن $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+۱}$ و $\Delta x_i = x_{i+۱} - x_i$

برای وجود حد (۱) لازم و کافی است که مجموع انتگرال پائین

$$\underline{S} = \sum_{i=۰}^{n-۱} m_i\,\Delta x_i$$

و مجموع انتگرال بالای

$$\overline{S} = \sum_{i=۰}^{n-۱} M_i\,\Delta x_i$$

که در آن

$$M_i = \sup_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+۱}} f(x) \quad \text{و} \quad m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+۱}} f(x)$$

بازای $\max|\Delta x_i| \to ۰$ دارای حد مشترک باشند.

تابع $f(x)$ که بازای آن حد طرف راست تساوی (۱) وجود دارد انتگرال‌پذیر (ویژه) روی فاصلهٔ نظیر نامند. بالاخص: الف) تابع پیوسته ؛ ب) تابع کراندار که دارای تعداد متناهی نقاط انفصال است ؛ پ) تابع کراندار یکنوا، روی هر فاصلهٔ متناهی دلخواه انتگرال‌پذیر میباشد. اگر تابع $f(x)$

روی قطعهٔ $[a, b]$ کراندار نباشد ، در آنصورت روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ویژه نیست .

بند ۲ — شرط انتگرال‌پذیری . شرط لازم و کافی انتگرال پذیری تابع $f(x)$ روی قطعهٔ مفروض $[a, b]$ عبارتست از برآورده شدن تساوی

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \to ۰} \sum_{i=۰}^{n-۱} \omega_i \Delta x_i = ۰$$

که در آن ω_i نوسان تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[x_i, x_{i+۱}]$ است .

۲۱۸۱ – مجموع انتگرال S_n را برای تابع

$$f(x) = ۱ + x$$

روی قطعهٔ $[-۱, ۴]$ با تقسیم آن به n فاصلهٔ متساوی و انتخاب مقدار آرگومان ξ_i $(i = ۰, ۱, \ldots, n - ۱)$ در وسط این فواصل پیدا کنید .

۲۱۸۲ – بازای تابع مفروض $f(x)$ مطلوبست تعیین مجموع انتگرال‌های پائین $\underline{S}_n$ و بازای $\overline{S}_n$ روی قطعات نظیر با تقسیم آنها به n قسمت متساوی در صورتیکه :

الف) $[-۲ \leqslant x \leqslant ۳]$ $f(x) = x^۳$ ؛

ب) $[۰ \leqslant x \leqslant ۱]$ $f(x) = \sqrt{x}$ ؛

پ) $[۰ \leqslant x \leqslant ۱۰]$ $f(x) = ۲^x$.

۲۱۸۳ – مجموع انتگرال پائین را برای تابع $f(x) = x^۴$ روی قطعهٔ $[۱, ۲]$ با تقسیم این قطعه به n بخش بطوریکه طول آنها یک تصاعد هندسی تشکیل دهند، پیدا کنید . حد این مجموع بازای $n \to \infty$ چقدر است ؟

۲۱۸۴ – از روی تعریف انتگرال مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_۰^T (v_۰ + gt)\, dt$$

که در آن $v_۰$ و g مقادیر ثابتی می‌باشند .

با در نظر گرفتن انتگرالهای معین زیر بعنوان مجموع انتگرالهای نظیر ، آنها را از طریق تقسیم مناسب فاصلهٔ انتگرال‌گیری حساب کنید :

۲۱۸۵ – $\int_{-۱}^{۲} x^۲\, dx$

۲۱۸۶ – $\int_۰^۱ a^x\, dx \quad (a > ۰)$

۲۱۸۷ – $\int\limits_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\, dx$

۲۱۸۹ – $\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x^{۲}} \quad (۰ < a < b)$

۲۱۸۸ – $\int\limits_{۰}^{x} \cos t\, dt$

<u>راهنمايي</u> – فرض کنید $(i = ۰,\ ۱,\ \ldots,\ n)$ $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+۱}}$

۲۱۹۰ – $\int\limits_{a}^{b} x^m\, dx \quad (m \neq -۱ \ ؛ \ ۰ < a < b)$

<u>راهنمايي</u> – نقاط تقسیم را قسمی انتخاب کنید که طولهای x_i آنها تصاعد هندسی تشکیل دهند.

۲۱۹۱ – $\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x} (۰ < a < b)$

۲۱۹۲ – انتگرال پواسون

$$\int\limits_{۰}^{\pi} \ln(۱ - ۲\alpha\cos x + \alpha^{۲})\, dx$$

را بازای : الف) $|\alpha| < ۱$ ؛ ب) $|\alpha| > ۱$ حساب کنید.

<u>راهنمائي</u> – از تجزیهٔ چندجمله‌ای $\alpha^{۲n} - ۱$ به عامل های درجه دوم استفاده کنید.

۲۱۹۳ – هرگاه توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته باشند ثابت کنید که

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \to ۰} \sum_{i=۰}^{n-۱} f(\xi_i)\,\varphi(\theta_i)\,\Delta x_i = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,\varphi(x)\, dx$$

که در آن $(i = ۰,\ ۱,\ \ldots,\ n-۱)$ $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+۱}$ ، $x_i \leqslant \theta_i \leqslant x_{i+۱}$
و $\Delta x_i = x_{i+۱} - x_i \quad (x_n = b,\ x_۰ = a)$

۲۱۹۳,۱ – هرگاه $f(x)$ روی $[۰, ۱]$ کراندار و یکنوا باشد ثابت کنید که

$$\int\limits_{۰}^{۱} f(x)\, dx - \frac{۱}{n} \sum_{k=۱}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{۱}{k}\right)$$

۲۱۹۳,۲ – هرگاه تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ کراندار و محدب بطرف بالا (۱۳۱۲ را ببینید) باشد ثابت کنید که

$$(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{۲} \leqslant \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx \leqslant (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{۲}\right)$$

۲۱۹۳,۳ – فرض کنیم $f(x) \in C^{(۲)}[۱, +\infty]$ و $f(x) \geqslant ۰,\ f'(x) \geqslant ۰,\ f''(x) \leqslant ۰$
بازای $x \in [۱, +\infty)$
ثابت کنید که

$$\sum_{k=۱}^{n} f(k) = \frac{۱}{۲} f(n) + \int_{۱}^{n} f(x)\,dx + O(۱)$$

بازای $n \to \infty$.

۲۱۹۳,٤ – هرگاه $f(x) \in C^{(۱)}[a, b]$ و

$$\Delta_n = \int_{a}^{b} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=۱}^{n} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right)$$

مطلوبست محاسبهٔ $\lim\limits_{n \to \infty} n\,\Delta n$

۲۱۹٤ – نشان دهید که تابع ناپیوستهٔ

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$$

روی فاصلهٔ $[۰, ۱]$ انتگرال پذیر است .

۲۱۹۵ – نشان دهید که تابع ریمن

$$\varphi(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } x \text{ گنگ‌است} \\ \dfrac{۱}{n}, & \text{اگر } x = \dfrac{m}{n} \end{cases}$$

که درآن n, m $(n \geqslant ۱)$ اعداد درست نسبت بهم اول می‌باشند روی هر فاصلهٔ دلخواه متناهی انتگرال‌پذیر است .

۲۱۹۶ – نشان دهید که تابع

$$f(x) = \frac{۱}{x} - \left[\frac{۱}{x}\right] \quad \text{اگر} \quad x \neq ۰$$

و $f(۰) = ۰$ روی قطعهٔ $[۰, ۱]$ انتگرال‌پذیر است .

۲۱۹۷ – ثابت کنید که تابع دیریکله

$$\chi(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } x \text{ گنگ است} \\ ۱, & \text{اگر } x \text{ گویا است} \end{cases}$$

روی هر فاصلهٔ اختیاری انتگرال‌پذیر نیست .

۲۱۹۸ – فرض کنیم تابع $f(x)$ روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد و

$$f_n(x) = \sup f(x) \quad \text{بازای} \quad x_i \leqslant x < x_{i+۱}$$

که در آن

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b - a) \quad (i = ۰, ۱, \dots, n; \quad n = ۱, ۲, \dots)$$

ثابت کنید که

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

۲۱۹۹ – ثابت کیند که اگر تابع $f(x)$ روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد در آنصورت دنبالهٔ توابع پیوستهٔ $\varphi_n(x) \quad (n = ۱, ۲, \dots)$ وجود دارد بطوری که

$$\int_a^c f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^c \varphi_n(x)\, dx \quad \text{بازای} \quad a \leqslant c \leqslant b$$

۲۲۰۰ – ثابت کنید که اگر تابع کراندار $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد در آنصورت قدر مطلق آن $|f(x)|$ نیز روی $[a, a]$ انتگرال‌پذیر است، ضمناً

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$$

۲۲۰۱ – فرض کنیم تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ مطلقاً انتگرال‌پذیر یعنی انتگرال $\int_a^b |f(x)|\, dx$ وجود داشته باشد. آیا این تابع روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است ؟

مثال

$$f(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } x \text{ گویا است} \\ -۱, & \text{اگر } x \text{ گنگ است} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید .

۲۲۰۲ – هرگاه تابع $f(x)$ بازای $[a, b]$ انتگرال‌پذیر و $A \leqslant f(x) \leqslant B$ روی $a \leqslant x \leqslant b$ و تابع $\varphi(x)$ روی قطعهٔ $[A, B]$ معین و پیوسته باشد ثابت کنید که تابع $\varphi(f(x))$ روی $[a, b]$ انتگرال‌پذپر است .

۲۲۰۳ – اگر توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ انتگرال‌پذیر باشند در آنصورت آیا حتماً تابع $f(\varphi(x))$ نیز انتگرال‌پذیر است ؟

مثال

$$f(x) = \begin{cases} ۰, & x = ۰ \quad \text{اگر} \\ ۱, & x \neq ۰ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

و تابع ریمن $\varphi(x)$ (مسالهٔ **۲۱۹۵** را ببینید) را در نظر بگیرید .

۲۲۰۴ – فرض کنیم تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[A, B]$ انتگرال‌پذیر باشد ثابت کنید که تابع $f(x)$ دارای خاصیت پیوستگی انتگرال می‌باشد ، یعنی

$$\lim_{h \to ۰} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|\, dx = ۰$$

که در آن $[a, b] \subset [A, B]$.

۲۲۰۵ – فرض کنیم تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد . ثابت کنید که تساوی

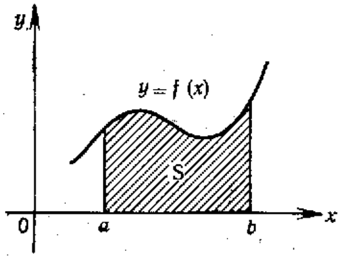
$$\int_a^b f^{۲}(x)\, dx = ۰$$

وقتی و فقط وقتی برقرار است که در جمیع نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ متعلق به قطعهٔ $[a, b]$ ، $f(x) = ۰$ باشد .

بخش ۲ – محاسبهٔ انتگرالهای معین بکمک انتگرالهای نامعین

بندا – دستور نیوتن – لاینیتز . اگر تابع $f(x)$ در قطعهٔ $[a, b]$ معین و پیوسته و $F(x)$ تابع اولیهٔ آن باشد ، یعنی $F'(x) = f(x)$ در آنصورت

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$



شکل ۹

انتگرال معین $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ بازای $f(x) \geqslant ۰$ از لحاظ هندسی عبارتست از مساحت S محدود به منحنی $y = f(x)$ ، محور Ox و دو عمود بر محور Ox: $x = a$ و $x = b$ (شکل ۹) .

بند ۲ — دستور انتگرال گیری جزء به جزء . اگر $f(x),\ g(x) \in C^{(۱)}[a, b]$ در اینصورت

$$\int_{a}^{b} f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} g(x)\,f'(x)\,dx$$

بند ۳ — تعویض متغیر . اگر : ۱) تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد ؛ ۲) تابع $\varphi(t)$ و مشتق‌آن $\varphi'(t)$ هر دو روی قطعهٔ $[\alpha, \beta]$ که در آن $a = \varphi(\alpha)$ و $b = \varphi(\beta)$ پیوسته باشند ؛ ۳) تابع مرکب $f(\varphi(t))$ روی $[\alpha, \beta]$ معین و پیوسته باشد در آنصورت

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

با کاربرد دستور نیوتن — لایبنیتز انتگرالهای معین زیر را پیدا کنید و مساحت‌های منحنی‌الخط نظیر آنها را رسم کنید :

۲۲۰۶ — $\int_{-۱}^{۸} \sqrt[۳]{x}\,dx$

۲۲۰۷ — $\int_{۰}^{\pi} \sin x\,dx$

۲۲۰۸ — $\int_{\frac{۱}{\sqrt{۳}}}^{\sqrt{۳}} \frac{dn}{۱ + x^{۲}}$

۲۲۰۹ — $\int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} \frac{dn}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$

۲۲۱۰ — $\int_{\mathrm{sh}۱}^{\mathrm{sh}۳} \frac{dx}{\sqrt{۱ + x^{۲}}}$

۲۲۱۱ — $\int_{۰}^{۲} |۱ - x|\,dx$

۲۲۱۲ — $(۰ < \alpha < \pi)$ $\int_{-۱}^{۱} \frac{dx}{x^{۲} - ۲x\cos\alpha + ۱}$

۲۲۱۳ — $(۰ \leqslant \varepsilon < ۱)$ $\int_{۰}^{۲\pi} \frac{dx}{۱ - \varepsilon\cos x}$

۲۲۱۴ − $(ab>۰ \ ،|b|<۱ \ ،|a|<۱)$ $\displaystyle\int_{-۱}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{(۱-۲ax+a^۲)(۱-۲bx+b^۲)}}$

۲۲۱۵ − $(ab \neq ۰)$ $\displaystyle\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{dx}{a^۲ \sin^۲ x + b^۲ \cos^۲ x}$

۲۲۱۶ − توضیح دهید چرا کاربرد اسمی دستور نیوتن ـ لایبنیتز در مسائل زیر موجب نتایج نادرستی می‌شود :

الف) $\displaystyle\int_{-۱}^{۱} \frac{dx}{x}$ ؛ ب) $\displaystyle\int_{۰}^{۲\pi} \frac{\sec^۲ x\, dx}{۲+\operatorname{tg}^۲ x}$ ؛ پ) $\displaystyle\int_{-۱}^{۱} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{۱}{x}\right) dx$

۲۲۱۷ − مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_{-۱}^{۱} \frac{d}{dx}\left(\frac{۱}{۱+۲^{\frac{۱}{x}}}\right) dx$$

۲۲۱۸ − مطلوبست محاسبهٔ $\displaystyle\int_{۰}^{۱۰۰\pi} \sqrt{۱-\cos ۲x}\; dx$

بکمک انتگرالهای معین حد مجموعهای زیر را پیدا کنید :

۲۲۱۹ − $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{۱}{n^۲} + \frac{۲}{n^۲} + \ldots + \frac{n-۱}{n^۲}\right)$

۲۲۲۰ − $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \ldots + \frac{۱}{n+n}\right)$

۲۲۲۱ − $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^۲+۱^۲} + \frac{n}{n^۲+۲^۲} + \ldots + \frac{n}{n^۲+n^۲}\right)$

۲۲۲۲ − $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{۲\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-۱)\,\pi}{n}\right)$

۲۲۲۳ − $(p>۰)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{۱^p+۲^p+\ldots+n^p}{n^{p+۱}}$

۲۲۲۴ − $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\left(\sqrt{۱+\frac{۱}{n}} + \sqrt{۱+\frac{۲}{n}} + \ldots + \sqrt{۱+\frac{n}{n}}\right)$

۲۲۲۵ − $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

۲۲۲۶ − $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]$

با حذف یکنواخت بی‌نهایت کوچک‌های مراتب بالا حد مجموع های زیر را پیدا کنید :

۲۲۲۷ - $$\lim_{n \to \infty} \left[\left(۱ + \frac{۱}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n^۲} + \left(۱ + \frac{۲}{n}\right) \sin \frac{۲\pi}{n^۲} + \ldots + \left(۱ + \frac{n-۱}{n}\right) \sin \frac{(n-۱)\pi}{n^۲}\right]$$

۲۲۲۸ - $$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{\pi}{n} \times \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{۲ + \cos \frac{k\pi}{n}}$$

۲۲۲۹ - $$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{k=۱}^{n} \sqrt{(nx+k)(nx+k+۱)}}{n^۲} \quad (x > ۰)$$

۲۲۳۰ - $$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{۲^{\frac{۱}{n}}}{n+۱} + \frac{۲^{\frac{۲}{n}}}{n+\frac{۱}{۲}} + \ldots + \frac{۲^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{۱}{n}}\right)$$

۲۲۳۱ - مطلوبست محاسبهٔ

$$\frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^۲ \, dx, \qquad \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^۲ \, dx, \qquad \frac{d}{db} \int_a^b \sin x^۲ \, dx$$

۲۲۳۲ - مطلوبست محاسبهٔ :

الف) $\frac{d}{dx} \int_۰^{x^۲} \sqrt{۱ + t^۲} \, dt$ ؛ ب) $\frac{d}{dx} \int_{x^۲}^{x^۳} \frac{dt}{\sqrt{۱ + t^۴}}$ ؛

پ) $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos (\pi t^۲) \, dt$

۲۲۳۳ - مطلوبست محاسبهٔ :

الف) $\lim_{x \to ۰} \frac{\int_۰^x \cos x^۲ \, dx}{x}$ ؛ ب) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_۰^x (\text{arc tg}\, x)^۲ \, dx}{\sqrt{x^۲ + ۱}}$

پ) $\lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\int_۰^x e^{x^۲} dx\right)^۲}{\int_۰^x e^{۲x^۲} \, dx}$

۲۲۳۳,۱ – هرگاه $f(x)\in C[۰, +\infty]$ و $f(x)\to A$ بازای $x\to+\infty$ مطلوبست محاسبهٔ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{۰}^{۱} f(nx)\,dx$

۲۲۳۴ – ثابت کنید که

$$\int_{۰}^{x} e^{x^{۲}}\,dx \sim \frac{۱}{۲x}\,e^{x^{۲}}$$

بازای $x\to\infty$.

۲۲۳۵ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{x\to+۰}\frac{\int_{۰}^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\int_{۰}^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin x}\,dx}$$

۲۲۳۶ – هرگاه $f(x)$ تابع پیوستهٔ مثبتی باشد ثابت کنید که تابع

$$\varphi(x)=\frac{\int_{۰}^{x} t f(t)\,dt}{\int_{۰}^{x} f(t)\,dt}$$

بازای $x\geqslant ۰$ صعودی است .

۲۲۳۷ – مطلوبست محاسبهٔ :

الف) $\int_{۰}^{۲} f(x)\,dx$ اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲}, & \text{بازای}\quad ۰\leqslant x\leqslant ۱\\ ۲-x, & \text{بازای}\quad ۱<x\leqslant ۲\end{cases}$

ب) $\int_{۰}^{۱} f(x)\,dx$ اگر $f(x)=\begin{cases} x, & \text{بازای}\quad ۰\leqslant x\leqslant t\\ t\times\dfrac{۱-x}{۱-t}, & \text{بازای}\quad t\leqslant x\leqslant ۱\end{cases}$

۲۲۳۸ – مطلوبست محاسبه و رسم نمودار انتگرالهای $I=I(\alpha)$ با در نظر گرفتن آنها بعنوان تابعی از پارامتر α در صورتیکه :

الف) $I=\int_{۰}^{۱} x\,|x-\alpha|\,dx$ ؛ ب) $I=\int_{۰}^{\pi}\dfrac{\sin^{۲} x}{۱+۲\alpha\cos x+\alpha^{۲}}\,dx$ ؛

پ) $I=\int_{۰}^{\pi}\dfrac{\sin x\,dx}{\sqrt{۱-۲\alpha\cos x+\alpha^{۲}}}$

با کاربرد دستور انتگرال‌گیری جزء به جزء انتگرالهای معین زیر را پیدا کنید:

۲۲۳۹ـ $\int_{۰}^{\ln ۲} xe^{-x}\,dx$

۲۲۴۰ـ $\int_{۰}^{\pi} x\sin x\,dx$

۲۲۴۱ـ $\int_{۰}^{۲\pi} x^{۲}\cos x\,dx$

۲۲۴۲ـ $\int_{\frac{۱}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$

۲۲۴۳ـ $\int_{۰}^{۱} \operatorname{arc}\cos x\,dx$

۲۲۴۴ـ $\int_{۰}^{\sqrt{۳}} x\operatorname{arc}\operatorname{tg} x\,dx$

با کاربرد تعویض متغیر مناسبی انتگرالهای معین زیر را پیدا کنید:

۲۲۴۵ـ $\int_{-۱}^{۱} \frac{x\,dx}{\sqrt{۵-۴x}}$

۲۲۴۶ـ $\int_{۰}^{a} x^{۲}\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}\,dx$

۲۲۴۷ـ $\int_{۰}^{۰٫۷۵} \frac{dx}{(x+۱)\sqrt{x^{۲}+۱}}$

۲۲۴۸ـ $\int_{۰}^{\ln ۲} \sqrt{e^{x}-۱}\,dx$

۲۲۴۹ـ $\int_{۰}^{۱} \frac{\operatorname{arc}\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x(۱-x)}}\,dx$

۲۲۵۰ـ مطلوبست محاسبهٔ انتگرال $\int_{-۱}^{۱} \frac{۱+x^{۲}}{۱+x^{۴}}\,dx$ با فرض $x-\frac{۱}{x}=t$.

۲۲۵۱ـ توضیح دهید چرا تعویض اسمی x توسط $\varphi(t)$ در مسائل زیر موجب نتایج نا درستی می‌شود:

الف) $\int_{-۱}^{۱} dx$ که در آن $t=x^{\frac{۲}{۳}}$ ؛ ب) $\int_{-۱}^{۱} \frac{dx}{۱+x^{۲}}$ که درآن $x=\frac{۱}{t}$ ؛

پ) $\int_{۰}^{\pi} \frac{dx}{۱+\sin^{۲} x}$ که در آن $\operatorname{tg} x=t$

۲۲۵۲ـ آیا در انتگرال

$$\int_{۰}^{۳} x\sqrt[۳]{۱-x^{۲}}\,dx$$

می‌توان فرض نمود $x=\sin t$ ؟

۲۲۵۳ – آیا در انتگرال $\int_{۰}^{۱} \sqrt{۱ - x^{۲}}\, dx$ بازای تعویض متغیر $x = \sin t$ میتوان بعنوان حدود جدید اعداد π و $\frac{\pi}{۲}$ را اختیار نمود ؟

۲۲۵٤ – ثابت کنید که اگر $f(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته باشد در آنصورت

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = (b - a) \int_{۰}^{۱} f(a + (b - a)x)\, dx$$

۲۲۵۵ – تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\int_{۰}^{a} x^{۳} f(x^{۲})\, dx = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{a^{۲}} x f(x)\, dx \qquad (a > ۰)$$

۲۲۵٦ – هرگاه $f(x)$ روی قطعهٔ $[A, B] \supset [a, b]$ تابع پیوسته‌ای باشد مطلوبست محاسبهٔ

$$\frac{d}{dx} \int_{a}^{b} f(x + y)\, dy \qquad \text{بازای} \qquad A - a < x < B - b$$

۲۲۵۷ – ثابت کنید که اگر $f(x)$ روی $[۰, ۱]$ تابع پیوسته‌ای باشد دراینصورت :

الف) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(\sin x)\, dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(\cos x)\, dx$ ؛

ب) $\int_{۰}^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{۲} \int_{۰}^{\pi} f(\sin x)\, dx$

۲۲۵۸ – ثابت کنید که برای تابع $f(x)$ پیوسته روی $[-l, l]$ داریم :

۱) $$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = ۲ \int_{۰}^{l} f(x)\, dx$$

اگر تابع $f(x)$ زوج باشد و

۲) $$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = ۰$$

اگر تابع $f(x)$ فرد باشد . تعبیر هندسی این واقعیت را بیان کنید .

۲۲۵۹ – ثابت کنید که یکی از توابع اولیهٔ تابع زوج تابع فرد و هر تابع اولیهٔ تابع فرد تابع زوج است .

۲۲۶۰ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲} \left(۱ + x - \frac{۱}{x}\right) e^{x + \frac{۱}{x}}\, dx$$

با وارد کردن متغیر جدید

$$t = x + \frac{۱}{x}$$

۲۲۶۱ – در انتگرال

$$\int_{۰}^{۲\pi} f(x) \cos x\, dx$$

تعویض متغیر $\sin x = t$ را انجام دهید .

۲۲۶۲ – مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال

$$\int_{e^{-۲\pi n}}^{۱} \left| \left[\cos\left(\ln \frac{۱}{x}\right) \right] \right| dx$$

که در آن n عددیست طبیعی .

۲۲۶۳ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_{۰}^{\pi} \frac{x \sin x}{۱ + \cos^{۲} x}\, dx$$

۲۲۶۴ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int_{-۱}^{۳} \frac{f'(x)}{۱ + f^{۲}(x)}\, dx$$

که در آن

$$f(x) = \frac{(x+۱)^{۲}(x-۱)}{x^{۳}(x-۲)}$$

۲۲۶۵ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ بازای $-\infty < x < +\infty$ پیوسته و معین دوره‌ای به دورهٔ T باشد در آنصورت

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\, dx = \int_{۰}^{T} f(x)\, dx$$

که در آن a عدد دلخواهی است .

۲۲۶۶ – ثابت کنید که بازای n فرد توابع

$$F(x)=\int_{۰}^{x}\sin^{n}x\,dx \quad \text{و} \quad G(x)=\int_{۰}^{x}\cos^{n}x\,dx$$

دوره‌ای به دورهٔ ۲π و بازای n زوج هر یک از این توابع ، مجموعی از تابع خطی و تابع دوره‌ای است .

۲۲۶۷ – ثابت کنید که تابع

$$F(x)=\int_{x_{۰}}^{x}f(x)\,dx$$

که درآن $f(x)$ تابع پیوستهٔ دوره‌ای به دورهٔ T است در حالت کلی مجموع تابع خطی و تابع دوره‌ای به دوره T می‌باشد .

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۲۲۶۸ – $\int_{۰}^{۱}x(۲-x^{۲})^{۱۲}\,dx$

۲۲۶۹ – $\int_{-۱}^{۱}\frac{x\,dx}{x^{۲}+x+۱}$

۲۲۷۰ – $\int_{۱}^{e}(x\ln x)^{۲}\,dx$

۲۲۷۱ – $\int_{۱}^{۹}x\sqrt[۳]{۱-x}\,dx$

۲۲۷۲ – $\int_{-۲}^{-۱}\frac{dx}{x\sqrt{x^{۲}-۱}}$

۲۲۷۳ – $\int_{۰}^{۱}x^{۱۵}\sqrt{۱+۳x^{۸}}\,dx$

۲۲۷۴ – $\int_{۰}^{۳}\arcsin\sqrt{\frac{x}{۱+x}}\,dx$

۲۲۷۵ – $\int_{۰}^{۲\pi}\frac{dx}{(۲+\cos x)(۳+\cos x)}$

۲۲۷۶ – $\int_{۰}^{۲\pi}\frac{dx}{\sin^{۴}x+\cos^{۴}x}$

۲۲۷۷ – $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin x\sin ۲x\sin ۳x\,dx$

۲۲۷۸ – $\int_{۰}^{\pi}(x\sin x)^{۲}\,dx$

۲۲۷۹ – $\int_{۰}^{\pi}e^{x}\cos^{۲}x\,dx$

۲۲۸۰ – $\int_{۰}^{\ln ۲}\operatorname{sh}^{۴}x\,dx$

بکمک دستورهای کاهشی انتگرال‌های وابسته به پارامتر n را که مقادیر درست مثبت را اختیار می‌کند حساب کنید :

۲۲۸۱ – $I_n=\int\limits_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin^n x\,dx$

۲۲۸۲ – $I_n=\int\limits_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos^n x\,dx$

۲۲۸۳ – $I_n=\int\limits_{۰}^{\frac{\pi}{٤}}\operatorname{tg}^{۲n} x\,dx$

۲۲۸٤ – $I_n=\int\limits_{۰}^{۱}(۱-x^۲)^n\,dx$

۲۲۸۵ – $I_n=\int\limits_{۰}^{۱}\frac{x^۲\,dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$

۲۲۸٦ – $I_n=\int\limits_{۰}^{۱}x^m(\ln x)^n\,dx$

۲۲۸۷ – $I_n=\int\limits_{۰}^{\frac{\pi}{٤}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{۲n+۱}dx$

اگر $f(x)=f_۱(x)+if_۲(x)$ تابعی مختلطی از متغیر حقیقی x باشد که در آن $f_۱(x)=\operatorname{Re} f(x)$ و $f_۲(x)=Im\, f(x)$ و $i=\sqrt{-۱}$ در آنصورت بنا به تعریف فرض میشود :

$$\int f(x)\,dx=\int f_۱(x)\,dx+i\int f_۲(x)\,dx$$

واضح است که

$$\operatorname{Re}\int f(x)\,dx=\int \operatorname{Re} f(x)\,dx$$

و

$$Im\int f(x)\,dx=\int Im\, f(x)\,dx$$

۲۲۸۸ – با استفاده از دستور اولر

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

نشان دهید که

$$\int\limits_{۰}^{۲\pi}e^{inx}e^{-imx}\,dx=\begin{cases}۰, & \text{اگر}\quad m\neq n\\ ۲\pi, & \text{اگر}\quad m=n\end{cases}$$

(n و m اعداد درستند) .

۲۲۸۹ – نشان دهید که

$$\int\limits_{a}^{b}e^{(\alpha+i\beta)x}\,dx=\frac{e^{b(\alpha+i\beta)}-e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta}$$

(α و β مقادیر ثابت می‌باشند) .

با استفاده از دستورهای اولر

$$\sin x = \frac{۱}{۲i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad ، \quad \cos x = \frac{۱}{۲}(e^{ix} + e^{-ix})$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر (m و n اعداد درست مثبتی می‌باشند) :

۲۲۹۰ – $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۲m} x \cos^{۲n} x \, dx$

۲۲۹۱ – $\int_{۰}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$

۲۲۹۲ – $\int_{۰}^{\pi} \frac{\cos(۲n+۱)x}{\cos x} dx$

۲۲۹۳ – $\int_{۰}^{\pi} \cos^n x \cos nx \, dx$

۲۲۹٤ – $\int_{۰}^{\pi} \sin^n x \sin nx \, dx$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر (n عددیست طبیعی) :

۲۲۹۵ – $\int_{۰}^{\pi} \sin^{n-۱}x \cos(n+۱)x \, dx$

۲۲۹۶ – $\int_{۰}^{\pi} \cos^{n-۱}x \sin(n+۱)x \, dx$

۲۲۹۷ – $\int_{۰}^{۲\pi} e^{-ax} \cos^{۲n} x \, dx$

۲۲۹۸ – $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \ln \cos x \times \cos ۲nx \, dx$

۲۲۹۹ – با کاربرد مکرر انتگرال‌گیری جز به جز مطلوبست محاسبهٔ انتگرال اولر: $B(m, n) = \int_{۰}^{۱} x^{m-۱}(۱-x)^{n-۱} dx$ که در آن m و n اعداد درست مثبت می‌باشد .

۲۳۰۰ – چندجمله‌ای لژاندر $P_n(x)$ با دستور زیر تعریف می‌شود :

$$P_n(x) = \frac{۱}{۲^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^۲ - ۱)^n] \quad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$$

ثابت کنید که

$$\int_{-۱}^{۱} P_m(x) P_n(x) \, dx = \begin{cases} ۰ , & \text{اگر} \quad m \neq n \\ \frac{۲}{۲n+۱} , & \text{اگر} \quad m = n \end{cases}$$

۲۳۰۱ – هرگاه تابع $f(x)$ روی $[a, b]$ انتگرال‌ویژه‌پذیر و $F(x)$ تابعی باشد که $F'(x) = f(x)$ در همه جای $[a, b]$ سوای احتمالا تعداد متناهی نقاط داخلی آن ، $c_i (i = ۱, ۲, \ldots p)$ و سوای نقاط انفصال نوع اول a, b از $F(x)$ (تعمیم یافته تابع اولیهٔ) . ثابت کنید که

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-۰) - F(a+۰) - \sum_{i=۱}^{p} [F(c_i+۰) - F(c_i-۰)]$$

۲۳۰۲ – هرگاه تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ انتگرال‌ویژه‌پذیر و

$$F(x) = C + \int_a^x f(\xi)\,d\xi$$

انتگرال نامعین آن باشد.

ثابت کنید که تابع $F(x)$ پیوسته است و در جمیع نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ تساوی زیر برقرار است:

$$F'(x) = f(x)$$

در بارهٔ مشتق تابع $F(x)$ در نقاط انفصال تابع $f(x)$ چه میتوان گفت؟ مثالهای زیر را در نظر بگیرید:

الف) $f\left(\frac{۱}{n}\right) = ۱ \quad (n = \pm۱, \pm۲, \dots)$ و $f(x) = ۰$ بازای $x \neq \frac{۱}{n}$؛

ب) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

انتگرالهای نامعین توابع کراندار ناپیوستهٔ زیر را پیدا کنید:

۲۳۰۳ – $\int \operatorname{sgn} x\,dx$

۲۳۰۴ – $\int \operatorname{sgn}(\sin x)\,dx$

۲۳۰۵ – $\int [x]\,dx \quad (x \geqslant ۰)$

۲۳۰۶ – $\int x[x]\,dx \quad (x \geqslant ۰)$

۲۳۰۷ – $\int (-۱)^{[x]}\,dx$

۲۳۰۸ – $\int_۰^x f(x)\,dx$ که در آن $f(x) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر} \quad |x| < l \\ ۰, & \text{اگر} \quad |x| > l \end{cases}$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای معین توابع کراندار ناپیوستهٔ زیر:

۲۳۰۹ – $\int_۰^۳ \operatorname{sgn}(x - x^۳)\,dx$

۲۳۱۰ – $\int_۰^۲ [e^x]\,dx$

۲۳۱۱ – $\int_۰^۶ [x]\sin\frac{\pi x}{۶}\,dx$

۲۳۱۲ – $\int_۰^\pi x\operatorname{sgn}(\cos x)\,dx$

۲۳۱۳ – $\int_۱^{n+۱} \ln [x]\,dx$ که در آن n عددیست طبیعی.

۲۳۱۴ – $\int_۰^۱ \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\,dx$

۲۳۱۵ – مطلوبست محاسبهٔ $\int_E |\cos x|\sqrt{\sin x}\, dx$ که در آن E مجموعه ایست از آن مقادیر قطعهٔ $[۰, ۴\pi]$ که بازای آنها عبارت زیر علامت انتگرال دارای معناست .

بخش ۳ – قضایای میانگین

بند ۱ – مقدار میانگین تابع . عدد

$$M[f] = \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

مقدار میانگین تابع $f(x)$ روی فاصلهٔ $[a, b]$ نامیده میشود .

اگر تابع $f(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته باشد در آنصورت نقطهٔ $c \in (a, b)$ یافت میشود چنان که

$$M[f] = f(c)$$

بند ۲ – قضیهٔ اول میانگین . اگر : ۱) تابع های $f(x)$ و $\varphi(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ کراندار و متناظراً انتگرال‌پذیر باشند ؛ ۲) تابع $\varphi(x)$ بازای $a < x < b$ تغییر علامت ندهد در آنصورت

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

که در آن $m \leqslant \mu \leqslant M$ و $m = \inf\limits_{a<x<b} f(x)$ ، $M = \sup\limits_{a<x<b} f(x)$ ؛ ۳) بعلاوه اگر تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد در آنصورت $\mu = f(c)$ که در آن $a \leqslant c \leqslant b$.

بند ۳ – قضیهٔ دوم میانگین . اگر : ۱) توابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ کراندار و انتگرال‌ویژه‌پذیر باشند ؛ ۲) تابع $\varphi(x)$ بازای $a < x < b$ یکنوا باشد در آنصورت

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a+۰)\int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b-۰)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

که در آن $a \leqslant \xi \leqslant b$ ؛ ۳) بعلاوه اگر تابع $\varphi(x)$ بطور یکنوا نزولی (بمعنای وسیع) و نامنفی باشد در آنصورت

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a+۰)\int_a^\xi f(x)\,dx \quad (a\leqslant\xi\leqslant b)$$

۳,۱) اگر تابع $\varphi(x)$ بطور یکنوا صعودی (بمعنای وسیع) و نامنفی باشد در آنصورت

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(b-۰)\int_\xi^b f(x)\,dx \quad (a\leqslant\xi\leqslant b)$$

۲۳۱۶ – علامت‌های انتگرال‌های معین زیر را تعیین کنید :

الف) $\int_۰^{۲\pi} x\sin x\,dx$ ؛ ب) $\int_۰^{۲\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ ،

پ) $\int_{-۲}^{۲} x^۳\,۲^x\,dx$ ؛ ث) $\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} x^۲\ln x\,dx$

۲۳۱۷ – کدام انتگرال بزرگ‌تر است :

الف) $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{۱۰} x\,dx$ یا $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۲ x\,dx$ ؟

ب) $\int_۰^{۱} e^{-x}\,dx$ یا $\int_۰^{۱} e^{-x^۲}\,dx$ ؟

پ) $\int_۰^{\pi} e^{-x^۲}\cos^۲ x\,dx$ یا $\int_{\pi}^{۲\pi} e^{-x^۲}\cos^۲ x\,dx$ ؟

۲۳۱۸ – مقدار میانگین توابع مفروض را در فواصل داده شده تعیین کنید .

الف) $f(x)=x^۲$ روی $[۰,\ ۱]$ ؛

ب) $f(x)=\sqrt{x}$ روی $[۰,\ ۱۰۰]$ ؛

پ) $f(x)=۱۰+۲\sin x+۳\cos x$ روی $[۰,\ ۲\pi]$ ؛

ت) $f(x)=\sin x\sin(x+\varphi)$ روی $[۰,\ ۲\pi]$

۲۳۱۹ – مقدار میانگین طول شعاع حامل کانونی بیضی زیر را پیدا کنید :

$$r=\frac{p}{۱-\varepsilon\cos\varphi} \quad (۰<\varepsilon<۱)$$

۲۳۲۰ – مطلوبست محاسبهٔ مقدار میانگین سرعت سقوط آزاد جسمی که سرعت اولیه‌اش $v_۰$ است .

۲۳۲۱ – شدت جریان متناوب طبق قانون

$$i = i_{۰} \sin\left(\frac{۲\pi t}{T} + \varphi\right)$$

تغییر میکند که در آن $i_{۰}$ دامنه ، t زمان و φ فاز اولیه می‌باشد . مطلوبست محاسبهٔ مقدار میانگین مجذور شدت جریان .

۲۳۲۱,۱ – هرگاه $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ و $f(x) \in C(۰, +\infty)$ مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{۱}{x} \int_{۰}^{x} f(x)\, dx$$

مثال $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ را در نظر بگیرید .

۲۳۲۲ – هرگاه

$$\int_{۰}^{x} f(t)\, dt = x f(\theta x)$$

مطلوبست محاسبهٔ θ در صورتیکه :

الف) $f(t) = t^n \quad (n > -۱)$ ؛

ب) $f(t) = \ln t$ ؛ پ) $f(t) = e^t$

$\lim\limits_{x \to ۰} \theta$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \theta$ چقدر است ؟

با استفاده از قضیهٔ اول میانگین مطلوبست برآورد انتگرال‌های زیر :

۲۳۲۳ – $\displaystyle\int_{۰}^{۲\pi} \frac{dx}{۱ + ۰,۵ \cos x}$

۲۳۲۴ – $\displaystyle\int_{۰}^{۱} \frac{x^{۹}}{\sqrt{۱ + x}}\, dx$

۲۳۲۵ – $\displaystyle\int_{۰}^{۱۰۰} \frac{e^{-x}}{x + ۱۰۰}\, dx$

۲۳۲۶ – تساویهای زیر را ثابت کنید :

الف) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_{۰}^{۱} \frac{x^n}{۱ + x}\, dx = ۰$ ؛ ب) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^n x\, dx = ۰$

۲۳۲۶,۱ – مطلوبست محاسبهٔ :

الف) $\lim\limits_{\varepsilon \to ۰} \int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\varepsilon x^{۳}+۱}$ ؛ ب) $\lim\limits_{\varepsilon \to +۰} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x}$

که در آن $a > ۰$ ، $b < ۰$ و $f(x) \in C[۰, ۱]$.

۲۳۲۷ – فرض کنیم $f(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته و $\varphi(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) دیفرانسیل‌پذیر باشد ، ضمناً

$$\varphi'(x) \geqslant ۰ \quad \text{بازای} \quad a < x < b$$

با کاربرد انتگرال‌گیری جز به جز و استفاده از قضیهٔ اول میانگین ، قضیهٔ دوم میانگین را اثبات کنید .

با استفاده از قضیهٔ دوم میانگین مطلوبست برآورد انتگرال‌های زیر :

۲۳۲۸ – $\int_{۱۰۰\pi}^{۲۰۰\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

۲۳۲۹ – $\int_{a}^{b} \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x \, dx \quad (\alpha \geqslant ۰ \quad ۰ < a < b)$

۲۳۳۰ – $\int_{a}^{b} \sin x^{۲} \, dx \quad (۰ < a < b)$

۲۳۳۱ – هرگاه توابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ و مجذورهای آنها روی فاصلهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشند نامساوی کوشی – بونیاکوسکی را اثبات کنید :

$$\left\{ \int_{a}^{b} \varphi(x) \psi(x) \, dx \right\}^{۲} \leqslant \int_{a}^{b} \varphi^{۲}(x) \, dx \int_{a}^{b} \psi^{۲}(x) \, dx$$

۲۳۳۲ – فرض کنیم تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ پیوستهٔ دیفرانسیال‌پذیر باشد و $f(a) = ۰$. نامساوی

$$M^{۲} \leqslant (b-a) \int_{a}^{b} f'^{۲}(x) \, dx$$

را ثابت کنید که در آن

$$M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$$

۲۳۳۳ – تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\lim_{n \to \infty} \int_{n}^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = ۰ \quad (p > ۰)$$

بخش ۴ — انتگرالهای ناویژه

بندا — انتگرال ناویژه پذیری توابع . اگر تابع $f(x)$ روی هر قطعهٔ متناهی $[a, b]$ انتگرال ویژه‌پذیر باشد در آنصورت بنا به تعریف فرض می‌شود

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx \qquad (۱)$$

اگر تابع $f(x)$ در همسایگی نقطهٔ b ناکراندار و روی هر قطعهٔ $[a, b-\varepsilon]$ $(\varepsilon > ۰)$ انتگرال ویژه پذیر باشد در آنصورت

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to ۰} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad (۲)$$

اختیار می‌شود . اگر حدود (۱) یا (۲) وجود داشته باشند در آنصورت انتگرال‌های نظیر را همگرا و در حالت عکس واگرا نامند .

بند ۲ — آزمون (معیار) کوشی . برای همگرایی انتگرال (۱) لازم و کافی است که بازای $\varepsilon > ۰$ دلخواه عدد $b = b(\varepsilon)$ وجود داشته باشد چنان که بازای $b' > b$ و $b'' > b$ دلخواه نامساوی زیر بر قرار باشد :

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

بطرز مشابهی آزمون کوشی برای انتگرال نوع (۲) بیان میگردد .

بند ۳ — نشانهٔ همگرایی مطلق اگر $|f(x)|$ انتگرال ناویژه‌پذیر باشد در آنصورت انتگرال‌های نظیر (۱) یا (۲) از تابع $f(x)$ را مطلقاً همگرا نامند و همگرایی انتگرالها بدیهی است .

نشانهٔ مقایسهٔ I . فرض کنیم $|f(x)| \leqslant F(x)$ بازای $x \geqslant a$.

اگر $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$ همگرا باشد درانیصورت انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ مطلقاً همگرا است .

نشانهٔ مقایسهٔ II . اگر بازای $x \to +\infty$ داشته باشیم $\psi(x) > ۰$ و $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$ در آنصورت انتگرال‌های $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ و $\int_a^{+\infty} \psi(x)\,dx$ توأماً همگرا یا واگرا می‌باشند . بالاخص این وقتی روی میدهد که بازای $x \to +\infty$ داشته باشیم $\varphi(x) \sim \psi(x)$.

نشانهٔ مقایسهٔ III . الف) هرگاه

$$f(x)=O^*\left(\frac{١}{x^p}\right) \quad \text{بازای} \quad x\longrightarrow+\infty$$

در چنین حالتی انتگرال (٢) بازای $p<١$ همگرا و بازای $p\leqslant ١$ واگرا است .
ب) هرگاه

$$f(x)=O^*\left(\frac{١}{(b-x)^p}\right) \quad \text{بازای} \quad x\longrightarrow b-٠$$

در چنین حالتی انتگرال (٢) بازای $p<١$ همگرا و بازای $p\geqslant ١$ واگرا است .

بند ٤ ــ نشانهٔ خاص همگرایی . اگر : ١) تابع $\varphi(x)$ بطور یکنوا بازای $x\longrightarrow+\infty$ بسمت صفر بگراید ؛ ٢) تابع $f(x)$ دارای تابع اولیهٔ کراندار

$$F(x)=\int_a^x f(\xi)\,d\xi$$

باشد در آنصورت انتگرال

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

بطور کلی بطرز غیر مطلق همگرا است . بخصوص انتگرالهای

$$\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,dx \quad \text{و} \quad \int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,dx \quad (a>٠)$$

همگرا هستند اگر $p>٠$.

بند ٥ ــ مقدار اصلی بمعنای کوشی . اگر تابع $f(x)$ بقسمی باشد که بازای $\varepsilon>٠$ دلخواه انتگرالهای ویژه

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{و} \quad \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \quad (a<c<b)$$

وجود داشته باشند در آنصورت منظور از مقدار اصلی بمعنای کوشی (v.p.)* عبارت از عدد

---

* علامت اختصاری v.p. حروف اول کلمات valeur principal می‌باشد .

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right]$$

بطریق مشابه

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۲۳۳۴ - $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\quad(a>0)$

۲۳۳۵ - $\int_0^1 \ln x\,dx$

۲۳۳۶ - $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

۲۳۳۷ - $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۲۳۳۸ - $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$

۲۳۳۹ - $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

۲۳۴۰ - $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$

۲۳۴۱ - $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$

۲۳۴۲ - $\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

۲۳۴۳ - $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$

۲۳۴۴ - $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

۲۳۴۵ - $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

۲۳۴۶ - $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx(a>0)$

۲۳۴۷ - $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx(a>0)$

بیاری دستورهای کاهشی مطلوبست محاسبهٔ انتگرال‌های ناویژهٔ زیر (n عددیست طبیعی) :

۲۳۴۸ - $I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$

۲۳۴۹ - $I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}\quad(ac-b^2>0)$

۲۳۵۰ – $I_n=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)}$

۲۳۵۱ – $I_n=\int_0^1\frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$

۲۳۵۲ – $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1}x}$

۲۳۵۳ – الف) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$ ؛

ب) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$

۲۳۵۴ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx$$

که در آن E مجموعهٔ آن مقادیر x از فاصلهٔ $(0,+\infty)$ است که بازای آنها عبارت زیر انتگرال دارای معناست .

۲۳۵۵ – تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)dx$$

که در آن $a>0$ و $b>0$ بفرض آنکه انتگرال سمت چپ تساوی دارای معنا باشد .

۲۳۵۶ – مقدار میانگین تابع $f(x)$ روی فاصلهٔ $(0,+\infty)$ عبارتست از عدد

$$M|f|=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(\xi)\,d\xi$$

مقدار میانگین توابع زیر را پیدا کنید :

الف) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2(x\sqrt{2})$ ؛

ب) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ ؛ پ) $f(x)=\sqrt{x}\,\sin x$

۲۳۵۷ – مطلوبست محاسبهٔ :

الف) $\lim_{x\to0} x\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}\,dt$ پ) $\lim_{x\to0}\frac{\int_x^{+\infty}t^{-1}e^{-t}\,dt}{\ln\frac{1}{x}}$

ب) $\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}$ ت) $\lim_{x\to0} x^{\alpha}\int_x^1\frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$

که در آن $\alpha > 0$ و $f(t)$ تابع پیوسته‌ای روی قطعهٔ $[0, 1]$ می‌باشد .

همگرایی انتگرالهای زیر را بررسی کنید :

۲۳۵۸ - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4 - x^2 + 1}$

۲۳۵۹ - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2 + 1}}$

۲۳۶۰ - $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{\ln x}$

۲۳۶۱ - $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx$

۲۳۶۲ - $\displaystyle\int_0^{1} x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$

۲۳۶۳ - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1 + x^n}\,dx \quad (n \geqslant 0)$

۲۳۶۴ - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}\,dx \quad (a \neq 0)$

۲۳۶۵ - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x)}{x^n}\,dx$

۲۳۶۶ - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2 + x^n}\,dx \quad (n \geqslant 0)$

۲۳۶۷ - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^n}\,dx \quad (n \geqslant 0)$

۲۳۶۸ - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$

۲۳۶۹ - $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$

۲۳۷۰ - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1 - x^4}}$

۲۳۷۰,۱ - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}}$

۲۳۷۱ - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$

۲۳۷۲ - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{1 - x^2}\,dx$

۲۳۷۳ - $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$

۲۳۷۴ - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$

۲۳۷۵ - $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$

۲۳۷۶ - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x - a_1|^{p_1} |x - a_2|^{p_2} \dots |x - a_n|^{p_n}}$

۲۳۷۶,۱ - $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha |x - 1|^\beta\,dx$

۲۳۷۷ - $\int_{۰}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$ که در آن $P_m(x)$ و $P_n(x)$ چندجمله‌ای‌های نسبت بهم اولند که به ترتیب از درجه‌های m و n می‌باشند .

همگرایی مطلق و مشروط انتگرال‌های زیر را بررسی کنید :

۲۳۷۸ - $\int_{۰}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

راهنمایی — $|\sin x| \geqslant \sin^{۲} x$

۲۳۷۹ - $\int_{۰}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+۱۰۰} dx$

۲۳۸۰ - $\int_{۰}^{+\infty} x^{p} \sin (x^{q})\, dx \ (q \neq ۰)$

۲۳۸۰,۱ - $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin (\sec x)\, dx$

۲۳۸۰,۲ - $\int_{۰}^{+\infty} x^{۲} \cos (e^{x})\, dx$

۲۳۸۱ - $\int_{۰}^{+\infty} \frac{x^{p} \sin x}{۱ + x^{q}} dx \ (q \geqslant ۰)$

۲۳۸۲ - $\int_{۰}^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{۱}{x}\right)}{x^{n}} dx$

۲۳۸۳ - $\int_{a}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x\, dx$

که در آن $P_n(x), P_m(x)$ چنه‌جمله‌ای‌های درست و $P_n(x) > ۰$ اگر $x \geqslant ۰$.

۲۳۸٤ - اگر $\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$ همگرا باشد در اینصورت آیا بازای $x \to +\infty$ حتماً $f(x) \to ۰$ ؟

مثالهای

الف) $\int_{۰}^{+\infty} \sin (x^{۲})\, dx$ ؛ ب) $\int_{۰}^{+\infty} (-۱)^{[x^{۲}]}\, dx$

را در نظر بگیرید .

۲۳۸٤,۱ - هرگاه $f(x) \in C^{(۱)} [x_{۰}, +\infty]$ و $|f'(x)| < C$ بازای $x_{۰} \leqslant x < +\infty$ و $\int_{x_{۰}}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ همگرا باشد ثابت کنید که $f(x) \to ۰$ بازای $x \to +\infty$.

راهنمایی — انتگرال زیر را در نظر بگیرید :

$$\int_{x_{۰}}^{+8} f(x) f'(x)\, dx$$

۲۳۸۵ – آیا ممکن است انتگرال ناویژهٔ همگرای

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

از تابع ناکراندار $f(x)$ معین روی $[a, b]$ را بعنوان حد مجموع انتگرال نظیر

$$\sum_{i=۰}^{n-۱} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

که در آن $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+۱}$ و $\Delta x_i = x_{i+۱} - x_i$ در نظر گرفت ؟

۲۳۸۶ – فرض کنیم

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (۱)$$

همگرا و تابع $\varphi(x)$ کراندار باشد .

آیا انتگرال

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad (۲)$$

حتماً همگرا است ؟ مثال نظیری بیاورید .

اگر انتگرال (۱) مطلقاً همگرا باشد در بارهٔ همگرایی انتگرال (۲) چه میتوان گفت ؟

۲۳۸۷ – ثابت کنید که اگر $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ همگرا و $f(x)$ تابع یکنوائی باشد

در آنصورت $f(x) = O\left(\frac{۱}{x}\right)$.

۲۳۸۸ – فرض کنیم تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $۰ < x \leqslant ۱$ یکنوا باشد و در همسایگی نقطهٔ $x = ۰$ کراندار نباشد .

ثابت کنید که اگر

$$\int_۰^۱ f(x)\,dx$$

وجود داشته باشد در آنصورت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \sum_{k=۱}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_۰^۱ f(x)\,dx$$

۲۳۸۹ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $۰<x<a$ یکنوا و

$$\int_{۰}^{a} x^{p} f(x)\,dx$$

وجود داشته باشد در آنصورت

$$\lim_{x\to+۰} x^{p+۱} f(x)=۰$$

۲۳۹۰ – نشان دهید که :

الف) $\text{v.p.}\int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{x}=۰$ ؛ ب) $\text{v.p.}\int_{۰}^{+\infty}\frac{dx}{۱-x^{۲}}=۰$ ؛

پ) $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx=۰$

۲۳۹۱ – ثابت کنید که بازای $x\geqslant ۰$

$$\operatorname{li} x=\text{v.p.}\int_{۰}^{x}\frac{d\xi}{\ln\xi}$$

وجود دارد .

انتگرالهای زیر را پیدا کنید :

۲۳۹۲ – $\text{v.p.}\int_{۰}^{+\infty}\frac{dx}{x^{۲}-۳x+۲}$

۲۳۹۳ – $\text{v.p.}\int_{\frac{۱}{۲}}^{۲}\frac{dx}{x\ln x}$

۲۳۹۴ – $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{۱+x}{۱+x^{۲}}\,dx$

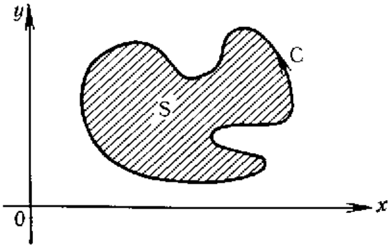
۲۳۹۵ – $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arc\,tg} x\,dx$

بخش ۵ – محاسبهٔ مساحات

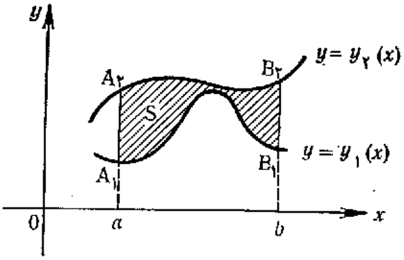
بند ۱ – مساحت در مختصات قائم . مساحت $S=A_{۱}A_{۲}B_{۲}B_{۱}$ (شکل ۱۰) محدود به دو منحنی پیوستهٔ $y=y_{۱}(x)$ و $y=y_{۲}(x)$ $(y_{۲}(x)\geqslant y_{۱}(x))$ و دو خط $x=a$ و $x=b$ $(a<b)$ برابر است با

$$S=\int_{a}^{b}[y_{۲}(x)-y_{۱}(x)]\,dx$$

بند ۲ — مساحت محدود به منحنی‌ایکه بصورت پارامتری داده شده است .
اگر $x = x(t),\ y = y(t)$ $[۰ \leqslant t \leqslant T]$ معادلات پارامتری منحنی بستهٔ سادهٔ C باشد که از قطعات هموار تشکیل شده و در سمت چپ خود نسبت به جهت خلاف گردش عقربهٔ ساعت مساحت S را محصور میکند (شکل ۱۱) در آنصورت



شکل ۱۱



شکل ۱۰

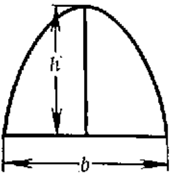
$$S = -\int_{۰}^{T} y(t)\, x'(t)\, dt = \int_{۰}^{T} x(t)\, y'(t)\, dt$$

یا

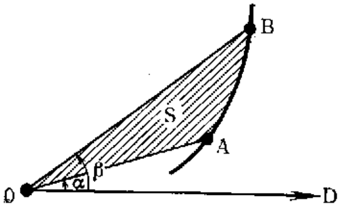
$$S = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{T} [x(t)\, y'(t) - x'(t)\, y(t)]\, dt$$

بند ۳ — مساحت در مختصات قطبی . مساحت $S = OAB$ (شکل ۱۲) محدود به منحنی پیوستهٔ $r = r(\varphi)$ و دو نیم خط $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ و $\varphi = \alpha$ برابر است با

$$S = \frac{۱}{۲} \int_{\alpha}^{\beta} r^{۲}(\varphi)\, d\varphi$$



شکل ۱۳



شکل ۱۲

۲۳۹۶ – ثابت کنید که مساحت قطعهٔ سهمی قائم (شکل ۱۳) برابر است با

$$S = \frac{۲}{۳} bh$$

که در آن b قاعده و h ارتفاع قطعه است (شکل ۱۳) .

مطلوبست تعیین مساحت‌های محدود به منحنی‌های داده‌شده در مختصات قائم*) .

۲۳۹۷ – $ax = y^{۲}, \quad ay = x^{۲}$

۲۳۹۸ – $y = x^{۲}, \quad x + y = ۲$

۲۳۹۹ – $y = ۲x - x^{۲}, \quad x + y = ۰$

۲٤۰۰ – $y = |\lg x|, \quad y = ۰ \quad x = ۰,۱, \quad x = ۱۰$

۲٤۰۰,۱ – $y = ۲^{x}, \quad y = ۲, \quad x = ۰$

۲٤۰۰,۲ – $y = (x + ۱)^{۲}, \quad x = \sin \pi y, \quad y = ۰ \quad (۰ \leqslant y \leqslant ۱)$

۲٤۰۱ – $y = x, \quad y = x + \sin^{۲} x \quad (۰ \leqslant x \leqslant \pi)$

۲٤۰۲ – $y = \frac{a^{۳}}{a^{۲} + x^{۲}}, \quad y = ۰$

۲٤۰۳ – $\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$

۲٤۰٤ – $y^{۲} = x^{۲}(a^{۲} - x^{۲})$

۲٤۰۵ – $y^{۲} = ۲px, \quad ۲۷py^{۲} = ۸(x - p)^{۳}$

۲٤۰۶ – $Ax^{۲} + ۲Bxy + Cy^{۲} = ۱ \quad (AC - B^{۲} > ۰, \; A > ۰)$

۲٤۰۷ – $x = ۲a, \quad y^{۲} = \frac{x^{۳}}{۲a - x}$ (سیسوئید)

۲٤۰۸ – $\sqrt{a^{۲} - y^{۲}} - $ ... $y = ۰, \; x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^{۲} - y^{۲}}}{y} - \sqrt{a^{۲} - y^{۲}}$ (تراکتریس)

۲٤۰۹ – $y^{۲} = \frac{x^{n}}{(۱ + x^{n+۲})^{۲}} \quad (n > -۲, \; x > ۰)$

۲٤۱۰ – $y = e^{-x} |\sin x|, \quad y = ۰ \quad (x \geqslant ۰)$

۲٤۱۱ – سهمی $y^{۲} = ۲x$ مساحت دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} = ۸$ را به چه نسبتی تقسیم می‌کند ؟

---

*) جمیع پارامترها در این بخش و بخش‌های دیگر فصل ٤ مثبت در نظر گرفته شده‌اند .

۲٤۱۳ - مختصات نقطهٔ $M(x, y)$ از هذلولی $x^۲ - y^۲ = ۱$ را بعنوان توابعی از مساحت قطاع هذلولی $S = OM'M$ محدود به کمان $M'M$ هذلولی و دو شعاع OM, OM' که در آن $M'(x, -y)$ قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به محور Ox است بیان کنید.

مساحت‌های محدود به منحنی‌های پارامتری زیر را پیدا کنید:

۲٤۱۳ - $x = a(t - \sin t),\quad y = a(۱ - \cos t)\quad (۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi),$ (سیکلویید) و $y = ۰$

۲٤۱٤ - $x = ۲t - t^۲,\quad y = ۲t^۲ - t^۳$

۲٤۱٥ - $x = a(\cos t + t\sin t),\quad y = a(\sin t - t\cos t)\quad (۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi)$ (گستردهٔ دایره) و $x = a,\ y \leqslant ۰$.

۲٤۱٦ - $x = a(۲\cos t - \cos ۲t),\quad y = a(۲\sin t - \sin ۲t)$

۲٤۱۷ - $x = \frac{c^۲}{a}\cos^۳ t,\quad y = \frac{c^۲}{b}\sin^۳ t\quad (c^۲ = a^۲ - b^۲)$ (گستردهٔ بیضی).

۲٤۱۷,۱ - $x = a\cos t,\quad y = \dfrac{a\sin^۲ t}{۲ + \sin t}$

مساحت‌های S محدود به منحنی‌های داده شده در مختصات قطبی را پیدا کنید:

۲٤۱۸ - $r^۲ = a^۲\cos ۲\varphi$ (لمنیسکات)

۲٤۱۹ - $r = a(۱ + \cos\varphi)$ (کاردیویید)

۲٤۲۰ - $r = a\sin ۳\varphi$ (سه‌برگی)

۲٤۲۱ - $r = \dfrac{p}{۱ - \cos\varphi},\quad \varphi = \dfrac{\pi}{٤},\quad \varphi = \dfrac{\pi}{۲}$ (سهمی)

۲٤۲۲ - $r = \dfrac{p}{۱ + \varepsilon\cos\varphi}\quad (۰ < \varepsilon < ۱)$ (بیضی)

۲٤۲۲,۲ - $r = ۳ + ۲\cos\varphi$

۲٤۲۲,۳ - $r = \dfrac{۱}{\varphi},\quad r = \dfrac{۱}{\sin\varphi}\quad \left(۰ < \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{۲}\right)$

۲٤۲۳ - $r = a\cos\varphi,\ r = a(\cos\varphi + \sin\varphi)\quad \left(M\left(\dfrac{a}{۲}, ۰\right) \in S\right)$

۲٤۲٤ - مطلوبست محاسبهٔ مساحت قطاع محدود به منحنی

$$\varphi = r \operatorname{arc\,tg} r$$

و دو شعاع $\varphi = ۰$ و $\varphi = \dfrac{\pi}{\sqrt{۳}}$.

۲۴۲۴٫۱ – مساحت محدود به منحنی زیر را پیدا کنید :

$$r^{۲} + \varphi^{۲} = ۱$$

۲۴۲۴٫۲ – مساحت محدود به منحنی زیر را پیدا کنید :

$$\varphi = \sin(\pi r) \quad (۱ \leqslant r \leqslant ۱)$$

۲۴۲۴٫۳ – مساحت محدود به خطوط زیر را پیدا کنید :

$$\varphi = ۴r - r^{۳}, \quad \varphi = ۰$$

۲۴۲۴٫۴ – مساحت محدود به خطوط زیر را پیدا کنید :

$$\varphi = r - \sin r, \quad \varphi = \pi$$

۲۴۲۵ – مساحت محدود به منحنی بستهٔ

$$r = \frac{۲at}{۱ + t^{۲}}, \quad \varphi = \frac{\pi t}{۱ + t}$$

را پیدا کنید .

با گذر به مختصات قطبی مساحت‌های محدود به منحنی‌های زیر را پیدا کنید :

۲۴۲۶ – $x^{۳} + y^{۳} = ۳axy$ (برگ دکارت)

۲۴۲۷ – $x^{۴} + y^{۴} = a^{۲}(x^{۲} + y^{۲})$

۲۴۲۸ – $(x^{۲} + y^{۲})^{۲} = ۲a^{۲}xy$ (لمنیسکات)

با درآوردن معادلات بصورت پارامتری مساحت‌های محدود به منحنی‌های زیر را پیدا کنید :

۲۴۲۹ – $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}}$ (آسترویید)

۲۴۳۰ – $x^{۴} + y^{۴} = ax^{۲}y$

راهنمایی – فرض کنید $y = tx$.

بخش ۶ – محاسبهٔ طول قوس (کمان)

بند ۱ – طول قوس در مختصات قائم . طول قوس قطعهٔ منحنی هموار (پیوستهٔ دیفرانسیل پذیر)

$$y = y(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

برابر است با

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{۱ + y'^{۲}(x)}\, dx$$

بند ۲ – طول قوس منحنی پارامتری . اگر منحنی C با معادلات

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_{۰} \leqslant t \leqslant T)$$

داده شود که در آن $x(t),\ y(t) \in C^{(۱)}[t_{۰},\ T]$ در اینصورت طول قوس منحنی C برابر است با

$$s = \int_{t_{۰}}^{T} \sqrt{x'^{۲}(t) + y'^{۲}(t)}\, dt$$

بند ۳ – طول قوس در مختصات قطبی . اگر

$$r = r(\varphi) \quad (\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$$

که در آن $r(\varphi) \in C^{(۱)}[\alpha,\ \beta]$ در انیصورت طول قوس قطعهٔ نظیر منحنی برابر است با

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^{۲}(\varphi) + r'^{۲}(\varphi)}\, d\varphi$$

برای طول قوس منحنی‌های فضایی فصل ۸ را ببینید .

طول قوس منحنی‌های زیر را پیدا کنید :

۲۴۳۱ – $y = x^{\frac{۳}{۲}} \quad (۰ \leqslant x \leqslant ۴)$ ۲۴۳۲ – $y^{۲} = ۲px \quad (۰ \leqslant x \leqslant x_{۰})$

۲۴۳۳ – $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ از نقطهٔ $A(۰,\ a)$ تا نقطهٔ $B(b,\ h)$

۲۴۳۴ – $y = e^{x} \quad (۰ \leqslant x \leqslant x_{۰})$

۲۴۳۵ – $x = \frac{۱}{۴}y^{۲} - \frac{۱}{۲}\ln y \quad (۱ \leqslant y \leqslant e)$

۲۴۳۶ – $y = a \ln \frac{a^{۲}}{a^{۲} - x^{۲}} \quad (۰ \leqslant x \leqslant b < a)$

۲۴۳۷ – $y = \ln \cos x \quad \left(۰ \leqslant x \leqslant a < \frac{\pi}{۲}\right)$

۲۴۳۸ – $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^{۲} - y^{۲}}}{y} - \sqrt{a^{۲} - y^{۲}} \quad (۰ < b \leqslant y \leqslant a)$

۲۴۳۹ - $y^{۲} = \frac{x^{۲}}{۲a - x} \quad \left(۰ \leqslant x \leqslant \frac{۵}{۳} a\right)$

۲۴۴۰ - $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}}$ (آسترویید)

۲۴۴۱ - $x = \frac{c^{۲}}{a} \cos^{۳} t, \quad y = \frac{c^{۲}}{b} \sin^{۳} t, \quad c^{۲} = a^{۲} - b^{۲}$ (گستردهٔ بیضی)

۲۴۴۲ - $x = \cos^{۴} t, \quad y = \sin^{۴} t$

۲۴۴۳ - $x = a(t - \sin t), \quad y = a(۱ - \cos t) \quad (۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi)$

۲۴۴۴ - $x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$ بازای $۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi$
(گستردهٔ دایره)

۲۴۴۵ - $x = a(\operatorname{sh} t - t), \quad y = a(\operatorname{ch} t - ۱) \quad (۰ \leqslant t \leqslant T)$

۲۴۴۵٫۱ - $x = \operatorname{ch}^{۳} t, \quad y = \operatorname{sh}^{۳} t \quad (۰ \leqslant t \leqslant T)$

۲۴۴۶ - $r = a\varphi$ (حلزونی ارشمیدس) بازای $۰ \leqslant \varphi \leqslant ۲\pi$

۲۴۴۷ - $r = ae^{m\varphi} \quad (m > ۰)$ بازای $۰ < r < a$

۲۴۴۸ - $r = a(۱ + \cos \varphi)$

۲۴۴۹ - $r = \frac{p}{۱ + \cos \varphi} \qquad \left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{۲}\right)$

۲۴۵۰ - $r = a \sin^{۳} \frac{\varphi}{۳}$

۲۴۵۱ - $r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{۲} \quad (۰ \leqslant \varphi \leqslant ۲\pi)$

۲۴۵۲ - $\varphi = \frac{۱}{۲}\left(r + \frac{۱}{r}\right) \quad (۱ \leqslant r \leqslant ۳)$

۲۴۵۲٫۱ - $\varphi = \sqrt{r} \quad (۰ \leqslant r \leqslant ۵)$

۲۴۵۲٫۲ - $\varphi = \int_{۰}^{r} \frac{\operatorname{sh} \rho}{\rho} d\rho \quad (۰ \leqslant r \leqslant R)$

۲۴۵۲٫۳ - $r = ۱ + \cos t, \quad \varphi = t - \operatorname{tg} \frac{t}{۲} \quad (۰ \leqslant t \leqslant T < \pi)$

۲۴۵۳ - ثابت کنید طول قوس بیضی

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

مساوی طول یک موج سینوسویید $y = c \sin \frac{x}{b}$ می‌باشد که در آن $c = \sqrt{a^{۲} - b^{۲}}$.

۲۴۵۴ – سهمی $ay = x^۲$، روی محور Ox می‌غلطد . ثابت کنید که مسیر کانون، منحنی زنجیری است .

۲۴۵۵ – نسبت مساحت محدود به حلقهٔ منحنی

$$y = \pm\left(\frac{۱}{۳} - x\right)\sqrt{x}$$

به مساحت دایره‌ای را پیدا کنید که طول آن برابر محیط حلقهٔ منحنی باشد .

بخش ۷ — محاسبه احجام

بند ۱ — حجم جسم از روی مقطع عرضی معلوم . اگر حجم جسم V وجود داشته باشد و $S = S(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$ مساحت مقطع جسم با صفحهٔ عمود بر محور Ox در نقطهٔ x باشد در آنصورت

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

بند ۲ — حجم جسم دوار. حجم حاصل از دوران مساحت

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad ۰ \leqslant y \leqslant y(x)$$

حول محور Ox که در آن $y(x)$ تابع پیوستهٔ تک مقداریست برابر است با

$$V_x = \pi \int_a^b y^۲(x)\,dx$$

در حالت کلی‌تر حجم حلقهٔ حاصل از دوران مساحت $a \leqslant x \leqslant b$, $y_۱(x) \leqslant y \leqslant y_۲(x)$ حول Ox که در آن $y_۱(x)$ و $y_۲(x)$ توابع پیوستهٔ نامنفی هستند برابر است با

$$V = \pi \int_a^b [y_۲^۲(x) - y_۱^۲(x)]\,dx$$

۲۴۵۶ – مطلوبست محاسبهٔ حجم زیر شیروانی که قاعدهٔ آن مستطیلی به ابعاد a و b و طول یال بالائی آن c و ارتفاع آن برابر h باشد .

۲۴۵۷ – مطلوبست محاسبهٔ حجم ناوه‌ای که قاعده‌های متوازی آن مستطیل هائی به ابعاد A ، B و a ، b و ارتفاع آن h است .

۲۴۵۸ – مطلوبست محاسبهٔ حجم مخروط ناقصی که قاعده‌های آن بیضی‌هائی با نیم قطرهای A ، B و b ، a و ارتفاع آن h است .

۲۴۵۹ – مطلوبست محاسبهٔ حجم سهموی دوار بقاعدهٔ S و ارتفاع H .

۲۴۶۰ – فرض کنیم مساحت $S = S(x)$ مقطع عرضی عمود بر محور Ox جسم شبه منشوری طبق قانون کوادراتیک

$$S(x) = Ax^۲ + Bx + C \quad [a \leqslant x \leqslant b]$$

تغییر کند ، که در آن A ، B ، C ثابت هستند .

ثابت کنید که حجم این جسم برابر است با

$$V = \frac{H}{۶}\left[S(a) + ۴S\left(\frac{a+b}{۲}\right) + S(b)\right]$$

که در آن $H = b - a$ (دستور سیمپسون) .

۲۴۶۱ – جسمی عبارتست از مجموعهٔ نقاط $M(x, y, z)$ که در آن $۰ \leqslant z \leqslant ۱$ و ضمناً اگر z گویا باشد $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ و $۰ \leqslant y \leqslant ۱$ واگر z گنگ باشد $-۱ \leqslant x \leqslant ۰$ و $-۱ \leqslant y \leqslant ۰$. ثابت کنید که حجم این جسم وجود ندارد با وجودیکه انتگرال نظیر آن

$$\int_۰^۱ S(z)\,dz = ۱$$

حجم اجسام محدود به سطوح زیر را پیدا کنید :

۲۴۶۲ – $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱, \quad z = \frac{c}{a}x, \quad z = ۰$

۲۴۶۳ – $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$ (بیضوی)

۲۴۶۴ – $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} - \frac{z^۲}{c^۲} = ۱, \quad z = \pm c$

۲۴۶۵ – $x^۲ + z^۲ = a^۲, \quad y^۲ + z^۲ = a^۲$

۲۴۶۶ – $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲, \quad x^۲ + y^۲ = ax$

۲۴۶۷ – $z^۲ = b(a - x), \quad x^۲ + y^۲ = ax$

۲۴۶۸ – $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{z^۲} = ۱ \quad (۰ < z < a)$

۲۴۶۹ – $x + y + z^۲ = ۱, \quad x = ۰, \quad y = ۰, \quad z = ۰$

۲۴۷۰ – $x^۲ + y^۲ + z^۲ + xy + yz + zx = a^۲$

۲۴۷۱ – ثابت کنید که حجم جسم حاصل از دوران مساحت

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad ۰ \leqslant y \leqslant y(x)$$

حول محور Oy که در آن $y(x)$ تابع تک‌مقداری پیوسته‌ای است مساویست با

$$V_y = ٢\pi \int_a^b xy(x)\,dx$$

حجم اجسام محدود به سطوح حاصل از دوران منحنی‌های زیر را پیدا کنید :

٢٤٧٢ - $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{٣}{٢}} \quad (٠ \leqslant x \leqslant a)$ حول محور Ox (نیلوویید) .

٢٤٧٣ - $y = ٢x - x^٢,\quad y = ٠$:

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy .

٢٤٧٤ - $y = \sin x,\quad y = ٠ \quad (٠ \leqslant x \leqslant \pi)$:

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy

٢٤٧٥ - $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^٢,\quad y = b\left|\frac{x}{a}\right|$:

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy .

٢٤٧٦ - $y = e^{-x} \quad y = ٠ \quad (٠ \leqslant x < +\infty)$:

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy .

٢٤٧٧ - $x^٢ + (y-b)^٢ = a^٢ \quad (٠ < a \leqslant b)$ حول محور Ox .

٢٤٧٨ - $x^٢ + (y-b)^٢ = a^٢ \quad (٠ < a \leqslant b)$ حول محور Ox

٢٤٧٩ - $y = e^{-x}\sqrt{\sin x} \quad (٠ \leqslant x < +\infty)$ حول محور Ox .

٢٤٨٠ - $x = a(t - \sin t),\quad y = a(١ - \cos t) \quad (٠ \leqslant t \leqslant ٢\pi),\quad y = ٠$:

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy ؛ پ) حول خط $y = ٢a$.

٢٤٨١ - $x = a\sin^٣ t,\ y = b\cos^٣ t \quad (٠ \leqslant t \leqslant ٢\pi)$:

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy .

٢٤٨١٫١ - حجم جسم حاصل از دوران حلقهٔ منحنی

$$x = ٢t - t^٢,\quad y = ٤t - t^٣$$

را حول : الف) محور Ox ؛ ب) محور Oy پیدا کنید .

٢٤٨٢ - ثابت کنید که حجم جسم حاصل از دوران مساحت

$$٠ \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \leqslant \pi,\quad ٠ \leqslant r \leqslant r(\varphi)$$

حول محور قطبی (r, φ مختصات قطبی) برابر است با .

$$V = \frac{٢\pi}{٣} \int_\alpha^\beta r^٣(\alpha)\sin\varphi\,d\varphi$$

حجم اجسام حاصل از دوران مساحت‌های داده شدهٔ زیر را در مختصات قطبی پیدا کنید :

۲۴۸۳ - $r = a(۱ + \cos\varphi) \quad (۰ \leqslant \varphi \leqslant ۲\pi)$:

الف) حول محور قطبی ؛ ب) حول خط $r\cos\varphi = -\frac{a}{۴}$.

۲۴۸۴ - $(x^۲ + y^۲)^۲ = a^۲(x^۲ - y^۲)$:

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy ؛ پ) حول خط $y = x$.

راهنمایی — به مختصات قطبی بگذرید .

۲۴۸۴,۱ - حجم جسم حاصل از دوران مساحت محدود به نیم‌پیچ حلزونی ارشمیدس

$$r = a\varphi \quad (a > ۰; \quad ۰ \leqslant \varphi \leqslant \pi)$$

را حول محور قطبی پیدا کنید .

۲۴۸۴,۲ - حجم جسم حاصل از دوران مساحت محدود به منحنی‌های

$$\varphi = \pi r^۳, \quad \varphi = \pi$$

را حول محور قطبی پیدا کنید .

۲۴۸۵ - حجم جسم حاصل از دوران مساحت

$$a \leqslant r \leqslant a\sqrt{۲\sin ۲\varphi}$$

را حول محور قطبی پیدا کنید .

بخش ۸ — محاسبهٔ مساحت سطوح دوار

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی هموار AB حول محور Ox برابر است با

$$P = ۲\pi \int_A^B |y|\, ds$$

که در آن ds دیفرانسیل قوس است .

مطلوبست محاسبهٔ مساحت سطح حاصل از دوران منحنی‌های زیر :

۲۴۸۶ - $y = x\sqrt{\frac{x}{a}} \quad (۰ \leqslant x \leqslant a)$ حول محور Ox .

۲۴۸۷ - $y = a\cos\frac{\pi x}{۲b} \quad (|x| \leqslant b)$ حول محور Ox .

۲۴۸۸- $y=\operatorname{tg}x\left(۰\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۴}\right)$ حول محور Ox .

۲۴۸۹- $y^۲=۲px\quad(۰\leqslant x\leqslant x_۰)$:

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy .

۲۴۹۰- $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱\quad(۰<b\leqslant a)$:

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy .

۲۴۹۱- $x^۲+(y-b)^۲=a^۲\quad(b\geqslant a)$ حول محور Ox .

۲۴۹۲- $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$ حول محور Ox .

۲۴۹۳- $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}\quad(|x|\leqslant b)$:

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy .

۲۴۹۴- $\pm x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^۲-y^۲}}{y}-\sqrt{a^۲-y^۲}$ حول محور Ox .

۲۴۹۵- $x=a(t-\sin t),\ y=a(۱-\cos t)\quad(۰\leqslant t\leqslant ۲\pi)$:

الف) حول محور Ox ؛ ب) حول محور Oy ؛ پ) حول خط $y=۲a$.

۲۴۹۶- $x=a\cos^۳ t,\ y=a\sin^۳ t$ حول خط $y=x$.

۲۴۹۷- $r=a(۱+\cos\varphi)$ حول محور قطبی .

۲۴۹۸- $r^۲=a^۲\cos ۲\varphi$:

الف) حول محور قطبی ؛ ب) حول محور $\varphi=\frac{\pi}{۲}$ ؛

پ) حول محور $\varphi=\frac{\pi}{۴}$.

۲۴۹۹- جسمی از دوران شکل محدود به سهمی $ay=a^۲-x^۲$ و محور Ox حول محور Ox حاصل شده است. نسبت سطح جسم دوار به سطح کرهٔ همحجم آن را پیدا کنید .

۲۵۰۰- شکل محدود به سهمی $y^۲=۲px$ و خط $x=\frac{p}{۲}$ حول خط $y=p$ دوران میکند. حجم و سطح جسم دوار را پیدا کنید .

بند ۱ — لنگرها* (گشتاورها یا ممان‌ها) اگر جرم M بچگالی $\rho = \rho(y)$ یک پیوستار** کراندار Ω (منحنی یا حوزهٔ مستوی) را روی صفحهٔ Oxy پر کند و $\omega = \omega(y)$ اندازهٔ نظیر (طول قوس ، مساحت) آن قسمت از پیوستار Ω باشد که عرضهای آن از y بیشتر نیست در آنصورت لنگر مرتبهٔ k-ام جرم M نسبت به محور Ox عبارتست از عدد

$$M_k = \lim_{\max \Delta y_i \to ۰} \sum_{i=۱}^{n} \rho(y_i)\, y_i^k\, \Delta\omega(y_i) = \int_{\Omega} \rho y^k\, d\omega(y) \quad (k = ۰, ۱, ۲, \dots)$$

در حالت‌های خاص ، بازای $k = ۰$ جرم M ، بازای $k = ۱$ لنگر ایستی (استاتیک) ، بازای $k = ۲$ لنگر لختی بدست میاید .

بطریق مشابهی لنگرهای جرم نسبت به صفحه‌های مختصات تعریف می‌شوند .

اگر $\rho = ۱$ در آنصورت لنگر نظیر را هندسی (لنگر خط ، شکل مستوی ، و جسم غیره) نامند .

بند ۲ — مرکز ثقل (گراینگاه) . مختصات مرکز ثقل $(x_۰, y_۰)$ شکل مستوی همگان S از دستورهای

$$x_۰ = \frac{M_۱^{(y)}}{S}, \quad y_۰ = \frac{M_۱^{(x)}}{S}$$

تیعین می‌شوند که در آن $M_۱^{(y)}, M_۱^{(x)}$ لنگرهای هندسی ایستی مساحت S نسبت به محورهای Oy و Ox می‌باشند .

۲۵۰۱ — لنگرهای ایستی و لختی کمان نیمدایره‌ای بشعاع a را نسبت به قطر مار بر دو انتهای این کمان پیدا کنید .

۲۵۰۱٫۱ — مطلوبست محاسبهٔ لنگر ایستی قوس سهمی

$$y^۲ = ۲px \quad \left(۰ \leqslant x \leqslant \frac{p}{۲}\right)$$

نسبت به خط $x = \frac{p}{۲}$.

---

* — برای moment در فارسی کلمات — ممان — عزم — گشت‌آور — لنگر و برای inevtia — اینرسی — جبر — ماندولختی و برای عبارت moment of inevtia ترکیبی از این دو کلمه بکار میرود (مترجم) .

** — پیوستار ترجمهٔ کلمهٔ لاتینی continuum می‌باشد که عبارتست از مجموعهٔ عناصر بطوریکه از یکی به دیگری بطور پوسته بتوان گذر نمود (مترجم) .

۲۵۰۲ – مطلوبست محاسبهٔ لنگرهای ایستی و لختی صفحهٔ مثلثی همگن به قاعدهٔ b و ارتفاع h نسبت به قاعده‌اش ($\rho = ۱$) .

۲۵۰۲,۱ – مطلوبست محاسبهٔ لنگرهای لختی $I_y = M_۲^{(y)}$ و $I_x = M_۲^{(x)}$ قطعهٔ سهمی محدود به منحنی‌های

$$ay = ۲ax - x^۲ \quad (a > ۰,) \quad y = ۰$$

نسبت به محورهای Ox و Oy . شعاعهای لختی r_x و r_y وارد به روابط

$$I_x = Sr_x^۲, \quad I_y = Sr_y^۲$$

که در آن S مساحت قطعه است چقدر می‌باشد ؟

۲۵۰۳ – مطلوبست محاسبهٔ لنگر لختی صفحهٔ بیضی شکل همگن به نیم‌قطرهای a و b نسبت به محورهای اصلی آن ($\rho = ۱$) .

۲۵۰۴ – مطلوبست محاسبهٔ لنگرهای ایستی و لختی مخروط مستدیر همگن بشعاع قاعده r و ارتفاع h نسبت به صفحهٔ قاعدهٔ این مخروط ($\rho = ۱$).

۲۵۰۴,۱ – مطلوبست محاسبهٔ لنگر لختی کرهٔ همگن بشعاع R و جرم M نسبت به قطر آن .

۲۵۰۵ – مطلوبست اثبات قضیهٔ اول گولدن : مساحت سطح حاصل از دوران قوس مستوی C حول محوری که در صفحه‌اش واقع بوده آنرا نبرد مساویست با طول این قوس ضرب در طول دایرهٔ مسیر مرکز ثقل قوس C.

۲۵۰۶ – مطلوبست اثبات قضیهٔ دوم گولدن : حجم جسم حاصل از دوران شکل مستوی S حول محوری که در صفحه‌اش واقع بوده و آنرا نبرد مساویست با حاصل ضرب مساحت S در طول مسیر مرکز ثقل این شکل .

۲۵۰۷ – مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل قوس دایره‌ای : $x = a\cos\varphi,$ $y = a\sin\varphi \quad (|\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi)$.

۲۵۰۸ – مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل حوزهٔ محدود به سهمی‌های $ax = y^۲$ ، $ay = x^۲$ $(a > ۰)$.

۲۵۰۹ – مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل حوزهٔ $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} \leqslant ۱$ $(۰ \leqslant x \leqslant a, \ ۰ \leqslant y \leqslant b)$.

۲۵۱۰ – مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل نیمکرهٔ همگن بشعاع a .

۲۵۱۱ – مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل $C(\varphi_۰, r_۰)$ قوس OP حلزونی لگاریتمی $r = ae^{m\varphi}$ $(m > ۰)$ از نقطهٔ $O(-\infty, ۰)$ تا نقطهٔ $P(\varphi, r)$. نقطهٔ C با حرکت نقطهٔ P کدام منحنی را طی میکند ؟

۲۵۱۲ – مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل حوزهٔ محدود به منحنی $r = a(۱ + \cos\varphi)$.

۲۵۱۳ – مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل حوزهٔ محدود به طاقنمای اول سیکلوئید $(۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi)$ $x = a(t - \sin t), \quad y = a(۱ - \cos t)$ و محور Ox .

۲۵۱۴ – مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل جسم حاصل از دوران مساحت $۰ \leqslant x \leqslant a, \ y^۲ \leqslant ۲px$ حول محور Ox .

۲۵۱۵ – مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل نیمکرهٔ $(z \geqslant ۰)$ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$.

بخش ۱۰ – مسائلی از مکانیک و فیزیک

با تشکیل مجموع انتگرال‌های نظیر و تعیین حد آنها مسائل زیر را حل کنید :

۲۵۱۶ – مطلوبست تعیین جرم میله‌ای بطول $l = ۱۰m$ در صورتیکه چگالی خطی میله موافق قانون $\delta = ۶ + ۰{,}۳x\,\mathrm{kg/m}$ تغییر کند که در آن x فاصله از یک سر میله است .

۲۵۱۷ – چه مقدار کار صرف کنیم تا جسم بجرم m را تا ارتفاع h از سطح کرهٔ زمین بشعاع R بلند کنیم ؟ اگر جسم تا بینهایت دور شود مقدار کار چقدر است ؟

۲۵۱۸ – فرض کنیم فنر قابل ارتجاع بازای نیروی یک کیلوگرم یک سانتیمتر کشیده شود . برای اینکه این فنر را ۱۰ سانتیمتر بکشیم چه مقدار کار باید صرف کنیم؟

راهنمایی – از قانون هوک استفاده شود .

۲۵۱۹ – استوانه‌ای بقطر ۲۰ cm و طول ۸۰ cm مملو از بخار تحت فشار $۱۰\ \mathrm{kg/cm^۲}$ می‌باشد . مطلوبست کار لازم برای اینکه در درجهٔ حرارت ثابت حجم بخار دو بار کمتر گردد .

۲۵۲۰ – مطلوبست نیروی فشار وارد بر جدار قائم بشکل نیمدایره‌ای بشعاع a در صورتیکه قطر آن بر سطح آب قرار گرفته باشد .

۲۵۲۱ – مطلوبست تعیین نیروی فشار آب بر جدار قائم بشکل ذوذنقه‌ای که قاعدهٔ پائین آن $a = ۱۰\,\mathrm{m}$ و قاعدهٔ بالایی آن $b = ۶\ \mathrm{m}$ و ارتفاع $h = ۵\ \mathrm{m}$ در صورتیکه قاعدهٔ پائین در عمق $c = ۲۰\ \mathrm{m}$ از سطح آب قرار گرفته باشد .

با تشکیل معادلهٔ دیفرانسیل ، مسایل زیر را حل کنید :

۲۵۲۲ – سرعت نقطه با قانون

$$v = v_0 + at$$

تغییر می‌یابد . این نقطه در فاصلهٔ زمانی $[0, T]$ چه مسافتی را میپیماید ؟

۲۵۲۳ – کرهٔ همگن بشعاع R و چگالی δ با سرعت زاویه‌ای ω حول قطر خود دوران می کند . مطلوبست تعیین انرژی جنبشی کره .

۲۵۲۴ – خط نامتناهی با چگالی ثابت μ_0 ، نقطهٔ بجرم m واقع بفاصلهٔ a را با چه نیرویی جذب میکند ؟

۲۵۲۵ – قرص بشعاع a و چگالی سطحی ثابت δ_0 ، نقطهٔ مادی P بجرم m را واقع بر عمود بر صفحهٔ قرص و مار بر مرکز Q –ی آن در کوتاه‌ترین فاصلهٔ PQ برابر b ، با چه نیرویی جذب میکند ؟

۲۵۲۶ – طبق قانون تریچلی سرعت خروج مایع از ظرف برابر است با

$$v = c\sqrt{2gh}$$

که در آن g شتاب ثقل ، h ارتفاع سطح مایع از سوراخ ، $c = 0{,}6$ ضریب آزمایش است .

بشکه استوانه‌ای قائم پر از مایع بقطر $D = 1$ m و ارتفاع $H = 2$ m ، از راه سوراخ گرد بقطر $d = 1$ cm واقع در ته آن در چه مدتی خالی می‌شود؟

۲۵۲۷ – شکل ظرف مدوری چگونه باشد تا کاهش سطح مایع هنگام خروج از آن یکنواخت باشد ؟

۲۵۲۸ – سرعت انهدام رادیوم در هر لحظهٔ زمان با کمیت موجود آن متناسب است . مطلوبست قانون انهدام رادیوم در صورتیکه در مبداء زمان $t = 0$ مقدار آن Q_0 گرم و پس از گذشت $T = 1600$ سال مقدار آن نصف شود .

۲۵۲۹ – برای حالت فرایند مرتبهٔ دوم سرعت واکنش شیمیایی گذر از مادهٔ A به مادهٔ B با حاصل ضرب غلظت های این مواد متناسب است . پس از گذشت $t = 1$ ساعت چند درصد از مادهٔ B در ظرف وجود خواهد داشت در صورتیکه بازای $t = 0$ دقیقه مقدار ۲۰% از مادهٔ B وجود داشته باشد و بازای $t = 10$ دقیقه مقدار آن به ۸۰% رسیده باشد ؟

۲۵۳۰ – طبق قانون هوک انبساط طول نسبی ε میله متناسب با تنش σ در مقطع عرضی آن است یعنی

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}$$

که در آن E مدول یونگ است .

مطلوبست تعیین انبساط طول میلهٔ وزین مخروطی شکل که قاعده‌اش ثابت شده و رأس آن بسمت پایین متوجه است در صورتیکه شعاع قاعدهٔ مخروط R و ارتفاع آن H و وزن مخصوصش γ باشد .

بخش ۱۱ — محاسبهٔ تقریبی انتگرالهای معین

بند ۱ — دستور مستطیل‌ها . اگر تابع $y=y(x)$ در قطعهٔ متناهی $[a,\ b]$ پیوسته و بتعداد کافی دفعات دیفرانسیل‌پذیر و $h=\frac{b-a}{n},\ y_i=y(x_i)$ ، $x_i=a+ih\quad(i=۰,\ ۱,\ \dots,\ n),$ باشد در آنصورت

$$\int_a^b y(x)\,dx=h\,(y_{۰}+y_{۱}+\dots+y_{n-۱})+R_n$$

که در آن

$$R_n=\frac{(b-a)\,h}{۲}\,y'(\xi)\quad(a\leqslant\xi\leqslant b)$$

بند ۲ — دستور ذوذنقه‌ها . با همان علائم داریم :

$$\int_a^b y(x)\,dx=h\left(\frac{y_{۰}+y_n}{۲}+y_{۱}+y_{۲}+\dots+y_{n-۱}\right)+R_n$$

که در آن

$$R_n=-\frac{(b-a)\,h^{۲}}{۱۲}\,f''(\xi')\quad(a\leqslant\xi'\leqslant b)$$

بند ۳ — دستور سهمی‌ها (دستور سیمپسون) . با فرض $n=۲k$ نتیجه می‌شود :

$$\int_a^b y(x)\,dx=\frac{h}{۳}\,[(y_{۰}+y_{۲k})+٤\,(y_{۱}+y_{۳}+\dots+y_{۲k-۱})+$$
$$+\,۲\,(y_{۲}+y_{٤}+\dots+y_{۲k-۲})]+R_n$$

که در آن

$$R_n=-\frac{(b-a)\,h^{٤}}{۱۸۰}\,f^{(٤)}(\xi'')\quad(a\leqslant\xi''\leqslant b)$$

۲۵۳۱ – با کاربرد دستور مستطیل‌ها $(n = ۱۲)$ مطلوبست محاسبهٔ تقریبی

$$\int_{۰}^{۲\pi} x \sin x \, dx$$

و نتیجه را با جواب دقیق مقایسه کنید .

بیاری دستور ذوذنقه‌ها انتگرالهای زیر را محاسبه و خطای آنها را برآورد کنید :

۲۵۳۲ – $(n = ۸)$ $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱ + x}$

۲۵۳۳ – $(n = ۱۲)$ $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱ + x^{۳}}$

۲۵۳۴ – $(n = ۶)$ $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱ - \frac{۱}{۴} \sin^{۲} x} \, dx$

بیاری دستور سیمپسون مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۲۵۳۵ – $(n = ۴)$ $\int_{۱}^{۹} \sqrt{x} \, dx$

۲۵۳۶ – $(n = ۶)$ $\int_{۰}^{\pi} \sqrt{۳ + \cos x} \, dx$

۲۵۳۷ – $(n = ۱۰)$ $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin x}{x} \, dx$

۲۵۳۸ – $(n = ۶)$ $\int_{۰}^{۱} \frac{x \, dx}{\ln(۱ + x)}$

۲۵۳۹ – با اختیار $n = ۱۰$ مطلوبست محاسبهٔ مقدار ثابت کاتالان

$$G = \int_{۰}^{۱} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} \, dx$$

۲۵۴۰ – با استفاده از دستور

$$\frac{\pi}{۴} = \int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱ + x^{۲}}$$

مطلوبست محاسبهٔ عدد π باتقریب $۱۰^{-۵}$

۲۵۴۱ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_{۰}^{۱} e^{x^{۲}}\,dx$$

با تقریب ۰,۰۰۱

۲۵۴۲ – مطلوبست محاسبهٔ $\int_{۰}^{۱}(e^{x}-۱)\ln\frac{۱}{x}\,dx$ با تقریب $۱۰^{-۴}$

۲۵۴۳ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال احتمالات

$$\int_{۰}^{+\infty} e^{-x^{۲}}\,dx$$

با تقریب ۰,۰۰۱

۲۵۴۴ – مطلوبست محاسبهٔ تقریبی طول بیضی دارای نیم‌قطرهای $a=۱۰$ و $b=۶$.

۲۵۴۵ – نمودار تابع

$$y=\int_{۰}^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt \quad (۰\leqslant x\leqslant ۲\pi)$$

را نقطه به نقطه با فرض $\Delta x=\frac{\pi}{۳}$ رسم کنید .

فصل ۵

سری ها

بخش ۱ — سری‌های عددی . آزمون‌های همگرایی سری‌های ثابت العلامت

بند ۱ — مفاهیم کلی . سری عددی

$$a_{۱}+a_{۲}+\dots+a_n+\dots=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n \qquad (۱)$$

وقتی همگرا (متقارب) نامیده میشود که

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S \quad (\text{مجموع سری})$$

وجود داشته باشد که در آن $S_n=a_{۱}+a_{۲}+\dots+a_n$. در حالت خلاف ، سری (۱) را واگرا (متباعد) نامند .

بند ۲ — معیار (آزمون) کوشی . برای همگرایی سری (۱) لازم و کافی است که برای هر $\varepsilon>۰$ عدد $N=N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد چنان که بازای $n>N$ و $p>۰$ نامساوی

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\sum_{i=n+۱}^{n+p}a_i\right|<\varepsilon$$

بر قرار باشد . بخصوص اگر سری همگرا باشد در آنصورت

$$\lim_{n\to\infty}a_n=۰$$

بند ۳ — نشانه (آزمون) مقایسهٔ I . هرگاه علاوه بر سری (۱) سری

$$b_{۱}+b_{۲}+\dots+b_n+\dots \qquad (۲)$$

را داشته باشیم اگر بازای $n\geqslant n_{۰}$ نامساوی

$$۰\leqslant a_n\leqslant b_n$$

بر قرار باشد در آنصورت : ۱) از همگرایی سری (۲) همگرایی سری (۱) نتیجه میشود ؛ ۲) از واگرایی سری (۱) واگرایی سری (۲) نتیجه میشود .

بویژه اگر $a_n \sim b_n$ ، بازای $n \to \infty$ در آنصورت سری‌های با جملات مثبت (۱) و (۲) همزمان همگرا یا واگرا هستند .

بند ٤ — <u>نشانهٔ مقایسهٔ II</u> . اگر

$$a_n = O^*\left(\frac{۱}{n^p}\right)^*$$

در آنصورت : الف) بازای $p > ۱$ سری (۱) همگرا ؛ ب) بازای $p \leqslant ۱$ واگرا است .

بند ٥ — <u>نشانهٔ دالامبر</u> . اگر $(n = ۱, ۲, \dots)$ $a_n > ۰$ و

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = q$$

در آنصورت : الف) بازای $q < ۱$ سری (۱) همگرا ؛ ب) بازای $q > ۱$ واگرا است .

بند ٦ — <u>نشانهٔ کوشی</u> . اگر $(n = ۱, ۲, \dots)$ $a_n \geqslant ۰$ و

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

در آنصورت : الف) بازای $q < ۱$ سری (۱) همگرا ؛ ب) بازای $q > ۱$ واگرا است .

بند ۷ — <u>نشانهٔ رابه</u> . اگر $(n = ۱, ۲, \dots)$ $a_n > ۰$ و

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+۱}} - ۱\right) = p$$

در آنصورت : الف) بازای $p > ۲$ سری (۱) همگرا ؛ ب) بازای $p < ۱$ واگرا است .

بند ۸ — <u>نشانهٔ گوس</u> . اگر $(n = ۱, ۲, \dots)$ $a_n > ۰$ و

$$\frac{a_n}{a_{n+۱}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{۱+\varepsilon}}$$

---

* — راجع به معنای نماد O^* فصل I ، بخش ٦ ، بند ۱ را ببینید .

که در آن $|\theta_n| < C$ و $\varepsilon > ۰$ در آنصورت : الف) بازای $\lambda > ۱$ سری (۱) همگرا ؛ ب) بازای $\lambda < ۱$ واگرا است ؛ پ) بازای $\lambda = ۱$ اگر $\mu > ۱$ سری (۱) همگرا و اگر $\mu \leqslant ۱$ واگرا است .

بند ۹ – نشانهٔ انتگرالی کوشی . اگر $(x > ۰)$ $f(x)$ تابع نامنفی ناصعودی‌ای باشد در آنصورت سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} f(n)$$

همزمان با انتگرال

$$\int_{۱}^{+\infty} f(x)\, dx$$

همگرا یا واگرا است .

همگرایی سریهای زیر را مستقیماً اثبات و مجموع آنها را پیدا کنید :

۲۵۴۶ – $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۸} + \ldots + \frac{(-۱)^{n-۱}}{۲^{n-۱}} + \ldots$

۲۵۴۷ – $\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}\right) + \left(\frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲}\right) + \ldots + \left(\frac{۱}{۲^n} + \frac{۱}{۳^n}\right) + \ldots$

۲۵۴۸ – $\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲^۲} + \frac{۵}{۲^۳} + \ldots + \frac{۲n-۱}{۲^n} + \ldots$

۲۵۴۹ – $\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \frac{۱}{n(n+۱)} + \ldots$

۲۵۵۰ – $\frac{۱}{۱ \times ۴} + \frac{۱}{۴ \times ۷} + \ldots + \frac{۱}{(۳n-۲)(۲n+۱)} + \ldots$

۲۵۵۱ – الف) $q \sin \alpha + q^۲ \sin ۲\alpha + \ldots + q^n \sin n\alpha + \ldots$

ب) $q \cos \alpha + q^۲ \cos \alpha + \ldots + q^n \cos n\alpha + \ldots \quad (|q|) < ۱)$

۲۵۵۲ – $\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\sqrt{n+۲} - ۲\sqrt{n+۱} + \sqrt{n}\right)$

۲۵۵۳ – همگرائی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \sin nx$ را بررسی کنید .

راهنمایی – نشان دهید که بازای $x \neq k\pi$ (k عددیست درست) هرگز $\sin nx \to ۰$ بازای $n \to \infty$ ممکن نیست .

۲۵۵۴ – ثابت کنید که اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا باشد در آنصورت سری $\sum_{n=۱}^{\infty} A_n$

که در آن $(p_۱ = ۱,\ p_۱ < p_۲ < \dots)$ $\sum\limits_{i = p_n}^{p_n + ۱ - ۱} a_i$ A_n که در نتیجهٔ گروه بندی جملات سری مفروض بدون بهم ریختن ترتیب آنها بدست میآید نیز همگرا و دارای همان مجموع است . مطلب عکس درست نیست . مثال بیاورید .

۲۵۵۵ – ثابت کنید که اگر جملات سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ مثبت و سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} A_n$ منتج از گروه بندی جملات این سری، همگرا باشد در آنصورت سری مفروض نیز همگرا است .

همگرایی سریهای زیر را بررسی کنید :

۲۵۵۶ – $۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots$

۲۵۵۷ – $۰,۰۰۱ + \sqrt{۰,۰۰۱} + \sqrt[۳]{۰,۰۰۱} + \dots$

۲۵۵۸ – $\frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \dots + \frac{۱}{n!} + \dots$

۲۵۵۹ – $۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} + \dots + \frac{۱}{۲n - ۱} + \dots$

۲۵۶۰ – $\frac{۱}{۱۰۰۱} + \frac{۱}{۲۰۰۱} + \frac{۱}{۳۰۰۱} + \dots + \frac{۱}{۱۰۰۰n + ۱} + \dots$

۲۵۶۱ – $۱ + \frac{۲}{۳} + \frac{۳}{۵} + \dots + \frac{n}{۲n - ۱} + \dots$

۲۵۶۲ – $۱ + \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۵^۲} + \dots + \frac{۱}{(۲n - ۱)^۲} + \dots$

۲۵۶۳ – $\frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{۲\sqrt{۳}} + \frac{۱}{۳\sqrt{٤}} + \dots + \frac{۱}{n\sqrt{n + ۱}} + \dots$

۲۵۶٤ – $\frac{۱}{\sqrt{۱ \times ۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳ \times ۵}} + \dots + \frac{۱}{\sqrt{(۲n - ۱)(۲n + ۱)}} + \dots$

۲۵۶۵ – ثابت کنید که سری اعدادی که نسبت به جملات تصاعد حسابی معکوس باشند واگرا است .

۲۵۶۶ – ثابت کنید که اگر سری‌های $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n(A)$ و $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n(B)$ همگرا باشند و $(n = ۱, ۲, \dots)$ $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ در آنصورت سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} c_n(C)$

نیز همگرا است . اگر سری‌های (A) و (B) واگرا باشند در بارهٔ همگرایی سری (C) چه میتوان گفت ؟

۲۵۶۷ – هرگاه دو سری واگرای

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

با جملات نامنفی مفروض باشند در بارهٔ همگرایی سری های :

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ و ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$

۲۵۶۸ – ثابت کنید که اگر سری $(a_n \geqslant 0)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد در آنصورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ نیز همگرا است . عکس مطلب درست نیست . مثال بیاورید .

۲۵۶۹ – ثابت کنید که اگر سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ همگرا باشند در آنصورت سری‌های

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

نیز همگرا میباشند .

۲۵۷۰ – ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n \to \infty} n a_n = a \neq 0$$

در آنصورت سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است .

۲۵۷۱ – ثابت کنید که اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با جملات مثبت و نزولی یکنوا همگرا باشد در آنصورت

$$\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$$

۲۵۷۲ – آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با شرط

$$\lim_{n \to \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0$$

بازای $p = 1, 2, 3, \dots$ همگرا است ؟

با استفاده از معیار کوشی همگرایی سری‌های زیر را ثابت کنید :

۲۵۷۳ – $a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots \quad (|a_n| < 10)$

۲۵۷۴ – $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots$

۲۵۷۵ – $\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos x}{2} + \dots + \frac{\cos nx - \cos (n+1)x}{n} + \dots$

۲۵۷۵٫۱ – $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \dots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \dots$

راهنمایی – از نامساوی زیر استفاده کنید :

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

با استفاده از معیار کوشی واگرایی سری‌های زیر را ثابت کنید :

۲۵۷۶ – $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

۲۵۷۷ – $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

۲۵۷۷٫۱ – $\frac{1}{\sqrt{1 \times 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \times 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots$

با استفاده از نشانه‌های مقایسهٔ دالامبر یا کوشی همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید :

۲۵۷۸ – $\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \dots + \frac{1000^n}{n!} + \dots$

۲۵۷۹ – $\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \dots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \dots$

۲۵۸۰ – $\frac{۱!}{۱}+\frac{۲!}{۲^۲}+\frac{۳!}{۳^۳}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$

۲۵۸۱ – الف) $\frac{۲\times۱!}{۱}+\frac{۲^۲\times۲!}{۲^۲}+\frac{۲^۳\times۳!}{۳^۳}+\ldots+\frac{۲^n n!}{n^۳}+\ldots$

ب) $\frac{۳\times۱!}{۱}+\frac{۳^۲\times۲!}{۲^۲}+\frac{۳^۳\times۳!}{۳^۳}+\ldots+\frac{۳^n n!}{n^n}+\ldots$

۲۵۸۲ – $\frac{(۱!)^۲}{۲}+\frac{(۲!)^۲}{۲^٤}+\frac{(۳!)^۲}{۲^۹}+\ldots+\frac{(n!)^۲}{۲^{n^۲}}+\ldots$

۲۵۸۳ – $\frac{۱۰۰۰}{۱}+\frac{۱۰۰۰\times۱۰۰۱}{۱\times۳}+\frac{۱۰۰۰\times۱۰۰۱\times۱۰۰۲}{۱\times۳\times۵}+\ldots$

۲۵۸٤ – $\frac{٤}{۲}+\frac{٤\times۷}{۲\times٦}+\frac{٤\times۷\times۱۰}{۲\times٦\times۱۰}+\ldots$

۲۵۸۵ – $$\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\sqrt{۲}-\sqrt[۳]{۲}\right)\left(\sqrt{۲}-\sqrt[۵]{۲}\right)\ldots\left(\sqrt{۲}-\sqrt[۲n+۱]{۲}\right)$$

۲۵۸۵,۱ – $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$

که در آن

$$a_n=\begin{cases}\frac{۱}{n}, & \text{اگر}\quad n=m^۲\\ \frac{۱}{n^۲}, & \text{اگر}\quad n\neq m^۲\end{cases}$$

(m – عددیست طبیعی) .

۲۵۸۵,۲ – $$\sum_{n=۱}^{\infty} nx\prod_{k=۱}^{n}\frac{\sin^۲ k\alpha}{۱+x^۲+\cos^۲ k\alpha}$$

۲۵۸٦ – $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^۲}{\left(۲+\frac{۱}{n}\right)^n}$

۲۵۸۷ – $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{۱}{n}}}{\left(n+\frac{۱}{n}\right)^n}$

۲۵۸۸ – $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt[n]{\ln n}}$

۲۵۸۹ – $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^{n-۱}}{(۲n^۲+n+۱)^{\frac{n+۱}{۲}}}$

۲۵۸۹,۱ – $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n^۵}{۲^n+۳^n}$

۲۵۸۹,۲ – $\sum_{n=۲}^{\infty}\left(\frac{n-۱}{n+۱}\right)^{n(n-۱)}$

۲۵۹۰ –
$$\sqrt{۲}+\sqrt{۲-\sqrt{۲}}+\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}+$$
$$+\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}+\dots$$

راهنمایی – $\sqrt{۲}=۲\cos\frac{\pi}{٤}$

۲۵۹۱ – ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+۱}}{a_n}=q \quad (a_n>۰)$$

در آنصورت $a_n=o(q_۱^n)$ که در آن $q_۱>q$.

۲۵۹۱,۱ – هرگاه برای جملات مثبت‌العلامهٔ سری $(a_n>۰)$ $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}a_n$ نامساوی

$$\frac{a_n+۱}{a_n}\leqslant\rho<۱$$

بازای $n\geqslant n_۰$ بر قرار باشد ، ثابت کنید که برای ماندهٔ سری

$$R_n=a_{n+۱}+a_{n+۲}+\dots$$

بازای $n\geqslant n_۰$ برآورد زیر را داریم :

$$R_n\leqslant a_{n_۰}\times\frac{\rho^{n-n_۰+۱}}{۱-\rho}$$

۲۵۹۱,۲ – چند جمله از سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{[(۲n)!!]^۲}{(٤n)!!}$$

که در آن $[(۲n)!!]^۲=۲\times٤\dots۲n$ ، کافی است اختیار شود تا مجموع جزئی S_n نظیر ، با مجموع S سری ، اختلافی کمتر از $\varepsilon=۱۰^{-٦}$ داشته باشد؟

۲۵۹۲ – ثابت کنید که اگر

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+۱}}{a_n}=q<۱ \quad (a_n>۰)$$

در آنصورت سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}a_n$ همگرا است .

عکس مطلب درست نیست . مثال زیر را در نظر بگیرید :

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۲^۳}+\frac{۱}{۳^۳}+\dots$$

۲۵۹۳ – ثابت کنید اگر برای سری $(a_n > ۰)$ $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+۱}}{a_n}=q \qquad (A)$$

وجود داشته باشد در آنصورت

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q \qquad (B)$$

نیز وجود دارد .

عکس مطلب درست نیست : اگر حد (B) وجود داشته باشد در آنصورت حد (A) ممکن است وجود نداشته باشد . مثال زیر را در نظر بگیرید :

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۳+(-۱)^n}{۲^{n+۱}}$$

۲۵۹۴ – ثابت کنید که اگر

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q \quad (a_n \geqslant ۰)$$

در **آنصورت** : الف) بازای $q < ۱$ سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا است ؛ ب) بازای $q > ۱$ سری واگرا است (نشانهٔ تعمیم یافتهٔ کوشی)

همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید :

۲۵۹۵ – $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۲+(-۱)^n}{۲^n}$

۲۵۹۶ – $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{a\cos^۲\frac{n\pi}{۳}}{۲^n}$

۲۵۹۷ – $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{n^۳\left[\sqrt{۲}+(-۱)^n\right]^n}{۳^n}$

۲۵۹۷,۱ – $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱+\cos n}{۲+\cos n}\right)^{۲n-\ln n}$

با استفاده از نشانه‌های رابه و گوس همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید :

۲۵۹۸ - $$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\times 3}{2\times 4}\right)^p + \left(\frac{1\times 2\times 5}{2\times 4\times 6}\right)^p + \dots$$

۲۵۹۹ - $$\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots$$

$$(a>0,\ b>0,\ d>0)$$

۲۶۰۰ - $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,e^n}{n^{n+p}}$$

۲۶۰۱ - $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\,!}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})}$$

۲۶۰۲ - $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)} \quad (q>0)$$

۲۶۰۳ - $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} \times \frac{1}{n^q}$$

۲۶۰۴ - $$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\times 3\times 5\ \dots\ (2n-1)}{2\times 4\times 6\ \dots\ (2n)}\right]^p \times \frac{1}{n^q}$$

۲۶۰۵ - $$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{q(q+1)\dots(q+n-1)}\right]^{\alpha} \quad (p>0,\ q>0)$$

۲۶۰۶ - ثابت کنید که اگر برای سری مثبت‌العلامه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n>0)$ بازای $n\to\infty$ شرط

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

مجرا باشد در آنصورت

$$a_n = \left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$$

که در آن $\varepsilon>0$ باندازۀ دلخواه کوچک است ؛ ضمناً اگر $p>0$ در آنصورت $a_n\to 0$ بازای $n\to\infty$ ، یعنی a_n بازای $n\geqslant n_0$ وقتی که $n\to\infty$، بطور نزولی یکنوا ، بسوی صفر میگراید .

با تعیین مرتبهٔ نزول جملهٔ عمومی a_n همگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ را بررسی کنید ، در صورتیکه :

۲۶۰۷ - $a_n = \dfrac{n^p + a_۱ n^{p-۱} + \ldots + a_p}{n^q + b_۱ n^{q-۱} + \ldots + b_q}$

که در آن $n^q + b_۱ n^{q-۱} + \ldots + b_q > ۰$

۲۶۰۸ - $a_n = \dfrac{۱}{n^p} \sin \dfrac{\pi}{n}$

۲۶۰۹ - $a_n = (\sqrt{n+۱} - \sqrt{n})^p \ln \dfrac{n-۱}{n+۱} \quad (n > ۱)$

۲۶۱۰ - $a_n = \ln^p \left(\sec \dfrac{\pi}{n}\right)$

۲۶۱۱ - $a_n = \log_{b^n} \left(۱ + \dfrac{\sqrt[n]{a}}{n}\right) \quad (a > ۰,\ b > ۰)$

۲۶۱۲ - $a_n = \left[e - \left(۱ + \dfrac{۱}{n}\right)^n\right]^p$

۲۶۱۳ - $a_n = \dfrac{۱}{n^{۱ + \frac{k}{\ln n}}}$

۲۶۱۴ - $a_n = \dfrac{۱}{n^{۱ + \frac{۱}{n}}}$

۲۶۱۴٫۱ – مطلوبست اثبات نشانهٔ ژامه : سری مثبت العلامهٔ $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n \quad (a_n \geqslant ۰)$ همگرا است اگر

$\left(۱ - \sqrt[n]{a_n}\right) \dfrac{n}{\ln n} \geqslant p > ۱$ بازای $n > n_۰$

و واگرا است اگر

$\left(۱ - \sqrt[n]{a_n}\right) \dfrac{n}{\ln n} \leqslant ۱$ بازای $n > n_۰$

۲۶۱۵ – ثابت کنید که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n \quad (a_n > ۰)$ وقتی همگرا است که عددی مانند $\alpha > ۰$ وجود داشته باشد بطوریکه $\dfrac{\ln \frac{۱}{a_n}}{\ln n} \geqslant ۱ + \alpha$

بازای $n \geqslant n_{۰}$ ، و وقتی واگرا است که $\frac{\ln \frac{۱}{a_n}}{\ln n} \leqslant ۱$ بازای $n \geqslant n_{۰}$ (نشانهٔ لگاریتمی) .

همگرایی سری‌های دارای جملهٔ عمومی زیر را بررسی کنید :

۲۶۱۶ - $a_n = n^{\ln \text{[illegible]}} \quad (x > ۰)$

۲۶۱۷ - $a_n = \frac{۱}{(\ln \ln n)^{\ln n}} \quad (n > ۱)$

۲۶۱۸ - $a_n = \frac{۱}{(\ln n)^{\ln \ln n}} \quad (n > ۱)$

با استفاده از نشانهٔ انتگرالی کوشی مطلوبست بررسی همگرایی سریهای دارای جملهٔ عمومی زیر :

۲۶۱۹ - $a_n = \frac{۱}{n \ln^p n} \quad (n > ۱)$

۲۶۲۰ - $a_n = \frac{۱}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q} \quad (n > ۲)$

۲۶۲۰,۱ - همگرایی سری زیر را بررسی کنید :

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\ln ۲ \times \ln ۳ \ \ldots \ \ln (n+۱)}{\ln (۲+p) \times \ln (۳+p) \ \ldots \ \ln (n+۱+p)} \quad (p > ۰)$$

۲۶۲۰,۲ - همگرایی سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\nu (n)}{n^{۲}}$$

را که در آن $\nu (n)$ تعداد ارقام عدد n است بررسی کنید .

۲۶۲۰,۳ - فرض میکنیم $\lambda_n \ (n = ۱, ۲, \ldots)$ ریشه‌های مثبت متوالی معادلهٔ

$$\operatorname{tg} x = x$$

باشد . مطلوبست بررسی همگرایی سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \lambda_n^{-۲}$$

۲۶۲۱ – همگرایی سری زیر را بررسی کنید :

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{\ln(n!)}$$

۲۶۲۲ – ثابت کنید که سری با جملات مثبت نزولی یکنوا $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ با سری $\sum_{n=۰}^{\infty} ۲^n a_{۲^n}$ تواماً همگرا یا واگرا است .

۲۶۲۳ – هرگاه $f(x)$ تابع ناصعودی یکنوای مثبتی باشد ثابت کنید که اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f(n)$ همگرا باشد در آنصورت برای ماندهٔ آن

$$R_n = \sum_{k=n+۱}^{\infty} f(k)$$

بر آورد زیر محقق است :

$$\int_{n+۱}^{+\infty} f(x)\,dx < R_n < f(n+۱) + \int_{n+۱}^{+\infty} f(x)\,dx$$

با استفاده از این مطلب مجموع سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۳}$$

را با تقریب ۰٫۰۱ پیدا کنید .

۲۶۲٤ – مطلوبست اثبات نشانهٔ یرماکوف : هرگاه $f(x)$ تابع نزولی یکنوای مثبتی باشد و

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda$$

در آنصورت سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f(n)$ اگر $\lambda < ۱$ ، همگرا و اگر ، $\lambda > ۱$ ، واگرا است .

۲۶۲۵ – نشانهٔ لوباچفسکی را ثابت کنید : سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ با جملات مثبت و بطور یکنوا گراینده بصفر ، همزمان با

$$\sum_{m=۰}^{\infty} p_m ۲^{-m}$$

همگرا یا واگرا است ، که در آن p_m بزرگترین نمرهٔ جملات a_n صادق در نامساوی زیر است :

$$a_n \geqslant ۲^{-m} \quad (n = ۱, ۲, \ldots, p_m)$$

همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید :

۲۶۲۶ - $$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{\sqrt{n+۲} - \sqrt{n-۲}}{n^{\alpha}}$$

۲۶۲۷ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \sqrt{n+a} - \sqrt[۴]{n^۲+n+b}$$

۲۶۲۸ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{۴n-۲} - \sin \frac{n\pi}{۲n+۱}\right)$$

۲۶۲۹ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{۱}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+۱}{n}}\right)$$

۲۶۳۰ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$$

۲۶۳۱ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} e^{-\sqrt[۳]{n}}$$

۲۶۳۲ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} n^۲ e^{-\sqrt{n}}$$

۲۶۳۳ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} n^{\frac{۱}{n^۲+۱}} - ۱$$

۲۶۳۴ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}}$$

۲۶۳۵ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\ln^۲\left(\sin \frac{۱}{n}\right)}$$

۲۶۳۶ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^۳}$$

۲۶۳۷ - $$\sum_{n=۳}^{\infty} \ln\left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}}\right)$$

۲۶۳۸ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$$

۲۶۳۹ - $$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

۲۶۴۰ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \left(a^{\frac{۱}{n}} = \frac{b^{\frac{۱}{n}} + c^{\frac{۱}{n}}}{۲}\right) \quad (c > ۰,\ b > ۰,\ a > ۰)$$

٢٦٤١ − $$\sum_{n=١}^{\infty}\left(n^{n^{\alpha}}-١\right)$$

٢٦٤٢ − $$\sum_{n=١}^{\infty}\left[\ln\frac{١}{n^{\alpha}}-\ln\left(\sin\frac{١}{n^{\alpha}}\right)\right]$$

٢٦٤٣ − $$\sum_{n=١}^{\infty} a^{-(b\ln n+c\ln^{٢}n)}\quad (a>٠)$$

٢٦٤٤ − $$\sum_{n=١}^{\infty}\frac{n^{٢n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}\quad (b>٠,\ a>٠)$$

٢٦٤٥ − $$\sum_{n=١}^{\infty}\frac{[(n+١)!]^{n}}{٢!\times ٤!\ldots(٢n)!}$$

همگرایی سری‌های $\sum_{n=١}^{\infty} u_n$ دارای جمله‌های عمومی زیر را بررسی کنید :

٢٦٤٦ − $$u_n=\int_{٠}^{\frac{١}{n}}\frac{\sqrt{x}\,dx}{١+x^{٢}}$$

٢٦٤٧ − $$u_n=\frac{١}{\int_{٠}^{n}\sqrt[٤]{١+x^{٤}}\,dx}$$

٢٦٤٨ − $$u_n=\int_{n\pi}^{(n+١)\pi}\frac{\sin^{٢}x}{x}\,dx$$

٢٦٤٩ − $$u_n=\int_{n}^{n+١}e^{-\sqrt{x}}\,dx$$

٢٦٥٠ − $$u_n=\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}\frac{\sin^{٣}x}{١+x}\,dx$$

٢٦٥١ − $$u_n=\frac{١!+٢!+\ldots+n!}{(٢n)!}$$

٢٦٥٢ − $$u_n=\frac{\sum_{k=١}^{n}\ln^{٢}k}{n^{\alpha}}$$

با تعویض دنباله‌های $x_n\,(n=١,\ ٢,\ \ldots)$ با سریهای نظیر ، همگرایی آنها را بررسی کنید در صورتیکه :

٢٩٥٣ − $$x_n=١+\frac{١}{\sqrt{٢}}+\ldots+\frac{١}{\sqrt{n}}-٢\sqrt{n}$$

۲۶۵۴ – $x_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^۲}{۲}$

۲۶۵۵ – تخمیناً چند جمله از سری‌های زیر را باید اختیار کرد تا مجموع آنها با تقریب $۱۰^{-۵}$ بدست آید :

الف) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ ؛ ب) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n}{(n+۱)!}$ ؛ پ) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲n-۱)!}$

بخش ۲ – نشانه‌های همگرایی سریهای متغیر العلامه

بند ۱ – همگرایی مطلق سری . سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n \qquad (۱)$$

را وقتی مطلقاً همگرا نامند که سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n| \qquad (۲)$$

همگرا باشد . در این صورت سری (۱) نیز همگرا است . مجموع سری مطلقاً همگرا مستقل از ترتیب جملات آن است .

برای تعیین همگرایی مطلق سری (۱) کافی است در سری (۲) نشانه‌های معلوم همگرایی سری‌های ثابت‌العلامه را بکار برد .

اگر سری (۱) همگرا ولی سری (۲) واگرا باشد در آنصورت سری (۱) را همگرای مشروط (نا مطلق) نامند . مجموع سری همگرای مشروط را با تغییر آرایش جمله‌های آن میتوان برابر عدد دلخواهی نمود (قضیهٔ ریمن) .

بند ۲ – نشانهٔ لایب‌نیتز . سری متناوب‌العلامهٔ

$$b_۱ - b_۲ + b_۳ - b_۴ + \ldots + (-۱)^{n-۱} b_n + \ldots$$

$(b_n \geqslant ۰)$ همگرا است (بطور کلی ، همگرای نامطلق) اگر : الف) $b_n \geqslant b_{n+۱}$ $(n = ۱, ۲, \ldots)$ ؛ ب) $\lim_{n \to \infty} b_n = ۰$. در این صورت برای ماندهٔ سری

$$R_n = (-۱)^n b_{n+۱} + (-۱)^{n+۱} b_{n+۲} + \cdots$$

بر آورد زیر را داریم :

$$R_n = (-۱)^n \theta_n b_{n+۱} \quad (۰ \leqslant \theta_n \leqslant ۱)$$

بند ۳ — نشانهٔ آبل . سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n b_n \qquad (۳)$$

وقتی همگراست که : ۱) سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ؛ ۲) اعداد $b_n (n=۱,۲,\ldots)$ تشکیل یک دنبالهٔ یکنوای کراندار بدهند .

بند ٤ — نشانهٔ دیریکله . سری (۳) وقتی همگرا است که : ۱) مجموع جزئی $A_n=\sum_{i=۱}^{n} a_i$ کراندار باشد ؛ ۲) b_n بازای $n\to\infty$ بطور یکنوا بسمت صفر بگراید .

۲۶۵۶ — ثابت کنید که جملات یک سری را که همگرای نامطلق است میتوان بدون تغییر محل جملات طوری گروه‌بندی کرد که سری حاصل مطلقاً همگرا باشد .

۲۶۵۷ — ثابت کنید که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ وقتی همگرا است که شرطهای زیر برقرار باشد : الف) جملهٔ عمومی این سری a_n بازای $n\to\infty$ بسمت صفر بگراید ؛ ب) سری $\sum_{n=۱}^{\infty} A_n$ حاصل از گروه‌بندی جملات سری مفروض بدون بهم ریختن ترتیب آنها همگرا باشد ؛ پ) تعداد عناصر a_i موجود در جملهٔ $(۱=p_۱<p_۲<\ldots)$ $A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+۱}-۱} a_i$ محدود باشد .

۲۶۵۸ — ثابت کنید که اگر جملات یک سری را طوری جابجا کنیم که هیچیک از آنها از وضع سابق خود بیشتر از m جا بدور نشود (m عدد قبلا داده‌شده‌ای است) مجموع این سری تغییر نمیکند .

همگرایی سری‌های زیر را اثبات و مجموع آنها را پیدا کنید :

۲۶۵۹ — $۱-\frac{۳}{۲}+\frac{۵}{٤}-\frac{۷}{۸}+\ldots$

۲۶۶۰ — $۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{٤}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۳۲}+\ldots$

۲۶۶۱ — $۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{٤}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}+\ldots$

راهنمایی – دستور $۱+\frac{۱}{۲}+\ldots+\frac{۱}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$ را که در آن C مقدار ثابت اولر و $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=۰$ است بکار برید .

۲۶۶۲ – با علم به اینکه $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}=\ln ۲$ ، مطلوبست محاسبهٔ مجموع سری‌های حاصل از سری مفروض در نتیجهٔ جابجا کردن جملات آن :

الف) $۱+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۴}+\ldots$

و

ب) $۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۸}+\ldots$

۲۶۶۳ – جملات سری همگرای

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{\sqrt{n}}$$

را طوری جابجا کنید که واگرا شود .

همگرایی سری‌های متغیرالعلامهٔ زیر را بررسی کنید :

۲۶۶۴ – $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{\frac{n(n-۱)}{۲}}}{۲^{n}}$

۲۶۶۵ – $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}\left(\frac{۲n+۱۰۰}{۳n+۱}\right)^{n}$

۲۶۶۶ – $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۹}-\ldots$

۲۶۶۶,۱ – هرگاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}b_n \qquad (۱)$$

که در آن $b_n>۰$ و $b_n\to۰$ بازای $n\to\infty$ آیا از این جا نتیجه میشود که سری (۱) همگرا است ؟ مثال زیر را در نظر بگیرید :

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{۲+(-۱)^{n}}{n}$$

۲۶۶۷ – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$

۲۶۶۸ – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$

۲۶۶۹ – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

۲۶۷۰ – $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

۲۶۷۱ – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi \sqrt{n^2+k^2}\right)$

۲۶۷۲ – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$

۲۶۷۳ – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

۲۶۷۳,۱ – $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$

۲۶۷۴ – ثابت کنید که سری متناوب‌العلامه

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1} b_n + \ldots \quad (b_n > 0)$$

وقتی همگراست که

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

که در آن $p > 0$ (۲۶۵۶ را ببینید) .

همگرایی مطلق (سوای ۲۶۹۰) و مشروط سریهای زیر را بررسی کنید :

۲۶۷۵ – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

۲۶۷۶ – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$

۲۶۷۷ – $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right]$

۲۶۷۸ – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$

۲۶۷۹ – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$

۲۶۸۰ – $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$

۲۶۸۱ – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p}$

۲۶۸۲ – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}$

۲۶۸۳ – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$

۲۶۸۴ – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{2^n}$

٢٦٨٥ - $$\sum_{n=١}^{\infty}\frac{(-١)^n}{\sqrt[n^{٢}]{n}}$$

٢٦٨٦ - $$\sum_{n=٢}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{١٢}}{\ln n}$$

٢٦٨٧ - $$\sum_{n=١}^{\infty}\frac{(-١)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$$

٢٦٨٨ - $$\sum_{n=١}^{\infty}\frac{(-١)^{[\ln n]}}{n}$$

٢٦٨٩ - $$\sum_{n=١}^{\infty}(-١)^{n-١}\left[\frac{١\times٣\times٥\times\ldots\times(٢n-١)}{٢\times٤\times٦\times\ldots\times(٢n)}\right]^p$$

٢٦٩٠ - $$\sum_{n=١}^{\infty}\frac{\sin n\times\sin n^{٢}}{n}$$

٢٦٩١ - $$\sum_{n=١}^{\infty}\sin n^{٢}$$

راهنمایی – ثابت کنید که $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^{٢}\neq ٠$

٢٦٩٢ – فرض کنیم

$$R(x)=\frac{a_٠x^p+a_١x^{p-١}+\ldots a_p}{b_٠x^q+b_١x^{q-١}+\ldots+b_q}$$

تابعی باشد گویا ، که در آن $a_٠\neq ٠$ ، $b_٠\neq ٠$ و $|b_٠x^q+b_١x^{q-١}+\ldots+b_q|>٠$ بازای $x\geqslant n_٠$. مطلوبست بررسی همگرایی مطلق و مشروط سری

$$\sum_{n=n_٠}^{\infty}(-١)^nR(n)$$

همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید :

٢٦٩٣ - $$\frac{١}{١^p}-\frac{١}{٢^q}+\frac{١}{٣^p}-\frac{١}{٤^q}+\frac{١}{٥^p}-\frac{١}{٦^q}+\ldots$$

٢٦٩٤ - $$١+\frac{١}{٣^p}-\frac{١}{٢^p}+\frac{١}{٥^p}+\frac{١}{٧^p}-\frac{١}{٤^p}+\ldots$$

٢٦٩٥ - $$١+\frac{١}{٣^p}-\frac{١}{١^p}+\frac{١}{٥^p}+\frac{١}{٧^p}-\frac{١}{٣^p}+\frac{١}{٩^p}+\frac{١}{١١^p}-\frac{١}{٥^p}+\ldots$$

٢٦٩٦ - $$١-\frac{٢}{٢^q}+\frac{١}{٣^p}+\frac{١}{٤^p}-\frac{٢}{٥^q}+\frac{١}{٦^p}+\frac{١}{٧^p}-\frac{٢}{٨^q}+\frac{١}{٩^p}+\ldots$$

٢٦٩٧ – ثابت کنید که سری‌های

الف) $\sin x+\frac{\sin ۲x}{۲}+\frac{\sin ۳x}{۳}+\dots$

ب) $\cos x+\frac{\cos ۲x}{۲}+\frac{\cos ۳x}{۳}+\dots$

در فاصلهٔ $(۰, \pi)$ همگرای مطلق نیستند .

۲۶۹۸ – برای سری‌های

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p} \quad (۰<x<\pi)$$

بازای مجموعهٔ پارامترهای (p, x) مطلوبست تعیین : الف) حوزهٔ همگرایی مطلق ؛ ب) حوزهٔ همگرایی نامطلق .

۲۶۹۸٫۱ – همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{(-۱)^n\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ ؛ ب) $\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{۱}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$ ؛

پ) $\sum_{n=۱۰}^{\infty}\frac{\sin n}{n+۱۰\sin n}$

۲۶۹۹ – برای سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{(۱+p)(۲+p)\dots(n+p)}{n!\,n^q}$$

مطلوبست تعیین : الف) حوزهٔ همگرایی مطلق ؛ ب) حوزهٔ همگرایی مشروط .

۲۷۰۰ – مطلوبست بررسی همگرایی سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\binom{m}{n}$$

که در آن $\binom{m}{n}=\frac{m(m-۱)\dots(m-n+۱)}{n!}$

۲۷۰۱ – اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ همگرا و

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=۱$$

باشد در آنصورت آیا میتوان گفت که سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n$ نیز همگرا است ؟

مثالهای $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n}}$ و $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \left[\frac{(-۱)^n}{\sqrt{n}}+\frac{۱}{n}\right]$ را در نظر بگیرید .

۲۷۰۲ – فرض میکنیم سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرای نامطلق باشد و

$$P_n=\sum_{i=۱}^{n}\frac{|a_i|+a_i}{۲},\qquad N_n=\sum_{i=۱}^{n}\frac{|a_i|-a_i}{۲}$$

ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=۱$$

۲۷۰۳ – ثابت کنید که مجموع سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^p}$$

برای هر $p>۰$ بین $\frac{۱}{۲}$ و ۱ قرار دارد .

۲۷۰۳,۱ – چند جمله از سری‌های زیر را باید اختیار کرد تا مجموع آنها را بتوان با تقریب $\varepsilon = ۱۰$ بدست آورد :

الف) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{\sqrt{n^۲+۱}}$ ؛ ب) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin n^\circ}{\sqrt{n}}$

۲۷۰۴ – ثابت کنید که اگر جملات سری

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\dots$$

را طوری گروه‌بندی کنیم که در پی هر p جملهٔ مثبت متوالی ، q جملهٔ منفی متوالی آید در آنصورت مجموع سری جدید عبارتست از

$$\ln ۲+\frac{۱}{۲}\ln\frac{p}{q}$$

۲۷۰۵ – ثابت کنید که اگر جملات سری هارمونیک

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{٤}+\dots$$

را جابجا نکرده علامت آنها را بنحوی عوض کنیم که بدنبال p جمله مثبت ، q جملهٔ منفی $(p\neq q)$ قرار گیرد در آنصورت این سری واگرا خواهد ماند . همگرایی فقط بازای $p=q$ وجود دارد .

بخش ۳ – اعمال روی سری‌ها

مجموع و حاصل ضرب سریها . بنا به تعریف فرض میشود :

الف) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=۱}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ ؛

ب) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=۱}^{\infty} c_n$

که در آن

$$c_n = a_۱b_n + a_۲b_{n-۱} + \dots + a_nb_۱$$

تساوی الف بی قید دارای معناست اگر هر دو سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ و $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} b_n$ همگرا باشند و تساوی ب وقتی دارای معناست (بدون قید) که علاوه بر این دست کم یکی از این سری‌ها مطلقاً همگرا باشد .

۲۷۰۶ – راجع به مجموع دو سری در صورتیکه: الف) یکی از آنها همگرا و دیگری واگرا باشد ؛ ب) هر دو سری واگرا باشند چه میتوان گفت؟

۲۷۰۷ – مطلوبست محاسبهٔ مجموع دو سری :

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\left[\frac{۱}{۳^n}+\frac{(-۱)^n}{n^۳}\right]+\sum_{n=۱}^{\infty}\left[\frac{۱}{۳^{n+۱}}+\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۳}\right]$$

مجموع سری‌های زیر را پیدا کنید :

۲۷۰۸ – $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\left[\frac{۱}{۲^n}+\frac{(-۱)^n}{۳^n}\right]$

۲۷۰۹ – $\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos\frac{۲n\pi}{۳}}{۲^n}$

۲۷۱۰ – $\sum_{n=۰}^{\infty} x^{[\frac{n}{۲}]}\, y^{[\frac{n+۱}{۲}]} \quad (|xy|<۱)$

۲۷۱۱ – نشان دهید که $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!} \times \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n!} = ۱$

۲۷۱۲ – نشان دهید که $(|q|<۱)$ $\left(\sum_{n=۰}^{\infty} q^n\right)^۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} (n+۱)q^n$

۲۷۱۳ – نشان دهید که مجذور سری همگرای

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{\sqrt{n}}$$

یک سری واگرا است.

۲۷۱٤ – ثابت کنید که حاصل ضرب دو سری همگرای

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n^{\alpha}} \quad (\alpha>۰) \quad \text{و} \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n^{\beta}} \quad (\beta>۰)$$

بازای $\alpha+\beta>۱$ همگرا و بازای $\alpha+\beta<۱$ واگرا است.

۲۷۱۵ – تحقیق کنید که حاصل ضرب دو سری واگرای

$$۱-\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۳}{۲}\right)^{n} \quad \text{و} \quad ۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۳}{۲}\right)^{n-۱}\left(۲^{n}+\frac{۱}{۲^{n+۱}}\right)$$

یک سری مطلقاً همگرا است.

بخش ٤ — سریهای تابعی

بند ۱ — حوزهٔ همگرایی. مجموعهٔ $X_۰$ از آن مقدارهای x که بازای آنها سری تابعی

$$u_۱(x)+u_۲(x)+\dots+u_n(x)+\dots \qquad (۱)$$

همگرا باشد حوزهٔ همگرایی این سری نامیده میشود و تابع

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n} u_i(x) \quad (x\in X_۰)$$

مجموع آن است.

بند ۲ — همگرایی یکنواخت . دنبالهٔ توابع

$$f_{۱}(x),\ f_{۲}(x),\ \dots ,\ f_n(x),\ \dots$$

را روی مجموعهٔ X وقتی همگرای یکنواخت نامند که :

۱) تابع حدی زیر وجود داشته باشد :

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x\in X)$$

۲) بازای هر عدد دلخواه $\varepsilon > ۰$ بتوان عدد $N=N(\varepsilon)$ را تعیین نمود چنان که

$$|f(x)-\mathrm{f}_n(x)|<\varepsilon$$

بازای $n>N$ و $x\in X$.

در این حالت مینویسند $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

سری تابعی (۱) را روی مجموعهٔ X وقتی همگرای یکنواخت نامند که روی این مجموعه دنبالهٔ مجموع های جزئی آن

$$S_n(x)=\sum_{i=۱}^{n} u_i(x) \quad (n=۱,\ ۲,\ \dots)$$

همگرای یکنواخت باشد .

بند ۳ — معیار کوشی . برای همگرائی یکنواخت سری (۱) روی مجموعهٔ X لازم و کافی است که بازای هر $\varepsilon>۰$ عدد $N=N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد چنان که بازای $n>N$ و $p>۰$ نامساوی

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{i=n+۱}^{n+p} u_i(x)\right|<\varepsilon$$

برای هر $x\in X$ بر قرار باشد .

بند ٤ — نشانهٔ ویرشتراس . سری (۱) وقتی روی مجموعهٔ X مطلقاً و بطور یکنواخت همگرا است که سری عددی همگرای

$$c_{۱}+c_{۲}+\dots+c_n+\dots \qquad (۲)$$

وجود داشته باشد چنان که

$$|u_n(x)|\leqslant c_n \text{ بازای } (n=۱,\ ۲,\ \dots)\ x\in X$$

بند ٥ — نشانهٔ آبل . سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$$

در صورتی روی مجموعهٔ X همگرای یکنواخت است که : ۱) سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n(x)$ روی مجموعهٔ X همگرای یکنواخت باشد : ۲) توابع $b_n(x)$ $(n = ۱, ۲, \ldots)$ مجموعاً کراندار و بازای هر x دنبالهٔ یکنوا تشکیل دهند .

بند ۶ — نشانهٔ دیریکله . سری (۳) روی مجموعهٔ X در صورتی همگرای یکنواخت است که : ۱) مجموع های جزئی $\sum_{n=۱}^{N} a_n(x)$ مجموعاً کراندار باشد ؛ ۲) دنبالهٔ $b_n(x)$ $(n = ۱, ۲, \ldots)$ برای هر x یکنوا باشد و روی X بازای $n \to \infty$ بطور یکنواخت بسمت صفر میل کند .

بند ۷ — ویژگی‌های سری‌های تابعی . الف) مجموع سری همگرای یکنواخت از توابع پیوسته تابعی است پیوسته .

ب) اگر سری تابعی (۱) روی هر $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ بطور یکنواخت همگرا باشد و حدود متناهی

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = \mathrm{A}_n \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

وجود داشته باشد در آنصورت ۱) سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \mathrm{A}_n$ همگرا است ؛ ۲) تساوی زیر بر قرار است :

$$\lim_{x \to a} \left\{ \sum_{n=۱}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=۱}^{\infty} \left\{ \lim_{x \to a} u_n(x) \right\}$$

پ) اگر جملات سری همگرای (۱) بازای $a < x < b$ بطور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر و سری مشتقات $\sum_{n=۱}^{\infty} u'_n(x)$ روی فاصلهٔ (a, b) همگرای یکنواخت باشد در آنصورت

$$\left[\sum_{n=۱}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=۱}^{\infty} u'_n(x) \quad \text{بازای} \quad x \in (a, b)$$

ت) اگر جملات سری (۱) پیوسته و این سری روی قطعهٔ متناهی $[a, b]$ همگرای یکنواخت باشد در آنصورت

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=۱}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=۱}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx \qquad (۴)$$

بطور کلی دستور (٤) در صورتی درست است که $\int_a^b R(x)\,dx \to ۰$ بازای $n \to \infty$ که در آن $R_n(x) = \sum_{i=n+۱}^{\infty} u_i(x)$ شرط اخیر برای انتگرال‌گیری با حدود نامتناهی نیز دارای اعتبار است .

مطلوبست تعیین حوزهٔ همگرایی (مطلق و مشروط) سریهای تابعی زیر :

۲۷۱۶ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{x^n}$$

۲۷۱۷ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۲n-۱} \left(\frac{۱-x}{۱+x}\right)^n$$

۲۷۱۸ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{n+۱} \left(\frac{x}{۲x+۱}\right)^n$$

۲۷۱۹ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱ \times ۳ \ldots (۲n-۱)}{۲ \times ٤ \ldots (۲n)} \left(\frac{۲x}{۱+x^۲}\right)^n$$

۲۷۲۰ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n \times ۳^{۲n}}{۲^n} x^n (۱-x)^n$$

۲۷۲۱ - $$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۲^n \sin^n x}{n^۲}$$

۲۷۲۲ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{(x+n)^p}$$

۲۷۲۳ - $$(q > ۰;\ ۰ < x < \pi) \qquad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{۱+n^q}$$

۲۷۲٤ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{۱-x^n}$$ (سری لامبرت)

۲۷۲٥ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$$

۲۷۲٦ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{۱+x^{۲n}}$$

۲۷۲۷ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{(۱+x)(۱+x^۲)\ldots(۱+x^n)}$$

۲۷۲۸ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} n e^{-nx}$$

۲۷۲۹ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt[n]{n!}} \times \frac{۱}{۱+a^{۲n}x^۲}$$

۲۷۳۰ - $$(x > ۰) \qquad \sum_{n=۱}^{\infty} (۲-x)\left(۲-x^{\frac{۱}{۲}}\right)\left(۲-x^{\frac{۱}{۳}}\right)\ldots\left(۲-x^{\frac{۱}{n}}\right)$$

۲۷۳۱ – $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$$

۲۷۳۲ – $$(x > ۰;\ y > ۰) \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n + y^n}$$

۲۷۳۳ – $$(y \geqslant ۰) \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{n + y^n}$$

۲۷۳۵ – $$(x \geqslant ۰) \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\ln(۱ + x^n)}{n^y}$$

۲۷۳۴ – $$\sum_{n=۱}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^۲} + |y|^{n^۲}}$$

۲۶۳۶ – $$\sum_{n=۱}^{\infty} \operatorname{tg}^n\left(x + \frac{y}{n}\right)$$

۲۷۳۷ – ثابت کنید که اگر سری لوران $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ بازای $x = x_۱$ و $x = x_۲$ $(|x_۱| < |x_۲|)$ همگرا باشد در آنصورت بازای $|x_۱| < |x| < |x_۲|$ نیز همگرا است .

۲۷۳۸ – مطلوبست تعیین حوزهٔ همگرایی سری لوران

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{۲^{|n|}} x^n$$

و محاسبهٔ مجموع آن .

۲۷۳۹ – مطلوبست تعیین حوزهٔ همگرایی (مطلق و مشروط) سری‌های نیوتن :

الف) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{x^{[n]}}{n!}$ ؛ ب) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p} \frac{x^{[n]}}{n!}$ ؛ ت) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$

که در آن $x^{[n]} = x(x-۱)\ \ldots\ [x-(n-۱)]$.

۲۷۴۰ – ثابت کنید که اگر سری دیریکله $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ بازای $x = x_۰$ همگرا باشد در آنصورت بازای $x > x_۰$ نیز همگرا است .

۲۷۴۱ – ثابت کنید که برای همگرایی یکنواخت دنبالهٔ $f_n(x)$ $(n = ۱, ۲, \ldots)$ به تابع حدی $f(x)$ روی مجموعهٔ X لازم و کافی است که

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sup_{x \in X} r_n(x) \right\} = ۰$$

که در آن $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

۲۷۴۲ – مفهوم اینکه دنبالهٔ $(n = ۱, ۲, \ldots)$ $f_n(x)$: الف) روی فاصله $(x_۰ , +\infty)$ همگرا است ؛ ب) روی هر فاصلهٔ متناهی $(a, b) \subset (x_۰, +\infty)$ بطور یکنواخت همگرا است ؛ پ) روی فاصلهٔ $(x_۰, +\infty)$ بطور یکنواخت همگرا است ، یعنی چه ؟

۲۷۴۳ – برای دنبالهٔ

$$f_n(x) = x^n \quad (n = ۱, ۲, \ldots) \quad (۰ < x < ۱)$$

مطلوبست تعیین کمترین نمرهٔ جملهٔ $N = N(\varepsilon, x)$ ، که با ابتدا از آن انحراف جمله‌های دنباله در نقطه مفروض x از تابع حدی از ۰,۰۰۱ تجاوز نکند در صورتیکه

$$x = \frac{۱}{۱۰}, \ \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}, \ldots, \frac{۱}{\sqrt[m]{۱۰}}, \ldots$$

یا این دنباله در فاصلهٔ (۰ , ۱) بطور یکنواخت همگرا است ؟

۲۷۴۴ – چند جمله از سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+۱)}$$

را باید اختیار نمود تا مجموع جزئی $S_n(x)$ بازای $-\infty < x < +\infty$ با مجموع سری، اختلافی کمتر از ε داشته باشد ؟ محاسبهٔ عددی برای : الف) $\varepsilon = ۰,۱$ ؛ ب) $\varepsilon = ۰,۰۱$ ؛ پ) $\varepsilon = ۰,۰۰۱$ انجام دهید .

۲۷۴۵ – در ازای چه مقادیری از n نامساوی بر قرار خواهد بود ؟

$$\left| e^x - \sum_{i=۰}^{n} \frac{x^i}{i!} \right| < ۰,۰۰۱ \quad (۰ \leqslant x \leqslant ۱۰)$$

مطلوبست بررسی همگرایی یکنواخت دنباله‌های زیر در فواصل ذکر شده :

۲۷۴۶ $f_n(x) = x^n$ ؛ الف) $۰ \leqslant x \leqslant \frac{۱}{۲}$ ؛ ب) $۰ \leqslant x \leqslant ۱$

۲۷۴۷ – $f_n(x) = x^n - x^{n+۱}; \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۱$

۲۷۴۸ – $f_n(x) = x^n - x^{۲n}; \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۱$

۲۷۴۹ – $f_n(x) = \frac{۱}{x+n}; \quad ۰ < x < +\infty$

۲۷۵۰ - $f_n(x)=\frac{nx}{۱+n+x};\quad ۰\leqslant x\leqslant ۱$

۲۷۵۱ - $f_n(x)=\frac{x^n}{۱+x^n}$؛ الف) $۰\leqslant x\leqslant ۱-\varepsilon$؛ ب) $۱-\varepsilon\leqslant x\leqslant ۱+\varepsilon$؛
پ) $۱+\varepsilon<x<+\infty$ که در آن $\varepsilon>۰$.

۲۷۵۲ - $f_n(x)=\frac{۲nx}{۱+n^۲x^۲}$ ؛ الف) $۰\leqslant x\leqslant ۱$ ؛ ب) $۱<x<+\infty$

۲۷۵۳ - $f_n(x)=\sqrt{x^۲+\frac{۱}{n^۲}}\quad -\infty<x<+\infty$

۲۷۵۴ - $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{۱}{n}}-\sqrt{x}\right);\quad ۰<x<+\infty$

۲۷۵۵ - الف) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n};\quad -\infty<x<+\infty$ ؛

ب) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n};\quad -\infty<x<+\infty$

۲۷۵۶ - الف) $f_n(x)=\operatorname{arc\,tg} nx;\quad ۰<x<+\infty$ ؛
ب) $f_n(x)=x\operatorname{arc\,tg} nx;\quad ۰<x<+\infty$

۲۷۵۷ - $f_n(x)=e^{n(x-۱)};\quad ۰<x<۱$

۲۷۵۸ - $f_n(x)=e^{-(x-n)^۲}$ ؛ الف) $-l<x<l$ که در آن l عدد دلخواه مثبتی است ؛ ب) $-\infty<x<+\infty$.

۲۷۵۹ - $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n};\quad ۰<x<۱$

۲۷۶۰ - $f_n(x)=\left(۱+\frac{x}{n}\right)^n$ ؛ الف) روی فاصلهٔ متناهی (a, b) ؛
ب) روی فاصلهٔ $(-\infty, +\infty)$.

۲۷۶۱ - $f_n(x)=n\left(x^{\frac{۱}{n}}-۱\right);\quad ۱\leqslant x\leqslant a$

۲۷۶۲ - $f_n(x)=\sqrt[n]{۱+x^n};\quad ۰\leqslant x\leqslant ۲$

۲۷۶۳ -
$$f_n(x)=\begin{cases} n^۲x, & \text{اگر}\quad ۰\leqslant x\leqslant \frac{۱}{n} \\ n^۲\left(\frac{۲}{n}-x\right), & \text{اگر}\quad \frac{۱}{n}<x<\frac{۲}{n} \\ ۰, & \text{اگر}\quad x\geqslant\frac{۲}{n} \end{cases}$$
روی قطعهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۱$

۲۷۶۴ – فرض کنیم $f(x)$ تابع دلخواهی، معین روی قطعهٔ $[a, b]$ باشد و

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

ثابت کنید که

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

بازای $n \to \infty$.

۲۷۶۵ – فرض کنیم تابع $f(x)$ دارای مشتق پیوستهٔ $f'(x)$ در فاصلهٔ (a, b) باشد و

$$f_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{۱}{n}\right) - f(x)\Big)\right]$$

ثابت کنید که $f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$ روی قطعهٔ $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ که در آن $a < \alpha < \beta < b$.

۲۷۶۶ – فرض کنیم $f_n(x) = \sum\limits_{i=۰}^{n-۱} \frac{۱}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right)$ که در آن $f(x)$ تابعی است پیوسته. ثابت کنید که دنبالهٔ $f_n(x)$ روی هر قطعهٔ متناهی $[a, b]$ همگرای یکنواخت است.

مطلوبست بررسی نوع همگرایی سریهای زیر:

۲۷۶۷ – $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} x^n$ ؛ الف) روی فاصلهٔ $|x| < q$ که در آن $q < ۱$ ؛ ب) روی فاصلهٔ $|x| < ۱$.

۲۷۶۸ – $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{n^۲}$ روی قطعهٔ $-۱ \leqslant x \leqslant ۱$.

۲۷۶۸,۱ – $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ روی فاصلهٔ $(۰, +\infty)$.

۲۷۶۹ – $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} (۱ - x) x^n$ روی قطعهٔ $۰ \leqslant x \leqslant ۱$.

۲۷۷۰ – $-۱ \leqslant x \leqslant ۱$ ؛ $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+۱}}{n+۱}\right)$

۲۷۷۱ – $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x}{[(n-۱)x+۱](nx+۱)};\quad ۰<x<+\infty$$

۲۷۷۲ – $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(x+n)(x+n+۱)};\quad ۰<x<+\infty$$

۲۷۷۳ – $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{nx}{(۱+x)(۱+۲x)\dots(۱+nx)}$$ ؛

الف) $۰\leqslant x\leqslant\varepsilon$ که در آن $\varepsilon>۰$ ؛ ب) $\varepsilon\leqslant x<+\infty$

۲۷۷۴ – با استفاده از نشانهٔ ویرشتراس، همگرایی یکنواخت سری‌های تابعی زیر را در فواصل ذکرشده اثبات کنید:

الف) $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{x^۲+n^۲};\quad -\infty<x<+\infty$$

ب) $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{x+۲^n};\quad -۲<x<+\infty$$

پ) $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x}{۱+n^۴x^۲};\quad ۰\leqslant x<+\infty$$

ت) $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{nx}{۱+n^۵x^۲};\quad |x|<+\infty$$

ث) $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^۲}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n});\quad \frac{۱}{۲}\leqslant|x|\leqslant ۲$$

ج) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{۲}\right]!}$ ، $|x|<a$ که در آن a عدد دلخواه مثبتی است.

چ) $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[۳]{n^۴+x^۴}};\quad |x|<+\infty$$

ح) $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^۲};\quad |x|<+\infty$$

خ) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}; \quad |x|<+\infty$

د) $\sum\limits_{n=۲}^{\infty} \ln\left(۱+\frac{x^{۲}}{n\ln^{۲} n}\right); \quad |x|<a$

ذ) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} x^{۲}e^{-nx}; \quad ۰\leqslant x\leqslant+\infty$

ر) $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \operatorname{arc\,tg}\frac{۲x}{x^{۲}+n^{۳}}; \quad |x|<+\infty$

مطلوبست بررسی همگرایی یکنواخت سری‌های تابعی زیر در فواصل ذکرشده :

۲۷۷۵ - $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ الف) روی قطعهٔ $\varepsilon\leqslant x\leqslant ۲\pi-\varepsilon$ که در آن $\varepsilon>۰$ ؛ ب) روی قطعهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۲\pi$.

۲۷۷۶ - $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} ۲^{n}\sin\frac{۱}{۳^{n}x}; \quad ۰<x<+\infty$

۲۷۷۷ - $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n}}{x+n}; \quad ۰<x<+\infty$

راهنمایی — ماندهٔ سری را بر آورد کنید .

۲۷۷۸ - $\sum\limits_{n=۲}^{\infty} \frac{(-۱)^{n}}{n+\sin x}; \quad ۰\leqslant x\leqslant ۲\pi$

۲۷۷۹ - $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{\frac{n(n-۱)}{۲}}}{\sqrt[۳]{n^{۲}+e^{x}}}; \quad |x|\leqslant ۱۰$

۲۷۸۰ - $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos\frac{۲n\pi}{۳}}{\sqrt{n^{۲}+x^{۲}}}; \quad -\infty<x<+\infty$

۲۷۸۱ - $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}; \quad ۰\leqslant x<+\infty$

۲۷۸۲ – $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}; \quad ۰ \leqslant x < +\infty$

۲۷۸۳ – آیا دنبالهٔ توابع منفصل میتواند بطور یکنواخت بسمت تابع پیوسته‌ای همگرا باشد ؟

مثال

$$f_n(x) = \frac{۱}{n}\psi(x) \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

را که در آن

$$\psi(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر } x \text{ گنگ است} \\ ۱, & \text{اگر } x \text{ گویاست} \end{cases}$$

در نظر بگیرید .

۲۷۸۴ – ثابت کنید که اگر سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} |f_n(x)|$ روی $[a, b]$ همگرای یکنواخت باشد در آنصورت سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} f_n(x)$ نیز روی $[a, b]$ همگرای یکنواخت است .

۲۷۸۵ – اگر سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} f_n(x)$ روی $[a, b]$ بطور مطلق و یکنواخت همگرا باشد ، آیا در آنصورت حتماً سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} |f_n(x)|$ روی $[a, b]$ همگرای یکنواخت است ؟

مثال $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n(۱-x)x^n$ را که در آن $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ ، در نظر بگیرید.

۲۷۸۶ – ثابت کنید که ماژوره کردن سری همگرای مطلق و یکنواخت

$$\sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x) \quad (۰ \leqslant x \leqslant ۱)$$

که در آن

$$f_n(x) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر} \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۲^{-(n+۱)} \\ \frac{۱}{n}\sin^۲(۲^{n+۱}\pi x), & \text{اگر} \quad ۲^{-(n+۱)} < x < ۲^{-n} \\ ۰, & \text{اگر} \quad ۲^{-n} \leqslant x \leqslant ۱ \end{cases}$$

با یک سری عددی همگرای دارای جملات نامنفی ممکن نیست .

۲۷۸۷ – ثابت کنید اگر سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \varphi_n(x)$$

که جملات آن روی قطعهٔ $[a, b]$ توابع یکنوا هستند در نقاط انتهایی این قطعه بطور مطلق همگرا باشد در آنصورت سری مفروض روی قطعهٔ $[a, b]$ بطور مطلق و یکنواخت همگرا میباشد .

۲۷۸۸ – ثابت کنید که سری تام

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$$

روی قطعهٔ دلخواهی که بتمامی در داخل فاصلهٔ همگرایی آن واقع شده باشد بطور یکنواخت همگرا است .

۲۷۸۹ – هر گاه $a_n \to \infty$ بقسمی که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \left| \frac{۱}{a_n} \right|$ همگرا باشد ثابت کنید که سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{x-a_n}$$

روی هر مجموعهٔ محدود بسته دلخواهی که شامل نقاط $a_n (n = ۱, ۲, \dots)$ نباشد مطلقاً و بطور یکنواخت همگرا است .

۲۷۹۰ – ثابت کنید که اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا باشد در آنصورت سری دیریکله :

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{a_n}{n_x}$$

بازای $x \geqslant ۰$ همگرای یکنواخت میباشد .

۲۷۹۱ – هرگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ثابت کنید که سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

در حوزهٔ $x \geqslant ۰$ همگرای یکنواخت است .

۲۷۹۲ – نشان دهید که تابع

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^۳}$$

پیوسته و دارای مشتق پیوسته در حوزهٔ $-\infty < x < +\infty$ میباشد .

۲۷۹۳ – نشان دهید که تابع

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{۱}{(n-x)^۲}$$

الف) در تمام نقاط باستثنای نقاط نظیر اعداد درست: $x = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots$ معین و پیوسته است ؛ ب) دوره‌ای با دورهٔ یک است .

۲۷۹۴ – نشان دهید که سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} [n\, xe^{-nx} - (n-۱)\, xe^{-(n-۱)x}]$$

روی قطعهٔ $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ همگرای نایکنواخت است ولی مجموع آن روی این قطعه تابعی است پیوسته .

۲۷۹۵ – مطلوبست تعیین حوزهٔ وجود تابع $f(x)$ و بررسی پیوستگی آن در صورتیکه

الف) $f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \left(x + \frac{۱}{n}\right)^n$ ؛ ب) $f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x + n(-۱)^n}{x^۲ + n^۲}$ ؛

پ) $f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x}{(۱+x^۲)^n}$

۲۷۹۶ – فرض کنیم $r_k (k = ۱, ۲, \ldots)$ اعداد گویای قطعهٔ $[۰, ۱]$ باشند . ثابت کنید که تابع

$$f(x) = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{۳^k} \quad (۰ \leqslant x \leqslant ۱)$$

دارای ویژگی‌های زیر است ؛ ۱) پیوستگی ؛ ۲) مشتق‌پذیری در نقاط گنگ و مشتق‌ناپذیری در نقاط گویا .

۲۷۹۷ – ثابت کنید که تابع زتای ریمن

$$\xi(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^x}$$

در حوزهٔ $x > ۱$ پیوسته و دارای مشتقات پیوسته از هر مرتبه در این حوزه است .

۲۷۹۸ – ثابت کنید که تابع تتای

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^۲ x}$$

بازای $x > ۰$ معین ولی بینهایت بار دیفرانسیل‌پذیر است .

۲۷۹۹ – مطلوبست تعیین حوزهٔ وجود تابع $f(x)$ و بررسی دیفرانسیل‌پذیری آن در صورتیکه :

الف) $f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^n x}{n+x}$ ؛ ب) $f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{|x|}{n^۲ + x^۲}$

۲۸۰۰ – نشان دهید که دنبالهٔ

$$f_n(x) = \frac{۱}{n} \operatorname{arc\,tg} x^n \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

روی فاصلهٔ $(-\infty, +\infty)$ همگرای یکنواخت است اما

$$\Big[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big]'_{x=۱} \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(۱)$$

۲۸۰۱ – نشان دهید که دنباله

$$f_n(x) = x^۲ + \frac{۱}{n} \sin n\left(x + \frac{\pi}{۲}\right)$$

روی فاصلهٔ $(-\infty, +\infty)$ همگرای یکنواخت است اما

$$\Big[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big]' \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

۲۸۰۲ – در ازای چه مقادیری از پارامتر α : الف) دنبالهٔ

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \qquad (۱)$$

$(n = ۱, ۲, \ldots)$ روی قطعهٔ [۰, ۱] همگرا است ؛ ب) دنبالهٔ (۱) روی [۰, ۱] همگرای یکنواخت است ؛ پ) انتقال حدود به عبارت زیر علامت انتگرال

$$\lim_{n \to \infty} \int_{۰}^{۱} f_n(x)\,dx$$

ممکن است ؟

۲۸۰۳ – نشان دهید که دنبالهٔ

$$f_n(x) = n\,xe^{-nx^{۲}} \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

روی قطعهٔ [۰, ۱] همگرا است ، ولی

$$\int_{۰}^{۱} \left[\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right] dx \neq \lim_{n \to \infty} \int_{۰}^{۱} f_n(x)\,dx$$

۲۸۰۴ – نشان دهید که دنبالهٔ

$$f_n(x) = nx(۱ - x)^n \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

روی قطعهٔ [۰, ۱] همگرای نایکنواخت است ولی

$$\lim_{n \to \infty} \int_{۰}^{۱} f_n(x)\,dx = \int_{۰}^{۱} \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,dx$$

۲۸۰۵ – آیا انتقال حد به عبارت زیر علامت انتگرال در عبارت

$$\lim_{n \to \infty} \int_{۰}^{۱} \frac{nx}{۱ + n^{۲}x^{۴}}\,dx$$

قابل اعتبار است ؟

مطلوبست محاسبهٔ :

۲۸۰۶ – $$\lim_{x \to ۱ - ۰} \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n} \times \frac{x^n}{x^n + ۱}$$

۲۸۰۷ – $$\lim_{x \to ۱ - ۰} \sum_{n=۱}^{\infty} (x^n - x^{n+۱})$$

۲۸۰۸ – $\lim\limits_{x\to+۰}\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲^n n^x}$ **۲۸۰۸,۱** – $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=۱}^{\infty}\frac{x^۲}{۱+n^۲x^۲}$

۲۸۰۹ – آیا دیفرانسیل گیری جمله به جملهٔ سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n^۲}$$

قابل اعتبار است ؟

۲۸۱۰ – آیا انتگرال گیری جمله به جملهٔ سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\left(x^{\frac{۱}{۲n+۱}}-x^{\frac{۱}{۲n-۱}}\right)$$

روی قطعهٔ [۰, ۱] قابل اعتبار است ؟

۲۸۱۱ – هر گاه $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ تابعی بینهایت بار دیفرانسیل‌پذیر باشد و دنبالهٔ مشتقات $f^{(n)}(x)$ $(n=۱, ۲, \ldots)$ آن بطور یکنواخت در هر فاصلهٔ متناهی (a, b) بسمت تابع $\varphi(x)$ همگرا باشد ثابت کنید که $\varphi(x)=Ce^x$ که در آن C مقدار ثابتی است . مثال $f_n(x)=e^{-(x-n)^۲}$ $(n=۱, ۲, \ldots)$ را در نظر بگیرید .

۲۸۱۱,۱ – هرگاه توابع $f_n(x),\ n=۱, ۲, \ldots$ روی $(-\infty, +\infty)$ معین و کراندار باشند و $f_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)$ روی هر قطعه $[a, b]$ ؛ آیا از اینجا نتیجه میشود که

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x} f(x)=\sup_{x}\varphi(x)$$

بخش ۵ — سری‌های تام

بند ۱ — فاصلهٔ همگرایی . برای هر سری تام

$$a_۰+a_۱(x-a)+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots$$

فاصلهٔ همگرایی $|x-a|\leqslant R$ وجود دارد که در درون آن سری مفروض همگرا و در برون آن واگرا است . شعاع همگرایی R از روی دستور کوشی — آدامار معین می‌شود :

$$\frac{۱}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

شعاع همگرایی R از روی دستور

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+۱}}\right|$$

در صورتی که این حد وجود داشته باشد نیز حساب می‌شود .

بند ۲ — قضیه آبل . اگر سری تام

$$S(x)=\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n \quad (|x|<R)$$

در نقطهٔ انتهایی $x=R$ فاصلهٔ همگرایی ، همگرا باشد در آنصورت

$$S(R)=\lim_{x\to R-۰} S(x)$$

بند ۳ — سری تیلر . تابع $f(x)$ تحلیلی در نقطه a ، بسری تام

$$f(x)=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

قابل بسط است .

جمله ماندهٔ این سری را :

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=۰}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

بشکل

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+۱)}(a+\theta(x-a))}{(n+۱)!}(x-a)^{n+۱} \quad (۰<\theta<۱)$$

(شکل لاگرانژ) یا بشکل

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+۱)}(a+\theta_۱(x-a))}{n!}(۱-\theta_۱)^n(x-a)^{n+۱} \quad (۰<\theta_۱<۱)$$

(شکل کوشی) می‌توان درآورد .

بیاد داشتن پنج بسط اساسی زیر لازم است :

$$e^x=۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots \quad (-\infty<x<+\infty)-\mathrm{I}$$

$$\sin x=x-\frac{x^۳}{۳!}+\dots+(-۱)^{n-۱}\frac{x^{۲n-۱}}{(۲n-۱)!}+\dots \quad (-\infty<x<+\infty)-\mathrm{II}$$

$$\cos x = ۱ - \frac{x^{۲}}{۲!} + \dots + (-۱)^n \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty) - \mathrm{III}$$

$$(۱ + x)^m = ۱ + mx + \frac{m(m-۱)}{۲!} x^{۲} + \dots + \qquad - \mathrm{IV}$$

$$+ \frac{m(m-۱)\dots(m-n+۱)}{n!} x^n + \dots \quad (-۱ < x < ۱)$$

$$\ln(۱ + x) = x - \frac{x^{۲}}{۲} + \frac{x^{۳}}{۳} - \dots + (-۱)^{n-۱} \frac{x^n}{n} + \dots \qquad - \mathrm{V}$$

$$(-۱ < x \leqslant ۱)$$

بند ٤ — اعمال روی سری‌های تام . در داخل فاصلهٔ مشترک همگرایی $|x-a| < R$ داریم :

الف) $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} a_n (x-a)^n + \sum\limits_{n=۰}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum\limits_{n=۰}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n$ ؛

ب) $\sum\limits_{n=۰}^{\infty} a_n (x-a)^n \sum\limits_{n=۰}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum\limits_{n=۰}^{\infty} c_n (x-a)^n$

که در آن

$$c_n = a_۰ b_n + a_۱ b_{n-۱} + \dots + a_n b_۰$$

پ) $\left[\sum\limits_{n=۰}^{\infty} a_n (x-a)^n\right]' = \sum\limits_{n=۰}^{\infty} (n+۱) a_{n+۱} (x-a)^n$

ت) $\int \left[\sum\limits_{n=۰}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] dx = C + \sum\limits_{n=۰}^{\infty} \frac{a_n}{n+۱} (x-a)^{n+۱}$

بند ۵ — سری‌های تام در حوزهٔ مختلط . سری

$$\sum_{n=۰}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

را که در آن

$$c_n = a_n + ib_n, \quad a = \alpha + i\beta, \quad z = x + iy, \quad i = \sqrt{-۱}$$

در نظر میگیریم برای هر سری از این گونه یک دایرهٔ همگرایی $|z-a| \leqslant R$ وجود دارد که درون آن سری مفروض همگرا (و ضمناً مطلقاً) و برون آن واگرا است . شعاع همگرایی R برابر شعاع همگرایی سری تام

$$\sum_{n=۰}^{\infty} |c_n| r^n$$

در حوزهٔ حقیقی است .

برای سری‌های تام زیر مطلوبست تعیین شعاع و فاصلهٔ همگرایی و بررسی رفتار در نقاط مرزی فاصله همگرایی :

۲۸۱۲ - $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$

۲۸۱۳ - $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۳^n+(-۲)^n}{n}(x+۱)^n$

۲۸۱۴ - $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(n!)^۲}{(۲n)!} x^n$

۲۸۱۵ - $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \alpha^{n^۲} \times x^n \ (۰<\alpha<۱)$

۲۸۱۶ - $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n^۲} x^n$

۲۸۱۷ - $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^۲}} x^n \quad (a>۱)$

۲۸۱۸ - $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \left[\frac{۱\times ۳\times ۵\ldots(۲n-۱)}{۲\times ۴\times ۶\ldots(۲n)}\right]^p \left(\frac{x-۱}{۲}\right)^n$

۲۸۱۹ - $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \left[\frac{۲^n (n!)^۲}{(۲n+۱)!}\right]^p x^n$

۲۸۲۰ - $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{m(m-۱)\ldots(m-n+۱)}{n!} x^n$

۲۸۲۱ - $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^۲}\right) x^n \quad (a>۰,\ b>۰)$

۲۸۲۲ - $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n} \ (a>۰,\ b>۰)$

۲۸۲۳ - $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \ (a>۰)$

۲۸۲۴ - $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۳^{-\sqrt{n}}\, x^n}{\sqrt{n^۲+۱}}$

۲۸۲۵ - $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۲n)!!}{(۲n+۱)!!} x^n$

۲۸۲۶ - $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$$

۲۸۲۷ - $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)x^n$$

۲۸۲۸ - $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$$

۲۸۲۹ - $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)}{\ln n} x^n$$

۲۸۳۰ - $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$$

۲۸۳۱ - $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$$ (سری پرینسهایم)

۲۸۳۱,۱ - $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n}(1-x)^n$$ که در آن $\nu(n)$ تعداد ارقام عدد n است .

۲۸۳۱,۲ - $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sin n}\right)^n$$

۲۸۳۲ - مطلوبست تعیین حوزهٔ همگرایی سری فوق‌هندسی (هیپرژئومتریک).

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\times 2\times\gamma(\gamma+1)}x^2+\dots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1\times 2\dots n\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}x^n+\dots$$

مطلوبست تعیین حوزهٔ همگرایی سری‌های تام تعمیم یافته :

۲۸۳۳ - $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

۲۸۳۴ - $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$$

۲۸۳۵ - $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$$

۲۸۳۶ - $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$$

۲۸۳۷ - $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\operatorname{tg}^n x$$

۲۸۳۸ – تابع

$$f(x) = x^{۳}$$

را بر حسب توانهای درست مثبت دوجمله‌ای $x + ۱$ بسط دهید .

۲۸۳۹ – تابع

$$f(x) = \frac{۱}{a - x} \quad (a \neq ۰)$$

را به سری تام : الف) بر حسب توانهای x ؛ ب) بر حسب توانهای دوجمله‌ای $x - b$ که در آن $b \neq a$ ؛ پ) بر حسب توانهای $\frac{۱}{x}$ ، بسط دهید . حوزه‌های همگرایی نظیر را معلوم کنید .

۲۸۴۰ – تابع $f(x) = \ln x$ را بر حسب توانهای درست مثبت تفاضل $x - ۱$ بسط دهید و فاصلهٔ همگرایی بسط را تعیین کنید .

مجموع سری زیر را پیدا کنید :

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n}$$

بسط توابع زیر را بر حسب توانهای درست مثبت متغیر x بنویسید و فاصلهٔ همگرایی نظیر را پیدا کنید :

۲۸۴۱ – $f(x) = \operatorname{sh} x$

۲۸۴۲ – $f(x) = \operatorname{ch} x$

۲۸۴۳ – $f(x) = \sin^{۲} x$

۲۸۴۴ $f(x) = a^{x} \quad (a > ۰)$

۲۸۴۵ – $f(x) = \sin(\mu \arcsin x)$

۲۸۴۶ – $f(x) = \cos(\mu \arcsin x)$

۲۸۴۷ – سه جمله از بسط تابع $f(x) = x^{x}$ را بر حسب توانهای درست مثبت تفاضل $x - ۱$ بنویسید .

۲۸۴۸ – سه جمله از بسط تابع $f(x) = (۱ + x)^{\frac{۱}{x}}$ $(x \neq ۰)$ و $f(۰) = e$ را بر حسب توانهای درست مثبت متغیر x بنویسید .

۲۸۴۹ – توابع $\cos(x + h)$ و $\sin(x + h)$ را بر حسب توانهای درست مثبت متغیر h بسط دهید .

۲۸۵۰ – مطلوبست فاصلهٔ همگرایی بسط تابع زیر به سری تام :

$$f(x) = \frac{x}{x^{۲} - ۵x + ۶}$$

الف) بر حسب توانهای x ؛ ب) بر حسب توانهای دوجمله‌ای $x - ۵$ ، بدون اجرای خود بسط .

۲۸٥۰,۱ – آیا میتوان گفت که روی $(-\infty, +\infty)$ بازای $N \to \infty$:

$$\sum_{n=۱}^{N} (-۱)^{n-۱} \frac{x^{۲n-۱}}{(۲n-۱)!} \rightrightarrows \sin x$$

با استفاده از بسط‌های اساسی I — V بست توابع زیر بسری تام را نسبت به x بنویسید :

۲۸٥۱ – $e^{-x^{۲}}$

۲۸٥۲ – $\cos^{۲} x$

۲۸٥۳ – $\sin^{۳} x$

۲۸٥٤ – $\dfrac{x^{۱۰}}{۱-x}$

۲۸٥٥ – $\dfrac{۱}{(۱-x)^{۲}}$

۲۸٥٦ – $\dfrac{x}{\sqrt{۱-۲x}}$

۲۸٥۷ – $\ln\sqrt{\dfrac{۱+x}{۱-x}}$

۲۸٥۸ – $\dfrac{x}{۱+x-۲x^{۲}}$

راهنمایی – کسر مفروض را به کسرهای ساده تجزیه کنید .

۲۸٥۹ – $\dfrac{۱۲-٥x}{٦-٥x-x^{۲}}$

۲۸٦۰ – $\dfrac{x}{(۱-x)(۱-x^{۲})}$

۲۸٦۱ – $\dfrac{۱}{۱-x-x^{۲}}$

۲۸٦۲ – $\dfrac{۱}{۱+x+x^{۲}}$

۲۸٦۲,۱ – $f(x) = \dfrac{۱}{۱+x+x^{۲}+x^{۳}}$ ؛ $f^{(۱۰۰۰)}(۰)$ چقدر است ؟

۲۸٦۳ – $\dfrac{x\cos\alpha - x^{۲}}{۱-۲x\cos\alpha+x^{۲}}$

۲۸٦٤ – $\dfrac{x\sin a}{۱-۲x\cos a+x^{۲}}$

۲۸٦٥ – $\dfrac{x\,\mathrm{sh}\,a}{۱-۲x\,\mathrm{ch}\,a+x^{۲}}$

۲۸٦٦ – $\dfrac{۱}{(۱-x^{۲})\sqrt{۱-x^{۲}}}$

۲۸٦۷ – $\ln(۱+x+x^{۲}+x^{۳})$

۲۸٦۸ – $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$

راهنمایی – دستورهای اولر را بکار برید .

از طریق انتگرال‌گیری جمله به جملهٔ مشتق‌های قبلاً بسط داده شده ، بسط توابع زیر بسری تام را بدست آورید :

۲۸٦۹ – $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ ؛ مجموع سری $\displaystyle\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{۲n-۱}$ را پیدا کنید .

۲۸۷۰ - $f(x) = \arcsin x$ ۲۸۷۱ - $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{۱ + x^{۲}}\right)$

۲۸۷۲ - $f(x) = \ln(۱ - ۲x\cos\alpha + x^{۲})$

۲۸۷۳ - با کاربرد روش‌های مختلف بسط توابع زیر بسری تام را پیدا کنید:

الف) $f(x) = (۱ + x)\ln(۱ + x)$ ؛

ب) $f(x) = \frac{۱}{٤}\ln\frac{۱ + x}{۱ - x} + \frac{۱}{۲}\operatorname{arc\,tg} x$ ؛

پ) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{۲ - ۲x}{۱ + ٤x}$ ؛

ت) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{۲x}{۲ - x^{۲}}$ ؛

ث) $f(x) = x\operatorname{arc\,tg} x - \ln\sqrt{۱ + x^{۲}}$ ؛

ج) $f(x) = \arccos(۱ - ۲x^{۲})$ ؛

چ) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{۱ - x^{۲}}$ ؛

ح) $f(x) = x\ln\left(x + \sqrt{۱ + x^{۲}}\right) - \sqrt{۱ + x^{۲}}$

۲۸۷٤ - با استفاده از یکتایی بسط

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^{۲}}{۲!}f''(x) + \dots,$$

مشتق مرتبهٔ n-ام توابع زیر را پیدا کنید:

الف) $f(x) = e^{x^{۲}}$ ؛ ب) $f(x) = e^{\frac{a}{x}}$ ؛ پ) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$

۲۸۷۵ - تابع

$$f(x) = \ln\frac{۱}{۲ + ۲x + x^{۲}}$$

را بر حسب توانهای درست مثبت دوجمله‌ای $x + ۱$ بسط دهید.

۲۸۷٦ - تابع

$$f(x) = \frac{۱}{۱ - x}$$

را بر حسب توانهای منفی متغیر x بسری تام بسط دهید.

۲۸۷۷ - تابع

$$f(x) = \ln x$$

را بر حسب توانهای درست مثبت کسر $\frac{x - ۱}{x + ۱}$ بسری تام بسط دهید

۲۸۷۸ – تابع

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x}}$$

را بر حسب توانهای درست مثبت کسر $\frac{x}{x+۱}$ بسری تام بسط دهید .

۲۸۷۹ – هرگاه

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

مستقیماً ثابت کنید که

$$f(x)\,f(y)=f(x+y)$$

۲۸۸۰ – هرگاه بنا به تعریف

$$\sin x=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$$

و

$$\cos x=\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{x^{۲n}}{(۲n)!}$$

ثابت کنید که

الف) $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$ ؛ ب) $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$

۲۸۸۱ – چند جمله از بسط تابع زیر بسری تام :

$$f(x)=\left[\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+۱}\right)\right]^{-۱}$$

بنویسید .

با اجرای اعمال مناسب روی سریهای تام ، بسط توابع زیر را بسری تام بدست آورید :

۲۸۸۲ – $f(x)=(۱+x)\,e^{-x}$

۲۸۸۳ – $f(x)=(۱-x)^۲\operatorname{ch}\sqrt{x}$

۲۸۸۴ – $f(x)=\ln^۲(۱-x)$

۲۸۸۵ – $f(x)=(۱+x^۲)\operatorname{arc\,tg}x$

۲۸۸۶ – $f(x)=e^x\cos x$

۲۸۸۷ – $f(x)=e^x\sin x$

۲۸۸۸ – $f(x)=\dfrac{\ln(۱+x)}{۱+x}$

۲۸۸۹ – $f(x)=(\operatorname{arc\,tg} x)^{۲}$

۲۸۹۰ – $f(x)=\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{۲}$

سه جمله (مخالف صفر) از بسط توابع زیر بسری تام بر حسب توانهای مثبت متغیر x بنویسید :

۲۸۹۱ – $f(x)=\operatorname{tg} x$

۲۸۹۲ – $f(x)=\operatorname{th} x$

۲۸۹۳ – $f(x)=\operatorname{ctg} x-\dfrac{۱}{x}$

۲۸۹۴ – هرگاه بسط $\sec x$ بصورت

$$\sec x=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{E_n}{(۲n)!}x^{۲n}$$

نوشته شود رابطهٔ بازگشتی را برای ضرایب E_n (اعداد اولر) تعیین کنید .

۲۸۹۵ – تابع زیر را بسری تام بسط دهید :

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-۲tx+x^{۲}}}\quad(|x|<۱)$$

۲۸۹۶ – هرگاه $f(x)=\sum\limits_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ ، بسط تابع $F(x)=\dfrac{f(x)}{۱-x}$ را بنویسید .

۲۸۹۷ – اگر سری $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ دارای شعاع همگرایی $R_۱$ و سری $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}b_nx^n$ دارای شعاع همگرایی $R_۲$ باشد در آنصورت سری‌های

الف) $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ ؛ ب) $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}a_nb_nx^n$ دارای کدام شعاع همگرایی R خواهند بود ؟

۲۸۹۸ – فرض کنیم

$$\iota=\underline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+۱}}\right| \quad و \quad L=\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+۱}}\right|$$

ثابت کنید که شعاع همگرایی R سری تام $\sum\limits_{n=۰}^{\infty}a_nx^n$ در نامساوی

$$l\leqslant R\leqslant L$$

صادق است .

۲۸۹۹ – ثابت کنید که اگر $f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ و ضمناً

$$|n!a_n| < M \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

که در آن M مقدار ثابتی است در آنصورت : ۱) $f(x)$ در هر نقطهٔ دلخواه a بی‌نهایت بار دیفرانسیل‌پذیر است ؛ ۲) بسط زیر درست است :

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (|x| < +\infty)$$

۲۸۹۹٫۱ – هرگاه $(n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$ $|f^{(n)}(x)| \leqslant c^n$ و $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$ بازای $x \in (a, b)$ ثابت کنید که تابع $f(x)$ به سری تام

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n (x - x_۰)^n \quad (x_۰ \in (a, b))$$

قابل بسط است که در فاصلهٔ (a, b) همگرا میباشد .

۲۸۹۹٫۲ – هرگاه $(n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$ $f^{(n)}(x) \geqslant ۰$ و $f(x) \in C^{(\infty)}[-۱, ۱]$ بازای $x \in [-۱, ۱]$ ثابت کنید که در فاصلهٔ $(-۱, ۱)$ تابع $f(x)$ به سری تام

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$$

قابل بسط میباشد .

<u>راهنمایی</u> – با استفاده از یکنوایی مشتقات $f^{(n)}(x)$ برای جملهٔ مانده $R_n(x)$ سری تیلر تابع $f(x)$ برآورد

$$|R_n(x)| \leqslant |x|^{n+۱} f(۱)$$

را بدست آورید .

۲۹۰۰ – ثابت کنید که اگر ۱) $a_n \geqslant ۰$ و ۲) $\lim_{R - ۰} \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n = S$ وجود داشته باشد در آنصورت $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n R^n = S$

توابع زیر را بسری تام بسط دهید :

۲۹۰۱ – $\int_{۰}^{x} e^{-t^{۲}}\,dt$

۲۹۰۲ – $\int_{۰}^{x} \frac{dt}{\sqrt{۱-t^{٤}}}$

۲۹۰۳ – $\int_{۰}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$

۲۹۰٤ – $\int_{۰}^{x} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx$

۲۹۰٥ – $\int_{۰}^{x} \frac{t\,dt}{\ln(۱+t)}$ (چهار جملهٔ بسط را بنویسید .)

با کاربرد مشتق گیری جمله به جمله مجموع سری‌های زیر را حساب کنید :

۲۹۰٦ – $x + \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{٥}}{٥} + \dots$

۲۹۰۷ – $x - \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{٥}}{٥} - \dots$

۲۹۰۸ – $۱ + \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{٤}}{٤!} + \dots$

۲۹۰۹ – $\frac{x}{۱\times۲} + \frac{x^{۲}}{۲\times۳} + \frac{x^{۳}}{۳\times٤} + \dots$

۲۹۱۰ – $۱ + \frac{۱}{۲}x + \frac{۱\times۳}{۲\times٤}x^{۲} + \frac{۱\times۳\times٥}{۲\times٤\times٦}x^{۳} + \dots$

راهنمایی – مشتق سری را در $x - ۱$ ضرب کنید .

با کاربرد انتگرال گیری جمله به جمله مجموع سری‌های زیر را حساب کنید :

۲۹۱۱ – $x + ۲x^{۲} + ۳x^{۳} + \dots$

۲۹۱۲ – $x - ٤x^{۲} + ۹x^{۳} - ۱٦x^{٤} + \dots$

۲۹۱۳ – $۱\times۲x + ۲\times۳x^{۲} + ۳\times٤x^{۳} + \dots$

۲۹۱٤ – نشان دهید که سری

$$y = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{٤n}}{(٤n)!}$$

در معادلهٔ $y^{(٤)} = x$ صادق است .

۲۹۱٥ – نشان دهید که سری

$$y = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{n}}{(n!)^{۲}}$$

در معادلهٔ

$$xy'' + y' - y = ۰$$

صادق است .

مطلوبست تعیین شعاع و دایرهٔ همگرایی سری‌های تام زیر در حوزهٔ مختلط : $(z = x + iy)$

۲۹۱۶ −
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(z-۱-i)^n}{n \times ۲^n}$$

۲۹۱۷ −
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۱+i)^n z^n}{(n+۱)(n+۲)}$$

۲۹۱۸ −
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n!\, z^n}{(۱+i)(۱+۲i)\dots(۱+ni)}$$

۲۹۱۹ −
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}$$

۲۹۲۰ −
$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(۱-e^{i\alpha})^n}$$

۲۹۲۱ − با استفاده از دستور دوجمله‌ای نیوتن، $\sqrt[۳]{۹}$ را بطور تقریبی محاسبه و خطائی را که با در نظر گرفتن سه جمله از بسط حاصل می‌شود برآورد کنید .

۲۹۲۲ − مطلوبست محاسبهٔ تقریبی :

الف) $\operatorname{arc\,tg} ۱,۲$ ؛ ب) $\sqrt[۱۰]{۱۰۰۰}$ ؛ پ) $\ln ۱,۲۰$ و برآورد خطاهای نظیر .

با استفاده از بسط‌های مربوطه با درجهٔ تقریب ذکر شده مقدار توابع زیر را حساب کنید :

۲۹۲۳ − $\sin ۱۸^\circ$ با تقریب $۱۰^{-۵}$

۲۹۲۴ − $\cos ۱^\circ$ با تقریب $۱۰^{-٦}$

۲۹۲۵ − $\operatorname{tg} ۹^\circ$ با تقریب $۱۰^{-۳}$

۲۹۲٦ − e با تقریب $۱۰^{-٦}$

۲۹۲۷ − $\ln ۱,۲$ با تقریب $۱۰^{-٤}$

۲۹۲۸ − از روی تساوی

$$\frac{\pi}{٦} = \arcsin \frac{۱}{۲}$$

مقدار π را با تقریب $۱۰^{-٤}$ حساب کنید .

۲۹۲۹ − با استفاده از اتحاد

$$\frac{\pi}{٤} = \operatorname{arc\,tg} \frac{۱}{۲} + \operatorname{arc\,tg} \frac{۱}{۳}$$

مطلوبست محاسبهٔ عدد π با تقریب ۰,۰۰۱

۲۹۳۰ – با استفاده از اتحاد

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{5} - \mathrm{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

مطلوبست محاسبهٔ عدد π با تقریب 10^{-9}

۲۹۳۱ – با استفاده از دستور

$$\ln(n+1) = \ln n + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \dots\right]$$

مطلوبست محاسبهٔ $\ln 2$ و $\ln 3$ با تقریب 10^{-5}

۲۹۳۲ – بیاری بسط توابع تحت علامت انتگرال‌گیری به سری مطلوبست محاسبهٔ انتگرال‌های زیر با تقریب ۰٫۰۰۱ :

الف) $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

ب) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}\,dx$

پ) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$

ت) $\int_0^1 \cos x^2\,dx$

ث) $\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}\,x}{x}\,dx$

ج) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

چ) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

ح) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

خ) $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$

د) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{x}\,dx$

ذ) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{arc\,sin}\,x}{x}\,dx$

ر) $\int_0^1 x^x\,dx$

۲۹۳۳ – مطلوبست تعیین طول قوس یک نیم‌موج از سینوسویید زیر با تقریب ۰٫۰۱ :

$$y = \sin x \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi)$$

۲۹۳٤ – مطلوبست محاسبهٔ طول قوس بیضی با نیم قطرهای $a = 1$ و $b = \frac{1}{2}$ با تقریب ۰٫۰۱

۲۹۳۵ – سیمی که در بین دو ستون بفاصلهٔ $۲l = ۲۰$ m از یکدیگر آویخته شده بشکل سهمی است . اگر سهم خمیدگی $h = ٤۰$ cm ، طول سیم را با تقریب تا یک سانتیمتر حساب کنید

بخش ٦ — سری‌های فوریه

بند ۱ — قضیهٔ بسط . اگر تابع $f(x)$ پیوستهٔ قطعه‌ای و دارای مشتق پیوستهٔ قطعه‌ای $f'(x)$ در فاصلهٔ $(-l, l)$ باشد و ضمناً جمیع نقاط انفصال ξ منظم باشند (یعنی $f(\xi) = \frac{۱}{۲}[f(\xi - ۰) + f(\xi + ۰)]$) در آنصورت تابع $f(x)$ را روی این فاصله میتوان با سری فوریه نمایش داد :

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (۱)$$

که در آن

$$a_n = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots) \qquad (۲)$$

و

$$b_n = \frac{۱}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = ۱, ۲, \ldots) \qquad (۲')$$

بخصوص :

الف) اگر تابع $f(x)$ زوج باشد در آنصورت داریم :

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \qquad (۳)$$

که در آن

$$a_n = \frac{۲}{l}\int_{۰}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$$

ب) اگر تابع $f(x)$ فرد باشد در آنصورت خواهیم داشت :

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (٤)$$

که در آن

$$b_n = \frac{۲}{l} \int_{۰}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

تابع $f(x)$ معین در فاصلهٔ $(۰, l)$ و دارای ویژگی‌های پیوستگی فوق‌الذکر را می‌توان در این فاصله بر حسب هر یک از دستورهای (۳) و (٤) بدون تفاوت بیان نمود .

بند ۲ — شرط کمال . برای هر تابع $f(x)$ که روی فاصلهٔ $(-l, l)$ با مجذورش انتگرال‌پذیر باشد سری (۱) که بطور اسمی با ضرایب (۲) و (′۲) تشکیل می‌شود در تساوی لیاپونوف صادق است :

$$\frac{a_{۰}^{۲}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n^{۲} + b_n^{۲}) = \frac{۱}{l} \int_{-l}^{l} f^{۲}(x)\, dx$$

بند ۳ — انتگرال‌گیری سری‌های فوریه . سری فوریه (۱) را از تابع $f(x)$ که در فاصلهٔ $(-l, l)$ بمعنی ریمن انتگرال‌پذیر است حتی در صورت واگرایی آن میتوان در این فاصله جمله به جمله انتگرال‌گیری کرد .

۲۹۳٦ — تابع

$$f(x) = \sin^{٤} x$$

را به سری فوریه بسط دهید .

۲۹۳۷ — سری فوریه برای چند جمله‌ای مثلثاتی

$$P_n(x) = \sum_{i=۰}^{n} (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)$$

چگونه است ؟

۲۹۳۸ — تابع

$$f(x) = \mathrm{sg}\, nx \quad (-\pi < x < \pi)$$

را بسری فوریه بسط داده و نمودار تابع و نمودار برخی از مجموع های جزئی سری فوریهٔ این تابع را رسم کنید . با استفاده از بسط ، مجموع سری لایبنیتز را پیدا کنید :

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{۲n-۱}$$

توابع زیر را در فواصل ذکر شده بسری فوریه بسط دهید :

۲۹۳۹- $$f(x)=\begin{cases}A, & \text{اگر} \quad ۰<x<l\\ ۰, & \text{اگر} \quad l<x<۲l\end{cases}$$

که در آن A ثابت است ، در فاصلهٔ $(۰, ۲l)$

۲۹۴۰- $f(x)=x$ در فاصلهٔ $(-\pi, \pi)$

۲۹۴۱- $f(x)=\frac{\pi-x}{۲}$ در فاصلهٔ $(۰, ۲\pi)$

۲۹۴۲- $f(x)=|x|$ در فاصلهٔ $(-\pi, \pi)$

۲۹۴۳- $$f(x)=\begin{cases}ax, & \text{اگر} \quad -\pi<x<۰\\ bx, & \text{اگر} \quad ۰<x<\pi\end{cases}$$

که در آن a و b ثابتند ، در فاصلهٔ $(-\pi, \pi)$

۲۹۴۴- $f(x)=\pi^۲-x^۲$ در فاصلهٔ $(-\pi, \pi)$

۲۹۴۵- $f(x)=\cos ax$ در فاصلهٔ $(-\pi, \pi)$

۲۹۴۶- $f(x)=\sin ax$ در فاصلهٔ $(-\pi, \pi)$
(a عددیست نادرست)

۲۹۴۷- $f(x)=\operatorname{sh} ax$ در فاصلهٔ $(-\pi, \pi)$

۲۹۴۸- $f(x)=e^{ax}$ در فاصلهٔ $(-h, h)$

۲۹۴۹- $f(x)=x$ در فاصلهٔ $(a, a+۲l)$

۲۹۵۰- $f(x)=x\sin x$ در فاصلهٔ $(-\pi, \pi)$

۲۹۵۱- $f(x)=x\cos x$ در فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$

توابع دوره‌ای زیر را بسری فوریه بسط دهید :

۲۹۵۲- $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$

۲۹۵۳- $f(x)=\arcsin(\sin x)$

۲۹۵۴- $f(x)=\arcsin(\cos x)$

۲۹۵۵- $f(x)=x-[x]$

۲۹۵۶- $f(x)=(x)$ فاصلهٔ x تا نزدیکترین عدد درست است .

۲۹۵۷- $f(x)=|\sin x|$

۲۹۵۸- $f(x)=|\cos x|$

۲۹۵۹- $$f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x} \quad (|\alpha|<۲)$$

۲۹٦۰ – تابع زیر را بسری فوریه بسط دهید :

$$f(x)=\sec x \quad \left(-\frac{\pi}{٤}<x<\frac{\pi}{٤}\right)$$

راهنمایی – رابطهٔ بین ضرایب a_n و $a_{n-۲}$ را بیابید .

۲۹٦۱ – مطلوبست بسط تابع $f(x)=x^۲$ بسری فوریه : الف) بر حسب کوسینوس کمانهای دارای مضرب مشترک ؛ ب) بر حسب سینوس کمانهای دارای مضرب مشترک ؛ پ) در فاصلهٔ $(۰, ۲\pi)$.

نمودار تابع و نمودارهای مجموع سری‌های فوریه را در حالت‌های الف)، ب) و پ) رسم کنید .

با استفاده از این بسطها مجموع سری‌های زیر را پیدا کنید :

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲},\quad \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲},\quad \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲n-۱)^۲}$$

۲۹٦۲ – با انتگرال‌گیری جمله به جمله از بسط

$$x=۲\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi<x<\pi)$$

بسط توابع $x^۲$ ، $x^۳$ ، $x^٤$ بسری فوریه را در فاصلهٔ $(-\pi, \pi)$ بدست آورید .

۲۹٦۳ – تساوی لیاپونوف را برای تابع

$$f(x)=\begin{cases} ۱, & \text{بازای} \quad |x|<\alpha \\ ۰, & \text{بازای} \quad \alpha<|x|<\pi \end{cases}$$

بنویسید .

از روی تساوی لیاپونوف مجموع های سری زیر را پیدا کنید :

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin^۲ n\alpha}{n^۲} \quad \text{و} \quad \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos^۲ n\alpha}{n^۲}$$

۲۹٦٤ – تابع

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{اگر} \quad ۰\leqslant x\leqslant ۱ \\ ۱, & ۱<x<۲ \\ ۳-x, & ۲\leqslant x\leqslant ۳ \end{cases}$$

را به سری فوریه بسط دهید .

با استناده از دستورهای

$$\cos x = \frac{۱}{۲}(t+\bar{t}), \quad \sin x = \frac{۱}{۲i}(t-\bar{t})$$

که در آن $t=e^{ix}$ و $t=e^{-ix}$ بسط توابع زیر بسری فوریه را بدست آورید :

۲۹۶۵ - $\cos^{۲m} x$ (m عدد درست مثبتی است)

۲۹۶۶ - $(|q|<۱)$ $\frac{q\sin x}{۱-۲q\cos x+q^{۲}}$

۲۹۶۷ - $(|q|<۱)$ $\frac{۱-q^{۲}}{۱-۲q\cos x+q^{۲}}$

۲۹۶۸ - $(|q|<۱)$ $\frac{۱-q\cos x}{۱-۲q\cos x+q^{۲}}$

۲۹۶۹ - $(|q|<۱)$ $\ln(۱-۲q\cos x+q^{۲})$

توابع ناکراندار دوره‌ای زیر را بسری فوریه بسط دهید :

۲۹۷۰ - $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{۲}\right|$

۲۹۷۱ - $f(x)=\ln\left|\cos\frac{x}{۲}\right|$

۲۹۷۲ - $f(x)=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{۲}\right|$

۲۹۷۳ - مطلوبست بسط تابع زیر بسری فوریه :

$$f(x)=\int_{۰}^{x}\ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{۲}\right|}\,dt \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

۲۹۷۴ - تابع های

$$x=x(s), \quad y=y(s), \quad (۰\leqslant s\leqslant ۴a)$$

را که نمایشگر پارامتری دور گرد مربع است : $۰<x<a$ ، $۰<y<a$ که در آن s طول کمان حساب شده از نقطهٔ $O(۰,۰)$ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت میباشد به سری فوریه بسط دهید .

۲۹۷۵ - تابع $f(x)$ انتگرال‌پذیر مفروض در فاصلهٔ $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$ را چگونه باید در فاصلهٔ $(-\pi,\pi)$ ادامه داد تا بسط آن بسری فوریه بشکل زیر باشد :

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos(۲n - ۱)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

۲۹۷۶ – تابع $f(x)$ انتگرال‌پذیر مفروض در فاصلهٔ $\left(۰, \frac{\pi}{۲}\right)$ را چگونه باید در فاصلهٔ $(-\pi, \pi)$ ادامه داد تا بسط آن بسری فوریه بشکل زیر باشد :

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin(۲n - ۱)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

۲۹۷۷ – تابع

$$f(x) = x\left(\frac{\pi}{۲} - x\right)$$

را در فاصلهٔ $\left(۰, \frac{\pi}{۲}\right)$ بسط دهید :

الف) بر حسب کوسینوس قوس های فرد ؛

ب) بر حسب سینوس قوس‌های فرد .

نمودار مجموع سری‌های فوریه را برای حالت‌های الف) و ب) رسم کنید .

۲۹۷۸ – تابع $f(x)$ پادوره‌ای (آنتیپریودیک) با دورهٔ π است یعنی

$$f(x + \pi) = -f(x)$$

بسط این تابع بسری فوریه در فاصلهٔ $(-\pi, \pi)$ دارای چه ویژگی است ؟

۲۹۷۹ – بسط تابع $f(x)$ بسری فوریه در فاصلهٔ $(-\pi, \pi)$ دارای چه ویژگی است در صورتیکه $f(x + \pi) = f(x)$ ؟

۲۹۸۰ – ضرایب فوریه $a_n, b_n \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$ از تابع $y = f(x)$ با دوره ۲π دارای چه ویژگی می‌باشند در صورتیکه نمودار تابع :

الف) در نقاط $(۰, ۰)$ ، $\left(\pm\frac{\pi}{۲}, ۰\right)$ مرکز تقارن داشته باشد ؛

ب) دارای مرکز تقارن در مبدأ مختصات و محورهای تقارن $x = \pm \frac{\pi}{۲}$ باشد ؟

۲۹۸۱ – بین ضرایب فوریه $(n = ۱, ۲, \ldots)$ β_n ، α_n و b_n ، a_n در توابع $\varphi(x)$ ، $\psi(x)$ چه روابطی وجود دارد اگر

$$\varphi(-x) = \psi(x)$$

باشد ؟

۲۹۸۲ – بین ضرایب فوریه $(a = ۰, ۱, ۲, \dots)$ β_n ، α_n و b_n ، a_n در توابع $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ چه روابطی وجود دارد اگر

$$\varphi(-x) = -\psi(x)$$

باشد ؟

۲۹۸۳ – با دانستن ضرایب فوریه $(n = ۰, ۱, ۲, \dots)$ a_n, b_n در توابع انتگرال‌پذیر $f(x)$ بدورهٔ ۲π ، مطلوبست محاسبهٔ ضرایب فوریه $(n = ۰, ۱, ۲, \dots)$ $\bar{b}_n$ ، $\bar{a}_n$ در تابع «جابجا شدهٔ» $f(x+h)$ $(h = \text{ثابت})$

۲۹۸۴ – با دانستن ضرایب فوریه $(a = ۰, ۱, ۲, \dots)$ a_n, b_n در تابع انتگرال‌پذیر $f(x)$ به دورهٔ ۲π ، مطلوبست محاسبهٔ ضرایب فوریه $(n = ۰, ۱, ۲, \dots)$ A_n, B_n در تابع استکلوف

$$f_h(x) = \frac{۱}{۲h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\,d\xi$$

۲۹۸۵ – فرض کنیم $f(x)$ تابع پیوسته‌ای با دورهٔ ۲π و $(n = ۰,۱,۲,\dots)$ a_n, b_n ضرایب فوریهٔ آن باشند . مطلوبست محاسبهٔ ضرایب فوریه A_n, B_n $(n = ۰, ۱, ۲, \dots)$ در تابع تابیده

$$F(x) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,f(x+t)\,dt$$

با استفاده از نتیجهٔ بدست آمده تساوی لیاپونوف را بدست آورید .

بخش ۷ – جمع کردن سری‌ها

بند ۱ – جمع کردن مستقیم . اگر

$$u_n = v_{n+۱} - v_n \quad (n = ۱, ۲, \dots) \text{ و } \lim_{n \to \infty} v_n = v_\infty$$

در آنصورت

$$\sum_{n=۱}^{\infty} u_n = v_\infty - v_۱$$

بویژه اگر

$$u_n = \frac{۱}{a_n a_{n+۱} \cdots a_{n+m}}$$

که در آن اعداد $a_i \ (i = ۱ , ۲ , \ldots)$ تصاعد حسابی با قدر نسبت d را تشکیل میدهند در آنصورت

$$v_n = -\frac{۱}{md} \times \frac{۱}{a_n a_{n+۱} \cdots a_{n+m-۱}}$$

در بعضی موارد سری مطلوب بصورت ترکیب خطی سری های معلوم :

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n^۲} = \frac{\pi^۲}{۱۲}, \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲} = \frac{\pi^۲}{۶}, \quad \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n} = \ln ۲$$

و غیره ارائه می‌شود .

بند ۲ — روش آبل . اگر سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا باشد در آنصورت

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n = \lim_{x \to ۱-۰} \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$$

مجموع سری تام $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ در حالات ساده بکمک مشتق گیری و یا انتگرال گیری جمله به جمله بدست می آید .

بند ۳ — جمع کردن سری‌های مثلثاتی . برای پیدا کردن مجموع سری‌های

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{و} \quad \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \sin x$$

معمولا آنها را بترتیب بعنوان بخش حقیقی و ضریب بخش موهومی مجموع سری تام $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^n$ که در آن $z = e^{ix}$ در حوزهٔ مختلط در نظر میگیرند .

سری زیر در اغلب موارد در این مرحله مفید است :

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{۱}{۱-z}$$

مطلوبست محاسبهٔ مجموع سری های زیر :

۲۹۸۶ — $\frac{۱}{۱ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۵} + \frac{۱}{۵ \times ۷} + \ldots$

۲۹۸۷ — $\frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳} + \frac{۱}{۲ \times ۳ \times ۴} + \frac{۱}{۳ \times ۴ \times ۵} + \ldots$

۲۹۸۸ – $\frac{۱}{۱ \times ۲} - \frac{۱}{۲ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ٤} - \frac{۱}{٤ \times ۵} + \dots$

۲۹۸۹ – $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{(n+۱)\,(n+۲)(n+۳)}$

۲۹۹۰ – $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n\,(n+m)}$ (m عددیست طبیعی)

۲۹۹۱ – $\frac{۱}{۱ \times ۲ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ٤ \times ۵} + \frac{۱}{۵ \times ٦ \times ۷} + \dots$

۲۹۹۲ – $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{n^۲ - ۱}$

۲۹۹۳ – $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲n - ۱}{n^۲\,(n+۱)^۲}$

۲۹۹٤ – $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n\,(۲n+۱)}$

۲۹۹۵ – $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^۲}{n!}$

۲۹۹٦ – $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۲^n\,(n+۱)}{n!}$

۲۹۹۷ – $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲\,(n+۱)^۲}$

۲۹۹۸ – $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲(n+۱)^۲\,(n+۲)^۲}$

۲۹۹۹ – $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n n}{(۲n+۱)!}$

۳۰۰۰ – $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n^۲+n-۲}$

۳۰۰۱ – هرگاه $P(x) = a_۰ + a_۱ x + \dots + a_m x^m$ ، مطلوبست محاسبهٔ مجموع سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}\, x^n$$

مجموع سری‌های زیر را پیدا کنید :

۳۰۰۲ – $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n^۲+۱}{۲^n n!}\, x^n$

۳۰۰۳ – $\sum_{n=}^{\infty} \frac{(-۱)^n n^۳}{(n+۱)!}\, x^n$

۳۰۰۴ - $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n (۲n^۲+۱)}{(۲n)!} x^{۲n}$

۳۰۰۵ - $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n^۲ x^n}{(۲n+۱)!}$

بیاری مشتق گیری جمله به جمله ، مجموع سری‌های زیر را پیدا کنید:

۳۰۰۶ - $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

۳۰۰۸ - $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{٤n+۱}}{٤n+۱}$

۳۰۰۷ - $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱} x^{۲n}}{n(۲n-۱)}$

۳۰۰۹ - $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{a(a+d)\dots[a+(n-۱)d]}{d\times ۲d\dots nd} x^n \quad (d > ۰)$

<u>راهنمائی</u> – مشتق سری را در $x - ۱$ ضرب کنید.

۳۰۱۰ - $\frac{۱}{۳}\ \frac{x}{۲} + \frac{۱\times ٤}{۳\times ٦}\left(\frac{x}{۲}\right)^۲ + \frac{۱\times ٤\times ۷}{۳\times ٦\times ۹}\left(\frac{x}{۲}\right)^۳ + \dots$

بکمک انتگرال گیری جمله به جمله ، مجموع سری‌های زیر را پیدا کنید:

۳۰۱۱ - $\sum_{n=۱}^{\infty} n^۲ x^{n-۱}$

۳۰۱۳ - $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(۲n+۱)x^{۲n}}{n!}$

۳۰۱۲ - $\sum_{n=۱}^{\infty} n(n+۲)x^n$

با استفاده از روش آبل مجموع سری‌های زیر را پیدا کنید:

۳۰۱٤ - $۱ - \frac{۱}{٤} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۱۰} + \dots$

۳۰۱۵ - $۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \dots$

۳۰۱٦ - $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱\times ۳}{۲\times ٤} - \frac{۱\times ۳\times ۵}{۲\times ٤\times ٦} + \dots$

۳۰۱۷ - $۱ + \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳} + \frac{۱\times ۳}{۲\times ٤}\times\frac{۱}{۵} + \dots$

مجموع سری‌های مثلثاتی زیر را پیدا کنید :

۳۰۱۸ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

۳۰۱۹ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

۳۰۲۰ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}$$

۳۰۲۱ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin^{۲} n\alpha \sin nx}{n}\left(۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}\right)$$

۳۰۲۲ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin(۲n-۱)x}{۲n-۱}$$

۳۰۲۳ - $$\sum_{n=۲}^{\infty} (-۱)^{n} \frac{\cos nx}{n^{۲}-۱}$$

۳۰۲۴ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos(۲n-۱)x}{(۲n-۱)^{۲}}$$

۳۰۲۵ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n-۱} \frac{\sin nx}{n(n+۱)}$$

۳۰۲۶ - $$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$$

۳۰۲۷ - منحنی

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin nx \times \sin ny}{n^{۲}} = ۰$$

را رسم کنید .

مجموع سری‌های زیر را پیدا کنید :

۳۰۲۸ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{[(n-۱)!]^{۲}}{(۲n)!}(۲x)^{۲n}$$

۳۰۲۹ - $$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(n!)^{۲}}{(۲n)!} x^{n}$$

۳۰۳۰ - $$\frac{۱!}{x+۱} + \frac{۲!}{(x+۱)(x+۲)} + \frac{۳!}{(x+۱)(x+۲)(x+۳)} + \dots$$

۳۰۳۱ - $$\frac{a_{۱}}{a_{۲}+x} + \frac{a_{۱}}{a_{۲}+x} \times \frac{a_{۲}}{a_{۳}+x} + \dots$$

بشرطیکه $x>۰$ ، $a_n>۰ \quad (n=۱, ۲, \dots)$ و سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{a_n}$ واگرا باشد .

۳۰۳۲ - $$\frac{x}{۱-x^{۲}} + \frac{x^{۲}}{۱-x^{۴}} + \frac{x^{۴}}{۱-x^{۸}} + \dots$$

در صورتیکه الف) $|x|<۱$ ؛ ب) $|x|>۱$

۳۰۳۳ - $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^{n+۱}}{(۱-x^{n})(۱-x^{n+۱})}$$

در صورتیکه الف) $|x|<۱$ ؛ ب) $|x|>۱$.

بخش ۸ – پیدا کردن انتگرالهای معین بکمک سری

بکمک بسط توابع تحت انتگرال به سری، مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۳۰۳۴ - $\int_{۰}^{۱} \ln \frac{۱}{۱-x}\, dx$ ‏ ‏ ‏ ۳۰۳۶ - $\int_{۰}^{۱} \frac{\ln(۱+x)}{x}\, dx$

۳۰۳۵ - $$\int_{۰}^{۱} \frac{\ln\left(x+\sqrt{۱+x^{۲}}\right)}{x}\, dx$$

۳۰۳۷ - $$\int_{۰}^{۱} x^{p-۱} \ln(۱-x^{q})\, dx \quad (p>۰,\ q>۰)$$

۳۰۳۸ - $\int_{۰}^{۱} \ln x \times \ln(۱-x)\, dx$ ‏ ‏ ‏ ۳۰۴۰ - $\int_{۰}^{+\infty} \frac{x\, dx}{e^{x}+۱}$

۳۰۳۹ - $$\int_{۰}^{+\infty} \frac{x\, dx}{e^{۲\pi x}-۱}$$

۳۰۴۱ - انتگرال الیپتیک کامل نوع اول

$$F(k) = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{d\varphi}{\sqrt{۱-k^{۲}\sin^{۲}\varphi}}$$

را بر حسب توانهای درست مثبت مدول $k\ (۰ \leqslant k < ۱)$ بسط دهید .

۳۰۴۲ - انتگرال الیپتیک کامل نوع دوم

$$E(k) = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱-k^{۲}\sin^{۲}\varphi}\, d\varphi$$

را بر حسب توانهای درست مثبت مدول $k\ (۰ \leqslant k < ۱)$ بسط دهید .

۳۰۴۳ - طول قوس بیضی

$$x = a\cos t,\ \ y = b\sin t \quad (۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi)$$

را بیاری سری تنظیمی بر حسب توانهای درست مثبت خروج از مرکز بیان کنید

مطلوبست اثبات تساویهای زیر :

۳۰۴۴ - $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^n}$

۳۰۴۵ - $\int_{۰}^{+\infty} e^{-x^۲} \sin ax \, dx = \frac{۱}{۲} \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n n!}{(۲n+۱)!} a^{۲n+۱}$

۳۰۴۶ - $\int_{۰}^{۲\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx \, dx = \frac{\pi}{n!} \quad (n = ۰, ۱, ۲, \dots)$

مطلوبست محاسبهٔ :

۳۰۴۷ - $\int_{۰}^{۲\pi} e^{a \cos x} \cos(a \sin x - nx) \, dx$

(n عددیست طبیعی)

۳۰۴۸ - $\int_{۰}^{\pi} \frac{x \sin \alpha}{۱ - ۲\alpha \cos x + \alpha^۲} \, dx$

راهنمایی — مسألهٔ ۲۸۶۴ را ببینید .

۳۰۴۹ - $\int_{۰}^{\pi} \ln(۱ - ۲\alpha \cos x + \alpha^۲) \, dx$

۳۰۵۰ - مطلوبست اثبات دستور

$$\int_{۰}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx = \frac{۱}{a} - \frac{۱!}{a^۲} + \frac{۲!}{a^۳} - \dots$$

$$\dots + (-۱)^{n-۱} \frac{(n-۱)!}{a^n} + (-۱)^n \frac{\theta_n n!}{a^{n+۱}} \qquad (۱)$$

که در آن $a > ۰$ و $۰ < \theta_n < ۱$.

اگر در دستور (۱) دو جمله اختیار شود انتگرال

$$\int_{۰}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{۱۰۰ + x} dx$$

با چه تقریبی بیان می‌شود ؟

بخش ۹ — حاصل ضرب‌های نامتناهی

بند ۱ — همگرایی حاصل ضرب . حاصل ضرب نامتناهی

$$p_۱ p_۲ \dots p_n \dots = \prod_{n=۱}^{\infty} p_n \qquad (۱)$$

را وقتی همگرا نامند که حد متناهی و مخالف صفر زیر وجود داشته باشد :

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{i=۱}^{n} p_i = \lim_{n = \infty} P_n = P$$

اگر $P = ۰$ و هیچیک از عوامل p_n برابر صفر نباشد در آنصورت حاصل ضرب (۱) را واگرا بسمت صفر نامند ؛ در حالت خلاف حاصل ضرب به همگرا بسمت صفر موسوم است .

همگرایی حاصل ضرب (۱) هم ارز همگرایی سری

$$\sum_{n=n_۰}^{\infty} \ln p_n \qquad (۲)$$

است . شرط لازم همگرایی چنین است :

$$\lim_{n \to \infty} p_n = ۱$$

اگر $(n = ۱, ۲, \dots)$ $p_n = ۱ + \alpha_n$ و α_n علامت عوض نکند در آنصورت برای همگرایی حاصل ضرب (۱) لازم و کافی است که سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=۱}^{\infty} (p_n - ۱) \qquad (۳)$$

همگرا باشد .

در حالت کلی وقتی که α_n علامت ثابتی را حفظ نکند و سری (۳) همگرا باشد حاصل ضرب (۱) با سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \alpha_n^۲ = \sum_{n=۱}^{\infty} (p_n - ۱)^۲$$

متفقاً همگرا یا واگرا بسمت صفر می‌باشد .

بند ۲ – همگرایی مطلق. حاصل ضرب (۱) همگرای مطلق یا همگرای مشروط (نا مطلق) نامیده می‌شود بر حسب آنکه سری (۲) همگرای مطلق یا همگرای مشروط باشد. شرط لازم و کافی همگرایی مطلق حاصل ضرب (۱) عبارتست از همگرایی مطلق سری (۳).

بند ۳ – بسط توابع به حاصل ضرب‌های ناستناهی. بازای $-\infty < x < +\infty$ بسط‌های زیر را داریم:

$$\sin x = x \prod_{n=۱}^{\infty} \left(۱ - \frac{x^{۲}}{n^{۲}\pi^{۲}} \right), \quad \cos x = \prod_{n=۱}^{\infty} \left[۱ - \frac{۴x^{۲}}{(۲n-۱)^{۲}\pi^{۲}} \right]$$

بخصوص از عبارت سینوس بازای $x = \frac{\pi}{۲}$ دستور والیس بدست می‌آید:

$$\frac{\pi}{۲} = \prod_{n=۱}^{\infty} \frac{۲n}{۲n-۱} \times \frac{۲n}{۲n+۱}$$

تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

۳۰۵۱ – $\prod_{n=۲}^{\infty} \left(۱ - \frac{۱}{n^{۲}} \right) = \frac{۱}{۲}$

۳۰۵۲ – $\prod_{n=۲}^{\infty} \frac{n^{۳}-۱}{n^{۳}+۱} = \frac{۲}{۳}$

۳۰۵۳ – $\prod_{n=۲}^{\infty} \left[۱ - \frac{۲}{n(n+۱)} \right] = \frac{۱}{۳}$

۳۰۵۴ – $\prod_{n=۰}^{\infty} \left[۱ + \left(\frac{۱}{۲} \right)^{۲n} \right] = ۲$

۳۰۵۵ – $\prod_{n=۱}^{\infty} \cos \frac{\pi}{۲^{n+۱}} = \frac{۲}{\pi}$

۳۰۵۶ – $\prod_{n=۱}^{\infty} \cos \frac{x}{۲^{n}} = \frac{\sin x}{x}$

۳۰۵۷ – $\prod_{n=۱}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{۲^{n}} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$

۳۰۵۸ – $\prod_{n=۰}^{\infty} (۱ + x^{۲n}) = \frac{۱}{۱-x} \quad (|x| < ۱)$

۳۰۵۹ – $\frac{\pi}{۲} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} \times \frac{۲}{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}} \times \frac{۲}{\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}} \ldots$

۳۰۶۰ – $\prod_{n=۱}^{\infty} \frac{۳n}{۳n-۱} \times \frac{۳n}{۳n+۱} = \frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}$

مطلوبست اثبات همگرایی و تعیین مقدار حاصل ضرب‌های نامتناهی زیر :

۳۰۶۱ - $$\prod_{n=۳}^{\infty} \frac{n^{۲}-۴}{n^{۲}-۱}$$

۳۰۶۳ - $$\prod_{n=۱}^{\infty} \frac{(۲n+۱)(۲n+۷)}{(۲n+۳)(۲n+۵)}$$

۳۰۶۲ - $$\prod_{n=۱}^{\infty} \left[۱+\frac{۱}{n(n+۲)}\right]$$

۳۰۶۴ - $$\prod_{n=۱}^{\infty} a^{\frac{(-۱)^{n}}{n}} \quad (a>۰)$$

۳۰۶۵ - آیا از همگرایی حاصل ضرب‌های $\prod_{n=۱}^{\infty} p_n$ و $\prod_{n=۱}^{\infty} q_n$ همگرایی حاصل ضرب‌های زیر نتیجه می‌شود :

الف) $\prod_{n=۱}^{\infty} (p_n+q_n)$ ؛ ب) $\prod_{n=۱}^{\infty} p_n^{۲}$ ؛ پ) $\prod_{n=۱}^{\infty} p_n q_n$ ؛ ت) $\prod_{n=۱}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$ ؟

همگرایی حاصل ضرب‌های نامتناهی زیر را بررسی کنید :

۳۰۶۶ - $$\prod_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$$

۳۰۶۹ - $$\prod_{n=۲}^{\infty} \left(۱-\frac{۱}{n}\right)$$

۳۰۶۷ - $$\prod_{n=۱}^{\infty} \frac{(n+۱)^{۲}}{n(n+۲)}$$

۳۰۷۰ - $$\prod_{n=۲}^{\infty} \left(\frac{n^{۲}-۱}{n^{۲}+۱}\right)^{p}$$

۳۰۶۸ - $$\prod_{n=۱}^{\infty} \left(۱+\frac{۱}{n^{p}}\right)$$

۳۰۷۱ - $$\prod_{n=n_۰}^{\infty} \frac{n^{۲}+a_۱ n+b_۱}{n^{۲}+an+b}$$ که در آن $n^{۲}+an+b>۰$ بازای $n\geqslant n_۰$

۳۰۷۲ - $$\prod_{n=n_۰}^{\infty} \frac{(n-a_۱)(n-a_۲)\dots(n-a_p)}{(n-b_۱)(n-b_۲)\dots(n-b_p)}$$ که در آن $n_۰>b_i$

$(i=۱,۲,\dots,p)$

۳۰۷۳ - $$\prod_{n=۰}^{\infty} \sqrt{\frac{n+۱}{n+۲}}$$

۳۰۷۵ - $$\prod_{n=۱}^{\infty} \sqrt[n]{۱+\frac{۱}{n}}$$

۳۰۷۴ - $$\prod_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^{۲}+۱}}$$

۳۰۷۶ - $$\prod_{n=۱}^{\infty} \sqrt[n^{۲}]{n}$$

۳۰۷۷- $\prod_{n=۱}^{\infty}\left(۱+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$

۳۰۸۷- $\prod_{n=۱}^{\infty}\left(۱-\frac{x}{c+n}\right)e^{\frac{x}{n}}$ که در آن $c>۰$

۲۰۷۹- $\prod_{n=۱}^{\infty}(۱-x^{n})$

۳۰۸۰- $\prod_{n=۱}^{\infty}\left(۱+\frac{x^{n}}{۲^{n}}\right)$

۳۰۸۱- $\prod_{n=۱}^{\infty}\left[۱+\frac{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n^{۲}}}{x^{n}}\right]$

۳۰۸۲- $\prod_{n=۱}^{\infty}\left(۱-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)e^{\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^{۲}}{۲n}}$

۳۰۸۳- $\prod_{n=۱}^{\infty}\left(۱+\frac{x^{n}}{n^{p}}\right)\cos\frac{x^{n}}{n^{q}}$

۳۰۸٤- $\prod_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{p}$

۳۰۸۵- $\prod_{n=۱}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$

۳۰۸٦- ثابت کنید که حاصل ضرب $\prod_{n=۱}^{\infty}\cos x_{n}$ وقتی همگرا است که سری $\prod_{n=۱}^{\infty}x_{n}^{۲}$ همگرا باشد.

۳۰۸۷- ثابت کنید که حاصل ضرب $\prod_{n=۱}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{٤}+\alpha_{n}\right)$ $\left(|\alpha_{n}|<\frac{\pi}{٤}\right)$ وقتی همگرا است که سری $\prod_{n=۱}^{\infty}a_{n}$ همگرای مطلق باشد.

همگرایی مطلق و مشروط حاصل ضرب‌های نامتناهی زیر را بررسی کنید:

۳۰۸۸- $\prod_{n=۱}^{\infty}\left[۱+\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\right]$

۳۰۸۹- $\prod_{n=۱}^{\infty}\left[۱+\frac{(-۱)^{n+۱}}{\sqrt{n}}\right]$

۳۰۹۰- $\prod_{n=۱}^{\infty}\left[۱+\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^{p}}\right]$

۳۰۹۱- $\prod_{n=۲}^{\infty}\left[۱+\frac{(-۱)^{n}}{\ln n}\right]$

۳۰۹۲ - $\prod_{n=۲}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+(-۱)^n}}$

۳۰۹۳ - $\prod_{n=۱}^{\infty} n^{(-۱)^n}$

۳۰۹۴ - $\prod_{n=۱}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-۱)^n}}$

۳۰۹۵ - $\prod_{n=۱}^{\infty} \left[۱+\frac{(-۱)^{\frac{n(n-۱)}{۲}}}{n}\right]$

۳۰۹۶ - $\left(۱+\frac{۱}{\sqrt{۱}}\right)\left(۱-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)\left(۱-\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)\left(۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)\times$

$\times\left(۱-\frac{۱}{\sqrt{۷}}\right)\left(۱-\frac{۱}{\sqrt{۹}}\right)\left(۱+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)\cdots$

۳۰۹۷ - $\left(۱+\frac{۱}{۱^{\alpha}}\right)\left(۱-\frac{۱}{۲^{\alpha}}\right)^{۲}\left(۱+\frac{۱}{۳^{\alpha}}\right)\left(۱+\frac{۱}{۴^{\alpha}}\right)\left(۱-\frac{۱}{۵^{\alpha}}\right)^{۲}\times$

$\times\left(۱+\frac{۱}{۶^{\alpha}}\right)\cdots$

۳۰۹۸ - نشان دهید که حاصل ضرب

$$\left(۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۲}\right)\left(۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)\left(۱+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{۳}\right)\left(۱-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)\cdots$$

همگرا است با اینکه سری

$$\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۲}\right)+\left(-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)+\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{۳}\right)+\left(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)+\cdots$$

واگرا است.

۳۰۹۹ - نشان دهید که حاصل ضرب $\prod_{n=۱}^{\infty}(۱+\alpha_n)$ که در آن

$$\alpha_n=\begin{cases}-\frac{۱}{\sqrt{k}}, & \text{اگر}\quad n=۲k-۱\\ \frac{۱}{\sqrt{k}}+\frac{۱}{k}+\frac{۱}{k\sqrt{k}}, & \text{اگر}\quad n=۲k\end{cases}$$

همگرا است با اینکه سری‌های $\sum_{n=۲}^{\infty}\alpha_n$ و $\sum_{n=۱}^{\infty}\alpha_n^{۲}$ واگرا می‌باشند.

۳۱۰۰ – فرض کنیم

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

(تابع زتای ریمن) و $p_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ اعداد اول متوالی باشد .
ثابت کنید که

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x)$$

۳۱۰۰ – ثابت کنید که حاصل ضرب

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right)^{-1}$$

و سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

که در آن $p_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ اعداد اول متوالی است واگرا می‌باشند (اولر) .

۳۱۰۲ – هرگاه $(n = 1, 2, \ldots)$ $a_n > 0$ و

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon > 0)$$

ثابت کنید که

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

<u>راهنمائی</u> –

$$\lim_{n \to \infty} a_n n^p = a_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$$

را در نظر بگیرید .

۳۱۰۳ – بیاری دستور والیس ثابت کنید که

$$\frac{1 \times 3 \times 5 \ldots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \ldots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

۳۱۰۴ – ثابت کنید که عبارت

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{۱}{۲}}}$$

بازای $n \to \infty$ دارای حد مخالف صفر A می‌باشد.

از اینجا دستور استیرلینگ را نتیجه بگیرید:

$$n! = An^{n+\frac{۱}{۲}} e^{-n} \quad (۱ + \varepsilon_n)$$

که در آن $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = ۰$ و $A = \sqrt{۲\pi}$

راهنمایی – حد مطلوب را بشکل حاصل ضرب نامتناهی

$$A = \lim_{n \to \infty} a_n = a_۱ \prod_{n=۱}^{\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n}$$

در آورید.

برای تعیین مقدار ثابت A از دستور والیس استفاده کنید.

۳۱۰۵ – اولر تابع گامای $\Gamma(x)$ را با دستور زیر تعریف کرده است:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!n^x}{x(x+۱)\ldots(x+n)}$$

از روی این دستور: الف) تابع $\Gamma(x)$ را بشکل حاصل‌ضرب نامتناهی نمایش دهید؛ ب) نشان دهید که تابع $\Gamma(x)$ بازای جمیع مقادیر حقیقی x جز اعداد درست منفی دارای معناست؛ پ) ویژگی زیر را بدست آورید:

$$\Gamma(x+۱) = x\Gamma(x)$$

ت) مقدار $\Gamma(n)$ را که در آن n عدد درست مثبتی باشد بدست آورید.

۳۱۰۶ – هرگاه تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[a, b]$ انتگرال ویژه‌پذیر باشد و

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}, \quad f_{in} = f(a+i\delta_n) \quad (i = ۱, ۲, \ldots, n)$$

ت کنید که

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{i=۱}^{n} (۱ + \delta_n f_{in}) e^{\int_a^b f(x)\,dx}$$

۳۱۰۷ – ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=۰}^{n-۱}(a+ib)}}{\sum\limits_{i=۰}^{n-۱}(a+ib)}=\frac{۲}{e}$$

که در آن $a>۰$ و $b>۰$.

۳۱۰۸ – فرض کنیم $f_n(x)\quad(n=۱,\ ۲,\ \ldots)$ روی فاصلهٔ $(a,\ b)$ توابعی باشند پیوسته و $|f_n(x)|\leqslant c_n\quad(n=۱,\ ۲,\ \ldots)$ که در آن سری $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} c_n$ همگرا است .

ثابت کنید که تابع

$$F(x)=\prod_{n=۱}^{\infty}[۱+f_n(x)]$$

روی فاصلهٔ $(a,\ b)$ پیوسته است .

۳۱۰۹ – عبارت مشتق تابع

$$F(x)=\prod_{n=۱}^{\infty}[۱+f_n(x)]$$

را پیدا کنید . شرط کافی وجود $F'(x)$ کدام است ؟

۳۱۱۰ – ثابت کنید که اگر $۰<x<y$ در آنصورت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+۱)\ldots(x+n)}{y(y+۱)\ldots(y+n)}=۰$$

بخش ۱۵ — دستور استیرلینگ

برای محاسبهٔ $n!$ بازای مقادیر بزرگ n دستور استیرلینگ مفید است :

$$n!=\sqrt{۲\pi n}\ n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{۱۲n}}\quad(۰<\theta_n<۱)$$

با استفاده از دستور استیرلینگ مطلوبست محاسبهٔ تقریبی :

۳۱۱۱ – $\lg ۱۰۰!$

۳۱۱۲ – $۱\times۳\times۵\ldots۱۹۹۹$

۳۱۱۳ – $\dfrac{۱\times۳\times۵\ldots۹۹}{۲\times۴\times۶\ldots۱۰۰}$

۳۱۱۴ — C_{100}^{40}

۳۱۱۵ — $\dfrac{100!}{20!\,30!\,50!}$

۳۱۱۶ — $\int_{0}^{1} (1-x^2)^{50}\,dx$

۳۱۱۷ — $\int_{0}^{2\pi} \sin^{200} x\,dx$

۳۱۱۸ — برای حاصل ضرب زیر دستور مجانبی پیدا کنید:

$$(2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \,\dots\, (2n-1)$$

۳۱۱۹ — مطلوبست محاسبهٔ تقریبی C_{2n}^{n} برای مقادیر بزرگ n .

۳۱۲۰ — با استفاده از دستور استیرلینگ حدهای زیر را پیدا کنید:

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$ ؛

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ ؛

پ) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$ ؛

ت) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$

بخش ۱۱ — تقریب توابع پیوسته بیاری چندجمله‌ای

بند ۱ — دستور انترپولاسیون (درون‌یابی) لاگرانژ. چندجمله‌ای لاگرانژ

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}\, y_i$$

دارای ویژگی $P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots n)$ می‌باشد.

بند ۲ — چندجمله‌ای‌های برنشتین. اگر $f(x)$ روی قطعهٔ [۰ , ۱] تابع پیوسته‌ای باشد در آنصورت چندجمله‌ای‌های برنشتین

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$

روی قطعهٔ [۰ , ۱] بازای $n \to \infty$ بطور یکنواخت بسمت تابع $f(x)$ همگرا می‌باشند.

۳۱۲۱ – چندجمله‌ای P_n با کمترین توان n را با در نظر گرفتن دستگاه مقادیر مفروض زیر تشکیل دهید :

۵	٤	۰	-۲	x
۱	-۳	۱	۵	y

$P_n(-۱)$ ، $P_n(۱)$ ، $P_n(٦)$ بطور تقریبی چقدر می‌باشند ؟

۳۱۲۲ – معادلهٔ سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ گذرنده بر ۳ نقطهٔ $A(x_۰ - h, y_{-۱})$ ، $B(x_۰ , y_۰)$ ، $C(x_۰ + h, y_۱)$ را بنویسید .

۳۱۲۳ – برای استخراج تقریبی ریشهٔ $(۱ \leqslant x \leqslant ۱۰۰)$ $y = \sqrt{x}$ با استفاده از مقادیر $x_۰ = ۱$ ، $y_۰ = ۱$ ؛ $x_۱ = ۲۵$ ، $y_۱ = ۵$ ؛ $x_۲ = ۱۰۰$ ، $y_۲ = ۱۰$ دستوری بیابید .

۳۱۲٤ – دستور تقریبی بصورت

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^۳ \quad (۰ \leqslant x \leqslant ۹۰^\circ)$$

را با استفاده از مقادیر

$$\sin ۰^\circ = ۰,\ \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲},\ \sin ۹۰^\circ = ۱$$

نتیجه بگیرید .

با استفاده از این دستور

$$\sin ۲۰^\circ,\ \sin ٤۰^\circ,\ \sin ۸۰^\circ$$

را بطور تقریبی پیدا کنید .

۳۱۲۵ – برای تابع $f(x) = |x|$ روی قطعهٔ $[-۱, ۱]$ با اختیار نقطه‌های گرهی $x = ۰, \pm\frac{۱}{۲}, \pm ۱$ چندجمله‌ای انترپولاسیونی لاگرانژ را تشکیل دهید .

۳۱۲٦ – با عوض کردن تابع $y(x)$ با چندجمله‌ای لاگرانژ مطلوبست محاسبهٔ تقریبی

$$\int_۰^۲ y(x)\, dx$$

که در آن

x	۰	۰,۵	۱	۱,۵	۲
$y(x)$	۵	٤,۵	۳	۲,۵	۵

۳۱۲۷ – چندجمله‌ای برنشتین $B_n(x)$ را روی قطعهٔ $[۰, ۱]$ برای توابع x ، $x^۲$ ، $x^۳$ تشکیل دهید.

۳۱۲۸ – دستور چندجمله‌ای‌های برنشتین $B_n(x)$ را برای تابع $f(x)$ روی قطعهٔ مفروض $[a, b]$ بنویسید.

۳۱۲۹ – تابع $f(x) = \frac{|x| + x}{۲}$ را روی قطعهٔ $[-۱, ۱]$ بوسیلهٔ چندجمله‌ای برنشتین $B_٤(x)$ تقریب کنید.

نمودار توابع $y = \frac{|x| + x}{۲}$ و $y = B_٤(x)$ را رسم کنید.

۳۱۳۰ – تابع $f(x) = |x|$ را بازای $-۱ \leqslant x \leqslant ۱$ بوسیلهٔ چندجمله‌ای‌های برنشتین مرتبه‌های زوج تقریب کنید.

۳۱۳۱ – چندجمله‌ای برنشتین $B_n(x)$ را برای تابع زیر بنویسید:

$$f(x) = e^{kx} \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

۳۱۳۲ – چندجمله‌ای $B_n(x)$ را برای تابع $f(x) = \cos x$ روی قطعهٔ $-\frac{\pi}{۲} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{۲}$ حساب کنید.

۳۱۳۳ – ثابت کنید که $|x| = \lim_{n \to \infty} P_n(x)$ روی قطعهٔ $[-۱, ۱]$ که در آن

$$P_n(x) = ۱ - \frac{۱ - x^۲}{۲} - \sum_{i=۲}^{n} \frac{۱ \times ۳ \ldots (۲i - ۳)}{۲ \times ٤ \ldots (۲i)} (۱ - x^۲)^i$$

۳۱۳۳,۱ – فرض کنیم $f(x) \in C[a, b]$ و

$$M_k = \int_a^b x^k f(x)\, dx = ۰ \quad (k = ۰, ۱, ۲, \ldots)$$

ثابت کنید که $f(x) \equiv ۰$ بازای $x \in [a, b]$.

راهنمایی – از قضیهٔ ویرشتراس در بارهٔ تقریب توابع پیوسته بوسیلهٔ چندجمله‌ای‌ها استفاده کنید.

۳۱۳٤ – فرض کنیم $f(x)$ بازای $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ تابعی باشد پیوسته و $a_n, b_n \ (n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$ ضرایب فوریهٔ آن باشند. ثابت کنید که چندجمله‌ای‌های مثلثاتی فه‌یر

$$\sigma_n(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{i=۱}^{n-۱} \left(۱ - \frac{i}{n}\right)(a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

روی فاصلهٔ $(-\pi, \pi)$ بطور یکنواخت بطرف تابع $f(x)$ همگرا هستند.

۳۱۳۵ – چندجمله‌ای فه‌یر $\sigma_{۲n-۱}(x)$ را برای تابع

$$f(x) = |x| \quad \text{بازای} \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

تشکیل دهید.

قسمت دوم

توابع چند متغیره

فصل ۶

حساب دیفرانسیل توابع یک متغیره

بخش ۱ — حد تابع . پیوستگی

بند ۱ — حد تابع . هرگاه تابع $f(P)=f(x_۱, x_۲, \dots , x_n)$ در مجموعهٔ E که دارای نقطهٔ تجمع $P_۰$ است معین باشد گوئیم که

$$\lim_{P \to P_۰} f(P)=A$$

اگر برای هر عدد دلخواه $\varepsilon > ۰$ عدد $\delta=\delta(\varepsilon, P_۰) > ۰$ وجود داشته باشد بطوری که

$$|f(P)-A| < \varepsilon$$

اگر $P \in E$ و $۰ < \rho(P, P_۰) < \delta$ که در آن $\rho(P, P_۰)$ فاصله بین دو نقطهٔ P و $P_۰$ میباشد .

بند ۲ — پیوستگی . تابع $f(P)$ را در نقطهٔ $P_۰$ پیوسته نامند هر گاه

$$\lim_{P \to P_۰} f(P)=f(P_۰)$$

تابعی که در جمیع نقاط یک حوزه پیوسته باشد در آن حوزه پیوسته است .

بند ۳ — پیوستگی یکنواخت . تابع $f(P)$ را در حوزهٔ G وقتی پیوستهٔ یکنواخت نامند که بازای هر $\varepsilon > ۰$ عدد $\delta > ۰$ که فقط به ε بستگی دارد وجود داشته باشد بطوری که برای هر دو نقطهٔ P' و P'' از G ، نامساوی

$$|f(P')-f(P'')| < \varepsilon$$

بازای $\rho(P', P'') < \delta$ برقرار میباشد .

هر تابعی که در یک حوزهٔ بسته و کراندار پیوسته باشد ، در این حوزه پیوستهٔ یکنواخت است .

حوزهٔ وجود توابع زیر را تعیین کنید:

٣١٣٦- $u = x + \sqrt{y}$

٣١٣٧- $u = \sqrt{١ - x^{٢}} + \sqrt{y^{٢} - ١}$

٣١٣٨- $u = \sqrt{١ - x^{٢} - y^{٢}}$

٣١٣٩- $u = \dfrac{١}{\sqrt{x^{٢} + y^{٢} - ١}}$

٣١٤٠- $u = \sqrt{(x^{٢} + y^{٢} - ١)(٤ - x^{٢} - y^{٢})}$

٣١٤١- $u = \sqrt{\dfrac{x^{٢} + y^{٢} - x}{٢x - x^{٢} - y^{٢}}}$

٣١٤٢- $u = \sqrt{١ - (x^{٢} + y)^{٢}}$

٣١٤٣- $u = \ln(-x - y)$

٣١٤٤- $u = \arcsin \dfrac{y}{x}$

٣١٤٥- $u = \arccos \dfrac{x}{x + y}$

٣١٤٦- $u = \arcsin \dfrac{x}{y^{٢}} + \arcsin(١ - y)$

٣١٤٧- $u = \sqrt{\sin(x^{٢} + y^{٢})}$

٣١٤٨- $u = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^{٢} + y^{٢}}}$

٣١٤٩- $u = \ln(xyz)$

٣١٥٠- $u = \ln(-١ - x^{٢} - y^{٢} + z^{٢})$

خطهای تراز هر یک از توابع زیر را رسم کنید:

٣١٥١- $z = x + y$

٣١٥٢- $z = x^{٢} + y^{٢}$

٣١٥٣- $z = x^{٢} - y^{٢}$

٣١٥٤- $z = (x + y)^{٢}$

٣١٥٥- $z = \dfrac{y}{x}$

٣١٥٦- $z = \dfrac{١}{x^{٢} + ٢y^{٢}}$

٣١٥٧- $z = \sqrt{xy}$

٣١٥٨- $z = |x| + y$

٣١٥٩- $z = |x| + |y| - |x + y|$

٣١٥٩,١- $z = \min(x, y)$

٣١٥٩,٢- $z = \max(|x|), |y|$

٣١٥٩,٣- $z = \min(x^{٢}, y)$

٣١٦٠- $z = e^{\frac{٢x}{x^{٢} + y^{٢}}}$

٣١٦١- $z = x^{y} \quad (x > ٠)$

٣١٦٢- $z = x^{y} e^{-x} \quad (x > ٠)$

٣١٦٣- $z = \ln \sqrt{\dfrac{(x - a)^{٢} + y^{٢}}{(x + a)^{٢} + y^{٢}}} \quad (a > ٠)$

٣١٦٤- $z = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{٢ay}{x^{٢} + y^{٢} - a^{٢}} \quad (a > ٠)$

٣١٦٥- $z = \operatorname{sgn}(\sin x \sin y)$

سطوح تراز هر یک از توابع زیر را بدست آورید:

٣١٦٦- $u = x + y + z$

٣١٦٧- $u = x^{٢} + y^{٢} + z^{٢}$

٣١٦٨- $u = x^{٢} + y^{٢} - z^{٢}$

٣١٦٩- $u = (x + y)^{٢} + z^{٢}$

٣١٧٠- $u = \operatorname{sgn} \sin(x^{٢} + y^{٢} + z^{٢})$

خصوصیت سطوحی را که با معادلات زیر تعریف شده اند بررسی کنید :

۳۱۷۱ - $z = f(y - ax)$

۳۱۷۲ - $z = f\left(\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}\right)$

۳۱۷۳ - $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$

۳۱۷۴ - $z = f\left(\frac{y}{y}\right)$

۳۱۷۵ - نمودار تابع

$$F(t) = f(\cos t,\ \sin t)$$

را که در آن

$$f(x,\ y) = \begin{cases} ۱, & \text{اگر} \quad y \geqslant x \\ ۰, & \text{اگر} \quad y < x \end{cases}$$

رسم کنید .

۳۱۷۶ - مطلوبست محاسبهٔ

$$f(x,\ y) = \frac{۲xy}{x^{۲} + y^{۲}} \quad \text{اگر} \quad f\left(۱,\ \frac{y}{x}\right)$$

۳۱۷۷ - مطلوبست $f(x)$

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}}{x} \quad (x > ۰) \quad \text{اگر}$$

۳۱۷۸ - با فرض

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - ۱)$$

مطلوبست توابع f و z در صورتیکه $z = x$ بازای $y = ۱$.

۳۱۷۹ - با فرض

$$z = x + y + f(x - y)$$

مطلوبست توابع f و z در صورتیکه $z = x^{۲}$ بازای $y = ۰$.

۳۱۸۰ - مطلوبست محاسبهٔ

$$f\left(x + y,\ \frac{y}{x}\right) = x^{۲} - y^{۲} \quad \text{اگر} \quad f(x,\ y)$$

۳۱۸۱ - نشان دهید که برای تابع

$$f(x,\ y) = \frac{x - y}{x + y}$$

داریم :

$$\lim_{x \to ۰} \left\{\lim_{y \to} f(x, y)\right\} = +۱ \qquad \lim_{y \to ۰} \left\{\lim_{x \to ۰} f(x, y)\right\} = -۱$$

در صورتیکه $\lim\limits_{\substack{x \to ۰ \\ y \to ۰}} f(x, y)$ وجود ندارد .

۳۱۸۲ – نشان دهید که برای تابع

$$f(x, y) = \frac{x^۲ y^۲}{x^۲ y^۲ + (x - y)^۲}$$

داریم :

$$\lim_{x \to ۰} \left\{\lim_{y \to ۰} f(x, y)\right\} = \lim_{y \to ۰} \left\{\lim_{x \to ۰} f(x, y)\right\} = ۰$$

با این وجود ، $\lim\limits_{\substack{x \to ۰ \\ y \to ۰}} f(x, y)$ وجود ندارد .

۳۱۸۳ – نشان دهید که برای تابع

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{۱}{x} \sin \frac{۱}{y}$$

هر دو حد مکرر $\lim\limits_{x \to ۰} \left\{\lim\limits_{x \to ۰} f(x, y)\right\}$ و $\lim\limits_{y \to ۰} \left\{\lim\limits_{x \to ۰} f(x, y)\right\}$ وجود ندارند معهذا $\lim\limits_{\substack{x \to ۰ \\ y \to ۰}} f(x, y) = ۰$ وجود دارد .

۳۱۸۳,۱ – آیا حد زیر وجود دارد :

$$\lim_{\substack{x \to ۰ \\ y \to ۰}} \frac{۲xy}{x^۲ + y^۲}$$

۳۱۸۳,۲ – حد تابع

$$f(x, y) = x^۲ e^{-(x^۲ - y)}$$

در طول شعاع دلخواه

$$x = t \cos\alpha, \quad y = t \sin\alpha \quad (۰ < t < +\infty)$$

بازای $t \to +\infty$ چقدر است ؟

آیا میتوان این تابع را بازای $x \to \infty$ و $y \to \infty$ بی نهایت کوچک نامید ؟

۳۱۸٤ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x,y)\right\} \quad و \quad \lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x,y)\right\}$$

در هر یک از حالات زیر :

الف) $f(x,y)=\frac{x^۲+y^۲}{x^۲+y^٤},\quad a=\infty,\ b=\infty$

ب) $f(x,y)=\frac{x^y}{۱+x^y},\quad a=\infty,\ b=+۰$

پ) $f(x,y)=\sin\frac{\pi x}{۲x+y},\quad a=\infty,\ b=\infty$

ت) $f(x,y)=\frac{۱}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{۱+xy},\quad a=۰,\ b=\infty$

ث) $f(x,y)=\log_x(x+y),\quad a=۱,\ b=۰$

مطلوبست محاسبهٔ حد مضاعف توابع زیر :

۳۱۸۵ – $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^۲-xy+y^۲}$

۳۱۸٦ – $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^۲+y^۲}{x^٤+y^٤}$

۳۱۸۷ – $\lim\limits_{\substack{x\to۰\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}$

۳۱۸۸ – $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^۲+y^۲)\,e^{-(x+y)}$

۳۱۸۹ – $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^۲+y^۲}\right)^{x^۲}$

۳۱۹۰ – $\lim\limits_{\substack{x\to۰\\ y\to۰}}(x^۲+y^۲)^{x^۲y^۲}$

۳۱۹۱ – $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^{\frac{x^۲}{x+y}}$

۳۱۹۲ – $\lim\limits_{\substack{x\to۱\\ y\to۰}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$

۳۱۹۳ – در چه امتدادهائی از φ حدود متناهی

الف) $\lim\limits_{\rho\to+۰} e^{\frac{x}{x^۲+y^۲}}$ ؛ ب) $\lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{x^۲-y^۲}\times\sin ۲xy$

بازای $x=\rho\cos\varphi$ و $y=\rho\sin\varphi$ وجود دارد ؟

نقاط انفصال توابع زیر را پیدا کنید :

۳۱۹٤ – $u=\frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$

۳۱۹۵ – $u=\frac{xy}{x+y}$

۳۱۹٦ – $u=\frac{x+y}{x^۳+y^۳}$

۳۱۹۷ – $u=\sin\frac{۱}{xy}$

۳۱۹۸ - $u = \frac{۱}{\sin x \sin y}$ **۳۲۰۰** - $u = \frac{۱}{xyz}$

۳۱۹۹ - $u = \ln(۱ - x^۲ - y^۲)$

۳۲۰۱ - $u = ln \frac{۱}{\sqrt{(x-a)^۲ + (y-b)^۲ + (z-c)^۲}}$

۳۲۰۲ - نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{۲xy}{x^۲ + y^۲}, & \text{اگر} \quad x^۲ + y^۲ \neq ۰ \\ ۰, & \text{اگر} \quad x^۲ + y^۲ = ۰ \end{cases}$$

بطور جداگانه نسبت به هر یک از متغیرهای x و y پیوسته است (در صورتیکه یکی متغیر و دیگری ثابت فرض شود) ولی نسبت بهر دو متغیر توأماً پیوسته نیست .

۳۲۰۳ - نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^۲y}{x^٤ + y^۲}, & \text{اگر} \quad x^۲ + y^۲ \neq ۰ \\ ۰, & \text{اگر} \quad x^۲ + y^۲ = ۰ \end{cases}$$

در نقطهٔ O $(۰, ۰)$ در طول هر شعاع

$$x = t\cos\alpha, \quad y = t\sin\alpha \quad (۰ \leqslant t < +\infty)$$

مار بر این نقطه پیوسته است یعنی

$$\lim_{t \to ۰} f(t\cos\alpha, \ t\sin\alpha) = f(۰, ۰)$$

وجود دارد . معهذا تابع در نقطهٔ $(۰, ۰)$ پیوسته نیست .

۳۲۰۳,۱ - پیوستگی یکنواخت تابع خطی

$$u = ۲x - ۳y + ٥$$

را در صفحهٔ ناستناهی $E^۲ = \{|x| < +\infty, \ |y| < +\infty\}$ بررسی کنید .

۳۲۰۳,۱ - پیوستگی یکنواحت تابع زیر را در صفحهٔ $E^۲ = \{|x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ بررسی کنید :

$$u = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

۳۲۰۳,۳ - آیا تابع زیر در حوزهٔ $x^۲ + y^۲ < ۱$ پیوستهٔ یکنواخت است :

$$f(x, y) = \frac{\pi}{۱ - x^۲ - y^۲}$$

$$u = \arc\sin\frac{x}{y}$$

مفروض است. آیا این تابع در حوزهٔ تعریف خودش E پیوسته است؟
آیا تابع u در حوزهٔ E پیوستهٔ یکنواخت است؟

۳۲۰٤ - ثابت کنید که مجموعهٔ نقاط انفصال تابع $f(xy) = x\sin\frac{۱}{y}$ اگر $y \neq ۰$ و $f(x, ۰) = ۰$، بسته نیست.

۳۲۰۵ - ثابت کنید اگر تابع $f(x, y)$ در یک حوزهٔ G نسبت به متغیر x پیوسته و بطور یکنواخت نسبت به x، نسبت به متغیر y پیوسته باشد در اینصورت تابع در حوزهٔ مفروض پیوسته است.

۳۲۰٦ - ثابت کنید اگر تابع $f(x, y)$ در یک حوزهٔ G نسبت به متغیر x پیوسته و نسبت به متغیر y صادق در شرط لیپشیتس باشد یعنی

$$|f(x, y') + f(x, y'')| \leqslant L\,|y' - y''|$$

که در آن $(x, y') \in G$، $(x, y'') \in G$ و L ثابت میباشد در اینصورت تابع در آن حوزه پیوسته است.

۳۲۰۷ - ثابت کنید که اگر تابع $f(x, y)$ بطور جداگانه نسبت بهر یک از متغیرهای x و y پیوسته و نسبت بیکی از آنها یکنواخت باشد در اینصورت این تابع نسبت بمجموعهٔ متغیرها پیوسته میباشد (قضیهٔ یانگ)

۳۲۰۸ - فرض کنیم تابع $f(x, y)$ در حوزهٔ $a \leqslant x \leqslant A$ و $b \leqslant y \leqslant B$ پیوسته و دنبالهٔ توابع $(n = ۱, ۲, \ldots)$ $\varphi_n(x)$ بطور یکنواخت روی $[a, A]$ همگرا و صادق در شرط $b \leqslant \varphi_n(x) \leqslant B$ باشد. ثابت کنید دنبالهٔ توابع

$$F_n(x) = f(x,\ \varphi_n(x)) \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$$

نیز بطور یکنواخت روی $[a, A]$ همگرا است.

۳۲۰۹ - فرض کنیم: ۱) تابع $f(x, y)$ در حوزهٔ $R(a < x < A;\ b < y < B)$ پیوسته باشد؛ ۲) تابع $\varphi(x)$ در فاصلهٔ (a, A) پیوسته و دارای مقادیری متعلق به فاصلهٔ (b, B) باشد. ثابت کنید که تابع

$$F(x) = f(x, \varphi(x))$$

در فاصلهٔ (a, A) پیوسته است.

۳۲۱۰ − فرض کنیم: ۱) تابع $f(x, y)$ در حوزهٔ $R(a<x<A;\ b<y<B)$ پیوسته باشد؛ ۲) توابع $x=\varphi(u, v)$ و $y=\psi(u, v)$ در حوزهٔ $R'(a'<u<A';\ b'<v<B')$ پیوسته و دارای مقادیری به ترتیب متعلق به فاصله‌های (a, A) و (b, B) باشد. ثابت کنید که تابع

$$F(u, v)=f(\varphi(u, v),\ \psi(u, v)$$

در حوزهٔ R' پیوسته است.

بخش ۲ — مشتق‌های جزئی. دیفرانسیل تابع

بند ۱ — مشتق‌های جزئی. نتیجه مشتق‌گیری جزئی تابع چند متغیره در صورتیکه تمام مشتقات جزئی داخل محاسبه پیوسته باشند مستقل از ترتیب مشتق‌گیری میباشد.

بند ۲ — دیفرانسیل تابع. اگر نمو کامل تابع $f(x, y, z)$ از متغیرهای مستقل x ، y ، z را بتوان بصورت

$$\Delta f(x, y, z)=A\,\Delta x+B\,\Delta y+C\,\Delta z+o(\rho)$$

در آورد که در آن A ، B ، C مستقل از Δx ، Δy ، Δz و $\rho=\sqrt{(\Delta x)^{۲}+(\Delta y)^{۲}+(\Delta z)^{۲}}$ میباشد در اینصورت تابع $f(x, y, z)$ را در نقطهٔ (x, y, z) دیفرانسیل‌پذیر نامند و بخش خطی اصلی نمو $A\,\Delta x+B\,\Delta y+C\,\Delta z$ مساوی

$$df(x, y, z)=f'_x(x, y, z)\,dx+f'_y(x, y, z)\,dy+f'_z(x, y, z)\,dz \tag{۱}$$

که در آن $dx=\Delta x,\ dy=\Delta y,\ dz=\Delta z$ دیفرانسیل این تابع نامیده میشود.

هر گاه متغیرهای x, y, z توابع دیفرانسیل‌پذیر از متغیرهای مستقل باشند فرمول (۱) در آن حالت نیز ارزش خود را حفظ میکند.

اگر x, y, z متغیرهای مستقلی باشند برای دیفرانسیل‌های مرتبهٔ بالاتر فرمول نمادی زیر را داریم:

$$d^n f(x, y, z)=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x, y, z)$$

بند ۳ — مشتق تابع مرکب. اگر $w=f(x, y, z)$ که در آن $x=\varphi(u, v)$ و $y=\psi(u, v)$ و $z=\chi(u, v)$ و توابع χ, ψ, φ دیفرانسیل‌پذیر باشند در اینصورت

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial v}$$

برای محاسبهٔ مشتقات مرتبهٔ دوم تابع w استفاده از فرمول‌های نمادی زیر مفید میباشد :

$$\frac{\partial^۲ w}{\partial u^۲} = \left(P_۱\,\frac{\partial}{\partial x} + Q_۱\,\frac{\partial}{\partial y} + R_۱\,\frac{\partial}{\partial z}\right)^۲ w +$$
$$+ \frac{\partial P_۱}{\partial u}\,\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_۱}{\partial u}\,\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_۱}{\partial u}\,\frac{\partial w}{\partial z}$$

و

$$\frac{\partial^۲ w}{\partial u\,\partial v} = \left(P_۱\,\frac{\partial}{\partial x} + Q_۱\,\frac{\partial}{\partial y} + R_۱\,\frac{\partial}{\partial z}\right) \times$$
$$\times \left(P_۲\,\frac{\partial}{\partial x} + Q_۲\,\frac{\partial}{\partial y} + R_۲\,\frac{\partial}{\partial z}\right) w + \frac{\partial P_۱}{\partial v}\,\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_۱}{\partial v}\,\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_۱}{\partial v}\,\frac{\partial w}{\partial z}$$

که در آن

$$P_۱ = \frac{\partial x}{\partial u},\ Q_۱ = \frac{\partial y}{\partial u},\ R_۱ = \frac{\partial z}{\partial u}$$

و

$$P_۲ = \frac{\partial x}{\partial v},\ Q_۲ = \frac{\partial y}{\partial v},\ R_۲ = \frac{\partial z}{\partial v}$$

بند ٤ — مشتق در امتداد مفروض . اگر امتداد l در فضای $Oxyz$ بوسیلهٔ کسینوس‌های هادی $\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ مشخص شده باشد و تابع $u = f(x, y, z)$ دیفرانسیل‌پذیر باشد در اینصورت مشتق در امتداد l از فرمول

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

محاسبه میشود . بزرگترین سرعت رشد تابع در نقطهٔ مفروض از لحاظ مقدار و امتداد با بردار

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\,i + \frac{\partial u}{\partial y}\,j + \frac{\partial u}{\partial z}\,k$$

تعریف میشود که گرادیان تابع است و قدر مطلق آن عبارتست از

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{۲}}$$

۳۲۱۱ – ثابت کنید که

$$f'_x(x,\ b)=\frac{d}{dx}[f(x,\ b)]$$

۳۲۱۲ – مطلوبست محاسبهٔ $f'_x(x,\ ۱)$ اگر

$$f(x,\ y)=x+(y-۱)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$$

۳۲۱۲,۱ – مطلوبست محاسبهٔ $f'_x(۰,\ ۰)$ و $f'_y(۰,\ ۰)$ اگر

$$f(x,\ y)=\sqrt[۳]{xy}$$

آیا این تابع در نقطهٔ $O(۰,\ ۰)$ دیفرانسیل‌پذیر است ؟

۳۲۱۲,۲ – آیا تابع زیر در نقطهٔ $O(۰,\ ۰)$ دیفرانسیل‌پذیر است :

$$f(x,\ y)=\sqrt[۳]{x^{۳}+y^{۳}}$$

۳۲۱۲,۳ – دیفرانسیل‌پذیری تابع زیر را در نقطهٔ $O(۰,\ ۰)$ بررسی کنید :

$$f(x,\ y)=e^{-\frac{۱}{x^{۲}+y^{۲}}} \quad \text{بازای} \quad x^{۲}+y^{۲}>۰$$

و $f(۰,\ ۰)=۰$.

مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم هر یک از تابع‌های زیر را بدست آورید :

۳۲۱۳ – $u=x^{٤}+y^{٤}-٤x^{۲}y^{۲}$

۳۲۱٤ – $u=xy+\dfrac{x}{y}$

۳۲۱۵ – $u=\dfrac{x}{y^{۲}}$

۳۲۱٦ – $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}$

۳۲۱۷ – $u=x\sin(x+y)$

۳۲۱۸ – $u=\dfrac{\cos x^{۲}}{y}$

۳۲۱۹ – $u=tg\dfrac{x^{۲}}{y}$

۳۲۲۰ – $u=x^{y}$

۳۲۲۱ – $u=\ln(x+y^{۲})$

۳۲۲۲ - $u = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$

۳۲۲۳ - $u = \text{arc tg}\,\frac{x+y}{۱-xy}$

۳۲۲۴ - $u = \text{arc sin}\,\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}$

۳۲۲۵ - $u = \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}$

۳۲۲۶ - $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{z}$

۳۲۲۷ - $u = x^{\frac{y}{z}}$

۳۲۲۸ - $u = x^{y^{z}}$

۳۲۲۹ - تساوی

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^{۲}u}{\partial y\,\partial x}$$

را بازای

الف) $u = x^{۲} - ۲xy - ۳y^{۲}$؛ ب) $u = x^{y^{۲}}$؛ پ) $u = \text{arc cos}\sqrt{\frac{x}{y}}$

تحقیق کنید.

۳۲۳۰ - فرض کنیم

$$f(x, y) = xy\,\frac{x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}} \quad \text{اگر} \quad x^{۲}+y^{۲} \neq ۰ \quad \text{و} \quad f(۰, ۰) = ۰$$

نشان دهید که

$$f''_{xy}\,xy(۰, ۰) \neq f''_{yx}(۰, ۰)$$

۳۲۳۰,۱ - اگر

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{۲xy}{x^{۲}+y^{۲}}, & \text{اگر} \quad x^{۲}+y^{۲} > ۰ \\ ۰, & \text{اگر} \quad x = y = ۰ \end{cases}$$

آیا $f''_{xy}(۰, ۰)$ وجود دارد؟

۳۲۳۱ - فرض کنیم $u = f(x, y, z)$ تابع همگن مرتبهٔ n باشد. قضیهٔ توابع همگن اولر را برای هر یک از مثالهای زیر تحقیق کنید:

الف) $u = (x - ۲y + ۳z)^{۲}$؛ ب) $u = \frac{x}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}$؛

پ) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$

۳۲۳۲ – ثابت کنید که اگر تابع دیفرانسیل‌پذیر $u = f(x, y, z)$ صادق در معادلهٔ

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu$$

باشد در اینصورت تابع همگن مرتبهٔ n میباشد .

راهنمائی – تابع کمکی

$$F(t) = \frac{f(tx, ty, tz)}{t^{n}}$$

را در نظر بگیرید .

۳۲۳۳ – ثابت کنید که اگر $f(x, y, z)$ تابع دیفرانسیل‌پذیر همگن مرتبهٔ n باشد در آنصورت مشتقات جزئی $f'_x(x, y, z)$ ، $f'_y(x, y, z)$ ، $f'_z(x, y, z)$ توابع همگن مرتبهٔ $n - ۱$ میباشند .

۳۲۳٤ – هر گاه $u = f(x, y, z)$ تابع دو بار دیفرانسیل‌پذیر همگن مرتبهٔ n باشد ثابت کنید که

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{۲} u = n(n - ۱)u$$

مطلوبست محاسبهٔ دیفرانسیل‌های مرتبهٔ اول و دوم هر یک از توابع زیر (x ، y ، z متغیرهای مستقل میباشند) :

۳۲۳۵ – $u = x^{m}y^{n}$

۳۲۳۶ – $u = \frac{x}{y}$

۳۲۳۷ – $u = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$

۳۲۳۸ – $u = \ln\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$

۳۲۳۹ – $u = e^{xy}$

۳۲٤۰ – $u = xy + yz + zx$

۳۲٤۱ – $u = \frac{z}{x^{۲} + y^{۲}}$

۳۲٤۲ – مطلوبست محاسبهٔ $df(۱, ۱, ۱)$ و $d^{۲}f(۱, ۱, ۱)$ اگر

$$f(x, y, z) = \sqrt[z]{\frac{x}{y}}$$

۳۲٤۳ – نشان دهید اگر

$$u = \sqrt{x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}}$$

در اینصورت $d^{۲}u \geqslant ۰$.

۳۲۴۴ – فرض کنیم که x ، y از لحاظ قدر مطلق کوچک باشند . برای هر یک از عبارات زیر دستور تقریبی تشکیل دهید :

الف) $(۱+x)^m(۱+y)^n$ ؛ ب) $\ln(۱+x)\times\ln(۱+y)$ ؛

پ) $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{۱+xy}$

۳۲۴۵ – اگر بجای نمو توابع ، دیفرانسیل آنها را قرار دهیم مطلوبست محاسبهٔ تقریبی هر یک از عبارات زیر :

الف) $۱{,}۰۰۲\times ۲{,}۰۰۳^۲\times ۳{,}۰۰۴^۳$ ؛

ب) $\dfrac{۱{,}۰۳^۲}{\sqrt[۳]{۰{,}۹۸\sqrt[٤]{۱{,}۰۵^۳}}}$ ؛ پ) $\sqrt{۱{,}۰۲^۳+۱{,}۹۷^۳}$

ت) $\sin ۲۹^\circ\times \operatorname{tg} ٤٦^\circ$

ث) $۰{,}۹۷^{۱{,}۰۵}$

۳۲۴۶ – مستطیلی باضلاع $x=٦\ \mathrm{m}$ و $y=۸\ \mathrm{m}$ مفروض است . اگر ضلع اول $۲\ \mathrm{mm}$ افزایش و ضلع دوم $۵\ \mathrm{mm}$ کاهش یابد قطر و مساحت آن چقدر تغییر میکنند ؟

۳۲۴۷ – زاویهٔ مرکزی یک قطاع دایره $\alpha=٦۰^\circ$ را باندازهٔ $\Delta\alpha=۱^\circ$ زیاد میکنیم . شعاع $R=۲۰\ \mathrm{cm}$ قطاع را چقدر کم کنیم تا سطح آن تغییر نکند ؟

۳۲۴۸ – ثابت کنید که خطای نسبی حاصل‌ضرب تقریباً مساوی مجموع خطاهای نسبی عوامل آن است .

۳۲۴۹ – در اندازه‌گیری شعاع قاعده R و ارتفاع H استوانه نتایج زیر بدست آمده :

$$R=۲{,}۵\ \mathrm{m}\pm ۰{,}۱\ \mathrm{m};\quad H=٤{,}۵\ \mathrm{m}\pm ۰{,}۲\ \mathrm{m}$$

با چه خطای مطلق Δ و خطای نسبی δ میتوان حجم استوانه را محاسبه نمود .

۳۲۵۰ – اضلاع مثلث $a=۲۰۰\ \mathrm{m}\pm ۲\ \mathrm{m}$ ، $b=۳۰۰\ \mathrm{m}\pm ۵\ \mathrm{m}$ و زاویه بین آنها $C=٦۰^\circ\pm ۱^\circ$ میباشد . با چه خطای مطلقی میتوان ضلع سوم c مثلث را حساب کرد ؟

۳۲۵۱ – نشان دهید که تابع

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$

در نقطهٔ $(۰,۰)$ پیوسته و دارای هر دو مشتق جزئی $f'_x(۰,۰)$ و $f'_y(۰,۰)$ میباشد معهذا در این نقطه دیفرانسیل‌پذیر نیست.

روند مشتقات $f'_x(x,y)$ و $f'_y(x,y)$ را در همسایگی نقطهٔ $(۰,۰)$ روشن کنید .

۳۲۵۲ – نشان دهید که تابع

$$f(x, y)=\frac{xy}{\sqrt{x^۲+y^۲}} \quad \text{اگر} \quad x^۲+y^۲\neq ۰$$

و

$$f(۰ ,\ ۰)=۰$$

در همسایگی نقطهٔ (۰ , ۰) پیوسته و دارای مشتقات جزئی کراندار $f'_x(x, y)$ و $f'_y(x, y)$ میباشد معهذا در این نقطه دیفرانسیل‌پذیر نیست .

۳۲۵۳ – نشان دهید که تابع

$$f(x, y)=(x^۲+y^۲)\sin\frac{۱}{x^۲+y^۲} \quad \text{اگر} \quad x^۲+y^۲\neq ۰$$

و

$$f(۰ ,\ ۰)=۰$$

در همسایگی نقطهٔ (۰ , ۰) دارای مشتقات جزئی $f'_x(x, y)$ و $f'_y(x, y)$ میباشد که در نقطهٔ (۰ , ۰) منفصل و در همسایگی دلخواه آن ناکراندار میباشند ، با این وجود ، تابع در نقطهٔ (۰ , ۰) دیفرانسیل‌پذیر است .

۳۲۵۴ – ثابت کنید که تابع $f(x, y)$ که دارای مشتقات جزئی کراندار $f'_x(x, y)$ و $f'_y(x, y)$ در یک حوزهٔ محدب E میباشند در این حوزه پیوستهٔ یکنواخت است .

۳۲۵۵ – ثابت کنید که اگر تابع $f(x, y)$ به ازای هر مقدار ثابت y ، نسبت به متغیر x پیوسته و دارای مشتق جزئی $f'_y(x, y)$ کراندار نسبت به متغیر y باشد در این صورت این تابع نسبت به متغیرهای x و y تواماً پیوسته است .

مطلوبست محاسبهٔ مشتقات جزئی ذکرشده در هر یک از مسایل زیر :

۳۲۵۶ – $\dfrac{\partial^۴ u}{\partial x^۴}$ ، $\dfrac{\partial^۴ u}{\partial x^۳\partial y}$ ، $\dfrac{\partial^۴ u}{\partial x^۲\partial y^۲}$ اگر

$$u=x-y+x^۲+۲xy+y^۲+x^۳-۳x^۲y-y^۳+x^۴-۴x^۲y^۲+y^۴$$

۳۲۵۷ – $\dfrac{\partial^۳ u}{\partial x^۲\partial y}$ اگر $u=x\ln(x, y)$

۳۲۵۸ – $\dfrac{\partial^۶ u}{\partial x^۳\partial y^۳}$ اگر $u=x^۳\sin y+y^۳\sin x$

۳۲۵۹ – $\frac{\partial^{۳} u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$ اگر $u = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+y+z-xyz}{۱-xy-xz-yz}$

۳۲۶۰ – $\frac{\partial^{۳} u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$ اگر $u = e^{xyz}$

۳۲۶۱ – $\frac{\partial^{٤} u}{\partial x\, \partial y\, \partial \xi\, \partial \eta}$ اگر $u = \ln \frac{۱}{\sqrt{(x-\xi)^{۲}+(y-\eta)^{۲}}}$

۳۲۶۲ – $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^{p}\, \partial y^{q}}$ اگر $u = (x - x_{۰})^{p}\, (y - y_{۰})^{q}$

۳۲۶۳ – $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^{m} \partial y^{n}}$ اگر $u = \frac{x+y}{x-y}$

۳۲۶٤ – $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^{m}\, \partial y^{n}}$ اگر $u = (x^{۲} + y^{۲})\, e^{x+y}$

۳۲۶۵ – $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^{p}\, \partial y^{q}\, \partial z^{r}}$ اگر $u = xyz\, e^{x+y+z}$

۳۲۶۶ – مطلوبست محاسبهٔ

$f^{(m+n)}_{x^m y^n}(۰,\ ۰)$ اگر $f(x,\ y) = e^{x} \sin y$

۳۲۶۷ – نشان دهید که اگر

$$u = f(xyz)$$

در این صورت

$$\frac{\partial^{۳} u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = F(t)$$

که در آن $t = xyz$ و تابع F را پیدا کنید.

۳۲۶۸ – مطلوبست محاسبهٔ $d^{٤}u$ اگر

$$u = x^{٤} - ۲x^{۳}y - ۲xy^{۳} + y^{٤} + x^{۳} - ۳x^{۲}y - ۳xy^{۲} + y^{۳} + \\ + ۲x^{۲} - xy + ۲y^{۲} + x + y + ۱$$

مشتقات $\frac{\partial^{٤} u}{\partial x^{٤}}$ ، $\frac{\partial^{٤} u}{\partial x^{۳} \partial y}$ ، $\frac{\partial^{٤} u}{\partial x^{۲}\, \partial y^{۲}}$ ، $\frac{\partial^{٤} u}{\partial x^{۳} \partial y}$ و $\frac{\partial^{٤} u}{\partial y^{٤}}$ چقدر است ؟

دیفرانسیل‌های کامل مرتبهٔ ذکرشده را در مسایل زیر پیدا کنید :

۳۲۶۹ – $d^{۳}u$ اگر $u = x^{۳} + y^{۳} - ۳xy\,(x - y)$

۳۲۷۰ – $d^{۳}u$ اگر $u = \sin(x^{۲} + y^{۲})$

۳۲۷۱ – $d^{۱۰}u$ اگر $u = \ln(x+y)$

۳۲۷۲ – $d^{٦}u$ اگر $u = \cos x \operatorname{ch} y$

۳۲۷۳ – $d^{۳}u$ اگر $u = xyz$

۳۲۷٤ – $d^{٤}u$ اگر $u = \ln(x^x y^y z^z)$

۳۲۷٥ – $d^{n}u$ اگر $u = e^{ax+by}$

۳۲۷٦ – $d^{n}u$ اگر $u = X(x)\,Y(y)$

۳۲۷۷ – $d^{n}u$ اگر $u = f(x+y+z)$

۳۲۷۸ – $d^{n}u$ اگر $u = e^{ax+by+cz}$

۳۲۷۹ – فرض کنیم $P_n(x, y, z)$ چندجمله‌ای همگن درجهٔ n باشد. ثابت کنید که

$$d^n P_n(x, y, z) = n!\, P_n(dx, dy, dz)$$

۳۲۸۰ – با فرض

$$Au = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$$

مطلوبست محاسبهٔ Au و $A^۲u = A(Au)$ اگر :

الف) $u = \frac{x}{x^۲+y^۲}$ ؛ ب) $u = \ln\sqrt{x^۲+y^۲}$

۳۲۸۱ – با فرض

$$\Delta u = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}$$

مطلوبست محاسبهٔ Δu اگر

الف) $u = \sin x \operatorname{ch} y$ ؛ ب) $u = \ln\sqrt{x^۲+y^۲}$

۳۲۸۲ – فرض کنیم

$$\Delta_۱ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^۲ + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^۲ + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^۲$$

و

$$\Delta_۲ u = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}$$

مطلوبست محاسبهٔ $\Delta_۱ u$ و $\Delta_۲ u$ اگر

الف) $u = x^۳ + y^۳ + z^۳ - ۳xyz$ ؛ ب) $u = \frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}$

مطلوبست محاسبهٔ مشتقات مرتبهٔ اول و دوم از توابع مرکب زیر :

۳۲۸۳ – $u = f(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})$

۳۲۸۴ – $u = f\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$

۳۲۸۵ – $u = f(x, xy, xyz)$

۳۲۸۶ – مطلوبست محاسبهٔ $\dfrac{\partial^{۲} u}{\partial x \, \partial y}$ اگر

$$u = f(x + y, \ xy)$$

۳۲۸۷ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\Delta u = \frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}} + \frac{\partial^{۲} u}{\partial z^{۲}}$$

اگر

$$u = f(x + y + z, \ x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})$$

مطلوبست محاسبهٔ دیفرانسیل‌های کامل مرتبه اول و دوم از توابع مرکب زیر (x ، y ، z متغیرهای مستقل میباشند) :

۳۲۸۸ – $u = f(t)$ که در آن $t = x + y$

۳۲۸۹ – $u = f(t)$ که در آن $t = \dfrac{y}{x}$

۳۲۹۰ – $u = f(\sqrt{x^{۲} + y^{۲}})$

۳۲۹۱ – $u = f(t)$ که در آن $t = xyz$

۳۲۹۲ – $u = f(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})$

۳۲۹۳ – $u = f(\xi, \eta)$ که در آن $\xi = ax$ ، $\eta = by$

۳۲۹۴ – $u = f(\xi, \eta)$ که در آن $\xi = x + y$ ، $\eta = x - y$

۳۲۹۵ – $u = f(\xi, \eta)$ که در آن $\xi = xy$ ، $\eta = \dfrac{x}{d}$

۳۲۹۶ – $u = f(x + y, \ z)$

۳۲۹۷ – $u = f(x + y + z, \ x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})$

۳۲۹۸ – $u = f\left(\dfrac{x}{y}, \ \dfrac{y}{z}\right)$

۳۲۹۹ – $u = f(x, y, z)$ که در آن $x = t$ ، $y = t^{۲}$ ، $z = t^{۳}$

۳۳۰۰ – $u = f(\xi, \eta, \zeta)$ که در آن $\xi = ax$ ، $\eta = by$ ، $\zeta = cz$

۳۳۰۱ – $u = f(\xi, \eta, \zeta)$ که در آن $\xi = x^{۲} + y^{۲}$ ، $\eta = x^{۲} - y^{۲}$ ، $\zeta = ۲xy$

مطلوبست محاسبهٔ $d^n u$ اگر :

۳۳۰۲ – $u = f(ax + by + cz)$

۳۳۰۳ – $u = f(ax, by, cz)$

۳۳۰۴ – $u = f(\xi, \eta, \zeta)$ که در آن $\xi = a_۱x + b_۱y + c_۱z$ ، $\eta = a_۲x + b_۲y + c_۲z$ ، $\zeta = a_۳x + b_۳y + c_۳z$

۳۳۰۵ – فرض کنیم $u = f(r)$ که در آن $r = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$ و f تابع دو بار دیفرانسیل‌پذیر است . نشان دهید که

$$\Delta u = F(r)$$

که در آن $\Delta u = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}$ اپراتور لاپلاس میباشد و تابع F را بدست آورید .

۳۳۰۶ – فرض کنیم u و v توابع دو بار دیفرانسیل‌پذیر و Δ اپراتور لاپلاس (مسالهٔ ۳۳۰۵ را ببینید) باشد . ثابت کنید که

$$\Delta(uv) = u\,\Delta v + v\,\Delta u + ۲\,\Delta(u, v)$$

که در آن

$$\Delta(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial v}{\partial z}$$

۳۳۰۷ – نشان دهید که تابع

$$u = \ln \sqrt{(x - a)^۲ + (y - b)^۲}$$

(a و b ثابت میباشند) در معادلهٔ لاپلاس

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$$

صادق است .

۳۳۰۸ – ثابت کنید که اگر تابع $u = u(x, y)$ در معادلهٔ لاپلاس (مساله ۳۳۰۷ را ببینید) صادق باشد تابع

$$v = u\left(\frac{x}{x^۲ + y^۲}, \frac{y}{x^۲ + y^۲}\right)$$

نیز در این معادله صادق است .

۳۳۰۹ – نشان دهید که تابع

$$u = \frac{۱}{۲a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x-b)^۲}{۴a^۲t}},$$

(a و b ثابتند) در معادلهٔ هدایت حرارت

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^۲ \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$$

صادق است.

۳۳۱۰ – ثابت کنید که اگر تابع $u = u(x, t)$ در معادلهٔ هدایت حرارت (مسالهٔ ۳۳۰۹ را ببینید) صادق باشد تابع

$$v = \frac{۱}{a\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^۲}{۴a^۲t}}\, u\left(\frac{x}{a^۲t},\ -\frac{۱}{a^۴t}\right) \quad (t > ۰)$$

نیز در این معادله صادق است.

۳۳۱۱ – ثابت کنید که تابع

$$u = \frac{۱}{r}$$

که در آن $r = \sqrt{(x-a)^۲ + (y-b)^۲ + (z-c)^۲}$ بازای $r \neq ۰$ ، در معادلهٔ لاپلاس

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲} = ۰$$

صادق است.

۳۳۱۲ – ثابت کنید که اگر تابع $u = u(x, y, z)$ در معادلهٔ لاپلاس (مسالهٔ ۳۳۱۱ را ببینید) صادق باشد تابع

$$v = \frac{۱}{r}\, u\left(\frac{k^۲x}{r^۲},\ \frac{k^۲y}{r^۲},\ \frac{k^۲z}{r^۲}\right)$$

که در آن k ثابت میباشد و $r = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$ ، نیز در این معادله صادق است.

۳۳۱۳ – ثابت کنید که تابع

$$u=\frac{C_۱e^{-ar}+C_۲e^{ar}}{r}$$

که در آن $r=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$ و $C_۱$ ، $C_۲$ ثابتند ، در معادلهٔ هلمهولتس

$$\frac{\partial^۲u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲u}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲u}{\partial z^۲}=a^۲u$$

صادق است .

۳۳۱۴ – فرض کنیم توابع $u_۱=u_۱(x, y, z)$ و $u_۲=u_۲(x, y, z)$ در معادلهٔ لاپلاس $\Delta u=۰$ صادق باشند .
ثابت کنید که تابع

$$v=u_۱(x, y, z)+(x^۲+y^۲+z^۲)u_۲(x, y, z)$$

در معادلهٔ بیهارمونیک

$$\Delta(\Delta v)=۰$$

صادق است .

۳۳۱۵ – فرض کنیم $f(x, y, z)$ تابع همگن مرتبهٔ n بوده و m بار دیفرانسیل‌پذیر باشد . ثابت کنید که

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x, y, z)=n(n-۱)\ldots$$

$$\ldots(n-m+۱)f(x, y, z)$$

۳۳۱۶ – اگر

$$z=\sin y+f(\sin x-\sin y)$$

و f تابعی دیفرانسیل پذیر باشد عبارت زیر را ساده کنید :

$$\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y}$$

۳۳۱۷ – نشان دهید تابع

$$z=x^nf\left(\frac{y}{x^۲}\right)$$

که در آن f تابع دیفرانسیل‌پذیر دلخواه است در معادلهٔ

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + ۲y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$$

صادق است .

۳۳۱۸ – نشان دهید که تابع

$$z = yf(x^۲ - y^۲)$$

که در آن f تابع دیفرانسیل‌پذیر دلخواه است در معادلهٔ

$$y^۲ = \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz$$

صادق است .

۳۳۱۹ – اگر

$$u = \frac{۱}{۱۲} x^٤ - \frac{۱}{٦} x^۳ (y + z) + \frac{۱}{۲} x^۲ yz + f(y - x,\ z - x)$$

و f تابعی دیفرانسیل‌پذیر باشد عبارت زیر را ساده کنید :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

۳۳۲۰ – با فرض

$$x^۲ = vw, \quad y^۲ = uw, \quad z^۲ = uv$$

و

$$f(x, y, z) = F(u, v, w)$$

ثابت کنید که

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w$$

با فرض آنکه توابع دلخواه φ و ψ و غیره به تعداد کافی دفعات دیفرانسیل‌پذیر باشند درستی تساوی‌های زیر را تحقیق کنید :

۳۳۲۱ – $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ اگر $z = \varphi(x^۲ + y^۲)$

۳۳۲۲ – $x^۲ \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^۲ = ۰$ اگر $z = \frac{y^۲}{۳y} + \varphi(xy)$

۳۳۲۳ – $(x^۲ - y^۲) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$ اگر $z = e^y \varphi\left(ye^{\frac{x^۲}{۲y^۲}}\right)$

۳۳۲۴ - $x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=nu$ اگر $u=x^{n}\varphi\left(\frac{y}{x^{\alpha}},\ \frac{z}{x^{\beta}}\right)$

۳۳۲۵ - $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$

اگر $u=\frac{xy}{z}\ln x+x\varphi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right)$

۳۳۲۶ - $\frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}=a^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}$ اگر $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$

۳۳۲۷ - $\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}-۲\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=۰$ اگر $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$

۳۳۲۸ - $x^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+$ اگر $u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$

$+۲xy\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y}+y^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=۰$

۳۳۲۹ - $x^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+۲xy\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y}+y^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=n(n-۱)u$ اگر

$u=x^{n}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x^{۱-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$

۳۳۳۰ - $\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}$ اگر $u=\varphi[x+\psi(y)]$

با مشتق‌گیری پیاپی، توابع دلخواه φ و ψ را حذف کنید:

۳۳۳۱ - $z=x+\varphi(xy)$

۳۳۳۲ - $z=x\varphi\left(\frac{x}{y^{۲}}\right)$

۳۳۳۳ - $z=\varphi\left(\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\right)$

۳۳۳۴ - $u=\varphi(x-y,\ y-z)$

۳۳۳۵ - $u=\varphi\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z}\right)$

۳۳۳۶ - $z=\varphi(x)+\psi(y)$

۳۳۳۷ - $z=\varphi(x)\,\psi(y)$

۳۳۳۸ - $z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$

۳۳۳۹ - $z=x\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$

۳۳۴۰ - $z=\varphi(xy)+\psi\left(\frac{x}{y}\right)$

۳۳۴۱ - مطلوبست محاسبهٔ مشتق تابع

$$z=x^{۲}-y^{۲}$$

در نقطهٔ $M(۱,۱)$ در امتداد l که زاویهٔ $\alpha=۶۰^{\circ}$ را با امتداد مثبت محور Ox میسازد.

۳۳۴۲ – مطلوبست محاسبهٔ مشتق تابع

$$z = x^{۲} - xy + y^{۲}$$

در نقطهٔ $M(۱ , ۱)$ در امتداد l که زاویهٔ α با امتداد مثبت محور Ox میسازد . در چه امتدادهایی این مشتق دارای : الف) بیشترین مقدار ب) کمترین مقدار ؛ پ) مساوی صفر است ؟

۳۳۴۳ – مطلوبست محاسبهٔ مشتق تابع

$$z = \ln(x^{۲} + y^{۲})$$

در نقطهٔ $M(x_{۰}, y_{۰})$ در امتداد عمود بر خط تراز مار بر این نقطه .

۳۳۴۴ – مطلوبست محاسبهٔ مشتق تابع

$$z = ۱ - \left(\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}}\right)$$

در نقطهٔ $M\left(\frac{a}{\sqrt{۲}} , \frac{b}{\sqrt{۲}}\right)$ در امتداد قائم داخلی در این نقطه بر منحنی

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$$

۳۳۴۵ – مطلوبست محاسبهٔ مشتق تابع

$$u = xyz$$

در نقطهٔ $M(۱ , ۱ , ۱)$ در امتداد $l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.
مقدار گرادیان تابع در این نقطه چقدر است ؟

۳۳۴۶ – مقدار و امتداد گرادیان تابع

$$u = \frac{۱}{r}$$

را که در آن $r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}}$ ، در نقطهٔ $M_{۰}(x_{۰}, y_{۰}, z_{۰})$ پیدا کنید.

۳۳۴۷ – مطلوبست تعیین زاویهٔ بین گرادیانهای تابع

$$u = x^{۲} + y^{۲} - z^{۲}$$

در نقاط $A(\varepsilon, ۰ , ۰)$ و $B(۰ , \varepsilon, ۰)$

۳۳۴۸ – تفاضل بین مقدار گرادیان تابع

$$u = x + y + z$$

و مقدار گرادیان تابع

$$v = x + y + z + ۰,۰۰۱ \sin\left(۱۰^{۶}\pi \sqrt{x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}}\right)$$

در نقطهٔ $M(۱, ۲, ۲)$ چقدر است ؟

۳۳۴۹ – نشان دهید که در نقطهٔ $M_۰(x_۰, y_۰, z_۰)$ زاویهٔ بین گرادیانهای توابع

$$u = ax^{۲} + by^{۲} + cz^{۲}$$

و

$$v = ax^{۲} + by^{۲} + cz^{۲} + ۲mx + ۲ny + ۲pz$$

(a ، b ، c ، m ، n ، p مقادیر ثابت می‌باشند و $a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} \neq ۰$)
وقتی نقطهٔ $M_۰$ بی نهایت دور شود بسمت صفر میل میکند .

۳۳۵۰ – بفرض آنکه $u = f(x, y, z)$ تابع دو بار دیفرانسیل‌پذیر و $\cos\gamma$ ، $\cos\beta$ ، $\cos\alpha$ کسینوس‌های هادی امتداد l باشد مطلوبست محاسبهٔ

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial l^{۲}} = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)$$

۳۳۵۱ – فرض کنیم $u = f(x, y, z)$ تابع دو بار دیفرانسیل‌پذیر و

$$l_۱\{\cos\alpha_۱, \cos\beta_۱, \cos\gamma_۱\}, \ l_۲\{\cos\alpha_۲, \cos\beta_۲, \cos\gamma_۲\},$$
$$l_۳\{\cos\alpha_۳, \cos\beta_۳, \cos\gamma_۳\}$$

سه امتداد متعامد باشند .

ثابت کنید :

الف) $$\left(\frac{\partial u}{\partial l_۱}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial u}{\partial l_۲}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial u}{\partial l_۳}\right)^{۲} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{۲}$$

ب) $$\frac{\partial^{۲} u}{\partial l_۱^{۲}} + \frac{\partial^{۲} u}{\partial l_۲^{۲}} + \frac{\partial^{۲} u}{\partial l_۳^{۲}} = \frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}} + \frac{\partial^{۲} u}{\partial z^{۲}}$$

۳۳۵۲ – فرض میکنیم $u = u(x, y)$ تابعی دیفرانسیل‌پذیر باشد و بازای $y = x^{۲}$ داشته باشیم :

$$u(x, y) = ۱ \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = x$$

مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial u}{\partial y}$ بازای $y = x^{۲}$.

۳۳۵۳ – بفرض آنکه تابع $u = u(x, y)$ در معادله

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} - \frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}} = ۰$$

و علاوه بر آن در شرایط

$$u = (x, ۲x) = x, \quad u'_x(x, ۲x) = x^۲$$

صادق باشد . مطلوبست

$$u'_{xx}(x, ۲x), \quad u''_{xy}(x, ۲x), \quad u''_{yy}(x, ۲x)$$

با فرض $z = z(x, y)$ معادلات زیر را حل کنید :

۳۳۵۴ — $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = ۰$ **۳۳۵۵** — $\frac{\partial^۲ z}{\partial x\, \partial y} = ۰$

۳۳۵۶ — $\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = ۰$

۳۳۵۷ — با فرض $u = u(x, y, z)$ معادلهٔ زیر را حل کنید :

$$\frac{\partial^۳ u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = ۰$$

۳۳۵۸ — جواب $z = z(x, y)$ معادلهٔ

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^۲ + ۲y$$

صادق در شرط $z(x, x^۲) = ۱$ را پیدا کنید .

۳۳۵۹ — جواب $z = z(x, y)$ معادلهٔ

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = ۲$$

صادق در شرایط $z'_y(x, ۰) = x$ و $z(x, ۰) = ۱$ را پیدا کنید .

۳۳۶۰ — جواب $z = z(x, y)$ معادلهٔ

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x\, \partial y} = x + y$$

صادق در شرایط $z(۰, y) = y^۲$ و $z(x, ۰) = x$ را پیدا کنید .

بخش ۳ — مشتق گیری توابع ضمنی

بند ۱ — قضیهٔ وجود . اگر : ۱) تابع $F(x, y, z)$ در نقطهٔ $\grave{A}_۰(x_۰, y_۰, z_۰)$ برابر صفر شود ؛ ۲) $F(x, y, z)$ و $F'_z(x, y, z)$ در همسایگی نقطهٔ $\hat{A}_۰$ معین و پیوسته باشند ؛ ۳) $F'_z(x_۰, y_۰, z_۰) \neq ۰$ در آنصورت در یک همسایگی

بقدر کافی کوچک نقطهٔ $A_۰(x_۰, y_۰)$ تابع تک‌مقداری پیوستهٔ یکتای

$$z = f(x, y) \qquad (۱)$$

صادق در معادلهٔ

$$F(x, y, z) = ۰$$

وجود دارد چنان که $z_۰ = f(x_۰ y_۰)$

بند ۲ — دیفرانسیل‌پذیری توابع ضمنی. اگر علاوه بر آن ٤) تابع $F(x, y, z)$ در همسایگی نقطهٔ $A_۰(x_۰, y_۰, z_۰)$ دیفرانسیل‌پذیر باشد در این صورت تابع (۱) در همسایگی نقطهٔ $A_۰(x_۰, y_۰)$ دیفرانسیل‌پذیر و مشتقات $\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial z}{\partial x}$ آنرا میتوان از معادلات زیر حساب کرد.

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = ۰, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = ۰ \qquad (۲)$$

اگر تابع $F(x, y, z)$ به تعداد کافی دفعات دیفرانسیل‌پذیر باشد در این صورت از مشتق‌گیری پیاپی تساوی‌های (۲) مشتقات مرتبه‌های بالا نیز از تابع z محاسبه میشوند.

بند ۳ — توابع ضمنی که با دستگاه معادلات تعریف میشوند. هرگاه توابع $F_i(x_۱, \dots, x_m; y_۱, \dots, y_n) \quad (i = ۱, ۲, \dots, n)$ در شرایط زیر صادق باشند:

۱) در نقطه $\widetilde{A}_۰(x_{۱۰}, \dots, x_{m۰}; y_{۱۰}, \dots, y_{n۰})$ برابر صفر شوند،

۲) در همسایگی نقطهٔ $\widetilde{A}_۰$ دیفرانسیل‌پذیر باشند،

۳) در نقطهٔ $\widetilde{A}_۰$ دیرمینان تابعی

$$\frac{\partial(F_۱, \dots, F_n)}{\partial(y_۱, \dots, y_n)} \neq ۰$$

در این صورت دستگاه معادلات

$$F_i(x_۱, \dots, x_m; \quad y_۱, \dots, y_n) = ۰ \quad (i = ۱, ۲, \dots, n) \qquad (۳)$$

بطور تک مقداری در یک همسایگی نقطهٔ $A_۰(x_{۱۰}, \dots, x_{m۰})$ دستگاه توابع دیفرانسیل‌پذیر

$$y_i = f(x_۱, \dots, x_m) \quad (i = ۱, ۲, \dots, n)$$

را که در معادلات (۳) و شرایط اولیهٔ

$$f_i(x_{۱۰}, \ldots, x_{m۰}) = y_{i۰} \quad (i = ۱, ۲, \ldots, n)$$

صدق میکنند ، مشخص میسازد .

دیفرانسیل های این توابع ضمنی را از دستگاه

$$\sum_{j=۱}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_{k=۱}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial y_k} dy_k = ۰$$

*$(i = ۱, ۲, \ldots n)$ میتوان پیدا کرد .

۳۳۶۱ – نشان دهید که تابع دیریکلهٔ منفصل در هر نقطه

$$y = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } x \text{ گویاست} \\ ۰, & \text{اگر } x \text{ گنگ است} \end{cases}$$

در معادلهٔ

$$y^۲ - y = ۰$$

صدق میکند .

۳۳۶۲ – هرگاه تابع $f(x)$ در فاصلهٔ (a, b) معین باشد در چه حالتی معادلهٔ

$$f(x)\, y = ۰$$

بازای $a < x < b$ دارای تنها جواب پیوستهٔ $y = ۰$ میباشد ؟

۳۳۶۳ – فرض کنیم توابع $g(x)$ و $f(x)$ در فاصلهٔ (a, b) معین و پیوسته باشد در چه حالتی

$$f(x)\, y = g(x)$$

در فاصلهٔ (a, b) دارای یک جواب پیوستهٔ منحصربفردی است .

۳۳۶٤ – هرگاه معادلهٔ

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \qquad (۱)$$

مفروض باشد و

$$y = y(x) \quad (-۱ \leqslant x \leqslant ۱) \qquad (۲)$$

تابع تک مقداری صادق در معادلهٔ (۱) باشد ،

۱) چند تابع تک مقداری (۲) در معادلهٔ (۱) صدق میکنند ؟

---

* در بیان اکثر مسایل این بخش بدون تذکر فرض میشود که شرایط وجود توابع ضمنی و مشتقات نظیر آنها بر آورده شده است .

۲) چند تابع تک مقداری پیوستهٔ (۲) در معادلهٔ (۱) صدق میکنند؟

۳) چند تابع تک مقداری پیوسته‌ٔ (۲) در معادلهٔ (۱) صدق میکنند در صورتیکه:

الف) $y(۰) = ۱$ ؛ ب) $y(۱) = ۰$ ؟

۳۳۶۵ – هرگاه معادلهٔ

$$x^۲ = y^۲ \qquad (۱)$$

مفروض و

$$y = y(x) \quad (-\infty \leqslant x \leqslant +\infty) \qquad (۲)$$

تابع تک مقداری صادق در معادلهٔ (۱) باشد،

۱) چند تابع تک مقداری (۲) در معادلهٔ (۱) صدق میکنند؟

۲) چند تابع تک مقداری پیوستهٔ (۲) در معادلهٔ (۱) صدق میکنند؟

۳) چند تابع تک مقداری دیفرانسیل‌پذیر (۲) در معادلهٔ (۱) صدق میکنند؟

۴) چند تابع تک مقداری پیوستهٔ (۲) در معادلهٔ (۱) صدق میکنند در صورتیکه:

الف) $y(۱) = ۱$ ؛ ب) $y(۰) = ۰$ ؟

۵) چند تابع تک مقداری پیوستهٔ $y = y(x) \quad (۱ - \delta < x < ۱ + \delta)$ در معادلهٔ (۱) صادقند در صورتیکه $y(۱) = ۱$ و δ بقدر کافی کوچک باشد؟

۳۳۶۶ – معادلهٔ

$$x^۲ + y^۲ = x^۴ + y^۴$$

y را بعنوان تابع چند مقداری از x مشخص میسازد. در کدام حوزه‌ها این تابع ۱) تک مقداری است، ۲) دو مقداری است، ۳) سه مقداری است، ۴) چهار مقداری است؟ مطلوبست تعیین نقاط انشعاب این تابع و شاخه‌های پیوستهٔ تک مقداری آن.

۳۳۶۷ – مطلوبست تعیین نقاط انشعاب و شاخه‌های پیوستهٔ تک مقداری تابع $y = y(x) \quad (-۱ \leqslant x \leqslant ۱)$ تابع چند مقداری y که با معادلهٔ

$$(x^۲ + y^۲)^۲ = x^۲ - y^۲$$

مشخص میشود.

۳۳۶۸ – هرگاه $f(x)$ بازای $a < x < b$ پیوسته و $\varphi(y)$ صعودی یکنوا و بازای $c < y < d$ پیوسته باشد، در چه حالتی معادلهٔ

$$\varphi(y) = f(x)$$

تابع تک مقداری

$$y = \varphi^{-۱}(f(x))$$

را معین میکند ؟

مثالهای الف) $\sin y + \operatorname{sh} y = x$ ؛ ب) $e^{-y} = -\sin^{۲} x$ را در نظر بگیرید .

۲۳٦۹ – هرگاه

$$x = y + \varphi(y) \qquad (۱)$$

که در آن $\varphi(۰) = ۰$ و $|\varphi'(y)| \leqslant k < ۱$ بازای $-a < y < a$ ثابت کنید که بازای $-\varepsilon < x < \varepsilon$ تابع یکتای دیفرانسیل‌پذیر $y = y(x)$ صادق در معادلهٔ (۱) وجود دارد چنان که $y(۰) = ۰$.

۲۳۷۰ – فرض کنیم $y = y(x)$ تابع ضمنی تعریف شده با معادلهٔ

$$x = ky + \varphi(y)$$

باشد که در آن ثابت $k \neq ۰$ و $\varphi(y)$ تابع دیفرانسیل‌پذیر دوره‌ای با دورهٔ ω طوری است که $|\varphi'(y)| < |k|$. ثابت کنید که

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x)$$

که در آن $\psi(x)$ تابعی دوره‌ای به دورهٔ $|k|\omega$ میباشد .

مطلوبست محاسبهٔ y' و y'' از تابع y که با معادلات زیر تعریف میشود :

۲۳۷۱ – $x^{۲} + ۲xy - y^{۲} = a^{۲}$

۲۳۷۲ – $\ln\sqrt{x^{۲} + y^{۲}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$

۲۳۷۳ – $y - \varepsilon \sin y = x \quad (۰ < \varepsilon < ۱)$

۲۳۷۴ – $x^{y} = y^{x} \quad (x \neq y)$

۲۳۷۵ – $y = ۲x \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$

۲۳۷٦ – ثابت کنید که بازای

$$۱ + xy = k(x - y)$$

که در آن k مقداری ثابت است تساوی زیر بر قرار است :

$$\frac{dx}{۱ + x^{۲}} = \frac{dy}{۱ + y^{۲}}$$

۲۳۷۷ – بفرض آنکه

$$x^{۲}y^{۲} + x^{۲} + y^{۲} - ۱ = ۰$$

ثابت کنید که بازای $xy > ۰$ تساوی

$$\frac{dx}{\sqrt{۱ - x^٤}} + \frac{dy}{\sqrt{۱ - y^٤}} = ۰$$

بر قرار است .

۳۳۷۸ – ثابت کنید که معادلهٔ

$$(x^۲ + y^۲)^۲ = a^۲ (x^۲ - y^۲) \quad (a \neq ۰)$$

در همسایگی نقطهٔ $x = ۰ , y = ۰$ دو تابع دیفرانسیل‌پذیر $y = y_۲ (x)$ و
$y = y_۱ (x)$ را مشخص میکند . $y'_۲ (۰)$ و $y'_۱ (۰)$ را پیدا کنید .

۳۳۷۹ – مطلوبست محاسبهٔ y' بازای $y = ۰$ و $x = ۰$ اگر

$$(x^۲ + y^۲)^۲ = ۳x^۲y - y^۳$$

۳۳۸۰ – مطلوبست محاسبهٔ y', y'', y''' اگر $x^۲ + xy + y^۲ = ۳$.

۳۳۸۱ – مطلوبست محاسبه y', y'', y''' بازای $x = ۰ , y = ۱$ اگر

$$x^۲ - xy - ۲y^۲ + x - y - ۱ = ۰$$

۳۳۸۲ – ثابت کنید که برای منحنی درجهٔ دوم

$$ax^۲ + ۲bxy + cy^۲ + ۲dx + ۲ey + f = ۰$$

تساوی زیر درست است :

$$\frac{d^۳}{dx^۳}\left[(y'')^{-\frac{۲}{۳}}\right] = ۰$$

برای تابع $z = z (x, y)$ مطلوبست محاسبهٔ مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم اگر :

۳۳۸۳ – $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$

۳۳۸۴ – $z^۳ - ۳xyz = a^۳$

۳۳۸۵ – $x + y + z = e^z$

۳۳۸۶ – $z = \sqrt{x^۲ - y^۲}\,\mathrm{tg}\frac{z}{\sqrt{x^۲ - y^۲}}$

۳۳۸۷ – $x + y + z = e^{-(x + y + z)}$.

۳۳۸۸ – فرض میکنیم

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۳xyz = ۰ \qquad (۱)$$

و

$$f (x, y, z) = xy^۲z^۳$$

مطلوبست محاسبهٔ : الف) $f'_x(۱, ۱, ۱)$ اگر $z = z(x, y)$ تابع ضمنی تعریف شده با معادلهٔ (۱) باشد ؛ ب) $f'_x(۱, ۱, ۱)$ اگر $y = y(x, z)$ تابع ضمنی تعریف‌شده با معادلهٔ (۱) باشد . توضیح دهید که چرا این مشتقات متفاوتند .

۳۳۸۹ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}$, $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}$ بازای $x = ۱$ ، $y = -۲$ ، $z = ۱$ اگر $x^۲ + ۲y^۲ + ۳z^۲ + xy - z - ۹ = ۰$

مطلوبست محاسبهٔ $d^۲z$ و dz اگر :

۳۳۹۰ – $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$

۳۳۹۱ – $xyz = x + y + z$

۳۳۹۲ – $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + ۱$

۳۳۹۳ – $z = x + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{z - x}$

۳۳۹۴ – مطلوبست محاسبهٔ du اگر

$$u^۳ - ۳(x + y)u^۲ + z^۳ = ۰$$

۳۳۹۵ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}$ اگر $F(x + y + z, x^۲ + y^۲ + z^۲) = ۰$

۳۳۹۶ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial z}{\partial x}$ اگر $F(x - y, y - z, z - x) = ۰$

۳۳۹۷ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$ ، $\frac{\partial z}{\partial x}$ اگر

$$F(x, x + y, x + y + z) = ۰$$

۳۳۹۸ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}$ اگر $F(xz, yz) = ۰$

۳۳۹۹ مطلوبست محاسبهٔ $d^۲z$ ، اگر :

الف) $F(x + z, y + z) = ۰$ ؛ ب) $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = ۰$

۳۳۹۹,۱ – هرگاه $z = z(x, y)$ آن تابع دیفرانسیل‌پذیری باشد که با معادلهٔ

$$x^۳ - xz + y = ۰$$

مشخص می‌شود و بازای $y = -۲$ و $x = ۳$ مقدار $z = ۲$ را اختیار می‌کند مطلوبست محاسبهٔ $d^۲z(۳, -۲)$ و $dz(۳, -۲)$

۳۴۰۰ – فرض کنیم $z = z(x, y)$ و $y = y(x, z)$ و $x = x(y, z)$ توابعی باشند که با معادلهٔ $F(x, y, z) = ۰$ مشخص میشود .

ثابت کنید که

$$\frac{\partial x}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x}=-۱$$

۳۴۰۱ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{dx}{dz},\ \frac{dy}{dz}$ اگر $x+y+z=۰,\ x^۲+y^۲+z^۲=۱$

۳۴۰۲ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial x}{\partial z},\ \frac{dy}{dz},\ \frac{d^۲x}{dz^۲},\ \frac{d^۲y}{dz^۲}$ بازای $x=۱,\ y=-۱,$ $z=۲$ اگر $x+y+z=۲,\quad x^۲+y^۲=\frac{۱}{۲}z^۲$.

۳۴۰۳ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y}$ اگر $xu-yv=۰,$ $yu+xv=۱$

۳۴۰۳,۱ – توابع دیفرانسیل‌پذیر $v=v(x,y)$ و $u=u(x,y)$ طوریست که $u(۱,۲)=۰,\ v(۱,۲)=۰$ و با دستگاه معادلات

$$\left.\begin{aligned} xe^{u+v}+۲uv&=۱\\ ye^{v-v}-\frac{u}{۱+v}&=۲x\end{aligned}\right\}$$

مشخص میشوند. مطلوبست محاسبهٔ $dv(۱,۲)$ و $du(۱,۲)$.

۳۴۰۴ – مطلوبست محاسبهٔ $du,\ dv,\ d^۲u,\ d^۲v$ اگر

$$u+v=x+y,\quad \frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y}$$

۳۴۰۵ – مطلوبست محاسبهٔ $du,\ dv,\ d^۲u,\ d^۲v$ بازای $y=۱,\ u=۰,\ v=\frac{\pi}{٤}$
$x=۱$ اگر

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{۲}},\qquad e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{۲}}$$

۳۴۰۶ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx},\ \frac{d^۲y}{dx^۲},\ \frac{d^۲z}{dx^۲}$ اگر

$$x=t+t^{-۱},\quad y=t^۲+t^{-۲},\quad z=t^۳+t^{-۳}$$

۳۴۰۷ – در کدام حوزهٔ صفحهٔ Oxy دستگاه معادلات

$$x = u + v, \quad y = u^{۲} + v^{۲}, \quad z = u^{۳} + v^{۳}$$

که در آن پارامترهای u, v جمیع مقادیر حقیقی را اختیار میکنند z را بعنوان تابعی از متغیرهای x و y مشخص میکند ؟ مشتقات $\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial z}{\partial x}$ را پیدا کنید.

۳۴۰۷,۱ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطهٔ $u = ۱, \ v = ۱$ اگر

$$\left.\begin{aligned} x &= u + \ln v \\ y &= v - \ln u \\ z &= ۲u + v \end{aligned}\right\}$$

۳۴۰۸,۲ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x \, \partial y}$ در نقطه $u = ۲, \ v = ۱$ اگر

$$\left.\begin{aligned} x &= u + v^{۲} \\ y &= u^{۲} - v^{۳} \\ z &= ۲uv \end{aligned}\right\}$$

۳۴۰۸ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}}$ اگر

$$x = \cos\varphi \cos\psi, \quad y = \cos\varphi \sin\psi, \quad z = \sin\varphi$$

۳۴۰۹ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}}, \ \frac{\partial^{۲} z}{\partial x \, \partial y}, \ \frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}}$ اگر

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v$$

۳۴۱۰ – هرگاه $z = z(x, y)$ تابع تعریف‌شده با دستگاه

$$x = e^{u+v}, \quad y = e^{u-v}, \quad z = uv$$

(v و u پارامترند) باشد $d^{۲}z$ و dz را بازای $v = ۰$ و $u = ۰$ پیدا کنید .

۳۴۱۱ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{d^{۲} z}{dx^{۲}}, \ \frac{dz}{dx}$ اگر

$$z = x^{۲} + y^{۲}$$

که در آن $y = y(x)$ از معادلهٔ

$$x^{۲} - xy + y^{۲} = ۱$$

تعیین می‌شود .

۳۴۱۲ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ اگر

$$u=\frac{x+z}{y+z}$$

که در آن z از معادلهٔ زیر تعیین می‌شود :

$$ze^z=xe^x+ye^y$$

۳۴۱۳ – هرگاه معادلات

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v), \quad z=\chi(u, v)$$

z را بعنوان تابعی از y و x مشخص کنند $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ را پیدا کنید .

۳۴۱۴ – فرض کنیم

$$x=\varphi(u, v), \quad y=\psi(u, v)$$

مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم از توابع معکوس : $v=v(x, y)$ و $u=u(x, y)$ را پیدا کنید .

۳۴۱۵ – مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ اگر :

الف) $x=u\cos\frac{v}{u}, \quad y=u\sin\frac{v}{u}$

ب) $x=e^u+u\sin v, \quad y=e^u-u\cos v$

۳۴۱۶ – تابع $u=u(x)$ با دستگاه معادلات

$$u=f(x, y, z), \quad g(x, y, z)=۰, \quad h(x, y, z)=۰$$

مشخص می‌شود . $\frac{du}{dx}$ و $\frac{d^۲u}{dx^۲}$ را پیدا کنید .

۳۴۱۷ – تابع $u=u(x, y)$ با دستگاه معادلات

$$u=f(x, y, z, t), \quad g(y, z, t)=۰, \quad h(z, t)=۰$$

مشخص می‌شود . $\frac{\partial u}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial x}$ را پیدا کنید .

۳۴۱۸ – فرض کنیم

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w)$$

مطلوبست محاسبهٔ $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

۳۴۱۹ – فرض میکنیم که تابع $z = z(x, y)$ در دستگاه معادلات

$$f(x, y, z, t) = ۰, \quad g(x, y, z, t) = ۰$$

که در آن t پارامتر متغیر است صادق باشد . مطلوبست محاسبه dz

۳۴۲۰ – هرگاه $u = f(z)$ که در آن z تابع ضمنی از متغیرهای y و x است با معادلهٔ $z = x + y\varphi(z)$ مشخص شود دستور لاگرانژ

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-۱}}{\partial x^{n-۱}} \left\{ [\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$$

را ثابت کنید .

راهنمایی – دستور را بازای $n = ۱$ ثابت کرده و از روش استقرای ریاضی استفاده کنید .

۳۴۲۱ – نشان دهید که تابع $z = z(x, y)$ مشخص شده با معادلهٔ

$$\Phi(x - az, \quad y - bz) = ۰$$

که در آن $\Phi(u, v)$ تابع دیفرانسیل‌پذیر دلخواهی از متغیرهای v و u (a, b ثابتند) است جواب معادلهٔ

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = ۱$$

می‌باشد .

ویژه‌گی‌های هندسی سطح (۱) را روشن کیند .

۳۴۲۲ – نشان دهید که تابع $z = z(x, y)$ مشخص شده با معادلهٔ

$$\Phi\left(\frac{x - x_۰}{z - z_۰}, \frac{y - y_۰}{z - z_۰}\right) = ۰ \qquad (۲)$$

که در آن $\Phi(u, v)$ تابع دیفرانسیل‌پذیر دلخواهی از متغیرهای v و u می‌باشد در معادلهٔ

$$(x - x_۰) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - y_۰) \frac{\partial z}{\partial y} = z - z_۰$$

صادق است .

ویژه‌گی‌های هندسی سطح (۲) را روشن کنید .

۳۴۲۳ – نشان دهید که تابع $z = z(x, y)$ تعریف شده با معادلهٔ

$$ax + by + cz = \Phi(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})$$

که در آن $\Phi(u)$ تابع دیفرانسیل‌پذیر دلخواهی از متغیر u و a, b, c ثابت می‌باشند در معادلهٔ

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$$

صادق است .

ویژه‌گی‌های هندسی سطح (۳) را روشن کنید .

۳۴۲۴ – تابع $z = z(x, y)$ بصورت معادلهٔ

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = yf\left(\frac{z}{y}\right)$$

داده شده است . نشان دهید که

$$(x^{۲} - y^{۲} - z^{۲})\frac{\partial z}{\partial x} + ۲xy\frac{\partial x}{\partial y} = ۲xz$$

۳۴۲۵ – تابع $z = z(x, y)$ بصورت معادلهٔ

$$F(x + zy^{-۱}, \quad y + zx^{-۱}) = ۰$$

داده شده است . نشان دهید که

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$$

۳۴۲۶ – نشان دهید که تابع $z = z(x, y)$ تعریف شده با دستگاه معادلات :

$$\left.\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z &= f(\alpha) \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha &= f'(\alpha) \end{aligned}\right\}$$

که در آن $\alpha = \alpha(x, y)$ پارامتری است متغیر و $f(\alpha)$ تابع دیفرانسیل‌پذیر دلخواهی می‌باشد در معادلهٔ

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲} = z^{۲}$$

صادق است .

۳۴۲۷ – نشان دهید که تابع

$$z = z(x, y)$$

که بصورت دستگاه معادلات

$$\left.\begin{aligned} z &= \alpha x + \frac{y}{\alpha} + f(\alpha) \\ ۰ &= x - \frac{y}{\alpha^۲} + f'(\alpha) \end{aligned}\right\}$$

داده شده است در معادلهٔ

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} = ۱$$

صادق است .

۳۴۲۸ – نشان دهید که تابع $z = z(x, y)$ داده شده بصورت معادلات

$$\left.\begin{aligned} [z - f(\alpha)]^۲ &= x^۲ (y^۲ - \alpha^۲) \\ [z - f(\alpha)]\, f'(\alpha) &= \alpha x^۲ \end{aligned}\right\}$$

در معادلهٔ

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} = xy$$

صادق است .

۳۴۲۹ – نشان دهید که تابع $z = z(x, y)$ داده شده بصورت معادلات

$$\left.\begin{aligned} z &= \alpha x + y\varphi(\alpha) + \psi(\alpha) \\ ۰ &= x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha) \end{aligned}\right\}$$

در معادلهٔ

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}\,\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} - \left(\frac{\partial^۲ z}{\partial x\,\partial y}\right)^۲ = ۰$$

صادق است .

۳۴۳۰ – نشان دهید که تابع ضمنی $z = z(x, y)$ تعریف شده با معادلهٔ

$$y = x\varphi(z) + \psi(z)$$

در معادلهٔ زیر صادق است :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^۲ \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} - ۲\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^۲ z}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^۲ \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = ۰$$

بخش ٤ — تعویض متغیرها

بند ۱ — تعویض متغیرها در عبارت شامل مشتقات معمولی. هرگاه در عبارت دیفرانسیلی

$$A = \Phi(x, y, y'_x, y''_{xx}, \dots)$$

بخواهیم به متغیرهای جدید بگذریم: به متغیر مستقل t و تابع u که با متغیرهای پیشین x و y بوسیلهٔ معادلات

$$x = f(t, u), \quad y = g(t, u) \tag{۱}$$

مربوط هستند.

با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$y'_x = \frac{\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial u} u'_t}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_t}$$

به طریق مشابهی مشتقات مرتبهٔ بالاتر ... y''_{xx}، بیان می‌شود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$A = \Phi_۱(t, u, u'_t, u''_{tt}, \dots)$$

بند ۲ — تعویض متغیرهای مستقل در عبارتهای شامل مشتقات جزئی. اگر در عبارت دیفرانسیلی

$$B = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}, \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}, \dots\right)$$

فرض کنیم

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v) \tag{۲}$$

که در آن u, v متغیرهای مستقل جدید می‌باشند در اینصورت مشتقات جزئی متوالی $\dots, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}$ و غیره از معادلات زیر تعیین می‌شوند:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}$$

و غیره.

بند ۳ – تعویض متغیرهای مستقل و تابع در عبارات شامل مشتقات جزئی .

در حالت کلی‌تر اگر معادلات

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, z, w) \qquad (۳)$$

را داشته باشیم که در آن u, v متغیرهای مستقل جدید و $w = w(u, v)$ تابع جدید می‌باشد در اینصورت برای مشتقات جزئی … , $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ چنین معادلاتی بدست میآید :

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial u}\right) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial v}\right) = \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial v},$$

و غیره .

در بعضی موارد تعویض متغیر بهتر است از دیفرانسیل کامل استفاده شود .

۳٤۳۱ – مطلوبست تبدیل معادلهٔ

$$y'y''' - ۳y''^{۲} = x$$

با اختیار y بعنوان متغیر مستقل جدید .

۳٤۳۲ – با همان ترتیب معادلهٔ زیر را تبدیل کنید :

$$y'^{۲}y^{(٤)} - ۱۰\, y'y''y''' + ۱۵\, y''^{۳} = ۰$$

۳٤۳۳ – معادلهٔ

$$y'' + \frac{۲}{x}\, y' + y = ۰$$

را با اختیار x بعنوان تابع و $t = xy$ بعنوان متغیر مستقل تبدیل کنید .

با وارد کردن متغیرهای جدید ، معادلات دیفرانسیل معمولی زیر را تبدیل کنید :

۳٤۳٤ – $x^{۲}y'' + xy' + y = ۰$ اگر $x = e^{t}$

۳٤۳۵ – $y''' = \frac{۶y}{x^{۳}}$ اگر $t = \ln|x|$

۳٤۳۶ – $(۱ - x^{۲})\, y'' - xy' + n^{۲}y = ۰$ اگر $x = \cos t$

۳۴۳۷ – $y''+y'\,\mathrm{th}\,x+\frac{m^۲}{\mathrm{ch}^۲\,x}y=۰$ اگر $x=\ln \mathrm{tg}\,\frac{t}{۲}$

۳۴۳۸ – $y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=۰$ اگر $y=ue^{-\frac{۱}{۲}\int\limits_{x_۰}^{x}p(\xi)\,d\xi}$

۳۴۳۹ – $x^۴y''+xyy'-۲y^۲=۰$ اگر $x=e^t$ و $y=ue^{۲t}$ که در آن $u=u(t)$

۳۴۴۰ – $(۱+x^۲)^۲\,y''=y$ اگر $x=\mathrm{tg}\,t$ و $y=\frac{u}{\cos t}$ که در آن $u=u(t)$

۳۴۴۱ – $(۱-x^۲)^۲\,y''=-y$ اگر $x=\mathrm{th}\,t$ و $y=\frac{u}{\mathrm{ch}\,t}$ که در آن $u=u(t)$

۳۴۴۲ – $y''+(x+y)\,(۱+y')^۳=۰$ اگر $x=u+t$ و $y=u-t$ که در آن $u=u(t)$

۳۴۴۳ – $y'''-x^۳y''+xy'-y=۰$ اگر $x=\frac{۱}{t}$ و $y=\frac{u}{t}$ که در آن $u=u(t)$

۳۴۴۴ – معادلهٔ استوکس

$$y''=\frac{Ay}{(x-a)^۲\,(x-b)^۲}$$

را با فرض

$$u=\frac{y}{x-b},\quad t=\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$$

و با اختیار u بعنوان تابعی از t تبدیل کنید.

۳۴۴۵ – نشان دهید که اگر معادلهٔ

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)\,y=۰$$

با جایگزینی $x=\varphi(\xi)$ به معادلهٔ

$$\frac{d^۲y}{d\xi^۲}+P(\xi)\frac{dy}{d\xi}+Q(\xi)\,y=۰$$

بدل شود در اینصورت

$$[۲P(\xi)Q(\xi)+Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{۳}{۲}}=[۲p(x)q(x)+q'(x)][q(x)]^{-\frac{۳}{۲}}$$

۳۴۴۶ – در معادلهٔ

$$\Phi(y,\ y',\ y'')=۰$$

که در آن Φ تابع همگنی از متغیرهای $y,\ y',\ y''$ می‌باشد فرض کنید

$$y=e^{\int_{x_۰}^{x} u\,dx}$$

۳۴۴۷ – در معادلهٔ

$$F(x^۲y'',\ xy',\ y)=۰$$

که در آن F تابع همگنی از آرگومانهای خود می‌باشد فرض کنید.

$$u=x\frac{y'}{y}$$

۳۴۴۸ – ثابت کنید که معادلهٔ

$$y'''(۱+y'^۲)-۳y'y''^۲=۰$$

در نتیجهٔ تبدیل هوموگرافیک

$$x=\frac{a_۱\xi+b_۱\eta+c_۱}{a\xi+b\eta+c},\quad y=\frac{a_۲\xi+b_۲\eta+c_۲}{a\xi+b\eta+c}$$

تغییر شکل نمی‌دهد.

راهنمایی – تبدیل مذکور را بشکل ترکیبی از تبدیلهای سادهٔ زیر بیان کنید:

$$x=\alpha X+\beta Y+\gamma,\quad y=Y$$

$$X=\frac{۱}{X_۱},\qquad Y=\frac{Y_۱}{X_۱}$$

$$X_۱=a\xi+b\eta+c,\quad Y_۱=a_۲\xi+b_۲\eta+c_۲$$

۳۴۴۹ – ثابت کنید که شوارتزین

$$S[x(t)]=\frac{x'''(t)}{x'(t)}-\frac{۳}{۲}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^۲$$

با تبدیل کسری ــ خطی

$$y=\frac{ax(t)+b}{cx(t)+d}\quad (ad-bc\neq ۰)$$

تغییر نمیکند .

با فرض $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$ معادلات زیر را بر حسب مختصات قطبی r, φ بیان کنید :

۳۴۵۰ – $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$

۳۴۵۱ – $(xy'-y)^{۲}=۲xy(۱+y'^{۲})$

۳۴۵۲ – $(x^{۲}+y^{۲})^{۲}y''=(x+yy')^{۳}$

۳۴۵۳ – عبارت زیر را بر حسب مختصات قطبی بیان کنید :

$$\frac{x+yy'}{xy'-y}$$

۳۴۵۴ – انحنای منحنی مستوی

$$K=\frac{|y''_{xx}|}{(۱+y'^{۲}_{x})^{\frac{۳}{۲}}}$$

را در مختصات قطبی r, φ بیان کنید .

۳۴۵۵ – در دستگاه معادلات

$$\frac{dy}{dt}=-x+ky(x^{۲}+y^{۲}),\quad \frac{dx}{dt}=y+kx(x^{۲}+y^{۲})$$

به مختصات قطبی بگذرید .

۳۴۵۶ – عبارت

$$W=x\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}-y\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}}$$

وارد کردن توابع جدید $r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}},\ \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ تبدیل کنید .

۳۴۵۷ – در تبدیل لژاندر با هر نقطهٔ (x, y) منحنی $y=y(x)$ نقطهٔ (X, Y) متناظر میشود که در آن

$$X=y',\quad Y=xy'-y$$

Y' ، Y'' و Y''' را پیدا کنید .

با وارد کردن متغیرهای مستقل جدید ξ, η معادلات زیر را حل کنید :

۳۴۵۸ - $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$ اگر $\xi = x + y$ و $\eta = x - y$

۳۴۵۹ - $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ اگر $\xi = x$ و $\eta = x^۲ + y^۲$

۳۴۶۰ - $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = ۱$ اگر $\xi = x$ و $\eta = y - bz$
$(a \neq ۰)$

۳۴۶۱ - $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ اگر $\xi = y$ و $\eta = \frac{y}{x}$

با اختیار u, v بعنوان متغیرهای مستقل جدید معادلات زیر را تبدیل کنید :

۳۴۶۲ - $x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{۱ + y^۲}\, \frac{\partial z}{\partial y} = xy$ اگر $u = \ln x$
و $v = \ln\left(y + \sqrt{۱ + y^۲}\right)$

۳۴۶۳ - $(x + y) \frac{\partial z}{\partial x} - (x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ اگر $u = \ln \sqrt{x^۲ + y^۲}$
و $v = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$

۳۴۶۴ - $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$ اگر
$v = z + \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$ و $u = \frac{y}{x}$

۳۴۶۵ - $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z}$ اگر $u = ۲x - z^۲$ و $v = \frac{y}{z}$

۳۴۶۶ - $(x + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$ اگر
$u = x + z, \; v = y + z$

۳۴۶۷ - عبارت

$$(z + e^x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y) \frac{\partial z}{\partial y} - (z^۲ - \varepsilon^{x + y})$$

را با اختیار متغیرهای مستقل جدید

$$\xi = y + ze^{-x}, \quad \eta = x + ze^{-y}$$

تبدیل کنید .

۳۴۶۸ – عبارت

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲}$$

را با فرض

$$x = uv, \quad y = \frac{۱}{۲}\left(u^{۲} - v^{۲}\right)$$

تبدیل کنید.

۳۴۶۹ – در معادلهٔ

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=۰$$

فرض کنید

$$\xi = x, \quad \eta = y - x, \quad \zeta = z - x$$

۳۴۷۰ – معادلهٔ

$$(x - z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$$

را با اختیار x بعنوان تابع و y, z بعنوان متغیرهای مستقل، تبدیل کنید.

۳۴۷۱ – معادلهٔ

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y + z)\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$$

را با اختیار x بعنوان تابع و $v = y + z$ و $u = y - z$ بعنوان متغیرهای مستقل، تبدیل کنید.

۳۴۷۲ – عبارت

$$A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲}$$

را با اختیار x بعنوان تابع و

$$u = xz, \quad v = yz$$

بعنوان متغیرهای مستقل، تبدیل کنید.

۳۴۷۳ – در معادلهٔ

$$(x + z + u)\frac{\partial u}{\partial x} + (x + z + u)\frac{\partial u}{\partial y} + (x + y + u)\frac{\partial u}{\partial z} = x + y + z$$

فرض کنید :

$$e^{\xi} = x - u, \quad e^{\eta} = y - u, \quad e^{\zeta} = z - u$$

در معادلات زیر به متغیرهای جدید u, v, w که در آن $w = w(u, v)$ بگذرید :

۳۴۷۴ – $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$ اگر

$$u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad w = \ln z - (x + y)$$

۳۴۷۵ – $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = z^2$ اگر

$$u = x, \quad v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}, \quad w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$$

۳۴۷۶ – $(xy + z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2)\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + yz$ اگر

$$u = yz - x, \quad v = xz - y, \quad w = xy - z$$

۳۴۷۷ – $\left(x\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2\dfrac{\partial z}{\partial x} \times \dfrac{\partial z}{\partial y}$ اگر

$$x = ue^{w}, \quad y = ve^{w}, \quad z = we^{w}$$

۳۴۷۸ – عبارت

$$(x - y) : \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

را با فرض

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \operatorname{arc\,tg} z, \quad w = x + y + z$$

که در آن $w = w(u, v)$ تبدیل کنید .

۳۴۷۹ – عبارت

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}$$

را با فرض $w = ze^{z}$, $v = ye^{z}$, $u = xe^{z}$ که در آن $w = w(u, v)$ تبدیل کنید

۳٤۸۰ - در معادلهٔ

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z}$$

فرض کنید: $\xi=\frac{x}{z}$، $\eta=\frac{y}{z}$، $\zeta=z$، $w=\frac{u}{z}$ که در آن $w=w(\xi, \eta, \zeta)$

با فرض $x=r\cos\varphi$، $y=r\sin\varphi$ عبارت زیر را بر حسب مختصات قطبی φ و r بیان کنید:

۳٤۸۱ - $w=x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}$ **۳٤۸۳** - $w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{۲}$

۳٤۸۲ - $w=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ **۳٤۸٤** - $w=\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}$

۳٤۸۵ - $w=x^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+۲xy\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y}+y^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}$

۳٤۸٦ - $w=y^{۲}\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}-۲xy\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\,\partial y}+x^{۲}\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}-\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

۳٤۸۷ - در عبارت

$$I=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

فرض کنید $x=r\cos\varphi$، $y=r\sin\varphi$

۳٤۸۸ - مطلوبست حل معادلهٔ

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}=a^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}$$

با وارد کردن متغیرهای مستقل جدید

$$\xi=x-at,\quad \eta=x+at$$

u, v را بعنوان متغیرهای مستقل جدید اختیار نموده و معادلات زیر را تبدیل کنید:

۳٤۸۹ - $۲\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=۰$ اگر

$$u=x+۲y+۲ \quad \text{و} \quad v=x-y-۱$$

۳۴۹۰- $(۱+x^۲)\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}+(۱+y^۲)\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=۰$ اگر

$u=\ln(x+\sqrt{۱+x^۲})$ و $v=\ln(y+\sqrt{۱+y^۲})$

۳۴۹۱- $ax^۲\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}+۲bxy\frac{\partial^۲ z}{\partial x\,\partial y}+cy^۲\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=۰$ (a, b, c ثابتند) اگر

$u=\ln x$ و $v=\ln y$

۳۴۹۲- $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=۰$ اگر

$u=\frac{x}{x^۲+y^۲}$ و $v=-\frac{y}{x^۲+y^۲}$

۳۴۹۳ $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}+m^۲z=۰$ اگر

$x=e^u\cos v,\quad y=e^u\sin v$

۳۴۹۴- $(y>۰)$ $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}-y\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=\frac{۱}{۲}\frac{\partial z}{\partial y}$ اگر

$u=x-۲\sqrt{y}$ و $v=x+۲\sqrt{y}$

۳۴۹۵- $x^۲\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}-y^۲\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=۰$ اگر

$u=xy$ و $v=\frac{x}{y}$

۳۴۹۶- $x^۲\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}-(x^۲+y^۲)\frac{\partial^۲ z}{\partial x\,\partial y}+y^۲\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=۰$ اگر

$u=x+y$ و $v=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$

۳۴۹۷- $xy\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}-(x^۲+y^۲)\frac{\partial^۲ z}{\partial x\,\partial y}+xy\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}+y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=۰$ اگر

$u=\frac{۱}{۲}(x^۲+y^۲)$ و $v=xy$

۳۴۹۸ – $x^{۲}\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}-۲x\sin y\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\,\partial y}+\sin^{۲}y\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}=۰$ اگر

$$u=x\,\mathrm{tg}\frac{y}{۲} \quad \text{و} \quad v=x$$

۳۴۹۹ – $x\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}-y\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}=۰ \quad (x>۰,\ y>۰)$ اگر

$$x=(u+v)^{۲} \quad \text{و} \quad y=(u-v)^{۲}$$

۳۵۰۰ – $\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\,\partial y}=\left(۱+\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۳}$ اگر

$$u=x \quad \text{و} \quad v=y+z$$

۳۵۰۱ – بکمک تعویض خطی

$$\xi=x+\lambda_{۱}y, \quad \eta=x+\lambda_{۲}y$$

معادلهٔ

$$A\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}+۲B\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=۰ \qquad (۱)$$

را که در آن A ، B و C ثابت می‌باشد و $AC-B^{۲}<۰$ ، بصورت

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial\xi\,\partial\eta}=۰$$

تبدیل کنید.

صورت کلی تابع صادق در معادلهٔ (۱) را بدست آورید.

۳۵۰۲ – ثابت کنید صورت معادلهٔ لا پلاس

$$\Delta z\equiv\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}}=۰$$

بازای هر تعویض غیر ناقص متغیرهای

$$x=\varphi(u,v), \quad y=\psi(u,v)$$

صادق در شرایط

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u}$$

تغییر نمیکند.

۳۵۰۳ – معادلات

الف) $\Delta u \equiv \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$ ؛ ب) $\Delta(\Delta u) = ۰$

را با فرض $u = f(r)$ که در آن $r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ تبدیل کنید.

۳۵۰۴ – معادلهٔ

$$\frac{\partial^۲ w}{\partial x \, \partial y} + cw = ۰$$

با فرض

$$w = f(u)$$

که در آن $u = (x - x_۰)(y - y_۰)$ بچه صورتی در میاید؟

۳۵۰۵ – عبارت

$$A = x \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + y \frac{\partial^۲ u}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

را با فرض

$$x + y = X, \quad y = XY$$

تبدیل کنید.

۳۵۰۶ – نشان دهید که معادلهٔ

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + ۲xy^۲ \frac{\partial z}{\partial x} + ۲(y - y^۳) \frac{\partial z}{\partial y} + x^۲ y^۲ z = ۰$$

بازای تبدیل متغیرهای

$$x = uv \quad \text{و} \quad y = \frac{۱}{v}$$

صورت خود را عوض نمیکند.

۳۵۰۷ – نشان دهید که معادلهٔ

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} + ۲ \frac{\partial^۲ z}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = ۰$$

بازای تعویض متغیرهای

$$u = x + z, \quad v = y + z$$

صورت خود را عوض نمیکند.

۳۵۰۸ – معادلهٔ

$$xy\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y}+yz\frac{\partial^{۲}u}{\partial y\,\partial z}+xz\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial z}=۰$$

را با فرض

$$x=\eta\zeta,\quad y=\xi\zeta,\quad z=\xi\eta$$

تبدیل کنید.

۳۵۰۹ – معادلهٔ

$$\frac{\partial^{۲}z}{\partial x_{۱}^{۲}}+\frac{\partial^{۲}z}{\partial x_{۲}^{۲}}+\frac{\partial^{۲}z}{\partial x_{۳}^{۲}}+\frac{\partial^{۲}z}{\partial x_{۲}\partial x_{۲}}+\frac{\partial^{۲}z}{\partial x_{۱}\partial x_{۳}}+\frac{\partial^{۲}z}{\partial x_{۲}\partial x_{۳}}=۰$$

را با فرض

$$y_{۱}=x_{۲}+x_{۳}-x_{۱},\quad y_{۲}=x_{۱}+x_{۳}-x_{۲},\quad y_{۳}=x_{۱}+x_{۲}-x_{۳}$$

تبدیل کنید.

۳۵۱۰ – معادلهٔ

$$x^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+y^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}+z^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial z^{۲}}+۲xy\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y}+۲xz\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial z}+۲yz\frac{\partial^{۲}u}{\partial y\,\partial z}=۰$$

را با فرض

$$\xi=\frac{y}{x},\quad \eta=\frac{z}{x},\quad \zeta=y-z$$

تبدیل کنید.

راهنمایی – معادله را بصورت $A^{۲}u-Au=۰$ در آورید که در آن

$$A=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}$$

۳۵۱۱ – عبارتهای

$$\Delta_{۱}u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{۲}$$

و

$$\Delta_{۲}u=\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}+\frac{\partial^{۲}u}{\partial z^{۲}}$$

را با فرض

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

بر حسب مختصات کروی بیان کنید .

راهنمائی – تعویض متغیرها را بشکل ترکیبی از دو تعویض جزئی

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = z$$

و

$$R = r\sin\theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = \cos\theta$$

در آورید .

۳۵۱۲ – در معادلهٔ

$$z\left(\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲}$$

تابع جدید w را با فرض $w = z^{۲}$ وارد کنید .

با اختیار v و u بعنوان متغیرهای مستقل جدید و $w = w(u, v)$ بعنوان تابع جدید ، معادلات زیر را تبدیل کنید .

۳۵۱۳ – $y\frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}} + ۲\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{۲}{x}$ اگر $u = \frac{x}{y}, \quad v = x, \quad w = xz - y$

۳۵۱٤ – $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}} - ۲\frac{\partial^{۲} z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}} = ۰$ اگر $u = x + y, \quad v = \frac{y}{x}, \quad w = \frac{z}{x}$

۳۵۱۵ – $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}} + ۲\frac{\partial^{۲} z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}} = ۰$ اگر $u = x + y, \quad v = x - y, \quad w = xy - z$

۳۵۱۶ – $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z$ اگر $u = \frac{x + y}{۲}, \quad v = \frac{x - y}{۲}, \quad w = ze^{y}$

۳۵۱۷ – $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}} - ۲\frac{\partial^{۲} z}{\partial x\,\partial y} + \left(۱ + \frac{y}{x}\right)\frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}} = ۰$ اگر $u = x, \quad v = x + y,$

$$w = x + y + z$$

۳۵۱۸ – $(۲ - x^{۲})\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}} + (۱ - y^{۲})\frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ اگر $x = \sin u,$

$$y = \sin v, \quad z = e^{w}$$

۳۵۱۹ – $(|x| < ۱)$ $\quad (۱ - x^{۲})\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}} - \frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}} - ۲x\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{۱}{٤}z = ۰$ اگر

$$u = \frac{۱}{۲}(y + \arccos x), \quad v = \frac{۱}{۲}(y - \arccos x), \quad w = z\sqrt[٤]{۱ - x^{۲}}$$

۳۵۲۰ – $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=۲\,\frac{x\,\frac{\partial z}{\partial x}-y\,\frac{\partial z}{\partial y}}{x^۲-y^۲}-\frac{۳\,(x^۲+y^۲)\,z}{(x^۲-y^۲)^۲}\quad(|x|>|y|)$ اگر

$$u=x+y,\quad v=x-y,\quad w=\frac{z}{\sqrt{x^۲-y^۲}}$$

۳۵۲۱ – ثابت کنید که هر معادلهٔ

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x\,\partial y}+a\,\frac{\partial z}{\partial x}+b\,\frac{\partial z}{\partial y}+cz=۰$$

(a, b, c ثابتند) را با جایگزینی

$$z=ue^{\alpha x+\beta y}$$

که در آن α, β مقادیر ثابت هستند و $u=u(x, y)$ میتوان بصورت

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x\,\partial y}+c_۱ u=۰\quad(c_۱=\text{const})$$

نمایش داد.

۳۵۲۲ – نشان دهید که معادلهٔ

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

بازای تعویض متغیرهای

$$x'=\frac{x}{y},\quad y'=-\frac{۱}{y},\quad u=\frac{u'}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^۲}{۴y}}$$

که در آن u' تابعی است از متغیرهای x' و y' ، صورت خود را عوض نمیکند.

۳۵۲۳ – در معادلهٔ

$$q\,(۱+q)\,\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}-(۱+p+q+۲pq)\,\frac{\partial^۲ z}{\partial x\,\partial y}+p\,(۱+p)\,\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=۰$$

که در آن $p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}$ ، فرض کنید $u=x+z,\quad v=y+z,$

$w=x+y+z$ با توجه باینکه $w=w(u, v)$

۳۵۲۴ – در معادلهٔ

$$x^۲\,\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+y^۲\,\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}+z^۲\,\frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}=\left(x\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)^۲+\left(y\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)^۲+\left(z\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)^۲$$

فرض کنید $u=e^{w}$، $x=e^{\xi},\ y=e^{\eta},\ z=e^{\zeta}$ که در آن $w=w(\xi, \eta, \zeta)$

۳۰۲۵ – نشان دهید که صورت معادلهٔ

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}-\left(\frac{\partial^۲ z}{\partial x\,\partial y}\right)^۲=۰$$

بازای هر نوع توزیع نقش‌بین متغیرهای x, y, z تغییر نمیکند.

۳۰۲۶ – معادلهٔ

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^۲\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}-۲\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^۲ z}{\partial x\,\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^۲\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=۰$$

را با اختیار x بعنوان تابعی از متغیرهای y, z حل کنید.

۳۰۲۷ – معادلهٔ

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲}+۲B\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^۲ z}{\partial x\,\partial y}+C\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲}=۰$$

را با کاربرد تبدیل لژاندر

$$X=\frac{\partial z}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial z}{\partial y},\quad Z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\,\frac{\partial z}{\partial y}-z$$

که در آن $Z=Z(X, Y)$ تبدیل کنید.

بخش ۵ — کاربردهای هندسی

بند ۱ — خط مماس و صفحهٔ قایم. معادلهٔ خط مماس بر منحنی

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)$$

در نقطه $M(x, y, z)$ آن بصورت زیر است:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}$$

معادلهٔ صفحهٔ قایم در این نقطه:

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=۰$$

بند ۲ — صفحهٔ مماس و خط قایم. معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح $z=f(x, y)$ در نقطهٔ $M(x, y, z)$ آن بصورت زیر است:

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y)$$

معادلهٔ خط قایم در نقطهٔ M عبارتست از :

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-۱}$$

اگر معادلهٔ سطح بصورت ضمنی $F(x, y, z)=۰$ داده شده باشد در انیصورت به ترتیب

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=۰$$

را برای معادلهٔ صفحهٔ مماس و

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

را برای معادلهٔ قایم خواهیم داشت .

بند ۳ — منحنی پوش دستهٔ منحنی‌های مستوی . منحنی پوش دسته منحنی‌های تک پارامتری $f(x, y, \alpha)=۰$ (α پارامتر است) در دستگاه معادلات زیر صدق میکند :

$$f(x, y, \alpha)=۰, \quad f'_{\alpha}(x, y, \alpha)=۰$$

بند ٤ — سطح پوش دسته سطوح . سطح پوش دسته سطوح تک پارامتری $F(x, y, z, \alpha)=۰$ در دستگاه معادلات زیر صدق میکند :

$$F(x, y, z, \alpha)=۰, \quad F'_{\alpha}(x, y, z, \alpha)=۰$$

در حالت دسته سطوح دو پارامتری $\Phi(x\ y, z, \alpha, \beta)=۰$ ، سطح پوش در معادلات زیر صادق است :

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta)=۰, \quad \Phi'_{\alpha}(x, y, z, \alpha, \beta)=۰, \quad \Phi'_{\beta}(x, y, z, \alpha, \beta)=۰$$

معادلات خط مماس و صفحهٔ قایم بر هر یک از منحنی‌های زیر را در نقطه داده شده بنویسید .

۳۵۲۸ — $x=a\cos\alpha\cos t, \quad y=a\sin\alpha\cos t \quad z=a\sin t$ در نقطهٔ $t=t_۰$

۳۵۲۹ — $x=a\sin^۲ t, \quad y=b\sin t\cos t, \quad z=c\cos^۲ t$ در نقطهٔ $t=\frac{\pi}{٤}$

۳۵۳۰ — $y=x, \quad z=x^۲$ در نقطهٔ $M(۱, ۱, ۱)$

۳۵۳۱ — $x^۲+z^۲=۱۰, \quad y^۲+z^۲=۱۰$ در نقطهٔ $M(۱, ۱, ۳)$

۳۵۳۲ – $x+y+z=۰$ $x^۲+y^۲+z^۲=٦$ در نقطهٔ $M(۱, -۲, ۱)$.

۳۵۳۳ – روی منحنی $x=t,\ y=t^۲,\ z=t^۳$ نقطه‌ای پیدا کنید که مماس در آن موازی صفحهٔ $x+۲y+z=٤$ باشد .

۳۵۳٤ – ثابت کنید مماس بر مارپیچ $x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt$ با محور Oz زاویهٔ ثابتی می‌سازد .

۳۵۳۵ – ثابت کنید که منحنی

$$x=ae^t\cos t,\quad y=ae^t\sin t,\quad z=ae^t$$

تمام مولدهای مخروط $x^۲+y^۲=z^۲$ را تحت زاویهٔ ثابتی قطع میکند .

۳۵۳٦ – ثابت کنید لوکسودروم

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{٤}+\frac{\psi}{۲}\right)=e^{k\varphi}\quad (k=\text{const})$$

که در آن φ و ψ به ترتیب طول و عرض نقطهٔ روی کره میباشند تمام نصف‌النهارات کره را تحت زاویهٔ ثابتی می‌برد .

۳۵۳۷ – مطلوبست محاسبهٔ تانژانت زاویه‌ای که مماس در نقطهٔ $M_۰(x_۰, y_۰)$ بر منحنی

$$z=f(x, y),\quad \frac{x-x_۰}{\cos\alpha}=\frac{y-y_۰}{\sin\alpha}$$

که در آن f تابعی‌ایست دیفرانسیل پذیر، با صفحهٔ Oxy می‌سازد .

۳۵۳۸ – مطلوبست محاسبهٔ مشتق تابع

$$u=\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}$$

در نقطهٔ $M(۱, ۲, -۲)$ در امتداد مماس بر منحنی

$$x=t,\quad y=۲t^۲,\quad z=-۲t^٤$$

در این نقطه .

معادلات صفحهٔ مماس و خط قائم بر سطوح زیر را در نقطهٔ داده شده بنویسید :

۳۵۳۹ – $z=x^۲+y^۲$ در نقطهٔ $M_۰(۱, ۲, ۵)$

۳۵٤۰ – $x^۲+y^۲+z^۲=۱٦۹$ در نقطهٔ $M_۰(۳, ٤, ۱۲)$

۳۵٤۱ – $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ در نقطهٔ $M_۰\left(۱, ۱, \frac{\pi}{٤}\right)$

۳۵۴۲ – $ax^۲ + by^۲ + cz^۲ = ۱$ در نقطهٔ $M_۰ (x_۰, y_۰, z_۰)$

۳۵۴۳ – $z = y + \ln \frac{x}{z}$ در نقطهٔ $M_۰ (۱, ۱, ۱)$

۳۵۴۴ – $۲^{\frac{x}{z}} + ۲^{\frac{y}{z}} = ۸$ در نقطهٔ $M_۰ (۲, ۲, ۱)$

۳۵۴۵ – $x = a \cos \psi \cos \varphi, \quad y = b \cos \psi \sin \varphi, \quad z = c \sin \psi$ در نقطهٔ
$M_۰ (\varphi_۰, \psi_۰)$

۳۵۴۶ – $x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r \operatorname{ctg} \alpha$ در نقطهٔ $M_۰ (\varphi_۰, r_۰)$

۳۵۴۷ – $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av$ در نقطهٔ $M_۰ (u_۰, v_۰)$

۳۵۴۸ – مطلوبست تعیین وضع صفحهٔ مماس بر سطح

$$x = u + v, \quad y = u^۲ + v^۲, \quad z = u^۳ + v^۳$$

وقتیکه نقطهٔ تماس $(u \neq v)$ $M (u, v)$ به نقطهٔ $M_۰ (u_۰, v_۰)$ خط مرزی $u = v$ سطح بی‌نهایت نزدیک شود .

۳۵۴۹ – روی سطح

$$x^۲ + ۲y^۲ + ۳z^۲ + ۲xy + ۲xz + ۴yz = ۸$$

نقاطی را پیدا کنید که صفحات مماس در آن نقاط موازی صفحات مختصات باشد .

۳۵۵۰ – در چه نقطه‌ای از بیضوی

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$$

قائم بر آن با محورهای مختصات زوایای متساوی می‌سازد ؟

۳۵۵۱ – بر سطح $x^۲ + ۲y^۲ + ۳z^۲ = ۲۱$ صفحات مماس موازی با صفحهٔ

$$x + ۴y + ۶z = ۰$$

را عبور دهید .

۳۵۵۲ – ثابت کنید که صفحات مماس بر سطح $xyz = a^۳ \quad (a > ۰)$ با صفحات مختصات چهاروجهی به حجم ثابت می‌سازد .

۳۵۵۳ – ثابت کنید هر صفحهٔ مماس بر سطح

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \quad (a > ۰)$$

پاره خطهائی بمجموع ثابت روی محورهای مختصات جدا می‌سازد .

۳۵۵۴ – ثابت کنید صفحه‌های مماس بر مخروط

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

از رأسش میگذرند .

۳۵۵۵ – ثابت کنید قائم‌های بر سطح دوارن

$$z = f\left(\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}\right) \quad (f' \neq ۰)$$

محور دوران را قطع میکند .

۳۵۵۶ – مطلوبست تصاویر بیضوی

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} - xy = ۱$$

روی صفحات مختصات .

۳۵۵۷ – مربع $\{۰ \leqslant x \leqslant ۱, \quad ۰ \leqslant y \leqslant ۱\}$ را به تعداد متناهی قسمت‌های σ بقطر $\leqslant \delta$ تقسیم شده است . حد اعلای عده δ را بر آورد کنید اگر امتداد قائمها بر سطح

$$z = ۱ - x^{۲} - y^{۲}$$

در نقاط دلخواه $P(x, y)$ و $P_{۱}(x_{۱}, y_{۱})$ متعلق به یک قسمت σ کمتر از ۱° اختلاف داشته باشند .

۳۵۵۸ – بفرض آنکه

$z = f(x, y)$ که در آن $(x, y) \in D$ (۱)

معادلهٔ یک سطح و $\varphi(P_{۱}, P)$ زاویهٔ بین قائم‌های بر سطح (۱) در نقاط $P(x, y) \in D$ و $P_{۱}(x_{۱}, y_{۱}) \in D$ باشد ثابت کنید که اگر حوزهٔ D بسته و محدود و تابع $f\{x, y)$ دارای مشتق‌های متناهی مرتبهٔ دوم در حوزهٔ D باشد در آنصورت نامساوی لیاپونف درست است :

$$\varphi(P_{۱}, P) < C\rho(P_{۱}, P) \quad (۲)$$

که در آن C مقدار ثابت و $\rho(P_{۱}$ و $P)$ فاصلهٔ بین نقاط $P, P_{۱}$ می‌باشد .

۳۵۵۹ – استوانهٔ $x^{۲} + y^{۲} = a^{۲}$ سطح $bz = xy$ را در نقطهٔ مشترک $M_{۰}(x_{۰}, y_{۰}, z_{۰})$ تحت چه زاویه‌ای قطع میکند ؟

۳۵۶۰ – نشان دهید که سطوح مختصات در دستگاه مختصات کروی $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = r^{۲}, \quad y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi, \quad x^{۲} + y^{۲} = z^{۲}\,\mathrm{tg}^{۲}\,\theta$ دو بدو برهم عمودند .

۳۵۶۱ – نشان دهید که کرات $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۲by,\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۲cz$
$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۲ax,$ یک دستگاه سه قائمه تشکیل میدهند .

۳۵۶۲ – از هر نقطهٔ $M(x, y, z)$ بازای $\lambda=\lambda_{۱},\quad \lambda=\lambda_{۲},\quad \lambda=\lambda_{۳}$ سه سطح درجهٔ دوم :

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}-\lambda^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}-\lambda^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}-\lambda^{۲}}=-۱\quad (a>b>c>۰)$$

میگذرند . ثابت کنید این سه سطح متعامدند .

۳۵۶۳ – مطلوبست محاسبهٔ مشتق تابع $u=x+y+z$ در امتداد قائم خارجی بر کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱$ در نقطهٔ $M_{۰}(x_{۰}, y_{۰}, z_{۰})$ آن .
در چه نقاطی از کره مشتق قائم تابع u دارای : الف) بیشترین مقدار است ؛ ب) کمترین مقدار است ؟ ؛ پ) مساوی صفر است ؟

۳۵۶۴ – مطلوبست محاسبهٔ مشتق تابع $u=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$ در امتداد قائم خارجی بر بیضوی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۱$ در نقطهٔ $M_{۰}(x_{۰}, y_{۰}, z_{۰})$ آن .

۳۵۶۵ – فرض کنیم $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ مشتقات قائم توابع u, v در یک نقطه از سطح $F(x, y, z)=۰$ باشند . ثابت کنید که

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv)=u\frac{\partial v}{\partial n}+v\frac{\partial u}{\partial n}$$

پوش دسته منحنی‌های تک‌پارامتری مستوی زیر را پیدا کنید :

۳۵۶۶ – $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p\quad (p=\text{const})$

۳۵۶۷ – $(x-a)^{۲}+y^{۲}=\frac{a^{۲}}{۲}$

۳۵۶۸ – $y=kx+\frac{a}{k}\quad (a=p\,\text{const})$

۳۵۶۹ – $y^{۲}=۲px+p^{۲}$

۳۵۷۰ – مطلوبست منحنی پوش پاره خطی بطول l که دو سر آن روی محورهای مختصات می‌لغزد .

۳۵۷۱ – مطلوبست پوش بیضی‌های $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$ که دارای مساحت ثابت S می‌باشند .

۳۵۷۲ – مطلوبست پوش مسیرهای گلوله‌ای که در خلأ با سرعت اولیهٔ $v_۰$ پرتاب می‌شود بطوریکه زاویهٔ پرتاب α در صفحهٔ قایم ، متغیر باشد .

۳۵۷۳ – ثابت کنید که پوش قائم‌های بر یک منحنی مستوی ، گستردهٔ این منحنی است .

۳۵۷۴ – خصوصیت منحنی‌های مبین دسته منحنی‌های زیر را بررسی کنید (c پارامتر متغیر است) :

الف) سهمی‌های مکعب (کوبیک) $y = (x-c)^۳$

ب) سهمی‌های نیمه مکعب $y^۲ = (x-c)^۳$

پ) سهمی‌های نیل $y^۳ = (x-c)^۲$

ت) ستروفوئیدهای $(y-c)^۲ = x^۲\dfrac{a-x}{a+x}$

۳۵۷۵ – مطلوبست پوش دسته کرات بشعاع r که مرکز آنها روی دایرهٔ $x = R\cos t,\quad y = R\sin t,\quad z = ۰$ (t پارامتر است و $R > r$) واقع‌اند .

۳۵۷۶ – مطلوبست پوش دسته کرات

$$(x - t\cos\alpha)^۲ + (y - t\cos\beta)^۲ + (z - t\cos\gamma)^۲ = ۱$$

که در آن $\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱$ و t پارامتری است متغیر .

۳۵۷۷ – مطلوبست پوش دسته بیضوی‌های $\dfrac{x^۲}{a^۲} + \dfrac{y^۲}{b^۲} + \dfrac{z^۲}{c^۲} = ۱$ که دارای حجم ثابت V می‌باشند .

۳۵۷۸ – مطلوبست پوش دسته کرات بشعاع ρ که مرکز آنها روی سطح مخروط $x^۲ + y^۲ = z^۲$ قرار گرفته است .

۳۵۷۹ – نقطهٔ نورانی در مبدأ مختصات قرار گرفته . مطلوبست مخروط سایهٔ حاصله از کرهٔ

$$(x - x_۰)^۲ + (y - y_۰)^۲ + (z - z_۰)^۲ \leqslant R^۲$$

اگر $x_۰^۲ + y_۰^۲ + z_۰^۲ > R^۲$

۳۵۸۰ – مطلوبست پوش دسته صفحات

$$z - z_۰ = p(x - x_۰) + q(y - y_۰)$$

در صورتیکه بین پارامترهای p, q معادلهٔ زیر بر قرار باشد :

$$p^۲ + q^۲ = ۱$$

بخش ٦ — فرمول تیلر

بند ١ — فرمول تیلر. اگر در یک همسایگی نقطهٔ (a, b) همهٔ مشتقات جزئی تابع $f(x, y)$ تا مرتبهٔ $(n+١)$ (با احتساب آن) پیوسته باشند در آنصورت در این همسایگی دستور زیر صحیح است:

$$f(x, y)=f(a, b)+\sum_{i=١}^{n}\frac{١}{i!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{i} f(a, b)+ \\ +R_n(x, y) \qquad (١)$$

که در آن

$$R_n(x, y)=\frac{١}{(n+١)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+١} f(a+\theta_n(x-a), \\ b+\theta_n(y-b)) \quad (٠<\theta_n<١)$$

بند ٢ — سری تیلر. اگر تابع $f(x, y)$ بی‌نهایت بار دیفرانسیل‌پذیر و $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x, y)=٠$ باشد در اینصورت میتوان این تابع را بصورت سری تام نمایش داد:

$$f(x, y)= \\ =f(a, b)+\sum_{i+j\geqslant ١}^{\infty}\frac{١}{i!j!}f^{(i+j)}_{x^i y^j}(a, b)(x-a)^i(y-b)^j \qquad (٢)$$

حالات خاص دستورهای (١) و (٢) بازای $a=b=٠$ بترتیب به دستور ماکلورن و سری ماکلورن موسومند. فرمول‌های مشابهی برای توابع بیش از دو متغیره نیز صادق است.

بند ٣ — نقاط خاص منحنی‌های مستوی. فرض میکنیم در نقطهٔ $M_٠(x_٠, y_٠)$ منحنی دو بار دیفرانسیل‌پذیر $F(x, y)=٠$ شرایط زیر مجرا باشد:

$$F(x_٠, y_٠)=٠, \quad F'_x(x_٠, y_٠)=٠, \quad F'_y(x_٠, y_٠)=٠$$

و اعداد

$$A=F''_{xx}(x_٠, y_٠), \quad B=F''_{xy}(x_٠, y_٠), \quad C=F''_{yy}(x_٠, y_٠)$$

همگی در عین حال صفر نباشند. آنوقت اگر

١) $AC-B^٢>٠$ در اینصورت $M_٠$ نقطهٔ منفرد است؛

٢) $AC-B^٢<٠$ در اینصورت $M_٠$ نقطهٔ مضاعف (گرهی) است؛

٣) $AC-B^٢=٠$ در اینصورت $M_٠$ نقطهٔ برگشت یا نقطهٔ منفرد استت؛

در حالت $A = B = C = ۰$ ممکن است که نقاط خاصی از نوع پیچیده‌تری هم پیدا شوند. در منحنی‌هائیکه متعلق به کلاسهٔ همواری $C^{(۲)}$ نباشند ممکن است ویژگیهای پیچیده‌تری را هم پیدا کرد: نقاط انقطاع، نقاط زاویه‌دار و غیره.

۳۵۸۱ – تابع $f(x, y) = ۲x^۲ - xy - y^۲ - ۶x - ۳y + ۵$ را بر حسب فرمول تیلر در همسایگی نقطهٔ $A(۱, -۲)$ بسط دهید.

۳۵۸۲ – تابع $f(x, y, z) = x^۳ + y^۳ + z^۳ - ۳xyz$ بر حسب فرمول تیلر در همسایگی نقطهٔ $A(۱, ۱, ۱)$ بسط دهید.

۳۵۸۳ – مطلوبست محاسبهٔ نمو تابع $f(x, y) = x^۲y + xy^۲ - ۲xy$ بازای عبور از مقادیر $x = ۱,\ y = -۱$ به مقادیر $x_۱ = ۱ + h,\ y_۱ = -۱ + k$.

۳۵۸۴ – $f(x + h,\ y + k,\ z + l)$ را بر حسب توانهای درست مثبت مقادیر l, k, h اگر

$$f(x, y, z) = Ax^۲ + By^۲ + Cz^۲ + ۲Dxy + ۲Exz + ۲Fyz$$

بسط دهید.

۳۵۸۵ – در بسط تابع

$$f(x, y) = x^y$$

در همسایگی نقطهٔ $A(۱, ۱)$ جمله‌های تا مرتبهٔ دوم و خود جملهٔ مرتبهٔ دوم را بنویسید.

۳۵۸۶ – تابع $f(x, y) = \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}$ را بر حسب دستور ماکلورن تا جملهٔ درجهٔ چهارم وارده بسط دهید.

۳۵۸۷ – دستورهای تقریبی با دقت تا جملهٔ مرتبهٔ دوم برای عبارات:

الف) $\frac{\cos x}{\cos y}$ ؛ ب) $\operatorname{arc\,tg} \frac{۱ + x + y}{۱ - x + y}$

استخراج کنید در صورتیکه $|x|$ و $|y|$ در مقایسه با ۱ کوچک باشند.

۳۵۸۸ – عبارت

$$\cos(x + y + z) - \cos x \cos y \cos z$$

را بفرض آنکه x, y, z از لحاظ قدر مطلق کوچک باشند ساده کنید.

۳۵۸۹ – تابع

$$F(x, y) = \frac{۱}{٤}[f(x+h, y) + f(x, y+h) + f(x-h, y) +$$
$$+ f(x, y-h) - f(x, y)$$

بر حسب توانهای h با دقت تا $h^٤$ بسط دهید.

۳۵۹۰ – فرض کنیم $(i = ۱, ۲, ۳)$ $P_i(x_i, y_i)$ و $f(P) = f(x, y)$ رئوس مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره با مرکز در نقطهٔ $P(x, y)$ و بشعاع ρ و ضمنا $x_۱ = x + \rho,\ y_۱ = y$ باشد. تابع

$$F(\rho) = \frac{۱}{۳}[f(P_۱) + f(P_۲) + f(P_۳)]$$

را بر حسب توانهای درست مثبت ρ با دقت تا $\rho^۲$ بسط دهید.

۳۵۹۱ – تابع

$$\Delta_{xy} f(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$

را بر حسب توانهای h, k بسط دهید.

۳۵۹۲ – تابع

$$F(\rho) = \frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi} f(x + \rho\cos\varphi,\ \ y + \rho\sin\varphi)\, d\varphi$$

را بر حسب توانهای ρ بسط دهید.

توابع زیر را بسری ماکلورن بسط دهید:

۳۵۹۳ – $f(x, y) = (۱ + x)^m(۱ + y)^n$

۳۵۹٤ – $f(x, y) = \ln(۱ + x + y)$

۳۵۹٥ – $f(x, y) = e^x \sin y$

۳۵۹٦ – $f(x, y) = e^x \cos y$

۳۵۹۷ – $f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$

۳۵۹۸ – $f(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$

۳۵۹۹ – $f(x, y) = \sin(x^۲ + y^۲)$

۳٦۰۰ – $f(x, y) = \ln(۱+x)\ln(۱+y)$

۳٦۰۱ – سه جمله از بسط تابع زیر بسری ماکلورن را بنویسید:

$$f(x, y) = \int_۰^۱ (۱ + x)^{t^۲ y} dt$$

۳٦۰۲ – تابع e^{x+y} را بر حسب توانهای درست مثبت دوجمله‌ای‌های $x - ۱$, $y + ۱$ بسری تام بسط دهید.

۳۶۰۳ – بسط تابع $f(x, y) = \frac{x}{y}$ بسری تیلر را در همسایگی نقطهٔ $M(۱, ۱)$ بنویسید .

۳۶۰۴ – فرض کنیم z تابع ضمنی از y و x تعریف شده با معادلهٔ $z^۳ - ۲xz + y = ۰$ باشد که بازای $x = ۱, y = ۱$ مقدار $z = ۱$ را اختیار میکند .

چند جمله از بسط تابع z بر حسب توانهای صعودی دوجمله‌ئیهای $y - ۱$ و $x - ۱$ را بنویسید .

انواع نقاط خاص منحنی‌های زیر را بررسی کرده و این منحنی‌ها را بطور تقریبی نمایش دهید :

۳۶۰۵ – $y^۲ = ax^۲ + x^۳$

۳۶۰۶ – $x^۳ + y^۳ - ۳xy = ۰$

۳۶۰۷ – $x^۲ + y^۲ = x^٤ + y^٤$

۳۶۰۸ – $x^۲ + y^٤ = x^٦$

۳۶۰۹ – $(x^۲+y^۲)^۲ = a^۲(x^۲ - y^۲)$

۳۶۱۰ – $(y - x^۲)^۲ = x^۵$

۳۶۱۱ – $(a+x)\, y^۲ = (a - x)\, x^۲$

۳۶۱۲ – شکل منحنی $y^۲ = (x - a)(x - b)(x - c)$ را بر حسب مقادیر پارامترهای $(a \leqslant b \leqslant c)$ a, b, c بررسی کنید .

نقاط خاص منحنی‌های ترانساندان (متعالی) زیر را بررسی کنید :

۳۶۱۳ – $y^۲ = ۱ - e^{-x^۲}$

۳۶۱٤ – $y^۲ = ۱ - e^{-x^۳}$

۳۶۱۵ – $y = x \ln x$

۳۶۱۶ – $y = \dfrac{x}{۱ + e^{\frac{۱}{x}}}$

۳۶۱۷ – $y = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{۱}{\sin x}\right)$

۳۶۱۸ – $y^۲ = \sin \dfrac{\pi}{x}$

۳۶۱۹ – $y^۲ = \sin x^۲$

۳۶۲۰ – $y^۲ = \sin^۳ x$

بخش ۷ — اکسترمم تابع چند متغیره

بند ۱ — تعریف اکسترمم . فرض کنیم تابع $f(P) = f(x_۱, \dots x_n)$ در همسایگی نقطه $P_۰$ معین باشد . هرگاه $f(P_۰) > f(P)$ یا $f(P_۰) < f(P)$ بازای $۰ < \rho(P_۰, P) < \delta$ ، آنگاه میگویند که تابع $f(P)$ در نقطهٔ $P_۰$ دارای اکسترمم (بترتیب ماکزیمم یا می‌نیمم) است .

بند ۲ — شرط لازم اکسترمم . تابع دیفرانسیل‌پذیر $f(P)$ فقط در نقطهٔ سکون $P_۰$ میتواند به اکسترمم برسد یعنی در چنین نقطه‌ایکه $df(P_۰) = ۰$.

در نتیجه نقاط اکسترمم تابع $f(P)$ در دستگاه معادلات $f'_{x_i}(x_۱, \dots , x_n)=۰$ $(i = ۱, \dots , n)$ صدق میکند.

بند ۳ — شرط کافی اکسترمم. تابع $f(P)$ در نقطهٔ $P_۰$:
الف) دارای ماکزیمم است اگر $df(P_۰) = ۰$ و $d^۲f(P_۰) < ۰$ بازای $\sum_{i=۱}^{n} |dx_i| \neq ۰$ و ب) دارای می‌نیمم است اگر $df(P_۰) = ۰$ و $d^۲f(P_۰) > ۰$ بازای $\sum_{i=۱}^{n} |dx_i| \neq ۰$

بررسی علامت دیفرانسیل مرتبهٔ دوم $d^۲f(P_۰)$ را ممکن است با تبدیل صورت درجهٔ دوم به صورت کانونیک صورت گیرد.

بخصوص برای حالت تابع $f(x, y)$ از دو متغیر مستقل y و x در نقطهٔ سکون $df(x_۰, y_۰) = ۰$ $(x_۰, y_۰)$ با شرط $D = AC - B^۲ \neq ۰$ که در آن $A = f''_{xx}(x_۰, y_۰)$, $B = f''_{xy}(x_۰, y_۰)$, $C = f''_{yy}(x_۰, y_۰)$ داریم :
۱) می‌نیمم اگر $D > ۰$ ، $A > ۰$ $(C > ۰)$ ؛
۲) ماکزیمم اگر $D > ۰$ ، $A < ۰$ $(C < ۰)$ ؛
۳) عدم اکسترمم اگر $D < ۰$.

بند ٤ — اکسترمم مشروط. مساله‌ٔ تعیین اکسترمم تابع $f(P_۰) = f(x_۱, \dots , x_n)$ بشرط وجود سری روابط $\varphi_i(P) = ۰$ $(i = ۱, \dots , m;\ m < n)$ منجر به تعیین اکسترمم معمولی تابع لاگرانژ

$$L(P) = f(P) + \sum_{i=۱}^{m} \lambda_i \varphi_i(P)$$

می‌شود که در آن λ_i $(i = ۱, \dots , m)$ ضرایب ثابتی میباشند. مساله‌ٔ وجود و خصوصیت اکسترمم مشروط در حالت‌های ساده بر پایهٔ بررسی علامت دیفرانسیل مرتبهٔ دوم $d^۲L(P_۰)$ در نقطهٔ سکون $P_۰$ تابع $L(P)$ بشرطی که متغیرهای $dx_۱, \dots , dx_n$ با روابط زیر مربوط باشند حل می‌شود :

$$\sum_{j=۱}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = ۰ \quad (i = ۱, \dots , m)$$

بند ٥ — اکسترمم مطلق. تابع $f(P)$ دیفرانسیل‌پذیر در حوزهٔ بسته و محدود، به بزرگترین و کمترین مقدارهای خود در این حوزه یا در نقطهٔ سکون و یا در نقاط مرزی میرسد.

اکسترمم توابع چند متغیرهٔ زیر را بررسی کنید :

٣٦٢١ - $z = x^٢ + (y - ١)^٢$

٣٦٢٢ - $z = x^٢ - (y - ١)^٢$

٣٦٢٣ - $z = (x - y + ١)^٢$

٣٦٢٤ - $z = x^٢ - xy + y^٢ - ٢x + y$

٣٦٢٥ - $z = x^٢y^٣(٦ - x - y)$

٣٦٢٦ - $z = x^٣ + y^٣ - ٣xy$

٣٦٢٧ - $z = x^٤ + y^٤ - x^٢ - ٢xy - y^٢$

٣٦٢٧,١ - $z = ٢x^٤ + y^٤ - x^٢ - ٢y^٢$

٣٦٢٨ - $z = xy + \frac{٥٠}{x} + \frac{٢٠}{y} \quad (x > ٠, \; y > ٠)$

٣٦٢٩ - $z = xy\sqrt{١ - \frac{y^٢}{a^٢} - \frac{y^٢}{b^٢}} \quad (a > ٠, \; b > ٠)$

٣٦٣٠ - $z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^٢ + y^٢ + ١}} \quad (a^٢ + b^٢ + c^٢ \neq ٠)$

٣٦٣١ - $z = ١ - \sqrt{x^٢ + y^٢}$

٣٦٣٢ - $z = e^{٢x + ٣y}(٧x^٢ - ٦xy + ٣y^٢)$

٣٦٣٣ - $z = e^{x^٢ - y}(٥ - ٢x + y)$

٣٦٣٤ - $z = (٥x + ٧y - ٢٥)\, e^{-(x^٢ + xy + y^٢)}$

٣٦٣٥ - $z = x^٢ + xy + y^٢ - ٤\ln x - ١٠\ln y$

٣٦٣٦ - $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y) \quad \left(٠ \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{٢}, \; ٠ \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{٢}\right)$

٣٦٣٧ - $z = \sin x \sin y \sin(x + y) \quad (٠ \leqslant x \leqslant \pi, \; ٠ \leqslant y \leqslant \pi)$

٣٦٣٨ - $z = x - ٢y + \ln\sqrt{x^٢ + y^٢} + ٣ \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$

٣٦٣٩ - $z = xy\ln(x^٢ + y^٢)$

٣٦٤٠ - $z = x + y + ٤\sin x \sin y$

٣٦٤١ - $z = (x^٢ + y^٢)\, e^{-(x^٢ + y^٢)}$

٣٦٤٢ - $u = x^٢ + y^٢ + z^٢ + ٢x + ٤y - ٦z$

٣٦٤٣ - $u = x^٣ + y^٢ + z^٢ + ١٢xy + ٢z$

٣٦٤٤ - $u = x + \frac{y^٢}{٤x} + \frac{z^٢}{y} + \frac{٢}{z} \quad (x > ٠, \; y > ٠, \; z > ٠)$

٣٦٤٥ - $u = xy^٢z^٣(a - x - ٢y - ٣z) \quad (a > ٠)$

٣٦٤٦ - $u = \frac{a^٢}{x} + \frac{x^٢}{y} + \frac{y^٢}{z} + \frac{z^٢}{b}$

$$(x > ٠, \quad y > ٠, \quad z > ٠, \quad a > ٠, \quad b > ٠)$$

۳۶۴۷ – $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin (x + y + z)$

$(۰ \leqslant x \leqslant \pi, \quad ۰ \leqslant y \leqslant \pi, \quad ۰ \leqslant z \leqslant \pi)$

۳۶۴۸ – $u = x_۱ x_۲^۲ \dots x_n^n (۱ - x_۱ - ۲x_۲ - \dots - nx_n)$

$(x_۱ > ۰, \quad x_۲ > ۰, \; \dots, \; x_n > ۰)$

۳۶۴۹ – $u = x_۱ + \frac{x_۲}{x_۱} + \frac{x_۳}{x_۲} + \dots + \frac{x_n}{x_{n-۱}} + \frac{۲}{x_n}$

$(x_i > ۰, \quad i = ۱, ۲, \dots, n)$

۳۶۵۰ – مساله‌ٔ هویگنس. بین دو عدد مثبت a و b ، n عدد $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ را طوری درج کنید تا کسر

$$u = \frac{x_۱ y_۲ \dots x_n}{(a + x_۱)(x_۱ + x_۲) \dots (x_n + b)}$$

بیشترین مقدار را دارا باشد.

مقادیر اکسترمم توابع‌ضمنی z از متغیرهای x, y را پیدا کنید:

۳۶۵۱ – $x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲x + ۲y - ۴z - ۱۰ = ۰$

۳۶۵۲ – $x^۲ + y^۲ + z^۲ - xz - yz + ۲x + ۲y + ۲z - ۲ = ۰$

۳۶۵۳ – $(x^۲ + y^۲ + z^۲)^۲ = a^۲ (x^۲ + y^۲ - z^۲)$

نقاط اکسترمم مشروط توابع زیر را پیدا کنید:

۳۶۵۴ – $z = xy$ اگر $x + y = ۱$

۳۶۵۵ – $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ اگر $x^۲ + y^۲ = ۱$

۳۶۵۶ – $z = x^۲ + y^۲$ اگر $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = ۱$

۳۶۵۷ – $z = Ax^۲ + ۲Bxy + Cy^۲$ اگر $x^۲ + y^۲ = ۱$

۳۶۵۷٫۱ – $z = x^۲ + ۱۲xy - ۲y^۲$ اگر $۴x^۲ + y^۲ = ۲۵$

۳۶۵۸ – $z = \cos^۲ x + \cos^۲ y$ اگر $x - y = \frac{\pi}{۴}$

۳۶۵۹ – $u = x - ۲y + ۲z$ اگر $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$

۳۶۶۰ – $u = x^m y^n z^p$ اگر

$x + y + z = a \quad (m > ۰, \; n > ۰, \; p > ۰, \; a > ۰)$

۳۶۶۱- $u=x^۲+y^۲+z^۲$ اگر

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱ \quad (a>b>c>۰)$$

۳۶۶۲- $u=xy^۲z^۳$ اگر $x+۲y+۳z=a$

$$(x>۰,\quad y>۰,\quad z>۰,\quad a>۰)$$

۳۶۶۳- $u=xyz$ اگر $x^۲+y^۲+z^۲=۱,\ x+y+z=۰$

۳۶۶۳٫۱- $u=xy+yz$ اگر $x^۲+y^۲=۲,\ y+z=۲\ (x>۰,\ y>۰,\ z>۰)$

۳۶۶۴- $u=\sin x\sin y\sin z$ اگر $x+y+z=\frac{\pi}{۲}$

$$(x>۰,\quad y>۰,\quad z>۰)$$

۳۶۶۵- $u\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}$ اگر

$$x^۲+y^۲+z^۲=۱,\quad x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=۰$$

$$(a>b>c>۰,\quad \cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱)$$

۳۶۶۶- $u=(x-\xi)^۲+(y-\eta)^۲+(z-\zeta)^۲$ اگر

$$Ax+By+Cz=۰,\quad x^۲+y^۲+z^۲=R^۲$$

$\frac{\xi}{\cos\alpha}=\frac{\eta}{\cos\beta}=\frac{\zeta}{\cos\gamma}$ که در آن $\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱$

۳۶۶۷- $u=x_۱^۲+x_۲^۲+\dots+x_n^۲$ اگر

$$\frac{x_۱}{a_۱}+\frac{x_۲}{a_۲}+\dots+\frac{x_n}{a_n}=۱\quad (a_i>۰;\ i=۱,\ ۲,\ \dots,\ n)$$

۳۶۶۸- $u=x_۱^p+x_۲^p+\dots+x_n^p\quad (p>۱)$ اگر

$$x_۱+x_۲+\dots+x_n=a\quad (a>۰)$$

۳۶۶۹- $u=\frac{\alpha_۱}{x_۱}+\frac{\alpha_۲}{x^۲}+\dots+\frac{\alpha_n}{x_n}$ اگر

$$\beta_۱x_۱+\beta_۲x_۲+\dots+\beta_nx_n=۱$$

$$(\alpha_i>۰,\ \beta_i>۰,\quad x_i>۰,\quad i=۱,\ ۲,\ \dots,\ n)$$

۳۶۷۰ - $u = x_۱^{\alpha_۱} x_۲^{\alpha_۲} \dots x_n^{\alpha_n}$ اگر

$$x_۱ + x_۲ + \dots + x_n = a \quad (a > ۰,\ \alpha_i > ۱,\ i = ۱, ۲, \dots , n)$$

۳۶۷۱ - مطلوبست اکسترمم صورت درجهٔ دوم (کوادراتیک)

$$u = \sum_{i,\ j}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

بازای شرط

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ = ۱$$

۳۶۷۲ - نامساوی

$$\frac{x^n + y^n}{۲} \geqslant \left(\frac{x+y}{۲}\right)^n$$

را اگر $n \geqslant ۱,\ x \geqslant ۰,\ y \geqslant ۰$ ثابت کنید .

راهنمائی - می‌نیمم تابع $z = \frac{۱}{۲}(x^n + y^n)$ را بازای شرط $x + y = s$ جستجو کنید .

۳۶۷۳ - نا مساوی هولدر را ثابت کنید :

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=۱}^{n} a_i^k\right)^{\frac{۱}{k}} \left(\sum_{i=۱}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{۱}{k'}}$$

$$\left(a_i \geqslant ۰,\ x_i \geqslant ۰,\ i = ۱, ۲, \dots , n;\quad k > ۱,\ \frac{۱}{k} + \frac{۱}{k'} = ۱\right)$$

راهنمائی - می‌نیمم تابع

$$u = \left(\sum_{i=۱}^{n} a_i^k\right)^{\frac{۱}{k}} \left(\sum_{i=۱}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{۱}{k'}}$$

را بازای شرط

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i x_i = A$$

جستجو کنید .

۳۶۷۴ - نامساوی آدامار

$$A^۲ \leqslant \prod_{i=۱}^{n} \left(\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^۲\right)$$

را برای دترمینان $A = |a_{ij}|$ مرتبهٔ n ثابت کنید .

راهنمائی – اکسترمم دترمینان $A = |a_{ij}|$ را با وجود بستگی‌های

$$\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^{۲} = S_i \quad (i = ۱, ۲, \ldots , n)$$

بررسی کنید .

بیشترین مقدار (sup) و کمترین مقدار (inf) توابع زیر را در حوزهٔ داده شده تعیین کنید :

۳۶۷۵ – $z = x - ۲y - ۳$ اگر $۰ \leqslant x \leqslant ۱,\ ۰ \leqslant y \leqslant ۱,\ ۰ \leqslant x + y \leqslant ۱$

۳۶۷۶ – $z = x^{۲} + y^{۲} - ۱۲x + ۱۶y$ اگر $x^{۲} + y^{۲} \leqslant ۲۵$

۳۶۷۷ – $z = x^{۲} - xy + y^{۲}$ اگر $|x| + |y| \leqslant ۱$

۳۶۷۸ – $u = x^{۲} + ۲y^{۲} + ۳z^{۲}$ اگر $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \leqslant ۱۰۰$

۳۶۷۹ – $u = x + y + z$ اگر $x^{۲} + y^{۲} \leqslant z \leqslant ۱$

۳۶۸۰ – کران پائینی (inf) و کران بالائی (sup) تابع

$$u = (x + y + z)\, e^{-(x + ۲y + ۳z)}$$

را در حوزهٔ $x > ۰,\ y > ۰,\ z > ۰$ بدست آورید .

۳۶۸۱ – نشان دهید که تابع $z = (۱ + e^{y}) \cos x - ye^{y}$ دارای تعداد نامتناهی ماگزیمم است و حتی یک می‌نیمم هم ندارد .

۳۶۸۲ – آیا برای می‌نیمم تابع $f(x, y)$ در نقطهٔ $M_۰(x_۰, y_۰)$ کافی است که این تابع در طول هر خط مستقیم مار بر نقطهٔ $M_۰$ می‌نیمم داشته باشد ؟
مثال $f(x, y) = (x - y)^{۲} (۲x - y)^{۲}$ را در نظر بگیرید .

۳۶۸۳ – عدد مثبت مفروض a را بصورت حاصلضرب n عامل مثبت طوری نمایش دهید که مجموع معکوسات آنها کمترین باشد .

۳۶۸۴ – عدد مثبت مفروض a را بصورت مجموع n عدد طوری نمایش دهید که مجموع مربعات آنها کمترین باشد .

۳۶۸۵ – عدد مثبت مفروض a را بصورت حاصلضرب n عامل مثبت طوری نمایش دهید که مجموع توانهای مثبت مفروض آنها کمترین باشد .

۳۶۸۶ – روی صفحه n نقطهٔ مادی $P_۱(x_۱, y_۱), P_۲(x_۲, y_۲), \ldots , P_n(x_n, y_n)$ بجرمهای بترتیب برابر $m_۱, m_۲, \ldots , m_n$ داده شده‌اند . نقطهٔ $P(x, y)$ در چه وضعی باشد تا گشتاور لختی دستگاه نقاط مفروض نسبت باین نقطه حد اقل باشد ؟

۳۶۸۷ – در چه اندازه‌هایی وان مکعب مستطیل روبازی که گنجایش‌اش V است ، کمترین سطح را دارد ؟

۳۶۸۸ - در چه اندازه‌هایی وان استوانه‌ای روبازی که مقطع عرضی آن نیمدایره و سطح آن S است بیشترین گنجایش را دارد ؟

۳۶۸۹ - روی کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ نقطه‌ای تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آن از n نقطهٔ مفروض $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ مینیمال باشد .

۳۶۹۰ - جسمی از استوانهٔ قائم مستدیری که بمخروط قائم دواری منتهی می‌شود تشکیل شده است . بفرض اینکه سطح کل جسم مساوی Q باشد ، ابعاد آنرا چنان تعیین کنید که حجم جسم بیشترین باشد .

۳۶۹۱ - جسمی که حجم آن برابر V است از یک مکعب مستطیل قائم تشکیل شده است که قاعده‌های بالایی و پائینی آن به هرمهای منتظم چهارپهلوی متساوی منتهی شده . بازای چه زاویهٔ شیب سطوح جانبی هرمها نسبت به سطح قاعده ، سطح کل جسم مینیمال است ؟

۳۶۹۲ - مطلوبست تعیین مستطیلی با محیط مفروض $2p$ که در دوران حول یکی از اضلاعش جسم با بیشترین حجم را تولید کند .

۳۶۹۳ - مطلوبست تعیین مثلثی با محیط مفروط $2p$ که در دوران حول یکی از اضلاعش جسم با بیشترین حجم را تولید کند .

۳۶۹٤ - در نیمکره بشعاع R مکعب مستطیل با بزرگترین حجم‌را محاط کنید .

۳۶۹۵ - در مخروط قائم مستدیر مفروض مکعب مستطیل با بزرگترین حجم را محاط کنید .

۳۶۹۶ - در بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

مکعب مستطیل با بیشترین حجم را محاط کنید

۳۶۹۷ - در مخروط مستدیر قائم که زاویهٔ شیب مولد l آن با صفحهٔ قاعده α است مکعب مستطیل با بیشترین سطح کل را محاط کنید .

۳۶۹۸ -در قطاع پارابولویید الیپتیک (سهموی بیضی گونه) $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $z=c$ مکعب مستطیل با بیشترین حجم را محاط کنید .

۳۶۹۹ - کوتاهترین فاصلهٔ نقطهٔ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ از صفحهٔ $Ax + By + Cz + D = 0$ را پیدا کنید .

۳۷۰۰ - کوتاه‌ترین فاصلهٔ d بین دو خط فضایی

$$\frac{x - x_۱}{m_۱} = \frac{y - y_۱}{n_۱} = \frac{z - z_۱}{p_۱}$$

و

$$\frac{x - x_۲}{m_۲} = \frac{y - y_۲}{n_۲} = \frac{z - z_۲}{p_۲}$$

را پیدا کنید .

۳۷۰۱ – کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین سهمی $y = x^۲$ و خط $x - y - ۲ = ۰$ را پیدا کنید .

۳۷۰۲ – نیم‌محورهای منحنی مرکزی درجهٔ دوم

$$Ax^۲ + ۲Bxy + Cy^۲ = ۱$$

را پیدا کنید .

۳۷۰۳ – نیم‌محورهای سطح مرکزی درجهٔ دوم

$$Ax^۲ + By^۲ + Cz^۲ + ۲Dxy + ۲Eyz + ۲Fxz = ۱$$

را پیدا کنید .

۳۷۰٤ – مساحت بیضی حاصل از تقاطع استوانهٔ

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$$

با صفحهٔ زیر را حساب کنید :

$$Ax + By + Cz = ۰$$

۳۷۰٥ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت مقطع بیضوی

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$$

با صفحهٔ

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = ۰$$

که در آن

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱$$

۳۷۰٦ – طبق اصل فرما نوری که از نقطهٔ A خارج می‌شود و به نقطهٔ B میرسد در روی منحنی‌ای منتشر می‌شود که حد اقل زمان برای عبور آن لازم است .

فرض میکنیم نقاط A و B در محیط‌های اپتیک متفاوتی که بوسیلهٔ صفحه‌ای از هم جدا شده‌اند قرار داشته باشند . اگر سرعت انتشار نور در محیط اول $v_۱$ و در محیط دوم $v_۲$ باشد قانون انکسار نور را نتیجه بگیرید .

۳۷۰۷ – بازای چه زاویه تابشی انحراف شعاع نورانی (یعنی زاویهٔ بین شعاع تابش و شعاع خروجی) گذرنده از منشور بزاویهٔ انکسار α و ضریب انکسار n کمترین خواهد بود ؟ این کمترین مقدار انحراف را تعیین کنید .

۳۷۰۸ – مقادیر متغیر x, y در معادلهٔ خطی

$$y = ax + b$$

که تعیین ضرایب آن مورد نظر است صدق میکنند . در نتیجه یک سری اندازه‌گیری‌های متساوی‌الدقت برای اندازه‌های x, y مقادیر $x_i, y_i \ (i = ۱, ۲, \ldots, n)$ حاصل شده است .

با استفاده از روش کمترین مربعات مطلوبست تعیین محتمل‌ترین مقادیر ضرایب a و b .

راهنمائی – طبق روش کمترین مربعات محتمل‌ترین مقادیر ضرایب a و b عبارتند از مقادیری که بازای آنها مجموع مجذورات خطاهای

$$\sum_{i=۱}^{n} \Delta_i^۲ = \sum_{i=۱}^{n} (ax_i + b - y_i)^۲$$

کمترین باشد .

۳۷۰۹ – روی صفحه دستگاه n نقطهٔ $M_i(x_i, y_i) \ \ (i = ۱, ۲, \ldots, n)$ داده شده است . بازای چه وضعی از خط $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = ۰$ مجموع مجذورات انحرافات نقاط مفروض از این خط کمترین خواهد بود ؟

۳۷۱۰ – تابع $x^۲$ را در فاصلهٔ (۱ , ۳) با تابع خطی $ax + b$ بطور تقریبی طوری عوض کنید که مقدار مطلق انحراف

$$\Delta = \sup|x^۲ - (ax + b)| \quad (۱ \leqslant x \leqslant ۳)$$

مینیمال باشد .

فصل ۷

انتگرالهای وابسته به پارامتر

بخش ۱ — انتگرالهای ویژهٔ وابسته به پارامتر

بند ۱ — پیوستگی انتگرال . هرگاه تابع $f(x, y)$ در حوزهٔ کران‌دار $R[a\leqslant x\leqslant A,\ b\leqslant y\leqslant B]$ معین و پیوسته باشد آنگاه

$$F(y)=\int_a^A f(x, y)\,dx$$

نیز تابع پیوسته‌ای روی قطعهٔ $b\leqslant y\leqslant B$ می‌باشد .

بند ۲ — مشتق‌گیری زیر علامت انتگرال . اگر علاوه بر شرایط بند ۱ مشتق جزئی $f'_y(x, y)$ در حوزهٔ R پیوسته باشد در اینصورت بازای $b<y<B$ فرمول لایبنیتز

$$\frac{d}{dy}\int_a^A f(x, y)\,dx=\int_a^A f'_y(x, y)\,dx$$

محقق است .

در حالت کلی‌تر وقتی حدود انتگرال گیری توابع دیفرانسیل‌پذیر $\varphi(y), \psi(y)$ از پارامتر y و $a<\varphi(y)<A,\ a<\psi(y)<A$ بازای $b<y<B$ باشد در اینصورت داریم :

$$\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx=f(\psi(y), y)\,\psi'(y)-f(\varphi(y), y)\,\varphi'(y)+$$

$$+\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)\,dx\quad(b<y<B)$$

بند ۳ — انتگرال‌گیری زیر علامت انتگرال بازای شرایط بند ۱ داریم :

$$\int_{b}^{B} dy \int_{a}^{A} f(x, y)\, dx = \int_{a}^{A} dx \int_{b}^{B} f(x, y)\, dy$$

۳۷۱۱ — نشان دهید که انتگرال

$$F(y) = \int_{۰}^{۱} f(x, y)\, dx$$

از تابع ناپیوستهٔ $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$ تابعی پیوسته است . نمودار تابع $u = F(y)$ را رسم کنید .

۳۷۱۲ — پیوستگی تابع

$$F(y) = \int_{۰}^{۱} \frac{yf(x)}{x^{۲} + y^{۲}}\, dx$$

را که در آن $f(x)$ تابعی پیوسته و مثبت روی قطعهٔ [۰ , ۱] می‌باشد بررسی کنید .

۳۷۱۳ — مطلوبست :

الف) $\lim\limits_{\alpha \to ۰} \int_{\alpha}^{۱+\alpha} \frac{dx}{۱ + x^{۲} + \alpha^{۲}}$ ؛

ب) $\lim\limits_{\alpha \to ۰} \int_{-۱}^{۱} \sqrt{x^{۲} + \alpha^{۲}}\, dx$ ؛

پ) $\lim\limits_{\alpha \to ۰} \int_{۰}^{۲} x^{۲} \cos \alpha x\, dx$ ؛

ت) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{۰}^{۱} \frac{dx}{۱ + \left(۱ + \frac{x}{n}\right)^{n}}$

۳۷۱۳,۱ — مطلوبست

$$\lim_{R \to \infty} \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} e^{-R \sin \theta}\, d\theta$$

۳۷۱۴ — فرض کنیم تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[A, B]$ پیوسته باشد . ثابت کنید که

$$\lim_{h \to ۰} \frac{۱}{h} \int_{a}^{x} [f(t + h) - f(t)]\, dt = f(x) - f(a) \qquad (A < a < x < B)$$

۳۷۱٤,۱ - فرض کنیم ۱) $\varphi_n(x) \geqslant ۰ \quad (n = ۱, ۲, \ldots)$ روی $[-۱, ۱]$ ؛
۲) $\varphi_n(x) \rightrightarrows ۰$ بازای $n \to \infty$ روی $۰ \leqslant \varepsilon \leqslant |x| \leqslant ۱$ ؛
۳) $\int\limits_{-۱}^{۱} \varphi_n(x)\,dx \to ۱$ بازای $n \to \infty$.

ثابت کنید که اگر $f(x) \in C[-۱, ۱]$ در اینصورت

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-۱}^{۱} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = f(۰)$$

۳۷۱۵ - آیا میتوان عمل حدگیری در عبارت

$$\lim_{y \to ۰} \int_{۰}^{۱} \frac{x}{y^{۲}} e^{-\frac{x^{۲}}{y^{۲}}}\,dx$$

را زیر علامت انتگرال انجام داد ؟

۳۷۱۶ - آیا میتوان با قاعدهٔ لایبنیتز مشتق تابع

$$F(y) = \int_{۰}^{۱} \ln\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}\,dx$$

را بازای $y = ۰$ حساب نمود ؟

۳۷۱۷ - مطلوبست محاسبهٔ $F'(x)$ اگر

$$F(x) = \int_{x}^{x^{۲}} e^{-xy^{۲}}\,dy$$

۳۷۱۸ - مطلوبست $F'(\alpha)$ اگر :

الف) $F(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{۱-x^{۲}}}\,dx$ ؛ ب) $F(\alpha) = \int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$

پ) $F(\alpha) = \int\limits_{۰}^{\alpha} \frac{\log(۱+\alpha x)}{x}\,dx$ ؛

ت) $F(\alpha) = \int\limits_{۰}^{\alpha} f(x+\alpha,\ x-\alpha)\,dx$

ث) $F(\alpha) = \int\limits_{۰}^{\alpha^{۲}} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^{۲} + y^{۲} - \alpha^{۲})\,dy$

۳۷۱۹ – مطلوبست $F''(x)$ اگر

$$F(x) = \int_{۰}^{x} (x+y) f(y)\, dy$$

که در آن $f(x)$ تابعی است دیفرانسیل‌پذیر.

۳۷۲۰ – مطلوبست محاسبهٔ $F''(x)$ اگر

$$F(x) = \int_{a}^{b} f(y)\, |x-y|\, dy$$

که در آن $a < b$ و $f(y)$ تابعی است پیوسته روی $[a, b]$.

۳۷۲۱ – مطلوبست $F''(x)$ اگر

$$F(x) = \frac{۱}{h^{۲}} \int_{۰}^{h} d\xi \int_{۰}^{h} f(x+\xi+\eta)\, d\eta \quad (h > ۰)$$

که در آن $f(x)$ تابعی است پیوسته.

۳۷۲۲ – مطلوبست $F^{(n)}(x)$ اگر

$$F(x) = \int_{۰}^{x} f(t)\, (x-t)^{n-۱}\, dt$$

۳۷۲۲,۱ – مطلوبست اثبات دستور

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{۱}{x^{n+۱}} \int_{۰}^{x} y^n \cos\left(y + \frac{n\pi}{۲}\right) dy \quad (n = ۱, ۲, \ldots) \qquad (۱)$$

با استفاده از دستور (۱) برآورد زیر را نتیجه بگیرید:

$$x \in (-\infty, +\infty) \text{ بازای } \left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right| \leqslant \frac{۱}{n+۱}$$

۳۷۲۳ – تابع $f(x) = x^{۲}$ را روی فاصلهٔ $۱ \leqslant x \leqslant ۳$ بطور تقریبی با تابع خطی $a + bx$ طوری عوض کنید که

$$\int_{۱}^{۳} (a + bx - x^{۲})^{۲}\, dx = \min$$

۳۷۲۴ – دستور تقریبی بصورت

$$\sqrt{۱ + x^{۲}} \approx a + bx \quad (۰ \leqslant x \leqslant ۱)$$

را از شرط اینکه انحراف متوسط کوادراتیک توابع $a + bx$ و $\sqrt{۱ + x^{۲}}$ روی فاصلهٔ مفروض [۰, ۱] حد اقل باشد بدست آورید.

۳۷۲۵ – مشتقات انتگرالهای الیپتیک کامل

$$E(k)=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۱-k^{۲}\sin^{۲}\varphi}\;d\varphi$$

و

$$F(k)=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{d\varphi}{\sqrt{۱-k^{۲}\sin^{۲}\varphi}}\quad(۰<k<۱)$$

را پیدا کنید و آنها را بر حسب توابع $E(k)$ و $F(k)$ بیان کنید.

نشان دهید که $E(k)$ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$E''(k)+\frac{۱}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{۱-k^{۲}}=۰$$

صدق میکند.

۳۷۲۶ – ثابت کنید که تابع بسل با اندیس (شاخص) درست n

$$J_n(x)=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi$$

در معادلهٔ بسل

$$x^{۲}J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^{۲}-n^{۲})J_n(x)=۰$$

صادق است.

۳۷۲۷ – فرض کنیم

$$I(\alpha)=\int_{۰}^{\alpha}\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\alpha-x}}$$

که در آن تابع $\varphi(x)$ و مشتق آن $\varphi'(x)$ روی قطعهٔ $۰\leqslant x\leqslant a$ پیوسته می‌باشند.

ثابت کنید بازای $۰<\alpha<a$ داریم:

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(۰)}{\sqrt{\alpha}}+\int_{۰}^{\alpha}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx$$

راهنمائی – فرض کنید $x=\alpha t$.

۳۷۲۸ – نشان دهید که تابع

$$u(x) = \int_{۰}^{۱} K(x, y)\, v(y)\, dy$$

که در آن

$$K(x, y) = \begin{cases} x(۱-y), & \text{اگر} \quad x \leqslant y \\ y(۱-x), & \text{اگر} \quad x > y \end{cases}$$

و $v(y)$ پیوسته می‌باشد ، در معادلهٔ

$$u''(x) = -v(x) \quad (۰ \leqslant x \leqslant ۱)$$

صادق است .

۳۷۲۹ – مطلوبست $F''_{xy}(x, y)$ اگر

$$F(x, y) = \int_{\frac{x}{y}}^{xy} (x - yz) f(z)\, dz$$

که در آن $f(z)$ تابعی است دیفرانسیل‌پذیر .

۳۷۳۰ – فرض کنیم تابع $f(x)$ دو بار دیفرانسیل‌پذیر و $F(x)$ تابع دیفرانسیل‌پذیر باشد .

ثابت کنید که تابع

$$u(x, t) = \frac{۱}{۲}[f(x - at) + f(x + at)] + \frac{۱}{۲a} \int_{x-at}^{x+at} F(z)\, dz$$

در معادلهٔ ارتعاش تار

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲} = a^۲ \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$$

و شرایط اولیهٔ $u'_t(x, ۰) = F(x)$ و $u(x, ۰) = f(x)$ صدق میکند.

۳۷۳۱ – نشان دهید که اگر تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $[۰, l]$ پیوسته باشد و $(x-\xi)^۲ + y^۲ + z^۲ \neq ۰$ بازای $۰ \leqslant \xi \leqslant l$ در اینصورت تابع

$$u(x, y, z) = \int_{۰}^{l} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^۲ + y^۲ + z^۲}}$$

در معادلهٔ لاپلاس

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}=۰$$

صدق میکند .

با مشتق گیری نسبت به پارامتر ، انتگرال‌های زیر را حساب کنید :

۳۷۳۲ –
$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \ln (a^۲ \sin^۲ x + b^۲ \cos^۲ x)\, dx$$

۳۷۳۳ –
$$\int_۰^{\pi} \ln (۱ - ۲a \cos x + a^۲)\, dx$$

۳۷۳٤ –
$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\operatorname{arc\,tg}\,(a\,\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx$$

۳۷۳٥ –
$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \ln \frac{۱+a\cos x}{۱-a\cos x} \times \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < ۱)$$

۳۷۳٦ – با کاربرد دستور

$$\frac{\operatorname{arc\,tg}\, x}{x} = \int_۰^{۱} \frac{dy}{۱+x^۲y^۲}$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int_۰^{۱} \frac{\operatorname{arc\,tg}\, x}{x} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

۳۷۳۷ – با استفاده از انتگرال گیری زیر علامت انتگرال ، مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int_۰^{۱} \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx \quad (a > ۰,\ b > ۰)$$

۳۷۳۸ – انتگرالهای :

الف)
$$\int_۰^{۱} \sin\left(\ln \frac{۱}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx$$

ب)
$$\int_۰^{۱} \cos\left(\ln \frac{۱}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx \quad (a > ۰,\ b > ۰)$$

را حساب کنید .

۳۷۳۹ - فرض کنیم $E(k)$ و $F(k)$ انتگرالهای الیپتیک کامل (مساله **۳۷۲۵** را ببینید) باشد. مطلوبست اثبات دستورهای

الف) $$\int_{۰}^{k} F(k)\,k\,dk = E(k) - k_{۱}^{۲}F(k)$$

ب) $$\int_{۰}^{k} E(k)\,k\,dk = \frac{۱}{۳}\left[(۱+k^{۲})\,E(k) - k_{۱}^{۲}F(k)\right]$$

که در آن $k_{۱}^{۲} = ۱ - k^{۲}$.

۳۷۴۰ - مطلوبست اثبات دستور

$$\int_{۰}^{x} xJ_{۰}(x)\,dx = xJ_{۱}(x)$$

که در آن $J_{۰}(x)$ و $J_{۱}(x)$ توابع بسل بازای اندیسهای ۰ و ۱ میباشند. (مسئله **۳۷۲۶** را ببینید).

بخش ۲ — انتگرالهای ناویژهٔ وابسته به پارامتر. همگرایی یکنواخت انتگرالها

بند ۱ — تعریف همگرائی یکنواخت. انتگرال ناویژهٔ

$$\int_{a}^{+\infty} f(x,\,y)\,dx \qquad (۱)$$

را که در آن $f(x,\,y)$ در حوزهٔ $a \leqslant a < +\infty,\ y_{۱} < y < y_{۲}$ پیوسته میباشد در فاصلهٔ $(y_{۱},\,y_{۲})$ وقتی پیوستهٔ یکنواخت نامند که بازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند $B = B(\varepsilon)$ وجود داشته باشد بطوری که برای هر $b \geqslant B$ داشته باشیم:

$$\left|\int_{b}^{+\infty} f(x,\,y)\,dx\right| < \varepsilon \quad (y_{۱} < y < y_{۲})$$

همگرایی یکنواخت انتگرال (۱) هم ارز همگرایی یکنواخت جمع سریهای بشکل

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+۱}} f(x,\,y)\,dx$$

میباشد،

که در آن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ و $a = a_{۰} < a_{۱} < a_{۲} < \ldots < a_n < a_{n+۱} < \ldots$

اگر انتگرال (۱) در فاصلهٔ $(y_۱, y_۲)$ بطور یکنواخت همگرا باشد در آنصورت تابع پیوسته‌ای از پارامتر y در این فاصله میباشد

بند ۲ — آزمون (معیار) کوشی. برای همگرایی یکنواخت انتگرال (۱) در فاصلهٔ $(y_۱, y_۲)$ لازم و کافی است که بازای $\varepsilon > ٠$ دلخواه عدد $B = B(\varepsilon)$ وجود داشته باشد چنان که

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon \quad \text{بازای} \quad y_۱ < y < y_۲$$

اگر $b'' > B,\ b' > B$.

بند ۳ — آزمون ویرشتراس. برای همگرایی یکنواخت انتگرال (۱) کافی است که تابع مآژوران $F(x)$ مستقل از پارامتر y وجود داشته باشد بطوریکه

۱) $|f(x, y)| \leqslant F(x)$ بازای $a \leqslant x \leqslant +\infty$

و

۲) $\int_{a}^{+\infty} F(x)\, dx < +\infty$

بند ٤ — قضایای مشابهی برای انتگرالهای ناویژه از توابع ناپیوسته وجود دارند.

مطلوبست تعیین حوزهٔ همگرایی انتگرالهای زیر:

۳۷٤۱ — $\int_{٠}^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{۱ + x^۲}\, dx$

۳۷٤٤ — $\int_{٠}^{۲} \frac{dx}{|\ln x|^p}$

۳۷٤۲ — $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q}\, dx$

۳۷٤٥ — $\int_{٠}^{۱} \frac{\cos \frac{۱}{۱ - x}}{\sqrt[n]{۱ - x^۲}}\, dx$

۳۷٤۳ — $\int_{٠}^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}\, dx$

۳۷٤٦ — $\int_{٠}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\, dx \quad (p > ٠)$

بکمک مقایسه با سری، همگرایی انتگرالهای زیر را بررسی کنید:

۳۷٤۷ — $\int_{٠}^{+\infty} \frac{\cos x}{x + a}\, dx$

۳۷٤۹ — $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[۳]{\sin^۲ x}}$

۳۷٤۸ — $\int_{٠}^{+\infty} \frac{x\, dx}{۱ + x^n \sin^۲ x} \quad (n > ٠)$

۳۷٥٠ — $\int_{٠}^{+\infty} \frac{\sin(x + x^۲)}{x^n}\, dx$

۳۷۵۱ – منظور از اینکه انتگرال

$$\int_{a}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx$$

در فاصلهٔ مفروض $(y_{۱},\ y_{۲})$ بطور غیر یکنواخت همگراست چیست ؟ آنرا با معنای مثبت فرمول‌بندی کنید .

۳۷۵۲ – ثابت کنید که هرگاه ۱) انتگرال

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

همگرا و ۲) تابع $\varphi(x,\ y)$ نسبت به x کراندار و یکنوا باشد آنگاه انتگرال

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x,\ y)\,dx$$

بطور یکنواخت همگراست (در حوزهٔ مربوطه) .

۳۷۵۳ – ثابت کنید که انتگرال همگرای یکنواخت

$$I=\int_{۱}^{+\infty} e^{-\frac{۱}{y^{۲}}\left(x-\frac{۱}{y}\right)^{۲}}dx \quad (۰<y<۱)$$

را نمیتوان با انتگرال همگرای مستقل از پارامتر ماژوره کرد .

۳۷۵٤ – نشان دهید که انتگرال

$$I=\int_{۰}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\,dx$$

۱) در فاصلهٔ دلخواه $۰<a\leqslant\alpha\leqslant b$ بطور یکنواخت همگراست و ۲) در فاصلهٔ $۰\leqslant\alpha\leqslant b$ بطور غیر یکنواخت همگراست .

۳۷۵۵ – ثابت کنید که انتگرال دیریکله

$$I=\int_{۰}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$$

۱) روی هر قطعهٔ $[a,\ b]$ که شامل مقدار $\alpha=۰$ نباشد بطور یکنواخت همگراست و ۲) روی هر قطعهٔ $[a,\ b]$ که شامل مقدار $\alpha=۰$ باشد بطور غیر یکنواخت همگراست .

۳۷۵۵٫۱ – همگرایی یکنواخت انتگرال

$$\int\limits_{۱}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

را در فواصل زیر بررسی کنید : لف) $۱<\alpha_{۰}\leqslant\alpha+\infty$ ؛ ب) $۱<\alpha<+\infty$

۳۷۵۵٫۲ – همگرایی یکنواخت انتکرال زیر را بازای $۰<\alpha<۱$ بررسی کنید :

$$\int\limits_{۰}^{۱} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

۳۷۵۵٫۳ – نشان دهید که انتگرال

$$\int\limits_{۰}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}+۱}$$

فاصلهٔ $۱<\alpha<+\infty$ همگرای نایکنواخت است .

انتگرالهای زیر را در فاصلهٔ ذکرشده بررسی کنید :

۳۷۵۶ – $\int\limits_{۰}^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx \quad (۰<\alpha_{۰}\leqslant\alpha<+\infty)$

۳۷۵۷ – $\int\limits_{۱}^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}\,dx \quad (a\leqslant\alpha\leqslant b)$

۳۷۵۸ – $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{۱+x^{۲}}\,dx \quad (-\infty<\alpha<+\infty)$

۳۷۵۹ – $\int\limits_{۰}^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^{۲}+۱} \quad (۰\leqslant\alpha<+\infty)$

۳۷۶۰ – $\int\limits_{۰}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}\,dx \quad (۰\leqslant\alpha<+\infty)$

۳۷۶۰٫۱ – $\int\limits_{۱}^{\infty} \frac{\ln^{p} x}{x\sqrt{x}}\,dx \quad (۰\leqslant p\leqslant ۱۰)$

۳۷۶۱ – $\int_{۱}^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^{p}}\, dx \quad (۰ \leqslant \alpha < +\infty)$

که در آن $p > ۰$ ثابت است.

۳۷۶۲ – $\int_{۰}^{+\infty} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^{۲}}\, dx \quad (۰ \leqslant \alpha < +\infty)$

۳۷۶۳ – $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^{۲}}\, dx$

الف) $a < \alpha < b$ ؛ ب) $-\infty < \alpha < +\infty$

۳۷٦٤ – $\int_{۰}^{+\infty} e^{-x^{۲}(۱+y^{۲})} \sin x\, dy \quad (-\infty < x < +\infty)$

۳۷۶ – $\int_{۰}^{+\infty} \frac{\sin x^{۲}}{۱+x^{p}}\, dx \quad (p \geqslant ۰)$

۳۷٦٥,۱ – عدد $b > ۰$ را طوری انتخاب کنید که

$$۰ < \int_{b}^{+\infty} \frac{dx}{۱+x^{n}} < \varepsilon \quad \text{بازای} \quad ۱,۱ \leqslant n \leqslant ۱۰$$

که در آن $\varepsilon = ۱۰^{-٦}$

۳۷٦٦ – $\int_{۰}^{۱} x^{p-۱} \ln^{q} \frac{۱}{x}\, dx$

الف) $p \geqslant p_{۰} > ۰$ ؛ ب) $p > ۰$ $(q > -۱)$

۳۷٦۷ – $\int_{۰}^{۱} \frac{x^{n}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\, dx \quad (۰ \leqslant n < +\infty)$

۳۷٦۸ – $\int_{۰}^{۱} \sin\frac{۱}{x} \times \frac{dx}{x^{n}} \quad (۰ < n < ۲)$

۳۷٦۹ – $\int_{۰}^{۲} \frac{x^{\alpha}\, dx}{\sqrt[۳]{(x-۱)(x-۲)^{۲}}} \quad \left(|\alpha| < \frac{۱}{۲}\right)$

۳۷۷۰ – $$\int_{۰}^{۱} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} \quad (۰ \leqslant \alpha \leqslant ۱)$$

۳۷۷۱ – انتگرالی را بازای مقدار مفروضی از پارامتر، همگرای یکنواخت نامند اگر در یک همسایگی این مقدار ، همگرای یکنواخت باشد . ثابت کنید که انتگرال

$$I = \int_{۰}^{+\infty} \frac{\alpha\, dx}{۱ + a^{۲}x^{۲}}$$

بازای هر مقدار $\alpha \neq ۰$ همگرای یکنواخت است و بازای $\alpha = ۰$ همگرای یکنواخت نیست .

۳۷۷۲ – آیا در عبارت زیر انتقال علامت حد بزیر علامت انتگرال معتبر است :

$$\lim_{\alpha \to +۰} \int_{۰}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx$$

۳۷۷۳ – تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $(۰, +\infty)$ انتگرال‌پذیر است . مطلوبست اثبات دستور

$$\lim_{\alpha \to +۰} \int_{۰}^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\, dx = \int_{۰}^{+\infty} f(x)\, dx$$

۳۷۷۳,۱ – ثابت کنید که هرگاه $f'(x)$ بطور مطلق روی $[a, +\infty[$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ وجود دارد .

۳۷۷۴ – اگر $f(x)$ بطور مطلق در فاصلهٔ $(۰, +\infty)$ انتگرال‌پذیر باشد ثابت کنید که

$$\lim_{n \to \infty} \int_{۰}^{+\infty} f(x) \sin nx\, dx = ۰$$

۳۷۷۵ – ثابت کنید که هر گاه ۱) در هر فاصلهٔ متناهی (a, b) ، $f(x, y) \rightrightarrows f(x, y_{۰})$ ؛ ۲) $|f(x, y)| \leqslant F(x)$ که در آن $\int_{a}^{+\infty} F(x)\, dx < +\infty$ آنگاه

$$\lim_{y \to y_{۰}} \int_{a}^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int_{a}^{+\infty} \lim_{y \to y_{۰}} f(x, y)\, dx$$

۳۷۷۶ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int_{۰}^{+\infty} e^{-x^{۲}}\,dx = \int_{۰}^{+\infty} \lim_{n\to\infty}\left[\left(۱+\frac{x^{۲}}{n}\right)^{-n}\right]dx$$

با استفاده از حدگیری زیر علامت انتگرال.

۳۷۷۶,۱ – فرض کنیم $f(x)$ روی $]۰, +\infty[$ پیوسته و کراندار باشد. ثابت کنید که

$$\lim_{y\to ۰} \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^{۲}+y^{۲}}\,dx = f(۰)$$

۳۷۷۶,۲ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{۰}^{\infty}\frac{dx}{x^{n}+۱}$$

۳۷۷۷ – ثابت کنید که انتگرال

$$F(a)=\int_{۰}^{+\infty} e^{-(x-a)^{۲}}\,dx$$

تابع پیوسته‌ایست از پارامتر a.

۳۷۷۷,۱ – نشان دهید که

$$F(\alpha)=\int_{۰}^{۱}\frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^{\alpha}}\,dx$$

در فاصلهٔ $۰<\alpha<۱$ تابع ایست پیوسته.

۳۷۷۸ – مطلوبست تعیین نقاط انفصال تابع

$$F(a)=\int_{۰}^{+\infty}\frac{\sin(۱-a^{۲})\,x}{x}\,dx$$

نمودار تابع $y=F(a)$ را رسم کنید.

توابع زیر را در فواصل داده‌شده از لحاظ پیوستگی بررسی کنید:

۳۷۷۹ – $F(\alpha)=\int_{۰}^{+\infty}\frac{x\,dx}{۲+x^{\alpha}}$ بازای $\alpha>۲$

۳۷۸۰ – $F(\alpha)=\int_{۱}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,dx$ بازای $\alpha>۰$

۳۷۸۱ – $F(\alpha)=\int_{۰}^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\,dx$ بازای $۰<\alpha<۲$

۳۷۸۲ – $F(\alpha)=\int_{۰}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}\,dx$ بازای $۰<\alpha<۱$

۳۷۸۳ – $F(\alpha)=\int_{۰}^{+\infty}\alpha e^{-x\alpha^{۲}}\,dx$ بازای $-\infty<\alpha<+\infty$

بخش ۳ – مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری انتگرالهای ناویژه زیر علامت انتگرال

بند ۱ – مشتق‌گیری نسبت به پارامتر. هرگاه ۱) تابع $f(x, y)$ و مشتقش $f'_{y}(x, y)$ در حوزهٔ $y_{۱}<y<y_{۲}$ و $a\leqslant x<+\infty$ پیوسته؛ ۲) $\int_{a}^{+\infty} f(x, y)\,dx$ همگرا؛ ۳) $\int_{a}^{+\infty} f'_{y}(x, y)\,dx$ در فاصلهٔ $(y_{۱}, y_{۲})$ همگرای یکنواخت باشد آنگاه بازای $y_{۱}<y<y_{۲}$:

$$\frac{d}{dy}\int_{a}^{+\infty} f(x, y)\,dx=\int_{a}^{+\infty} f'_{y}(x, y)\,dx$$

(قاعدهٔ لاینیتز).

بند ۲ – دستور انتگرال‌گیری نسبت به پارامتر. هرگاه ۱) تابع $f(x, y)$ بازای $y_{۱}\leqslant y\leqslant y_{۲}$ و $x\geqslant a$ پیوسته؛ ۲) $\int_{a}^{+\infty} f(x, y)\,dx$ در قطعهٔ متناهی $[y_{۱}, y_{۲}]$ همگرای یکنواخت باشد، آنگاه

$$\int_{y_{۱}}^{y_{۲}} dy\int_{a}^{+\infty} f(x, y)\,dx=\int_{a}^{+\infty} dx\int_{y_{۱}}^{y_{۲}} f(x, y)\,dy \qquad (۱)$$

اگر $f(x, y)\geqslant ۰$ در اینصورت دستور (۱) برای فاصلهٔ نامتناهی $(y_{۱}, y_{۲})$ بفرض آنکه انتگرالهای داخلی تساوی (۱) پیوسته و یکی از طرفین تساوی (۱) دارای معنی باشد، نیز درست است.

۳۷۸٤ – با استفاده از دستور

$$\int_{۰}^{۱} x^{n-۱}\,dx = \frac{۱}{n} \quad (n > ۰)$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$I = \int_{۰}^{۱} x^{n-۱} \ln^{m} x\,dx$$

که در آن m عددیست طبیعی .

۳۷۸۵ – با استفاده از دستور

$$\int_{۰}^{+\infty} \frac{dx}{x^{۲}+a} = \frac{\pi}{۲\sqrt{a}} \quad (a > ۰)$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$I = \int_{۰}^{+\infty} \frac{dx}{(x^{۲}+a)^{n+۱}}$$

که در آن n عددیست طبیعی .

۳۷۸٦ – ثابت کنید که انتگرال دیریکله

$$I(\alpha) = \int_{۰}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$$

بازای $\alpha \neq ۰$ دارای مشتق است لیکن نمیتوان این مشتق را با قاعدهٔ لایبنیتز محاسبه نمود .

راهنمایی – فرض کنید $\alpha x = y$.

۳۷۸۷ – نشان دهید که تابع

$$F(\alpha) = \int_{۰}^{+\infty} \frac{\cos x}{۱+(x+\alpha)^{۲}}\,dx$$

در حوزهٔ $-\infty < \alpha < +\infty$ پیوسته و دیفرانسیل‌پذیر است .

۳۷۸۸ – از روی تساوی

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = \int_{a}^{b} e^{-xy}\,dy$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int_{۰}^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx \quad (a>۰,\ b>۰)$$

۳۷۸۹ – مطلوبست اثبات دستور فرولانی

$$\int_{۰}^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} = f(۰)\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (a>۰,\ b>۰)$$

که در آن $f(x)$ تابعی است پیوسته و انتگرال $\int_{A}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ بازای $A>۰$ دلخواه دارای معنی میباشد.

با استفاده از دستور فرولانی مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

۳۷۹۰ – $$\int_{۰}^{+\infty} \frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,dx \quad (b>۰ \ ،\ a>۰)$$

۳۷۹۱ – $$\int_{۰}^{+\infty} \frac{\sin ax-\sin bx}{x}\,dx \quad (a>۰,\ b>۰)$$

۳۷۹۲ – $$\int_{۰}^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} ax-\operatorname{arc\,tg} bx}{x}\,dx \quad (a>۰,\ b>۰)$$

بکمک مشتق گیری نسبت به پارامتر، انتگرال‌های زیر را حساب کنید:

۳۷۹۳ – $$\int_{۰}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^{۲}}-e^{-\beta x^{۲}}}{x}\,dx \quad (\alpha>۰,\ \beta>۰)$$

۳۷۹۴ – $$\int_{۰}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^{۲}dx \quad (\alpha>۰,\ \beta>۰)$$

۳۷۹۵ – $$\int_{۰}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx \quad (\alpha>۰,\ \beta>۰)$$

۳۷۹۶ – $$\int_{۰}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos mx\,dx \quad (\alpha>۰,\ \beta>۰)$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۳۷۹۷ − $\int\limits_{٠}^{۱} \frac{\ln(۱-\alpha^۲x^۲)}{x^۲\sqrt{۱-x^۲}}\,dx \quad |\alpha| \leqslant ۱)$

۳۷۹۸ − $\int\limits_{٠}^{۱} \frac{\ln(۱-\alpha^۲x^۲)}{\sqrt{۱-x^۲}}\,dx \quad (|\alpha| \leqslant ۱)$

۳۷۹۹ − $\int\limits_{۱}^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} \alpha x}{x^۲\sqrt{x^۲-۱}}\,dx$

۳۸۰۰ − $\int\limits_{٠}^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^۲+x^۲)}{\beta^۲+x^۲}\,dx$

۳۸۰۱ − $\int\limits_{٠}^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg}\alpha x \operatorname{arc\,tg}\beta x}{x^۲}\,dx$

۳۸۰۲ − $\int\limits_{٠}^{+\infty} \frac{\ln(۱+\alpha^۲x^۲)\ln(۱+\beta^۲x^۲)}{x^۴}\,dx$

۳۸۰۳ − مطلوبست محاسبهٔ انتگرال اولر — پواسن

$$I = \int\limits_{٠}^{+\infty} e^{-x^۲}\,dx$$

از روی دستور

$$I^۲ = \int\limits_{٠}^{+\infty} e^{-x^۲}dx \int\limits_{٠}^{+\infty} xe^{-x^۲y^۲}\,dy$$

با کاربرد انتگرال اولر — پواسن مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۳۸۰۴ − $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^۲+۲bx+c)}\,dx \quad (a > ٠,\ ac - b^۲ > ٠)$

۳۸۰۵ − $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (a_۱a^۲ + ۲b_۱x + c_۱)\,e^{-(ax^۲+۲bx+c)}\,dx \quad (a>٠,\ ac-b^۲>٠)$

۳۸۰۶ − $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^۲} \operatorname{ch} bx\,dx \quad (a > ٠)$

۳۸۰۷ − $\int\limits_{٠}^{+\infty} e^{-\left(x^۲+\frac{a^۲}{x^۲}\right)}\,dx \quad (a > ٠)$

۳۸۰۸ – $\int\limits_{۰}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^{۲}}-e^{-\beta x^{۲}}}{x^{۲}}\,dx \quad (\alpha > ۰,\ \beta > ۰)$

۳۸۰۹ – $\int\limits_{۰}^{+\infty} e^{-ax^{۲}} \cos bx\,dx \quad (a > ۰)$

۳۸۱۰ – $\int\limits_{۰}^{+\infty} xe^{-ax^{۲}} \sin bx\,dx \quad (a > ۰)$

۳۸۱۱ – $\int\limits_{۰}^{+\infty} x^{۲n}e^{-x^{۲}} \cos ۲bx\,dx$ (n عددیست طبیعی) .

۳۸۱۱,۱ – ثابت کنید که

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} \int\limits_{-\delta}^{+\delta} e^{-axt^{۲}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > ۰,\ \delta > ۰)$$

۳۸۱۲ – از روی انتگرال

$$I(\alpha) = \int\limits_{۰}^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\,dx \quad (\alpha \geqslant ۰)$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرال دیریکله

$$D(\beta) = \int\limits_{۰}^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x}\,dx$$

۳۸۱۲,۱ – نمودار تقریبی انتگرال سینوسی

$$y = Si\,x$$

که در آن

$$Si\,x = \int\limits_{۰}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

چیست ؟

با استفاده از انتگرالهای دیریکله و فرولانی انتگرالهای زیر را حساب کنید :

۳۸۱۳ – $\int\limits_{۰}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^{۲}}-\cos \beta x}{x^{۲}}\,dx \quad (\alpha > ۰)$

۳۸۱۴ – $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x}\, dx$

۳۸۱۵ – $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\, dx$

۳۸۱۶ – $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^{3} \alpha x}{x}\, dx$

۳۸۱۷ – $\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^{2} dx$

۳۸۱۸ – $\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^{3} dx$

۳۸۱۹ – $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^{4} x}{x^{2}}\, dx$

۳۸۲۰ – $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^{4} \alpha x - \sin^{4} \beta x}{x}\, dx$

۳۸۲۱ – $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x^{2}}{x}\, dx$

۳۸۲۲ – $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^{2}} \quad (k \geqslant 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0)$

۳۸۲۳ – مطلوبست محاسبهٔ عامل ناپیوسته دیریکله

$$D(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \sin \lambda \cos \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda}$$

بازای مقادیر مختلف x . نمودار تابع $y = D(x)$ را رسم کنید .

۳۸۲۴ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرلهای :

الف) $\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b}\, dx$ ؛ ب) $\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x+b}\, dx$

۳۸۲۵ – با استفاده از دستور

$$\frac{1}{1+x^{2}} = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-y(1+x^{2})}\, dy$$

انتگرال لاپلاس

$$L = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^{2}}\, dx$$

را محاسبه کنید .

۳۸۲۶ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$L_۱ = \int_۰^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{۱ + x^۲}\, dx$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۳۸۲۷ – $$\int_۰^{+\infty} \frac{\sin^۲ x}{۱ + x^۲}\, dx$$

۳۸۲۸ – $$\int_۰^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(۱ + x^۲)^۲}\, dx$$

۳۸۲۹ – $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{ax^۲ + ۲bx + c}\, dx \quad (a > ۰,\ ac - b^۲ > ۰)$$

۳۸۳۰ – با استفاده از دستور

$$\frac{۱}{\sqrt{x}} = \frac{۲}{\sqrt{\pi}} \int_۰^{+\infty} e^{-xy^۲}\, dy \quad (x > ۰)$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای فرنل

$$\int_۰^{+\infty} \sin (x^۲)\, dx = \frac{۱}{۲} \int_۰^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$$

و

$$\int_۰^{+\infty} \cos (x^۲)\, dx = \frac{۱}{۲} \int_۰^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$$

مطلوبست محاسبهٔ مقدار انتگرالهای زیر :

۳۸۳۱ – $$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin (ax^۲ + ۲bx + c)\, dx \quad (a \neq ۰)$$

۳۸۳۲ – $$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^۲ \times \cos ۲ax\, dx$$

۳۸۳۳ – $$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^۲ \times \cos ۲ax\, dx$$

۳۸۳٤ – مطلوبست اثبات دستورهای :

۱) $$\int_۰^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^۲ - x^۲}\, dx = \frac{\pi}{۲a} \sin a\alpha$$

۲) $$\int_{۰}^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{a^{۲}-x^{۲}}\,dx = -\frac{\pi}{۲}\cos a\alpha$$

که در آن $a \neq ۰$ و انتگرالها در معنای مقدار اصلی کوشی دارای مفهومند .

۳۸۳۵ – مطلوبست تبدیل لاپلاس

$$F(p) = \int_{۰}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt \quad (p > ۰)$$

برای تابع $f(t)$ اگر :

الف) $f(t) = t^{n}$ (n عددیست طبیعی)

ب) $f(t) = \sqrt{t}$ ؛

پ) $f(t) = e^{-\alpha t}$ ؛

ت) $f(t) = te^{-\alpha t}$ ؛

ث) $f(t) = \cos t$

ج) $f(t) = \frac{۱ - e^{-t}}{t}$

چ) $x(t) = \sin \alpha \sqrt{t}$

۳۸۳۶ – مطلوبست اثبات دستور (انتگرال لیپشیتز)

$$\int_{۰}^{+\infty} e^{-at} J_{۰}(bt)\,dt = \frac{۱}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}} \quad (a > ۰)$$

که در آن $J_{۰}(x) = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi} \cos(x \sin \varphi)\,d\varphi$ تابع بسل بازای اندیس صفر (مسألهٔ ۳۷۲۶ را ببینید) میباشد .

۳۸۳۷ – مطلوبست تبدیل ویرشتراس

$$F(x) = \frac{۱}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^{۲}} f(y)\,dy$$

اگر :

الف) $f(y) = ۱$ ؛

ب) $f(y) = y^{۲}$ ؛

پ) $f(y) = e^{۲ay}$

ت) $f(y) = \cos ay$

۳۸۳۸ – چندجمله‌ای‌های چبیشف — هرمیت از دستور

$$H_{n}(x) = (-۱)^{n} e^{x^{۲}} \frac{d^{n}}{dx^{n}} (e^{-x^{۲}}) \quad (n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$$

تعیین میشود . ثابت کنید که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\, H_n(x)\, e^{-x^{۲}} dx = \begin{cases} ۰, & m \neq n \quad \text{اگر} \\ ۲^n n!\sqrt{\pi}, & m = n \quad \text{اگر} \end{cases}$$

۳۸۳۹ – انتگرال

$$\varphi(x) = \frac{۱}{۲\pi\sigma_۱\sigma_۲} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{۱}{۲}\left[\frac{\xi^{۲}}{\sigma_۱^{۲}} + \frac{(x-\xi)^{۲}}{\sigma_۲^{۲}}\right]} d\xi \quad (\sigma_۱ > ۰,\ \sigma_۲ > ۰)$$

را که در نظریهٔ احتمالات حائز اهمیت زیادی است محاسبه کنید.

۳۸٤۰ – فرض کنیم تابع $f(x)$ بطور مطلق روی فاصلهٔ $(-\infty, +\infty)$ انتگرال‌پذیر باشد.

ثابت کنید که انتگرال

$$u(x, t) = \frac{۱}{۲a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(\xi - x)^{۲}}{٤a^{۲}t}} d\xi$$

در معادلهٔ انتقال حرارت

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{۱}{a^{۲}} \frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}}$$

و شرط اولیهٔ

$$\lim_{t \to +۰} u(x, t) = f(x)$$

صادق است.

بخش ٤ – انتگرالهای اولری

بند ۱ – تابع گاما. بازای $x > ۰$ دارم:

$$\Gamma(x) = \int_{۰}^{+\infty} t^{x-۱} e^{-t} dt$$

ویژگی اساسی تابع گاما با دستور کاهشی

$$\Gamma(x + ۱) = x\Gamma(x)$$

بیان میشود.

اگر n عدد درست مثبتی باشد در آنصورت

$$\Gamma(n) = (n - ۱)!; \quad \Gamma\left(n + \frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱ \times ۳ \ldots (۲n - ۱)}{۲^n} \sqrt{\pi}$$

بند ۲ — دستور تکمیلی . بازای عدد x نادرست داریم :

$$\Gamma(x)\,\Gamma(۱-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}$$

این دستور تعیین گاما را برای مقادیر منفی آرگومان ممکن میسازد .

بند ۳ — تابع بتا . بازای $x>۰,\ y>۰$ داریم :

$$B(x,\,y)=\int_۰^۱ t^{x-۱}(۱-t)^{y-۱}\,dt$$

دستور

$$B(x,\,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

درست است .

۳۸٤۱ — ثابت کنید که تابع گاما $\Gamma(x)$ در حوزهٔ $x>۰$ پیوسته و دارای مشتق‌های پیوسته از هر مرتبه است .

۳۸٤۲ — ثابت کنید که تابع بتا $B(x,\,y)$ در حوزهٔ $x>۰,\ y>۰$ پیوسته و دارای مشتقات پیوسته از هر مرتبه است .

بکمک انتگرالهای اولری ، انتگرالهای زیر را حساب کنید :

۳۸٤۳ — $\int_۰^۱ \sqrt{x-x^۲}\,dx$

۳۸٤٤ — $\int_۰^a x^۲\sqrt{a^۲-x^۲}\,dx\ \ (a>۰)$

۳۸٤۵ — $\int_۰^{+\infty} \frac{\sqrt[٤]{x}}{(۱+x)^۲}\,dx$

۳۸٤٦ — $\int_۰^{+\infty} \frac{dx}{۱+x^۳}$

۳۸٤۷ — $\int_۰^{+\infty} \frac{x^۲\,dx}{۱+x^٤}$

۳۸٤۸ — $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin^٦ x\times\cos^٤ x\,dx$

۳۸٤۹ — $\int_۰^۱ \frac{dx}{\sqrt[n]{۱-x^n}}\ \ (n>۱)$

۳۸۵۰ — $\int_۰^{+\infty} x^{۲n}e^{-x^۲}\,dx$

(n عدد درست مثبتی است).

حوزهٔ وجود انتگرالهای زیر را تعیین و آنها را بر حسب انتگرالهای اولری بیان کنید :

۳۸۵۱ - $\displaystyle\int_{۰}^{+\infty} \frac{x^{m-۱}}{۱+x^{n}}\,dx \quad (n>۰)$

۳۸۵۲ - $\displaystyle\int_{۰}^{+\infty} \frac{x^{m-۱}}{(۱+x)^{n}}\,dx$

۳۸۵۳ - $\displaystyle\int_{۰}^{+\infty} \frac{x^{m}\,dx}{(a+bx^{n})^{p}} \quad (a>۰,\ b>۰,\ n>۰)$

۳۸۵۴ - $\displaystyle\int_{a} \frac{(x-a)^{m}(b-x)^{n}}{(x+c)^{m+n+۲}}\,dx \quad (۰<a<b,\ c>۰)$

۳۸۵۵ - $\displaystyle\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{m}}} \quad (m>۰)$

۳۸۵۶ - $\displaystyle\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin^{m} x\cos^{n} x\,dx$

۳۸۵۷ - $\displaystyle\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \operatorname{tg}^{n} x\,dx$

۳۸۵۸ - $\displaystyle\int_{۰}^{\pi} \frac{\sin^{n-۱} x}{(۱+k\cos x)^{n}}\,dx$

۳۸۵۹ - $\displaystyle\int_{۰}^{+\infty} e^{-x^{n}}\,dx \quad (n>۰)$

۳۸۶۰ - $\displaystyle\int_{۰}^{+\infty} x^{m}e^{-x^{n}}\,dx$

۳۸۶۱ - $\displaystyle\int_{۰} \left(\ln\frac{۱}{x}\right)^{p} dx$

۳۸۶۲ - $\displaystyle\int_{۰}^{+\infty} x^{p}e^{-ax}\ln x\,dx\ (a>۰)$

۳۸۶۳ - $\displaystyle\int_{۰}^{+\infty} \frac{x^{p-۱}\ln x}{۱+x}\,dx$

۳۸۶۴ - $\displaystyle\int_{۰}^{+\infty} \frac{x^{p-۱}\ln^{۲} x}{۱+x}\,dx$

۳۸۶۴,۱ - $\displaystyle\int_{۰}^{\infty} \frac{x\ln x}{۱+x^{۳}}\,dx$

۳۸۶۴,۲ - $\displaystyle\int_{۰}^{\infty} \frac{\ln^{۲} x}{۱+x^{۴}}\,dx$

۳۸۶۵ - $\displaystyle\int_{۰}^{+\infty} \frac{x^{p-۱}-x^{q-۱}}{(۱+x)\ln x}\,dx$

۳۸۶۶ - $\displaystyle\int_{۰}^{۱} \frac{x^{p-۱}+x^{-p}}{۱-x}\,dx \quad (۰<p<۱)$

راهنمایی — این انتگرال را میتوانید بصورت

$$\lim_{\varepsilon\to+۰}\,[B(p,\varepsilon)-B(۱-p,\varepsilon)]$$

در نظر بگیرید .

۳۸۶۷ - $\int\limits_{۰}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \beta x}\, dx \quad (۰ < \alpha < \beta)$

۳۸۶۸ - $\int\limits_{۰}^{۱} \ln \Gamma(x)\, dx$

۳۸۶۹ - $\int\limits^{a+۱} \ln \Gamma(x)\, dx \quad (a > ۰)$

۳۸۷۰ - $\int\limits_{۰}^{۱} \ln \Gamma(x) \sin \pi x\, dx$

۳۸۷۱ - $\int\limits_{۰}^{۱} \ln \Gamma(x) \cos ۲n\pi\, x\, dx$

(n عددیست طبیعی) .

مساویهای زیر را ثابت کنید :

۳۸۷۲ - $\int\limits_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{۱ - x^{۴}}} \times \int\limits_{۰}^{۱} \frac{x^{۲}\, dx}{\sqrt{۱ - x^{۴}}} = \frac{\pi}{۴}$

۳۸۷۳ - $\int\limits_{۰}^{+\infty} e^{-x^{۴}}\, dx \times \int\limits_{۰}^{+\infty} x^{۲} e^{-x^{۴}}\, dx = \frac{\pi}{۸\sqrt{۲}}$

۳۸۷۴ - $\prod_{m=۱}^{n} \int\limits_{۰}^{+\infty} x^{m-۱} e^{-x^{n}}\, dx = \left(\frac{۱}{n}\right)^{n-\frac{۱}{۲}} (۲\pi)^{\frac{n-۱}{۲}}$

۳۸۷۵ - $\lim_{n \to \infty} \int\limits_{۰}^{+\infty} e^{-x^{n}}\, dx = ۱$

با استفاده از تساوی $\frac{۱}{x^{m}} = \frac{۱}{\Gamma(m)} \int\limits_{۰}^{+\infty} t^{m-۱} e^{-xt}\, dt$ $(x > ۰)$ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید :

۳۸۷۶ - $\int\limits_{۰}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^{m}}\, dx \quad (۰ < m < ۱)$

۳۸۷۷ - $\int\limits_{۰}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^{m}}\, dx \quad (۰ < m < ۲)$

۳۸۷۸ – مطلوبست اثبات دستورهای اولر :

الف) $$\int_{۰}^{+\infty} t^{x-۱} e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x$$

ب) $$\int_{۰}^{+\infty} t^{x-۱} e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x$$

$$\left(\lambda>۰,\quad x>۰,\quad -\frac{\pi}{۲}<\alpha<\frac{\pi}{۲}\right)$$

۳۸۷۹ – مطلوبست طول قوس منحنی

$r^n = a^n\cos n\varphi$ ($a>۰$ ، n عددیست طبیعی)

۳۸۸۰ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت محدود به منحنی

$$|x|^n+|y|^n=a^n \quad (n>۰,\ a>۰)$$

بخش ۵ – دستور انتگرالی فوریه

بند ۱ – نمایش تابع با انتگرال فوریه. اگر تابع $f(x)$ ۱) روی محور $-\infty<x<+\infty$ مفروض باشد، ۲) تابع و مشتقش $f'(x)$ در هر فاصلهٔ متناهی پیوستهٔ قطعه‌ای باشد و ۳) روی فاصلهٔ $(-\infty,+\infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد در اینصورت در هر نقطهٔ پیوستگی قابل نمایش بشکل انتگرال فوریه میباشد :

$$f(x) = \int_{۰}^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda \qquad (۱)$$

که در آن

$$a(\lambda) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi \quad و \quad b(\lambda) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi$$

در نقاط انفصال تابع $f(x)$ طرف چپ دستور (۱) را باید با $\frac{۱}{۲}[f(x+۰)+f(x-۰)$ عوض نمود.

برای تابع زوج $f(x)$ با همان ملاحظات نسبت به نقاط انفصال از دستور (۱) نتیجه میشود :

$$f(x) = \int_{۰}^{+\infty} a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda \qquad (۲)$$

که در آن

$$a(\lambda) = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi \, d\xi$$

بطرز مشابهی برای تابع فرد $f(x)$ نتیجه میشود :

$$f(x) = \int_{۰}^{+\infty} b(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda \qquad (۳)$$

که در آن

$$b(\lambda) = \frac{۲}{\pi} \int_{۰}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi \, d\xi$$

بند ۲ — نمایش تابع با انتگرال فوریه در فاصلهٔ $(۰, +\infty)$. تابع $f(x)$ مفروض در فاصلهٔ $(۰, +\infty)$ که خود و مشتقش $f'(x)$ در هر فاصلهٔ متناهی $(a, b) \subset (۰, +\infty)$ پیوستهٔ قطعه‌ای و مطلقاً انتگرال پذیر روی $(۰, +\infty)$ میباشد بدلخواه میتوان آنرا در فاصلهٔ مفروض یا با دستور (۲) (ادامهٔ زوج) یا با دستور (۳) (ادامهٔ فرد) نمایش داد .

توابع زیر را با انتگرال فوریه نمایش دهید :

۳۸۸۱ — $f(x) = \begin{cases} ۱, & |x| < ۱ \quad \text{اگر} \\ ۰, & |x| > ۱ \quad \text{اگر} \end{cases}$

۳۸۸۲ — $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| < ۱ \quad \text{اگر} \\ ۰ \ , & |x| > ۱ \quad \text{اگر} \end{cases}$

۳۸۸۳ — $f(x) = \operatorname{sgn}(x - a) - \operatorname{sgn}(x - b) \quad (b > a)$

۳۸۸۴ — $f(x) = \begin{cases} h\left(۱ - \frac{|x|}{a}\right), & |x| \leqslant a \quad \text{اگر} \\ ۰, & |x| > a \quad \text{اگر} \end{cases}$

۳۸۸۵ — $f(x) = \frac{۱}{a^۲ + x^۲} \quad (a > ۰)$

۳۸۸۶ — $f(x) = \frac{x}{a^۲ + x^۲} \quad (a > ۰)$

۳۸۸۷ — $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi \quad \text{اگر} \\ ۰ \ , & |x| > \pi \quad \text{اگر} \end{cases}$

۳۸۸۸ — $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{۲} \quad \text{اگر} \\ ۰, & |x| > \frac{\pi}{۲} \quad \text{اگر} \end{cases}$

۳۸۸۹ - $$f(t)=\begin{cases} A\sin\omega t & |t|\leqslant \frac{۲\pi n}{\omega} \quad \text{اگر} \\ ۰, & |t|>\frac{۲\pi n}{\omega} \quad \text{اگر} \end{cases}$$

(n عدديست طبيعى)

۳۸۹۰ - $f(x)=e^{-\alpha|x|}\quad(\alpha>۰)$

۳۸۹۱ - $f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x\quad(\alpha>۰)$

۳۸۹۲ - $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x\quad(\alpha>۰)$

۳۸۹۳ - $f(x)=e^{-x^۲}$ ۳۸۹٤ - $f(x)=xe^{-x^۲}$

۳۸۹۵ - تابع

$$f(x)=e^{-x}\quad(۰<x<+\infty)$$

را با انتگرال فوريه نمايش دهيد در صورتيکه آنرا الف) به ترتيب زوج ؛ ب) به ترتيب فرد ادامه دهيم .

مطلوبست تبديل فوريه

$$F(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-itx}\,dt$$

براى تابع $f(t)$ اگر :

۳۸۹٦ - $f(x)=e^{-\alpha|x|}\quad(\alpha>۰)$

۳۸۹۷ - $f(x)=xe^{-\alpha|x|}\quad(\alpha>۰)$

۳۸۹۸ - $f(x)=e^{-\frac{x^۲}{۲}}$ ۳۸۹۹ - $f(x)=e^{-\frac{x^۲}{۲}}\cos\alpha x$

۳۹۰۰ - مطلوبست توابع $\psi(x)$ و $\varphi(x)$ اگر :

الف) $$\int_{۰}^{+\infty}\varphi(y)\cos xy\,dy=\frac{۱}{۱+x^۲}$$

ب) $$\int_{۰}^{+\infty}\psi(y)\sin xy\,dy=e^{-x}\quad(x>۰)$$

فصل ۸

انتگرالهای چندگانه و منحنی الخط

بخش ۱ — انتگرال های دوگانه (دوبل)

بند ۱ — محاسبهٔ مستقیم انتگرال دوگانه. انتگرال دوگانهٔ تابع پیوستهٔ $f(x, y)$ گسترده روی حوزهٔ کراندار بستهٔ مربع‌پذیر (کواد رابل) Ω عبارتست از عدد

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,\ y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to ۰ \\ \max|\Delta y_j|\to ۰}} \sum_i \sum_j f(x_i,\ y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

که در آن $\Delta x_i = x_{i+۱} - x_i,\ \Delta y_j = y_{j+۱} - y_j$ و مجموع روی آن مقادیر i و j که بازای آنها $(x_i,\ y_j)\in\Omega$ ، گسترده است.

اگر حوزهٔ Ω با نامساویهای

$$a\leqslant x\leqslant \beta,\quad y_۱(x)\leqslant y\leqslant y_۲(x)$$

که در آن $y_۱(x),\ y_۲(x)$ توابع پیوسته‌ای روی قطعهٔ $[a,\ b]$ میباشند مشخص شده است در آن صورت انتگرال دوگانهٔ نظیر را از روی دستور

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_۱(x)}^{y_۲(x)} f(x,\ y)\,dy$$

میتوان محاسبه نمود.

بند ۲ — تعویض متغیرها در انتگرال دوگانه. اگر توابع پیوستهٔ دیفرانسیل‌پذیر

$$x = x(u,\ v)\quad y = y(u,\ v)$$

یک تصویر یک به یک (بی‌ژکتیو یا دوسوئی) حوزهٔ بسته و کراندار Ω از صفحهٔ Oxy را بر حوزهٔ Ω' در صفحهٔ Ouv بوجود آورند و ژاکوبین

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq ۰$$

در اینصورت دستور

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega'} f(x(u, v),\ y(u, v))\, |I|\, du\, dv$$

محقق است .

بویژه برای حالت گذر به مختصات قطبی r, φ بیاری دستورهای $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ داریم :

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

۳۹۰۱ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\iint\limits_{\substack{۰ \leqslant x \leqslant ۱ \\ ۰ \leqslant y \leqslant ۱}} xy\, dx\, dy$$

با در نظر گرفتن آن بصورت حد مجموع انتگرالی در صورتیکه حوزهٔ انتگرال گیری توسط خطوط مستقیم

$$x = \frac{i}{n}, \quad y = \frac{j}{n} \quad (i,\ j = ۱, ۲, \ldots, n - ۱)$$

به مربع ها تقسیم نموده و مقدار تابع تحت انتگرال را در رئوس سمت راست این مربع ها انتخاب نمائیم .

۳۹۰۲ – مجموع های انتگرالی پائین $\underline{S}$ و بالای $\overline{S}$ را برای تابع $f(x, y) = x^۲ + y^۲$ در حوزهٔ $۱ \leqslant x \leqslant ۲,\ ۱ \leqslant y \leqslant ۳$ با تقسیم حوزهٔ مذکور توسط خطوط مستقیم

$$x = ۱ + \frac{i}{n}, \quad y = \frac{۲j}{x} \quad (i,\ j = ۰, ۱, \ldots, n)$$

به مستطیل ها تشکیل دهید .

حد این مجموع ها بازای $n \to \infty$ چقدر است ؟

۳۹۰۳ – مطلوبست محاسبهٔ تقریبی انتگرال

$$\iint\limits_{x^۲ + y^۲ \leqslant ۲۵} \frac{dx\, dy}{\sqrt{۲۴ + x^۲ + y^۲}}$$

عمل تقریب حوزهٔ انتگرال‌گیری را بکمک دستگاه مربعهای محاطی که رئوسشان A_{ij} در نقاط متناظر اعداد درست واقع شده باشند انجام دهید و در ضمن مقادیر تابع زیر انتگرال را در رئوسی از این مربعها اختیار کنید که از مبدأ مختصات دورترین هستند. نتیجهٔ بدست آمده را با مقدار دقیق انتگرال مقایسه کنید.

۳۹۰۴ – مطلوبست محاسبهٔ تقریبی انتگرال

$$\iint\limits_S \sqrt{x+y}\,dS$$

که در آن S مثلث محدود به خطوط $x=۰,\ y=۰,\ x+y=۱$ است با تقسیم حوزهٔ S توسط خطوط $x=\text{const},\ y=\text{const},\ x+y=\text{const}$ به چهار مثلث متساوی و انتخاب مقادیر تابع زیر انتگرال در گرانیگاه این مثلث ها.

۳۹۰۵ – حوزهٔ $S\{x^۲+y^۲\leqslant ۱\}$ به تعداد متناهی اجزاء مربع‌پذیر ΔS_i $(i=۱,\ ۲,\ \ldots,\ n)$ به قطر کمتر از δ تقسیم شده است. بازای چه مقادیری از δ نامساوی

$$\left|\iint\limits_S \sin(x+y)dS-\sum_{i=۱}^{n}\sin(x_i+y_i)\,\Delta S_i\right|<۰,۰۰۱$$

که در آن $(x_i,\ y_i)\in\Delta S_i$ ، برقرار است؟

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

۳۹۰۶ – $\int\limits_۰^۱ dx\int\limits_۰^۱(x+y)\,dy$

۳۹۰۷ – $\int\limits_۰^۱ dx\int\limits_{x^۲}^{x} xy^۲\,dy$

۳۹۰۸ – $\int\limits_۰^{۲\pi} d\varphi\int\limits_۰^{a} r^۲\sin^۲\varphi\,dr$

۳۹۰۹ – مطلوبست اثبات تساوی

$$\int X(x)\,Y(y)\,dx\,dy=\int\limits_a^A X(x)\,dx\times\int\limits_b^B Y(y)\,dy$$

اگر R مستطیل باشد:

$$a\leqslant x\leqslant A,\quad b\leqslant y\leqslant B$$

۳۹۱۰ – مطلوبست محاسبهٔ

$$I=\int\limits_a^A dx\int\limits_b^B f(x,\ y)\,dy$$

اگر

$$f(x,\ y)=F''_{xy}(x,\ y)$$

۳۹۱۱ – فرض کنیم $f(x)$ تابع پیوسته در فاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ باشد . نامساوی

$$\left[\int_{a}^{b} f(x)\,dx\right]^{۲} \leqslant (b-a)\int_{a}^{b} f^{۲}(x)\,dx$$

را که در آن علامت تساوی فقط بازای $f(x) = \text{const}$ برقرار است ثابت کنید .

راهنمایی – انتگرال

$$\int_{a}^{b} dx \int_{a}^{b} [f(x) - f(y)]^{۲}\,dy$$

را در نظر بگیرید .

۳۹۱۲ – انتگرالهای زیر دارای چه علامتی هستند :

الف) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant ۱} \ln(x^{۲}+y^{۲})\,dx\,dy$ ب) $\iint\limits_{x^{۲}+y^{۲}\leqslant ٤} \sqrt[۳]{۱-x^{۲}-y^{۲}}\,dx\,dy$

پ) $\iint\limits_{\substack{۰\leqslant x\leqslant ۱\\ -۱\leqslant y\leqslant ۱-x}} \arcsin(x+y)\,dx\,dy$

۳۹۱۳ – مقدار میانگین تابع

$$f(x, y) = \sin^{۲} x \sin^{۲} y$$

را در مربع $۰ \leqslant x \leqslant \pi,\ ۰ \leqslant y \leqslant \pi$ پیدا کنید .

۳۹۱٤ – با استفاده از قضیهٔ میانگین ، مطلوبست برآورد انتگرال

$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant ۱۰} \frac{dx\,dy}{۱۰۰ + \cos^{۲} x + \cos^{۲} y}$$

۳۹۱۵ – مطلوبست محاسبهٔ مقدار میانگین مجذور فاصلهٔ نقاط دایرهٔ $(x-a)^{۲} + (y-b)^{۲} \leqslant R^{۲}$ از مبدا مختصات .

در مسائل ۳۹۱٦ – ۳۹۲۲ در انتگرال دوگانهٔ $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$ بازای حوزه‌های مشخص شدهٔ Ω ، حدود انتگرال‌گیری را بهر ترتیب بنویسید .

۳۹۱٦ – Ω مثلثی است برئوس $O(۰, ۰), A(۱, ۰), B(۱, ۱)$

۳۹۱۷ – Ω مثلثی است برئوس $O(۰, ۰), A(۲, ۱), B(-۲, ۱)$

۳۹۱۸ – Ω ذوزنقه‌ای است برئوس $O(۰, ۰), A(۱, ۰), B(۱, ۲), C(۰, ۱)$

۳۹۱۹ – Ω دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} \leqslant ۱$ است .

۳۹۲۰ – Ω دایرهٔ $x^۲ + y^۲ \leqslant y$ است .

۳۹۲۱ – Ω قطعهٔ سهمی‌گونهٔ محدود به منحنی‌های $y = ۱$ و $y = x^۲$ میباشد.

۳۹۲۲ – Ω حلقهٔ دایره‌ای $۱ \leqslant x^۲ + y^۲ \leqslant ٤$ میباشد .

۳۹۲۳ – مطلوبست اثبات دستور دیریکله

$$\int_{۰}^{a} dx \int_{۰}^{x} f(x, y)\, dx = \int_{۰}^{a} dy \int_{y}^{a} f(x, y)\, dx \quad (a > ۰)$$

در انتگرالهای زیر ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کنید :

۳۹۲٤ – $\int_{۰}^{۲} dx \int_{x}^{۲x} f(x, y)\, dy$

۳۹۲٥ – $\int_{-٦}^{۲} dx \int_{\frac{x^۲}{٤}-۱}^{۲-x} f(x, y)\, dy$

۳۹۲٦ – $\int_{۰}^{۱} dx \int_{x^۳}^{x^۲} f(x, y)\, dy$

۳۹۲۷ – $\int_{-۱}^{۱} dx \int_{-\sqrt{۱-x^۲}}^{۱-x^۲} f(x, y)\, dy$

۳۹۲۸ – $\int_{۱}^{۲} dx \int_{۲-x}^{\sqrt{۲x-x^۲}} f(x, y)\, dy$

۳۹۲۹ – $\int_{۰}^{۲a} dx \int_{\sqrt{۲ax-x^۲}}^{\sqrt{۲ax}} f(x, y)\, dy \quad (a > ۰)$

۳۹۳۰ – $\int_{۱}^{e} dx \int_{۰}^{\ln x} f(x, y)\, dy$

۳۹۳۱ – $\int_{۰}^{۲\pi} dx \int_{۰}^{\sin x} f(x, y)\, dy$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۳۹۳۲ – $\iint_{\Omega} xy^۲\, dx\, dy$ اگر حوزهٔ Ω محدود به سهمی $y^۲ = ۲px$ و خط $x = \frac{p}{۲}$ $(p > ۰)$ باشد .

۳۹۳۳ – $(a > ۰)$ $\iint_{\Omega} \frac{dx\, dy}{\sqrt{۲a - x}}$ اگر حوزهٔ Ω محدود به کمان کوتاه‌تر دایرهٔ به مرکز نقطهٔ (a, a) و شعاع a مماس بر محورها مختصات ، و به محورهای مختصات باشد .

۳۹۳٤ – $\iint_{\Omega} |xy|\, dx\, dy$ اگر Ω دایرهٔ بشعاع a و بمرکز مبدأ مختصات باشد .

۳۹۳۵ – $\iint\limits_{\Omega} (x^۲+y^۲)\,dx\,dy$ اگر Ω متوازی الاضلاع با اضلاع $y=x,$
$y=x+a,\ y=a,\ y=۳a\quad (a>۰)$ باشد .

۳۹۳۶ – $\iint\limits_{\Omega} y^۲\,dx\,dy$ اگر Ω محدود به محور طول‌ها و طاقنمای اول سیکلوئید

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(۱-\cos t)\quad (۰\leqslant t\leqslant ۲\pi)$$

باشد .

در انتگرال دوگانهٔ

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$$

با فرض $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi$ به مختصات قطبی $r,\ \varphi$ بگذرید و حدود انتگرال گیری را بنویسید در صورتیکه :

۳۹۳۷ – Ω دایرهٔ $x^۲+y^۲\leqslant a^۲$ باشد .

۳۹۳۸ Ω دایرهٔ $(a>۰)$ $x^۲+y^۲\leqslant ax$ باشد .

۳۹۳۹ – Ω حلقهٔ $a^۲\leqslant x^۲+y^۲\leqslant b^۲$ باشد .

۳۹۴۰ – Ω مثلث $۰\leqslant x\leqslant ۱;\ ۰\leqslant y\leqslant ۱-x$ باشد .

۳۹۴۱ – Ω قطعهٔ سهمی گونهٔ $-a\leqslant x\leqslant a,\ \dfrac{x^۲}{a}\leqslant y\leqslant a$ باشد .

۳۹۴۲ – در چه حالتی پس از گذر به مختصات قطبی حدود انتگرال گیری مقادیر ثابتی میشوند ؟

با فرض $x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi$ به مختصات قطبی $r,\ \varphi$ بگذرید و حدود انتگرال گیری را در انتگرالهای زیر به هر دو ترتیب بنویسید :

۳۹۴۳ – $\int_{۰}^{۱} dx \int_{۰}^{۱} f(x,y)\,dy$

۳۹۴۵ – $\int_{۰}^{۲} dx \int_{x}^{\sqrt{۳}} f\left(\sqrt{x^۲+y^۲}\right) dy$

۳۹۴۴ – $\int_{۰}^{۱} dx \int_{۱-x}^{\sqrt{۱-x^۲}} f(x,y)\,dy$

۳۹۴۶ – $\int_{۰}^{۱} dx \int_{۰}^{x^۲} f(x,y)\,dy$

۳۹۴۷ – $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ که در آن Ω حوزهٔ محدود به منحنی زیر میباشد :

$$(x^۲+y^۲)^۲=a^۲(x^۲-y^۲)\quad (x\geqslant ۰)$$

بفرض آنکه r, φ مختصات قطبی باشند ترتیب انتگرال گیری را در انتگرالهای زیر عوض کنید :

۳۹۴۸ – $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} d\varphi \int_{۰}^{a\cos\varphi} f(\varphi, r)\,dr \quad (a>۰)$

۳۹۴۹ – $\displaystyle\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} d\varphi \int_{۰}^{a\sqrt{\sin ۲\varphi}} f(\varphi, r)\,dr \quad (a>۰)$

۳۹۵۰ – $\displaystyle\int_{۰}^{a} d\varphi \int_{۰}^{\varphi} f(\varphi, r)\,dr \quad (۰<a<۲\pi)$

با گذر به مختصات قطبی انتگرال‌های دوگانهٔ زیر را به انتگرال‌های ساده بدل کنید :

۳۹۵۱ – $\displaystyle\iint_{x^۲+y^۲\leqslant ۱} f\left(\sqrt{x^۲+y^۲}\right) dx\,dy$

۳۹۵۲ – $\displaystyle\iint_{\Omega} f\left(\sqrt{x^۲+y^۲}\right) dx\,dy$ که در آن $\Omega=\{|y|\leqslant|x|;\ |x|\leqslant ۱\}$

۳۹۵۳ – $\displaystyle\iint_{x^۲+y^۲\leqslant x} f\left(\frac{y}{x}\right) dx\,dy$

با گذر به مختصات قطبی مطلوبست محاسبهٔ انتگرال‌های دوگانهٔ زیر :

۳۹۵۴ – $\displaystyle\iint_{x^۲+y^۲\leqslant a^۲} \sqrt{x^۲+y^۲}\,dx\,dy$

۳۹۵۵ – $\displaystyle\iint_{\pi^۲\leqslant x^۲+y^۲\leqslant ۴\pi^۲} \sin\sqrt{x^۲+y^۲}\,dx\,dy$

۳۹۵۶ – مربع $S\{a<x<a+h,\ b<y<b+h\},\ (a>۰,\ b>۰)$ بکمک دستگاه توابع

$$u=\frac{y^۲}{x}, \quad v=\sqrt{xy}$$

به حوزهٔ S' تبدیل میشود . نسبت مساحت حوزهٔ S' به حوزهٔ S را پیدا کنید . حد این نسبت بازای $h\to ۰$ چقدر است ؟

در انتگرالهای دوگانهٔ زیر بجای x, y متغیرهای جدید u, v را وارد نموده و حدود انتگرال‌گیری را بنویسید:

۳۹۵۷ - $\int_{a}^{b} dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\, dy \quad (۰<a<b, \quad ۰<\alpha<\beta)$

اگر

$$u = x, \quad v = \frac{y}{x}$$

۳۹۵۸ - $\int_{۰}^{۲} dx \int_{۱-x}^{۲-x} f(x, y)\, dy$

اگر

$$u = x + y, \quad v = x - y$$

۳۹۵۹ - $\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy$ که در آن Ω حوزه‌ای است محدود به منحنی‌های

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \; x = ۰, \; y = ۰ \quad (a > ۰)$ اگر

$$x = u \cos^{۴} v, \quad y = u \sin^{۴} v$$

۳۹۶۰ - نشان دهید که تعویض متغیرهای

$$x + y = \xi, \quad y = \xi\eta$$

مثلث $۰ \leqslant x \leqslant ۱, \; ۰ \leqslant y \leqslant ۱ - x$ را به مربع یکان $۰ \leqslant \xi \leqslant ۱, \; ۰ \leqslant \eta \leqslant ۱$ بدل میسازد.

۳۹۶۱ - بازای چه تعویض متغیرها، چهارضلعی منحنی‌الخط محدود به منحنی‌های
$xy = ۱, \; xy = ۲, \; x - y + ۱ = ۰, \; x - y - ۱ = ۰ \quad (x > ۰, \; y > ۰)$
به مستطیل به اضلاع موازی محورهای مختصات بدل میشود؟

با انجام تعویض مناسب متغیرها انتگرالهای دوگانهٔ زیر را به انتگرالهای ساده بدل کنید:

۳۹۶۲ - $\iint\limits_{|x| + |y| \leqslant ۱} f(x + y)\, dx\, dy$

۳۹۶۳ - $\iint\limits_{x^{۲} + y^{۲} \leqslant ۱} f(ax + by + c)\, dx\, dy \quad (a^{۲} + b^{۲} \neq ۰)$

۳۹۶۴ - $\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy$ که در آن Ω حوزه‌ای است محدود به منحنی‌های
$xy = ۱, \; xy = ۲, \; y = x, \; y = ۴x \quad (x > ۰, \; y > ۰)$.

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای دوگانهٔ زیر :

۳۹۶۵ – $\iint\limits_{\Omega} (x+y)\,dx\,dy$ که در آن Ω حوزه‌ای است محدود به منحنی

$$x^۲ + y^۲ = x + y$$

۳۹۶۶ – $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant ۱} (|x|+|y|)\,dx\,dy$

۳۹۶۷ – $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{۱ - \frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲}}\,dx\,dy$ که در آن Ω حوزه‌ای است محدود

به بیضی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$

۳۹۶۸ – $\iint\limits_{x^٤+y^٤\leqslant ۱} (x^۲+y^۲)\,dx\,dy$

۳۹۶۹ – $\iint\limits_{\Omega} (x+y)\,dx\,dy$ که در آن Ω حوزه‌ای است محدود به منحنی‌های

$$y^۲ = ۲x,\ \ x+y = ٤,\ \ x+y = ۱۲$$

۳۹۷۰ – $\iint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy$ که در آن Ω حوزه‌ای است محدود به منحنی‌های

$$xy = ۱,\ \ x+y = \frac{٥}{۲}\ .$$

۳۹۷۱ – $\iint\limits_{\substack{۰\leqslant x\leqslant \pi\\ ۰\leqslant y\leqslant \pi}} |\cos(x+y)|\,dx\,dy$

۳۹۷۲ – $\iint\limits_{x^۲+y^۲\leqslant ۱} \left|\frac{x+y}{\sqrt{۲}} - x^۲ - y^۲\right|\,dx\,dy$

۳۹۷۳ – $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant ۱\\ ۰\leqslant y\leqslant ۲}} \sqrt{|y-x^۲|}\,dx\,dy$

انتگرالهای توابع ناپیوستهٔ زیر را حساب کنید :

۳۹۷٤ – $\iint\limits_{x^۲+y^۲\leqslant ٤} \operatorname{sgn}(x^۲-y^۲+۲)\,dx\,dy$

۳۹۷٥ – $\iint\limits_{\substack{۰\leqslant x\leqslant ۲\\ ۰\leqslant y\leqslant ۲}} [x+y]\,dx\,dy$

۳۹۷٦ – $\iint\limits_{x^۲\leqslant y\leqslant ٤} \sqrt{[y-x^۲]}\,dx\,dy$

۳۹۷۷ – اگر m و n اعداد درست ثابت و حداقل یکی از آنها فرد باشد، ثابت کنید که

$$\iint\limits_{x^{۲}+y^{۲}\leqslant a^{۲}} x^m y^n \, dx\, dy = ۰$$

۳۹۷۸ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{\rho\to ۰} \frac{۱}{\pi\rho^{۲}} \iint\limits_{x^{۲}+y^{۲}\leqslant\rho^{۲}} f(x,\ y)\, dx\, dy$$

که در آن $f(x,\ y)$ تابعی است پیوسته.

۳۹۷۹ – مطلوبست $F'(t)$ اگر

$$F(t) = \iint\limits_{\substack{۰\leqslant x\leqslant t\\ ۰\leqslant y\leqslant t}} e^{\frac{tx}{y^{۲}}}\, dx\, dy$$

۳۹۸۰ – مطلوبست $F'(t)$ اگر

$$F(t) = \iint\limits_{(x-t)^{۲}+(y-t)^{۲}\leqslant ۱} \sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\, dx\, dy$$

۳۹۸۱ – مطلوبست $F'(t)$ اگر

$$F(t) = \iint\limits_{x^{۲}+y^{۲}\leqslant t^{۲}} f(x,\ y)\, dx\, dy \quad (t > ۰)$$

۳۹۸۲ – ثابت کنید که اگر $f(x,\ y)$ پیوسته باشد در اینصورت تابع

$$u(x,\ y) = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{x} d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\ \eta)\, d\eta$$

در معادلهٔ زیر صادق است:

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}} - \frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}} = f(x,\ y)$$

۳۹۸۳ – فرض کنیم منحنی‌های تراز تابع $f(x,\ y)$ سادهٔ بسته و حوزهٔ $S(v_{۱},\ v_{۲})$ محدود به منحنی‌های $f(x,\ y) = v_{۱},\ f(x,\ y) = v_{۲}$ باشد.

ثابت کنید که

$$\iint\limits_{S(v_۱, v_۲)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_{v_۱}^{v_۲} vF'(v)\,dv$$

که در آن $F(v)$ مساحت محدود به منحنی‌های $f(x, y) = v_۱,\ f(x, y) = v$ میباشد .

راهنمائی – حوزهٔ انتگرال گیری تابع $f(x, y)$ را به بخش‌های محدود به منحنی‌های تراز بی نهایت نزدیک بهم تقسیم کنید .

بخش ۲ – محاسبهٔ مساحات

مساحت حوزهٔ S واقع در صفحهٔ Oxy از دستور

$$S = \iint\limits_{S} dx\,dy$$

بدست میآید .

مطلوبست محاسبهٔ مساحت محدود به منحنی‌های زیر :

۳۴۸۴ – $xy = a^۲,\ x + y = \frac{۵}{۲}a \quad (a > ۰)$

۳۴۸۵ – $y^۲ = ۲px + p^۲,\ y^۲ = -۲qx + q^۲ \quad (p > ۰,\ q > ۰)$

۳۴۸۶ – $(x - y)^۲ + x^۲ = a^۲ \quad (a > ۰)$

با گذر به مختصات قطبی مطلوبست محاسبهٔ مساحت محدود به منحنی‌های زیر :

۳۴۸۷ – $(x^۲ + y^۲)^۲ = ۲a^۲(x^۲ - y^۲);\ x^۲ + y^۲ \geqslant a^۲$

۳۴۸۸ – $(x^۳ + y^۳)^۲ = x^۲ + y^۲,\ x \geqslant ۰,\ y \geqslant ۰$

۳۴۸۹ – $(x^۲ + y^۲)^۲ = a(x^۳ - ۳xy^۲) \quad (a > ۰)$

۳۴۹۰ – $(x^۲ + y^۲)^۲ = ۸a^۲xy;\ (x - a)^۲ + (y - a)^۲ \leqslant a^۲ \quad (a > ۰)$

با وارد کردن مختصات قطبی تعمیم یافته r, φ با دستورهای

$$x = ar\cos^{\alpha}\varphi, \quad y = br\sin^{\alpha}\varphi \quad (r \geqslant ۰)$$

که در آن a, b, α مقادیر ثابتی است که بطور مناسب انتخاب شده و $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \alpha abr\cos^{\alpha-۱}\varphi\sin^{\alpha-۱}\varphi$ مطلوبست مساحت محصور با منحنی‌های زیر (پارامترها مثبتند) :

۳۹۹۱ – $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$

۳۹۹۲ – $\frac{x^۳}{a^۳}+\frac{y^۳}{b^۳}=\frac{x^۲}{h^۲}+\frac{y^۲}{k^۲};\quad x=۰,\quad y=۰$

۳۹۹۳ – $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^٤=\frac{x^۲}{h^۲}+\frac{y^۲}{k^۲}\quad (x>۰,\ y>۰)$

۳۹۹٤ – $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^٤=\frac{x^۲}{h^۲}-\frac{y^۲}{k^۲}\quad (x>۰,\ y>۰)$

۳۹۹٤,۱ – $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^٥=\frac{x^۲y^۲}{c^٤}$

۳۹۹٥ – $\sqrt[٤]{\frac{x}{a}}+\sqrt[٤]{\frac{y}{b}}=۱;\quad x=۰,\quad y=۰$

با انجام تعویض مناسب متغیرها مطلوبست محاسبهٔ مساحت شکل‌های محصور با منحنی‌های زیر :

۳۹۹۶ – $x+y=a,\ x+y=b,\ y=\alpha x,\ y=\beta x\quad (۰<a<b,\ ۰<\alpha<\beta)$

۳۹۹۷ – $xy=a^۲,\ xy=۲a^۲,\ y=x,\ y=۲x\quad (x>۰,\ y>۰)$

۳۹۹۸ – $y^۲=۲px,\ y^۲=۲qx,\ x^۲=۲ry,\ x^۲=۲sy$
$(۰<p<q,\ ۰<r<s)$

۳۹۹۸,۱ – $x^۲=ay,\ x^۲=by,\ x^۳=cy^۲,\ x^۳=dy^۲$
$(۰<a<b,\quad ۰<c<d)$

۳۹۹۸,۲ – $y=ax^p,\ y=bx^p,\ y=cx^q,\ y=dx^q$
$(۰<p<q,\ ۰<a<b,\ ۰<c<d)$

۳۹۹۹ – $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=۱,\quad \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=۲,$
$\frac{x}{a}=\frac{y}{b},\quad ٤\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\quad (a>۰,\ b>۰)$

۳۹۹۹,۱ – $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{۲}{۳}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{۲}{۳}}=۱;\quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{۲}{۳}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{۲}{۳}}=٤,$
$\frac{x}{a}=\frac{y}{b},\quad ۸\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\quad (x>۰,\ y>۰)$

٤٠٠٠ - $\frac{x^٢}{\lambda}+\frac{y^٢}{\lambda-c^٢}=١$ که در آن λ به ترتیب مقادیر $\frac{١}{٣}c^٢,$

$\frac{٢}{٣}c^٢,\quad \frac{٤}{٣}c^٢,\quad \frac{٥}{٣}c^٢\quad (x>٠\ \ y>٠)$ را اختیار میکند

$(x>٠,\ y>٠)$

٤٠٠١ - مطلوبست محاسبهٔ مساحت محصور با بیضی

$$(a_١x+b_١y+c_١)^٢+(a_٢x+b_٢y+c_٢)^٢=١$$

که در آن

$$\delta=a_١b_٢-a_٢b_١\neq ٠$$

٤٠٠٢ - مطلوبست محاسبهٔ مساحت محدود به بیضی‌های $\frac{x^٢}{\mathrm{ch}^٢u}+\frac{y^٢}{\mathrm{sh}^٢u}=c^٢$

$(u=u_١,\ u_٢)$ و هذلولی‌های $(v=v_١,\ v_٢)$ $\frac{x^٢}{\cos^٢v}-\frac{y^٢}{\sin^٢v}=c^٢$

$$(٠<u_١<u_٢;\ \ ٠<v_١<v_٢;\ \ x>٠,\ \ y>٠)$$

راهنمائی – فرض کنید

$$x=c\,\mathrm{ch}\,u\cos v,\quad y=c\,\mathrm{sh}\,u\sin v$$

٤٠٠٣ - مطلوبست محاسبهٔ مساحت مقطع سطح

$$x^٢+y^٢+z^٢-xy-xz-yz=a^٢$$

با صفحهٔ $x+y+z=٠$.

٤٠٠٤ - مطلوبست محاسبهٔ مساحت مقطع سطح

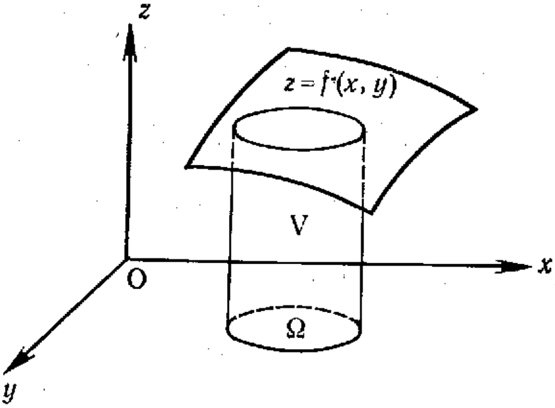
$$\frac{١}{x}+\frac{١}{y}+\frac{١}{z}=٠$$

با صفحهٔ $z=١-٢(x+y)$.

بخش ٣ — محاسبهٔ احجام

حجم استوانه‌گون محدود از بالا بسطح پیوستهٔ $z=f(x,y)$ و از پائین به صفحهٔ $z=٠$ و از اطراف بسطح استوانه‌ای قائم که در صفحه Oxy حوزهٔ مربع‌پذیر Ω را جدا میسازد (شکل ١٤) برابر است با :

$$V=\iint_{\Omega}f(x,y)\,dx\,dy$$



شکل ١٤

٤٠٠٥ – جسمی را که حجم آن با انتگرال

$$V = \int_{۰}^{۱} dx \int_{۰}^{۱-x} (x^{۲} + y^{۲})\, dy$$

بیان شده ترسیم کنید .

٤٠٠٦ – حجم‌های بیان شده بوسیلهٔ انتگرال‌های دوگانهٔ زیر را نمایش دهید :

الف) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{۰\leqslant x+y\leqslant ۱\\ x\geqslant ۰,\ y\geqslant ۰}} (x+y)\, dx\, dy$

ب) $\displaystyle\iint\limits_{\frac{x^{۲}}{٤}+\frac{y^{۲}}{۹}\leqslant ۱} \sqrt{۱-\frac{x^{۲}}{٤}-\frac{y^{۲}}{۹}}\, dx\, dy$

پ) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant ۱} (x^{۲}+y^{۲})\, dxdy$ ث) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{۱\leqslant x\leqslant ۲\\ x\leqslant y\leqslant ۲x}} \sqrt{xy}\, dx\, dy$

ت) $\displaystyle\iint\limits_{x^{۲}+y^{۲}\leqslant x} \sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\, dx\, dy$ ج) $\displaystyle\iint\limits_{x^{۲}+y^{۲}\leqslant ۱} \sin \pi \sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\, dx\, dy$

مطلوبست محاسبهٔ حجم اجسام محدود به سطوح زیر :

٤٠٠٧ – $z = ۱ + x + y,\ z = ۰,\ x + y = ۱,\ x = ۰,\ y = ۰$

٤٠٠٨ – $x + y + z = a,\ x^{۲} + y^{۲} = R^{۲},\ x = ۰,\ y = ۰,\ z = ۰$
$(a \geqslant R\sqrt{۲})$

٤٠٠٩ - $z = x^٢ + y^٢,\ y = x^٢,\ y = ١,\ z = ٠$

٤٠١٠ - $z = \cos x \cos y,\ z = ٠,\ (x + y) \leqslant \frac{\pi}{٢},\ (x - y) \leqslant \frac{\pi}{٢}$

٤٠١١ - $z = \sin \frac{\pi y}{٢x},\ z = ٠,\ y = x,\ y = ٠,\ x = \pi$

٤٠١٢ - $z = xy,\ x + y + z = ١,\ z = ٠$

با گذر به مختصات قطبی مطلوبست محاسبهٔ حجم اجسام محدود بسطوح زیر :

٤٠١٣ - $z^٢ = xy,\ x^٢ + y^٢ = a^٢$

٤٠١٤ - $z = x + y,\ (x^٢ + y^٢)^٢ = ٢xy,\ z = ٠ \quad (x > ٠,\ y > ٠)$

٤٠١٥ - $z = x^٢ + y^٢,\ x^٢ + y^٢ = x,\ x^٢ + y^٢ = ٢x,\ z = ٠$

٤٠١٦ - $x^٢ + y^٢ + z^٢ = a^٢,\ x^٢ + y^٢ \geqslant a|x| \quad (a > ٠)$

٤٠١٧ - $x^٢ + y^٢ - az = ٠,\ (x^٢ + y^٢)^٢ = a^٢(x^٢ - y^٢),\ z = ٠ \quad (a > ٠)$

٤٠١٨ - $z = e^{-(x^٢ + y^٢)},\ z = ٠,\ x^٢ + y^٢ = R^٢$

٤٠١٩ - $z = c \cos \frac{\pi \sqrt{x^٢ + y^٢}}{٢a},\ z = ٠,\ y = x \operatorname{tg} \alpha,\ y = x \operatorname{tg} \beta$
$(a > ٠,\ c > ٠,\ ٠ \leqslant \alpha < \beta \leqslant ٢\pi)$

٤٠٢٠ - $z = x^٢ + y^٢,\ z = x + y$

مطلوبست محاسبهٔ حجم اجسام محدود بسطوح زیر (پارامترها مثبت فرض شده‌اند) :

٤٠٢١ - $\frac{x^٢}{a^٢} + \frac{y^٢}{b^٢} + \frac{z^٢}{c^٢} = ١,\ \frac{x^٢}{a^٢} + \frac{y^٢}{b^٢} = \frac{z^٢}{c^٢} \quad (z > ٠)$

٤٠٢٢ - $\frac{x^٢}{a^٢} + \frac{y^٢}{b^٢} - \frac{z^٢}{c^٢} = -١,\ \frac{x^٢}{a^٢} + \frac{y^٢}{b^٢} = ١$

٤٠٢٣ - $\frac{x^٢}{a^٢} + \frac{y^٢}{b^٢} = \frac{z}{c},\ \frac{x^٢}{a^٢} + \frac{y^٢}{b^٢} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b},\ z = ٠$

٤٠٢٤ - $\left(\frac{x^٢}{a^٢} + \frac{y^٢}{b^٢}\right)^٢ + \frac{z}{c} = ١,\ z = ٠$

٤٠٢٥ - $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^٢ + \frac{z^٢}{c^٢} = ١,\ x = ٠,\ y = ٠,\ z = ٠$

٤٩٢٦ - $\frac{x^٢}{a^٢} + \frac{y^٢}{b^٢} + \frac{z^٢}{c^٢} = ١,\ \left(\frac{x^٢}{a^٢} + \frac{y^٢}{b^٢}\right)^٢ = \frac{x^٢}{a^٢} - \frac{y^٢}{b^٢}$

$z^{۲} = xy,\ x + y = a,\ x + y = b \quad (۰ < a < b)$ – ٤۰۲۷

$z = x^{۲} + y^{۲},\ xy = a^{۲},\ \ xy = ۲a^{۲},\ \ y = \frac{x}{۲},\ y = ۲x,\ z = ۰$ – ٤۰۲۸

$z = xy,\ x^{۲} = y,\ x^{۲} = ۲y,\ y^{۲} = x,\ y^{۲} = ۲x,\ z = ۰$ – ٤۰۲۹

$z = c\sin^{۲}\frac{\pi xy}{a^{۲}},\ z = ۰,\ xy = a^{۲},\ y = \alpha x,\ y = \beta x$ – ٤۰۳۰

$(x > ۰,\ ۰ < \alpha < \beta)$ – ٤۰۳۰

$z = x^{\frac{۳}{۲}} + y^{\frac{۳}{۲}},\ z = ۰,\ x + y = ۱,\ x = ۰,\ y = ۰$ – ٤۰٤۱

$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} + \frac{z}{c} = ۱,\ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{۲}{۳}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{۲}{۳}} = ۱,\ z = ۰$ – ٤۰۳۲

$z = c\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x},\ \ z = ۰,\ \ \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} = a\,\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x} \quad (y \geqslant ۰)$ – ٤۰۳۳

$z = ye^{-\frac{xy}{a^{۲}}},\ xy = a^{۲},\ xy = ۲a^{۲},\ y = m,\ y = n,\ \ z = ۰$ – ۳۰۳۳,۱
$(۰ < m < n)$

$\frac{x^{n}}{a^{n}} + \frac{y^{n}}{b^{n}} + \frac{z^{n}}{c^{n}} = ۱,\ x = ۰,\ \ y = ۰,\ z = ۰ \quad (n > ۰)$ – ٤۰۳٤

$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{n} + \left(\frac{z}{c}\right)^{m} = ۱,\ x = ۰,\ y = ۰,\ z = ۰$ – ٤۰۳۵

$(n > ۰,\ \mathrm{m} > ۰)$

بخش ٤ — محاسبهٔ مساحت سطوح

بند ۱ — حالتیکه سطح بطور صریح داده شده است. مساحت سطح خمیده هموار $z = z(x, y)$ با انتگرال

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{۱ + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲}}\,dx\,dy$$

بیان میشود که در آن Ω تصویر سطح مفروض بر صفحهٔ Oxy میباشد.

بند ۲ — حالتیکه سطح بصورت پارامتری داده شده است. اگر معادلهٔ سطح بصورت پارامتری

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

داده شود که در آن $(u, v)\in\Omega, \Omega$ حوزهٔ بستهٔ محدود مربع‌پذیر و توابع x, y, z در حوزهٔ Ω پیوستهٔ دیفرانسیل‌پذیر میباشند در آنصورت برای مساحت سطح ، دستور

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{EG-F^{۲}}\,du\,dv$$

را داریم که در آن

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^{۲}$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{۲}$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v}$$

٤٠٣٦ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح $az=xy$ که در داخل استوانهٔ $x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}$ واقع است .

٤٠٣٧ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت سطح جسم محدود به سطوح $x^{۲}+z^{۲}=a^{۲}$, $y^{۲}+z^{۲}=a^{۲}$

٤٠٣٨ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=a^{۲}$ که در داخل استوانهٔ $(b\leqslant a)$ $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$ قرار دارد .

٤٠٣٩ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح $z^{۲}=۲xy$ که توسط صفحات $x+y=۱,\ x=۰,\ y=۰$ جدا شده است .

٤٠٤٠ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=a^{۲}$ که در خارج استوانه‌های $x^{۲}+y^{۲}=\pm ax$ قرار دارد (مسئله ویویانی) .

٤٠٤١ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح $z=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$ که در داخل استوانهٔ $x^{۲}+y^{۲}=۲x$ قرار دارد .

٤٠٤٢ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح $z=\sqrt{x^{۲}-y^{۲}}$ که در داخل استوانهٔ $(x^{۲}+y^{۲})^{۲}=a^{۲}(x^{۲}-y^{۲})$ قرار دارد .

٤٠٤٣ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح $z=\frac{۱}{۲}(x^{۲}-y^{۲})$ که توسط صفحه‌های $x-y=\pm ۱,\ x+y=\pm ۱$ بریده شده است .

٤٠٤٤ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح $x^{۲}+y^{۲}=۲az$ که در داخل استوانهٔ $(x^{۲}+y^{۲})=۲a^{۲}xy$ قرار دارد .

٤٠٤٥ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح $x^٢ + y^٢ = a^٢$ که با صفحه‌های $(x > ٠,\ y > ٠)$ $x + z = ٠,\ x - z = ٠$ بریده شده است .

٤٠٤٥,١ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح

$$(x^٢ + y^٢)^{\frac{٣}{٢}} + z = ١$$

که با صفحهٔ $z = ٠$ جدا شده است .

٤٠٤٥,٢ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^٢ + \frac{٢z}{c} = ١$$

که با صفحه‌های $x = ٠,\ y = ٠,\ z = ٠$ بریده شده است .

٤٠٤٥,٣ – مطلوبست محاسبهٔ بخشی از سطح

$$\frac{x^٢}{a} - \frac{y^٢}{b} = ٢z$$

که با سطح

$$\frac{x^٢}{a^٢} + \frac{y^٢}{b^٢} = ١ \quad (z \geqslant ٠)$$

بریده شده است .

٤٠٤٥,٤ – مطلوبست محاسبهٔ بخشی از سطح

$$\sin z = \operatorname{sh} x \times \operatorname{sh} y$$

که با صفحه‌های $(y \geqslant ٠)$ $x = ١,\ x = ٢$ جدا شده است .

٤٠٤٦ – مطلوبست محاسبهٔ سطح و حجم جسم محدود به سطوح

$$x^٢ + y^٢ = \frac{١}{٣}z^٢,\ x + y + z = ٢a \quad (a > ٠)$$

٤٠٤٧ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از کرهٔ محدود به دو مدار و دو نصف‌النهار .

٤٠٤٨ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از هلیکوئید

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h\varphi$$

که در آن $٠ < r < a,\ ٠ < \varphi < ٢\pi$

۴۰۴۹ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح چنبرهٔ

$$x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,\quad y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\quad z=a\sin\psi\quad (0<a\leqslant b)$$

محدود بدو نصف النهار $\varphi=\varphi_1,\ \varphi=\varphi_2$ و دو مدار $\psi=\psi_2$ و $\psi=\psi_1$.
مساحت کل چنبره چقدر است ؟

۴۰۵۰ – مطلوبست محاسبهٔ زاویهٔ حجمی ω که تحت آن مستطیل $x=a>0$
$0\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c$ از مبدأ مختصات رؤیت میشود . اگر a
بزرگ باشد دستور تقریبی برای ω استخراج کنید .

بخش ۵ — کاربردهای انتگرال دوگانه در مکانیک

بند ۱ — مرکز ثقل (گرانیگاه) . اگر x_0, y_0 مختصات مرکز ثقل پلاک Ω واقع در صفحهٔ Oxy و $\rho=\rho(x, y)$ چگالی پلاک باشد در آنصورت

$$x_0=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Omega}\rho x\,dx\,dy,\quad y_0=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Omega}\rho y\,dx\,dy \qquad (1)$$

که در آن $M=\iint\limits_{\Omega}\rho\,dx\,dy$ جرم پلاک است .

اگر پلاک همگن باشد در آنصورت در دستورهای (۱) باید $\rho=1$ را قرار داد .

بند ۲ — لنگرهای لختی . لنگرهای لختی I_x, I_y پلاک Ω واقع بر صفحهٔ Oxy نسبت به محورهای مختصات Ox ، Oy بترتیب با دستورهای

$$I_x=\iint\limits_{\Omega}\rho y^2\,dx\,dy,\quad I_y=\iint\limits_{\Omega}\rho x^2\,dx\,dy \qquad (2)$$

بیان میشوند که در آن $\rho=\rho(x, y)$ چگالی پلاک است .

لنگر لختی گریز از مرکز نیز چنین در نظر گرفته میشود :

$$I_{xy}=\iint\limits_{\Omega}\rho\,xy\,dx\,dy \qquad (3)$$

با فرض $\rho=1$ در دستورهای (۲) و (۳) لنگرهای لختی هندسی یک شکل مستوی بدست میآید .

۴۰۵۱ – جرم پلاک مربعی شکل به ضلع a را در صورتیکه چگالی پلاک در هر نقطه متناسب با فاصله این نقطه از یکی از رأس‌های مربع و برابر ρ_0 در مرکز مربع باشد پیدا کنید .

مطلوبست محاسبهٔ مختصات مرکز ثقل پلاک‌های همگن محدود به منحنی‌های زیر :

۴۰۵۲ – $ay = x^۲,\ x + y = ۲a \quad (a > ۰)$

۴۰۵۳ – $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\quad x = ۰,\ y = ۰$

۴۰۵۴ – $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}} \quad (x > ۰,\ y > ۰)$

۴۰۵۵ – $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^۳ = \frac{xy}{c^۲}$ (حلقه)

۴۰۵۶ – $(x^۲ + y^۲)^۲ = ۲a^۲xy \quad (x > ۰,\ y > ۰)$

۴۰۵۷ – $r = a(۱ + \cos\varphi),\ \varphi = ۰$

۴۰۵۸ – $x = a(t - \sin t),\ y = a(۱ - \cos t) \quad (۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi),\ y = ۰$

۴۰۵۹ – مختصات مرکز ثقل پلاک گرد $x^۲ + y^۲ \leqslant a^۲$ را اگر چگالی آن در نقطهٔ $M(x, y)$ متناسب با فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ $A(a, ۰)$ باشد پیدا کنید.

۴۰۶۰ – مطلوبست تعیین منحنی سیر مرکز ثقل مساحت متغیر محدود به منحنی‌های

$$y = \sqrt{۲px},\quad y = ۰,\quad x = X$$

لنگرهای لختی I_x, I_y نسبت به محورهای مختصات Ox, Oy سطوح $(\rho = ۱)$ محدود به منحنی‌های زیر را پیدا کنید :

۴۰۶۱ – $\frac{x}{b_۱} + \frac{y}{h} = ۱,\ \frac{y}{b_۲} + \frac{y}{h} = ۱,\ y = ۰ \ (b_۱ > ۰,\ b_۲ > ۰,\ h > ۰)$

۴۰۶۲ – $(x - a)^۲ + (y - a)^۲ = a^۲,\ x = ۰,\ y = ۰ \quad (۰ \leqslant x \leqslant a)$

۴۰۶۳ – $r = a(۱ + \cos\varphi)$

۴۰۶۴ – $x^۴ + y^۴ = a^۲(x^۲ + y^۲)$

۴۰۶۵ – $xy = a^۲,\ xy = ۲a^۲,\ x = ۲y,\ ۲x = y \quad (x > ۰,\ y > ۰)$

۴۰۶۶ – مطلوبست محاسبهٔ لنگر قطبی

$$I_۰ = \iint_S (x^۲ + y^۲)\, dx\, dy$$

مساحت S محدود به منحنی

$$(x^۲ + y^۲)^۲ = a^۲(x^۲ - y^۲)$$

۴۰۶۶,۱ – مطلوبست محاسبهٔ لنگر لختی گریز از مرکز شکل همگن محدود به منحنی‌های

$$ay = x^۲,\quad ax = y^۲ \quad (a > ۰)$$

٤۰٦٧ – مطلوبست اثبات دستور

$$I_{l} = I_{l_{۰}} + Sd^{۲}$$

که در آن I_l و $I_{l_{۰}}$ لنگرهای لختی شکل S نسبت به دو محور متوازی l و $l_{۰}$ است و $l_{۰}$ از گرانیگاه شکل میگذرد و d فاصلهٔ بین این دو محور است .

٤۰٦٨ – ثابت کنید که لنگر لختی حوزهٔ مستوی S نسبت به خط گذرنده از گرانیگاه $O(۰, ۰)$ که با محور Ox زاویهٔ α میسازد مساوی

$$I = I_x \cos^{۲}\alpha - ۲ I_{xy} \sin\alpha \cos\alpha + I_y \sin^{۲}\alpha$$

است که در آن I_x, I_y لنگرهای لختی حوزهٔ S نسبت به محورهای Ox, Oy و I_{xy} لنگر گریز از مرکز

$$I_{xy} = \iint_{S} \rho xy \, dx \, dy$$

میباشد .

٤۰٦٩ – مطلوبست محاسبهٔ لنگر لختی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a نسبت به خطیکه از گرا نیگاه میگذرد و با ارتفاع آن زاویهٔ α میسازد .

٤۰۷۰ – مطلوبست محاسبهٔ نیروی فشار آب وارد به جدار $x \geqslant ۰$ ظرف استوانه‌ای $x^{۲} + y^{۲} = a^{۲}, \ z = ۰$ در صورتیکه ارتفاع آب $z = h$ است .

٤۰۷۱ – کرهٔ بشعاع a در مایعی به چگالی ثابت δ به عمق h (نسبت به مرکز کره) ، که در آن $h \geqslant a$ ، غوطه‌ور است . مطلوبست تعیین نیروهای فشار مایع بر سطوح فوقانی و تحتانی سطح کروی .

٤۰۷۲ – استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع قاعدهٔ a و بارتفاع b بتمامی در مایع به چگالی δ بقسمی غوطه‌ور است که مرکز آن در عمق h از سطح آب قرار دارد و محور استوانه با امتداد قائم زاویهٔ α میسازد . مطلوبست تعیین نیروی فشار مایع بر قاعده‌های بالائی و پائینی استوانه .

٤۹۷۳ – مطلوبست تعیین نیروی جذب نقطهٔ مادی $P(۰, ۰, b)$ توسط استوانهٔ همگن $x^{۲} + y^{۲} \leqslant a^{۲}, \ ۰ \leqslant z \leqslant h$ اگر جرم استوانه برابر M و جرم نقطه برابر m باشد .

٤۰۷٤ – توزیع فشار جسمی روی سطح تکیهٔ

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} \leqslant ۱$$

از دستور $p = p_۰\left(۱-\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}\right)$ به دست میاید .

مطلوبست تعیین فشار میانگین جسم بر این سطح .

٤٠٧٥ – چمن بشکل مستطیل به اضلاع a و b بطور یکنواخت از علف درو شده به چگالی برابر p kgf/m^۲ پوشیده شده است . چه کار مینیمالی باید صرف کرد تا تمامی علف را در مرکز چمن جمع آورد در صورتیکه کار ترابری (حمل و نقل) بار P kgf در فاصلهٔ r برابر kPr $(۰<k<۱)$ باشد .

بخش ٦ – انتگرال سه‌گانه (تریپل)

بند ۱ – محاسبهٔ مستقیم انتگرال سه‌گانه . اگر تابع $f(x, y, z)$ پیوسته و حوزهٔ V محدود و با نامساویهای زیر تعریف شود :

$$x_۱ \leqslant x \leqslant x_۲, \quad y_۱(x) \leqslant y \leqslant y_۲(x), \quad z_۱(x, y) \leqslant z \leqslant z_۲(x, y)$$

که در آن $y_۱(x), y_۲(x), z_۱(x, y), z_۲(x, y)$ توابع پیوسته هستند در آنصورت انتگرال سه‌گانهٔ تابع $f(x, y, z)$ گسترده در حوزهٔ V را میتوان از دستور

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_۱}^{x_۲} dx \int\limits_{y_۱(x)}^{y_۲(x)} dy \int\limits_{z_۱(x, y)}^{z_۲(x, y)} f(x, y, z)\,dz$$

حساب کرد .

گاهی بهتر است دستور زیر را بکار برد :

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_۱}^{x_۲} dx \iint\limits_{S(x)} f(x, y, z)\,dy\,dz$$

که در آن $S(x)$ مقطع حوزهٔ V با صفحهٔ $X = x$ میباشد .

بند ۲ – تعویض متغیرها در انتگرال سه‌گانه . اگر حوزهٔ بسته و محدود مکعب‌پذیر V از فضای $Oxyz$ بکمک توابع پیوسته دیفرانسیل‌پذیر

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

به حوزهٔ V' از فضای $O'uvw$ با تناظر یک‌به‌یک تصویر شود و ضمناً

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq ۰ \quad \text{بازای} \quad (u, v, w) \in V,$$

در آنصورت دستور

$$\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint\limits_{V'} f(x(u,\ v,\ w),\ \ y(u,\ v,\ w),\ \ z(u,\ v,\ w))\,|\,I\,|\,du\,dv\,dw$$

درست است .

در حالتهای خاص داریم : ۱) دستگاه مختصات استوانه‌ای $h,\ r,\ \varphi$ که در آن

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h$$

و

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \varphi,\ h)} = r$$

و ۲) دستگاه مختصات کروی $\varphi,\ \psi,\ r$ که در آن

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi$$

و

$$\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(r,\ \varphi,\ \psi)} = r^{۲}\cos\psi$$

انتگرالهای سه‌گانهٔ زیر را حساب کنید

٤٠٧٦ - $\iiint\limits_V xy^{۲}z^{۳}\,dx\,dy\,dz$ که در آن حوزهٔ V به سطوح $z = xy,\ y = x,$ $x = ۱,\ z = ۰$ محدود است .

٤٠٧٧ - $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(۱+x+y+z)^{۳}}$ که در آن حوزهٔ V به سطوح $x+y+z=۱,$ $x=۰,\ y=۰,\ z=۰$ محدود است .

٤٠٧٨ - $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$ که در آن حوزهٔ V بسطوح $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱,$ $x=۰,\ y=۰,\ z=۰$ محدود است .

٤٠٧٩ - $\iiint\limits_V \left(\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}\right)dx\,dy\,dz$ ، که در آن حوزهٔ V به سطح

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۱$$

محدود است .

٤٠٨٠ - $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$ که در آن حوزهٔ V به سطوح $x^2+y^2=z^2$, $z=1$ محدود است .

در انتگرالهای سه‌گانهٔ زیر حدود انتگرال‌گیری را به طروق مختلف قرار دهید :

٤٠٨١ - $$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z)\, dz$$

٤٠٨٢ - $$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z)\, dz$$

٤٠٨٣ - $$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\, dz$$

انتگرالهای سه‌گانهٔ زیر را به انتگرالهای ساده بدل کنید .

٤٠٨٤ - $$\int_0^x d\xi \int_0^{\xi} d\eta \int_0^{\eta} f(\zeta)\, d\zeta$$

٤٠٨٥ - $$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z)\, dz$$

٤٠٨٦ - اگر $f(x, y, z) = F'''_{xyz}(x, y, z)$ و a, b, c, A, B, C مقادیر ثابتی باشند مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x, y, z)\, dz$$

با گذر به مختصات کروی انتگرال‌های زیر را حساب کنید :

٤٠٨٧ - $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$ که در آن حوزهٔ V به سطح $x^2+y^2+z^2=z$ محدود است .

٤٠٨٨ - $$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\, dx$$

۴۰۸۹ – در انتگرال

$$\iiint\limits_V f(\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲})\,dx\,dy\,dz$$

که در آن حوزهٔ V به سطوح $x=y$, $z=x^۲+y^۲$, $z=۰$, $y=۰$, $x=۱$ محدود است به مختصات کروی بگذرید.

۴۰۹۰ – با انجام تعویض مناسب متغیرها انتگرال سه‌گانهٔ

$$\iiint\limits_V \sqrt{۱-\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}}\,dx\,dy\,dz$$

را که در آن V درون بیضوی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ میباشد حساب کنید.

۴۰۹۱ – با گذر به مختصات استوانه‌ای انتگرال

$$\iiint\limits_V (x^۲+y^۲)\,dx\,dy\,dz$$

را که در آن V به سطوح $x^۲+y^۲=۲z$, $z=۲$ محدود است حساب کنید.

۴۰۹۲ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\iiint\limits_V x^۲\,dx\,dy\,dz$$

که در آن حوزهٔ V به سطوح $z=ay^۲$, $z=by^۲$, $y>۰$ $(۰<a<b)$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$ $(۰<\alpha<\beta)$, $z=h$ $(h>۰)$ محدود است.

۴۰۹۳ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$$

که در آن حوزهٔ V در ثمن $x>۰$, $y>۰$, $z>۰$ واقع و به سطوح

$$z=\frac{x^۲+y^۲}{m},\quad z=\frac{x^۲+y^۲}{n},\quad xy=a^۲,\quad xy=b^۲,\quad y=\alpha x,\quad y=\beta x$$

$$(۰<a<b,\quad ۰<\alpha<\beta,\quad ۰<m<n)$$

محدود است.

٤٠٩٤ – مطلوبست محاسبهٔ مقدار میانگین تابع

$$f(x, y, z) = x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}$$

در حوزهٔ $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \leqslant x + y + z$

٤٠٩٥ – مطلوبست محاسبهٔ مقدار میانگین تابع

$$f(x, y, z) = e^{\sqrt{\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} + \frac{z^{۲}}{c^{۲}}}}$$

در حوزهٔ $\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} + \frac{z^{۲}}{c^{۲}} \leqslant ۱$

٤٠٩٦ – با استفاده از قضیهٔ میانگین ، انتگرال زیر را برآورد کنید :

$$u = \iiint\limits_{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} \leq R^{۲}} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^{۲}+(y-b)^{۲}+(z-c)^{۲}}}$$

که در آن $a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} > R^{۲}$

٤٠٩٧ – ثابت کنید که هرگاه تابع $f(x, y, z)$ در حوزهٔ V پیوسته و بازای هر حوزهٔ دلخواه $\omega \subset V$ داشته باشیم :

$$\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = ۰$$

آنگاه بازای $(x, y, z) \in V$ داریم : $f(x, y, z) \equiv ۰$.

٤٠٩٨ – مطلوبست $F'(t)$ اگر

الف) $F(t) = \iiint\limits_{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} \leq t^{۲}} f(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})\, dx\, dy\, dz$ که در آن f تابعی است دیفرانسیل پذیر ؛

ب) $F(t) = \iiint\limits_{\substack{۰ \leq x \leq t \\ ۰ \leq y \leq t \\ ۰ \leq z \leq t}} f(xyz)\, dx\, dy\, dz$ که در ن f تابعی است دیفرانسیل پذیر .

٤٠٩٩ – مطلوبست تعیین

$$\iiint\limits_{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} \leq ۱} x^{m} y^{n} z^{p}\, dx\, dy\, dz$$

که در آن m, n, p اعداد درست نامنفی میباشد .

۴۱۰۰ – با فرض $x+y+z=\xi,\ y+z=\xi\eta,\ z=\xi\eta\zeta$ مطلوبست محاسبهٔ انتگرال دیریکله

$$\iiint_V x^p y^q z^r (۱-x-y-z)^s\, dx\, dy\, dz$$
$$(p>۰,\quad q>۰,\quad r>۰,\quad s>۰)$$

که در آن حوزهٔ V به سطوح $x+y+z=۱,\ x=۰,\ y=۰,\ z=۰$ محدود است.

بخش ۷ – محاسبهٔ حجم‌ها بکمک انتگرالهای سه‌گانه

حجم حوزهٔ V با دستور

$$V=\iiint_V dx\, dy\, dz$$

بیان میشود.

حجم اجسام محدود به سطوح زیر را پیدا کنید:

۴۱۰۱ – $z=x^۲+y^۲,\quad z=۲x^۲+۲y^۲,\quad y=x,\quad y=x^۲$

۴۱۰۲ – $z=x+y,\quad z=xy,\quad x+y=۱,\quad x=۰,\quad y=۰$

۴۱۰۳ – $x^۲+z^۲=a^۲,\quad x+y=\pm a,\quad x-y=\pm a$

۴۱۰۴ – $az=x^۲+y^۲,\quad z=\sqrt{x^۲+y^۲}\quad (a>۰)$

۴۱۰۵ – $xz=a^۲-x^۲-y^۲,\ z=a-x-y,\ x=۰,\ y=۰,\ z=۰\ (a>۰)$

۴۱۰۶ – $z=۶-x^۲-y^۲,\quad z=\sqrt{x^۲+y^۲}$

با گذر به مختصات کروی یا استوانه‌ای حجم‌های محدود به سطوح زیر را حساب کنید:

۴۱۰۷ – $x^۲+y^۲+z^۲=۲az,\quad x^۲+y^۲\leqslant z^۲$

۴۱۰۸ – $(x^۲+y^۲+z^۲)^۲=a^۲(x^۲+y^۲-z^۲)$

۴۱۰۹ – $(x^۲+y^۲+z^۲)^۳=۳xyz$

۴۱۱۰ – $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲,\quad x^۲+y^۲+z^۲=b^۲,\quad x^۲+y^۲=z^۲$
$(z\geqslant ۰)\quad (۰<a<b)$

در مثالهای زیر بهتر است از مختصات قطبی تعمیم یافتهٔ

$$r,\ \varphi,\ \psi\left(r\geqslant ۰;\quad ۰\leqslant\varphi\leqslant ۲\pi;\quad -\frac{\pi}{۲}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{۲}\right)$$

با قرار دادن دستورهای

$$\left.\begin{aligned} x &= ar\cos^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi \\ y &= br\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi \\ z &= cr\sin^{\beta}\psi \end{aligned}\right\}$$

(ثابت میباشند a, b, c, α, β)

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \alpha\beta abcr^{٢}\cos^{\alpha-١}\varphi\sin^{\alpha-١}\varphi\cos^{٢\beta-١}\psi\sin^{\beta-١}\psi$$

استفاده شود .

حجم اجسام محدود به سطوح زیر را محاسبه کنید :

٤١١١ - $\left(\frac{x^{٢}}{a^{٢}}+\frac{y^{٢}}{b^{٢}}+\frac{z^{٢}}{c^{٢}}\right)^{٢}=\frac{x}{h}$

٤١١٢ - $\left(\frac{x^{٢}}{a^{٢}}+\frac{y^{٢}}{b^{٢}}+\frac{z^{٢}}{c^{٢}}\right)^{٢}=\frac{x^{٢}}{a^{٢}}+\frac{y^{٢}}{b^{٢}}$

٤١١٢,١ - $\left(\frac{x^{٢}}{a^{٢}}+\frac{y^{٢}}{b^{٢}}+\frac{z^{٢}}{c^{٢}}\right)^{٢}=\frac{x^{٢}}{a^{٢}}+\frac{y^{٢}}{b^{٢}}-\frac{z^{٢}}{c^{٢}}$

٤١١٣ - $\frac{x^{٢}}{a^{٢}}+\frac{y^{٢}}{b^{٢}}+\frac{z^{٢}}{c^{٢}}=١, \quad \frac{x^{٢}}{a^{٢}}+\frac{y^{٢}}{b^{٢}}=\frac{z}{c}$

٤١١٤ - $\frac{x^{٢}}{a^{٢}}+\frac{y^{٢}}{b^{٢}}+\frac{z^{٤}}{c^{٤}}=١$

٤١١٥ - $\left(\frac{x^{٢}}{a^{٢}}+\frac{y^{٢}}{b^{٢}}\right)^{٢}+\frac{z^{٤}}{c^{٤}}=١$

با استفاده از تعویض مناسب متغیرها حجم اجسام محدود به سطوح زیر را محاسبه کنید (پارامترها مثبت فرض میشوند) :

٤١١٦ - $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^{٢}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k} \quad (x\geqslant ٠,\ y\geqslant ٠,\ z\geqslant ٠)$

٤١١٦,١ - $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^{٢}=\frac{x}{h}-\frac{y}{k} \quad (x\geqslant ٠,\ y\geqslant ٠,\ z\geqslant ٠)$

٤١١٧ - $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^{٤}=\frac{xyz}{abc} \quad (x\geqslant ٠,\ y\geqslant ٠,\ z\geqslant ٠)$

٤١١٨ - $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{٢}+\left(\frac{z}{c}\right)^{٢}=١ \quad (x\geqslant ٠,\ y\geqslant ٠,\ z\geqslant ٠)$

٤١١٨,١ – $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=١ \quad (x\geqslant ٠,\ y\geqslant ٠,\ z\geqslant ٠)$

٤١١٨,٢ – $\sqrt[٣]{\frac{x}{a}}+\sqrt[٣]{\frac{y}{b}}+\sqrt[٣]{\frac{z}{c}}=١ \quad (x\geqslant ٠,\ y\geqslant ٠,\ z\geqslant ٠)$

٤١١٨,٣ – $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{٢}{٣}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{٢}{٣}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{٢}{٣}}=١$

٤١١٥ – $z=x^٢+y^٢,\ \ z=٢\,(x^٢+y^٢),\ \ xy=a^٢,\ \ xy=٢a^٢,\ \ x=٢y,$
$٢x=y \quad (x>٠,\ y>٠)$

٤١٢٠ – $x^٢+z^٢=a^٢,\quad x^٢+z^٢=b^٢,\quad x^٢-y^٢-z^٢=٠ \quad (x>٠)$

٤١٢١ – $(x^٢+y^٢+z^٢)^٣=\frac{a^٦z^٢}{x^٢+y^٢}$

٤١٢٢ – $\left(\frac{x^٢}{a^٢}+\frac{y^٢}{b^٢}+\frac{z^٢}{c^٢}\right)^٢=\frac{z}{h}\times e^{-\frac{\frac{z^٢}{c^٢}}{\frac{x^٢}{a^٢}+\frac{y^٢}{b^٢}+\frac{z^٢}{c^٢}}}$

٤١٢٣ – $\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}=\frac{٢}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right),\ \ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=١,$
$x=٠,\ x=a$

٤١٢٤ – $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\ln\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}},\quad x=٠,\quad z=٠,$
$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=٠,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=١$

٤١٢٥ – حجم کرهٔ $x^٢+y^٢+z^٢\leqslant ٤az$ با سطح $x^٢+y^٢+az=٤a^٢$ بچه نسبتی تقسیم میشود ؟

٤١٢٦ – مطلوبست محاسبه حجم و سطح جسم محدود به سطوح $x^٢+y^٢=az,$ $z=٢a-\sqrt{x^٢+y^٢} \quad (a>٠)$

٤١٢٧ – مطلوبست محاسبهٔ حجم متوازی‌السطوح محدود به صفحات

$$a_ix+b_iy+c_iz=\pm h_i \quad (i=١,\ ٢,\ ٣)$$

اگر

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} \neq ۰$$

٤۱۲۸ – مطلوبست محاسبهٔ حجم جسم محدود به سطح

$$(a_۱x + b_۱y + c_۱z)^۲ + (a_۲x + b_۲y + c_۲z)^۲ + (a_۳x + b_۳y + c_۳z)^۲ = h^۲$$

اگر

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} \neq ۰$$

٤۱۲۹ – مطلوبست محاسبهٔ حجم جسم محدود به سطح

$$\left(\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲}\right)^n + \frac{z^{۲n}}{c^{۲n}} = \frac{z}{h}\left(\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲}\right)^{n-۲} \quad (n > ۱)$$

٤۱۳۰ – حجم جسم واقع در ثمن مثبت فضا $(x \geqslant ۰,\ y \geqslant ۰,\ z \geqslant ۰)$ $Oxyz$ و محدود به سطوح

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^p}{c^p} = ۱ \quad (m > ۰,\ n > ۰,\ p > ۰),\ x = ۰,\ y = ۰,\ z = ۰$$

را پیدا کنید.

بخش ۸ — کاربردهای انتگرال سه‌گانه در مکانیک

بند ۱ — جرم جسم. اگر جسم حجم V را اشغال کند و $\rho = \rho(x, y, z)$ چگالی آن در نقطه (x, y, z) باشد در آنصورت جرم جسم برابر است با

$$M = \iiint\limits_V \rho\, dx\, dy\, dz \tag{۱}$$

بند ۲ — مرکز ثقل جسم. مختصات مرکز ثقل $(x_۰, y_۰, z_۰)$ جسم با دستورهای زیر محاسبه میشود:

$$\left.\begin{aligned} x_{۰} &= \frac{۱}{M} \iiint\limits_V \rho x\,dx\,dy\,dz \\ y_{۰} &= \frac{۱}{M} \iiint\limits_V \rho y\,dx\,dy\,dz \\ z_{۰} &= \frac{۱}{M} \iiint\limits_V \rho z\,dx\,dy\,dz \end{aligned}\right\} \qquad (۱)$$

اگر جسم همگن باشد در آنصورت در دستورهای (۱) و (۲) میتوان $\rho = ۱$ را فرض کرد .

بند ۳ — لنگر های لختی . لنگرهای لختی جسم نسبت به صفحات مختصات به ترتیب با انتگرالهای زیر بیان میشوند :

$$I_{xy} = \iiint\limits_V \rho z^{۲}\,dx\,dy\,dz, \quad I_{yz} = \iiint\limits_V \rho x^{۲}\,dx\,dy\,dz$$

$$I_{zx} = \iiint\limits_V \rho y^{۲}\,dx\,dy\,dz$$

لنگر لختی جسم نسبت به یک محور l با انتگرال

$$I_l = \iiint\limits_V \rho r^{۲}\,dx\,dy\,dz$$

بیان میشود که در آن r فاصلهٔ نقطهٔ متغیر (x, y, z) از محور l است . بخصوص برای محورهای مختصات $Ox,\ Oy,\ Oz$ به ترتیب داریم :

$$I_x = I_{xy} = I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} = I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}$$

لنگر لختی جسم نسبت به مبدأ مختصات عبارتست از انتگرال

$$I_{۰} = \iiint\limits_V \rho\,(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})\,dx\,dy\,dz$$

روشن است که

$$I_{۰} = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}$$

بند ۴ — پتانسیل میدان جاذبه . پتانسیل نیوتنی جسم در نقطهٔ $P(x, y, z)$ با انتگرال

$$u(x, y, z) = \iiint\limits_V \rho(\xi, \eta, \zeta)\,\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}$$

بیان میشود که در آن V حجم جسم و $\rho=\rho(\xi, \eta, \zeta)$ چگالی جسم میباشد و

$$r=\sqrt{(\xi-x)^{۲}+(\eta-y)^{۲}+(\zeta-z)^{۲}}$$

نقطهٔ مادی بجرم m بوسیلهٔ جسم با نیروئی که تصاویر آن x, y, z روی محورهای مختصات Ox, Oy, Oz عبارتند از :

$$X=km\frac{\partial u}{\partial x}=km\iiint\limits_V \rho\frac{\xi-x}{r^{۳}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

$$Y=km\frac{\partial u}{\partial y}=km\iiint\limits_V \rho\frac{\eta-y}{r^{۳}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

$$Z=km\frac{\partial u}{\partial z}=km\iiint\limits_V \rho\frac{\zeta-z}{r^{۳}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

جذب میشود که در آن k ثابت قانون جاذبه است .

۴۱۳۱ – مطلوبست محاسبهٔ جرم جسمی که واحد حجم $۰\leqslant x\leqslant ۱,\ ۰\leqslant y\leqslant ۱,\ ۰\leqslant z\leqslant ۱$ را اشغال میکند در صورتیکه چگالی جسم در نقطهٔ $M(x, y, z)$ با دستور $\rho=x+y+z$ مشخص میشود .

۴۱۳۲ – مطلوبست جرم جسمی که حوزهٔ نامتناهی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\geqslant ۱$ را پر کرده است در صورتیکه چگالی آن طبق قانون $\rho=\rho_{۰}e^{-k\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}$ تغییر کند که در آن $\rho_{۰}>۰$ و $k>۰$ مقادیر ثابتی هستند .

مختصات مرکز ثقل اجسام همگن محدود بسطوح زیر را پیدا کنید :

۴۱۳۳ – $\dfrac{x^{۲}}{a^{۲}}+\dfrac{y^{۲}}{b^{۲}}=\dfrac{z^{۲}}{c^{۲}};\quad z=c$

۴۱۳۴ – $z=x^{۲}+y^{۲},\quad x+y=a,\quad x=۰,\quad y=۰,\quad z=۰$

۴۱۳۵ – $x^{۲}=۲pz,\quad y^{۲}=۲px,\quad x=\dfrac{p}{۲},\quad z=۰$

۴۱۳۶ – $\dfrac{x^{۲}}{a^{۲}}+\dfrac{y^{۲}}{b^{۲}}+\dfrac{z^{۲}}{c^{۲}}=۱,\quad x=۰,\quad y=۰,\quad z=۰$

۴۱۳۷ – $x^{۲}+z^{۲}=a^{۲},\quad y^{۲}+z^{۲}=a^{۲}\quad (z\geqslant ۰)$

۴۱۳۸ – $x^{۲}+y^{۲}=۲z,\quad x+y=z$

۴۱۳۹ – $\left(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}\right)=\frac{xyz}{abc}\quad (x\geqslant ۰,\quad y\geqslant ۰,\quad z\geqslant ۰)$

۴۱۴۰ – $z=x^۲+y^۲,\ z=\frac{۱}{۲}(x^۲+y^۲),\ \ x+y=\pm ۱,\ \ x-y=\pm ۱$

۴۱۴۱ – $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=۱,\quad x=۰,\quad y=۰,\quad z=۰$

$(n>۰,\ x\geqslant ۰,\ y\geqslant ۰,\ z\geqslant ۰)$

۴۱۴۲ – مختصات مرکز ثقل جسم مکعبی‌شکل

$$۰\leqslant x\leqslant ۱,\quad ۰\leqslant y\leqslant ۱,\quad ۰\leqslant z\leqslant ۱$$

را در صورتیکه چگالی آن در نقطهٔ (x, y, z) برابر

$$\rho=x^{\frac{۲\alpha-۲}{۱-\alpha}}y^{\frac{۲\beta-۱}{۱-\beta}}z^{\frac{۲\gamma-۱}{۱-\gamma}}$$

باشد بدست آورید که در آن $۰<\alpha<۱,\ ۰<\beta<۱,\ ۰<\gamma<۱$

لنگرهای لختی اجسام همگن محدود به سطوح زیر را نسبت به صفحات مختصات تعیین کنید (پارامترها مثبتند).

۴۱۴۳ – $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱,\quad x=۰,\quad y=۰,\quad z=۰$

۴۱۴۴ – $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱$

۴۱۴۵ – $\frac{y^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=\frac{z^۲}{c^۲},\quad z=c$

۴۱۴۶ – $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}=۱,\quad \frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=\frac{x}{a}$

۴۱۴۷ – $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۲\,\frac{z}{c},\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

۴۱۴۷,۱ – $\left(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}\right)^۲=\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}$

۴۱۴۷,۲ – $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^n=۱,\quad x=۰,\quad y=۰,\quad z=۰$

$(n>۰;\ x\geqslant ۰,\ y\geqslant ۰,\ z\geqslant ۰)$

مطلوبست تعیین لنگر لختی اجسام همگن محدود به سطوح زیر نسبت به محور Oz:

۴۱۴۸ – $z = x^{۲} + y^{۲}, \quad x + y = \pm ۱, \quad x - y = \pm ۱, \quad z = ۰$

۴۱۴۹ – $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۲, \quad x^{۲} + y^{۲} = z^{۲} \quad (z > ۰)$

۴۱۴۹,۱ – $(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})^{۳} = a^{۵} z$

۴۱۵۰ – مطلوبست محاسبهٔ لنگر لختی کرهٔ ناهمگن $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} \leqslant R^{۲}$ بجرم M نسبت به قطر آن در صورتیکه چگالی کره در نقطهٔ متغیر $P(x, y, z)$ متناسب با فاصلهٔ این نقطه از مرکز کره باشد.

۴۱۵۱ – مطلوبست اثبات تساوی

$$I_{l} = I_{l_{۰}} + Md^{۲}$$

که در آن I_{l} لنگر لختی جسم نسبت به یک محور l و $I_{l_{۰}}$ لنگر لختی نسبت به محور $l_{۰}$ موازی l و گذرنده از مرکز ثقل جسم و d فاصلهٔ بین دو محور و M جرم جسم است.

۴۱۵۲ – ثابت کنید که لنگر لختی جسمی که حجم V را اشغال میکند نسبت به محور l که از مرکز ثقل آن $O(۰, ۰, ۰)$ میگذرد و با محورهای مختصات زوایای α, β, γ را میسازد برابر است با

$$I_{l} = I_{x} \cos^{۲} \alpha + I_{y} \cos^{۲} \beta + I_{z} \cos^{۲} \gamma -$$

$$- ۲ K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - ۲ K_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - ۲ K_{yz} \cos \beta \cos \gamma$$

که در آن I_{x}, I_{y}, I_{z} لنگرهای لختی جسم نسبت به محورهای مختصات و

$$K_{xy} = \iiint\limits_{V} \rho xy \, dx \, dy \, dz, \quad K_{xz} = \iiint\limits_{V} \rho xz \, dx \, dy \, dz,$$

$$K_{yz} = \iiint\limits_{V} \rho yz \, dx \, dy \, dz$$

لنگرهای گریز از مرکز میباشند.

۴۱۵۳ – مطلوبست تعیین لنگر لختی استوانهٔ همگن $x^{۲} + y^{۲} \leqslant a^{۲}, \ z = \pm h$ به چگالی $\rho_{۰}$ نسبت به خط $x = y = z$.

۴۱۵۴ – مطلوبست تعیین لنگر لختی جسم همگن به چگالی $\rho_{۰}$ محدود به سطح

$$(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})^{۲} = a^{۲} (x^{۲} + y^{۲})$$

نسبت به مبدأ مختصات.

۴۱۵۵ – مطلوبست تعیین پتانسیل نیوتنی کرهٔ همگن $\xi^{۲} + \eta^{۲} + \zeta^{۲} = R^{۲}$ به چگالی $\rho_{۰}$ در نقطهٔ $P(x, y, z)$.

راهنمائی – فرض کنید که محور $O\zeta$ از نقطهٔ $P(x, y, z)$ میگذرد.

۴۱۵۶ – مطلوبست تعیین پتانسیل نیوتنی قشر کروی $R_۱^۲ \leqslant \xi^۲ + \eta^۲ + \zeta^۲ \leqslant R_۲^۲$ در نقطهٔ $P(x, y, z)$ در صورتیکه چگالی $\rho = f(R)$ که در آن f تابع معلومی است و $R = \sqrt{\xi^۲ + \eta^۲ + \zeta^۲}$.

۴۱۵۷ – مطلوبست تعیین پتانسیل نیوتنی استوانهٔ $\xi^۲ + \eta^۲ \leqslant a^۲, \ ۰ \leqslant \zeta \leqslant h$ با چگالی ثابت $\rho_۰$ در نقطهٔ $P(۰, ۰, z)$.

۴۱۵۸ – کرهٔ همگن $\xi^۲ + \eta^۲ + \zeta^۲ \leqslant R^۲$ به جرم M با چه نیروئی نقطهٔ مادی $P(۰, ۰, a)$ به جرم m را جذب میکند ؟

۴۱۵۹ – مطلوبست تعیین نیروی جاذبهٔ استوانهٔ همگن $\xi^۲ + \eta^۲ \leqslant a^۲, \ ۰ \leqslant \zeta \leqslant h$ به چگالی $\rho_۰$ وارد به نقطهٔ $P(۰, ۰, z)$ به جرم واحد .

۴۱۶۰ – مطلوبست تعیین نیروی جاذبهٔ قطاع کرهٔ همگن به چگالی $\rho_۰$ وارد به نقطه مادی به جرم واحد که در رأس آن جا گرفته است در صورتیکه شعاع سطح کروی برابر R و زاویهٔ مقطع محوری قطاع ۲α باشد .

بخش ۹ – انتگرالهای دوگانه و سه‌گانهٔ ناویژه

بند ۱ – حالت حوزهٔ نامتناهی . هرگاه حوزهٔ دو بعدی Ω نامتناهی و تابع $f(x, y)$ روی Ω پیوسته باشد در آنصورت بنا به تعریف فرض میشود :

$$\iint_{\Omega} (x, y)\, dx\, dy = \lim_{n \to \infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y)\, dx\, dy \qquad (۱)$$

که در آن Ω_n رشتهٔ دلخواه حوزه‌های بسته و محدود مربع‌پذیر پرکنندهٔ حوزهٔ Ω است . اگر حد طرف راست وجود داشته و مستقل از انتخاب رشتهٔ Ω_n باشد در آنصورت انتگرال نظیر را همگرا و در حالت خلاف واگرا نامند .

بطرز مشابهی ، انتگرال سه‌گانهٔ ناویژهٔ گسترده در حوزهٔ سه بعدی نامحدود برای تابع پیوسته تعریف میشود .

بند ۲ – حالت تابع ناپیوسته . اگر تابع $f(x, y)$ در تمام مواضع حوزهٔ بسته و محدود Ω بجز نقطهٔ $P(a, b)$ پیوسته باشد در آنصورت فرض میشود :

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\varepsilon \to +۰} \iint_{\Omega - U_\varepsilon} f(x, y)\, dx\, dy \qquad (۲)$$

که در آن U_ε حوزهٔ بقطر ε شامل نقطهٔ P است و در حالت وجود حد ، انتگرال مورد نظر را همگرا و در غیر اینصورت آنرا واگرا مینامند .

با فرض آنکه در نزدیکی نقطهٔ $P(a, b)$ تساوی

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{r^{\alpha}}$$

بر قرار باشد که در آن قدر مطلق تابع $\varphi(x, y)$ بین دو عدد مثبت m و M محصور است و $r = \sqrt{(x-a)^٢ + (y-b)^٢}$ ، نتیجه میشود که : ١) بازای $\alpha < ٢$ انتگرال (٢) همگرا ؛ ٢) بازای $\alpha \geqslant ٢$ واگرا است .

اگر تابع $f(x, y)$ دارای خط انفصال باشد انتگرال ناویژهٔ (٢) بطرز مشابهی تعریف میشود .

مفهوم انتگرال ناویژه از تابع ناپیوسته بسادگی به انتگرالهای سه‌گانه منتقل میشود .

همگرایی انتگرالهای ناویژهٔ زیر را که دارای حوزهٔ انتگرال‌گیری نامتناهی میباشند بررسی کنید $(٠ < m \leqslant |\varphi(x, y)| \leqslant M)$:

٤١٦١ – $$\iint\limits_{x^٢+y^٢\geqslant ١} \frac{\varphi(x, y)}{(y^٢+y^٢)^p}\,dx\,dy$$

٤١٦٢ – $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{(١+|x|^p)(١+|y|^q)}$$

٤١٦٣ – $$\iint\limits_{٠\leqslant y\leqslant ١} \frac{\varphi(x, y)}{(١+x^٢+y^٢)^p}\,dx\,dy$$

٤١٦٤ – $$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant ١} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q} \quad (p > ٠,\ q > ٠)$$

٤١٦٥ – $$\iint\limits_{x+y\geqslant ١} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p}\,dx\,dy$$

٤١٦٦ – ثابت کنید که اگر تابع پیوستهٔ $f(x, y)$ نامنفی و $S_n\ (n = ١, ٢, \ldots)$ یک دنبالهٔ دلخواه از حوزه‌های بسته و محدود پرکنندهٔ حوزهٔ S باشد در آنصورت

$$\iint\limits_{S} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{S_n} f(x, y)\,dx\,dy$$

که در آن طرف چپ و راست همزمان دارای معنی هستند ویا نیستند .

٤١٦٧ – نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\ |y|\leqslant n}} \sin(x^٢+y^٢)\,dx\,dy=\pi$$

در صورتیکه

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^٢+y^٢\leqslant ٢\pi n} \sin(x^٢+y^٢)\,dx\,dy=٠$$

(n عددیست طبیعی) .

٤١٦٨ – نشان دهید با وجود آنکه انتگرالهای مکرر

$$\int\limits_١^{+\infty} dx \int\limits_١^{+\infty} \frac{x^٢-y^٢}{(x^٢+y^٢)^٢}\,dx \quad و \quad \int\limits_١^{+\infty} dy \int\limits_١^{+\infty} \frac{x^٢-y^٢}{(x^٢+y^٢)^٢}\,dy$$

همگرا هستند انتگرال

$$\iint\limits_{x\geqslant ١,\ y\geqslant ١} \frac{x^٢-y^٢}{(x^٢+y^٢)^٢}\,dx\,dy$$

واگرا است .

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

٤١٦٩ – $\displaystyle\iint\limits_{\substack{xy\geqslant ١\\ x\geqslant ١}} \frac{dx\,dy}{x^p y^q}$

٤١٧٠ – $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x+y\geqslant ١\\ ٠\leqslant x\leqslant ١}} \frac{dx\,dy}{(x+y)^p}$

٤١٧١ – $\displaystyle\iint\limits_{x^٢+y^٢\leqslant ١} \frac{dx\,dy}{\sqrt{١-x^٢-y^٢}}$

٤١٧٢ – $\displaystyle\iint\limits_{x^٢+y^٢\geqslant ١} \frac{dx\,dy}{(x^٢+y^٢)^p}$

٤١٧٣ – $\displaystyle\iint\limits_{y\geqslant x^٢+١} \frac{dx\,dy}{x^٤+y^٢}$

٤١٧٤ – $\displaystyle\iint\limits_{٠\leqslant x\leqslant y} e^{-(x+y)}\,dx\,dy$

با گذر به مختصات قطبی مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

٤١٧٥ – $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^٢+y^٢)}\,dx\,dy$

٤١٧٦ – $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^٢+y^٢)}\cos(x^٢+y^٢)\,dx\,dy$

٤١٧٧ – $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^٢+y^٢)}\sin(x^٢+y^٢)\,dx\,dy$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

٤١٧٨ – $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^٢+٢bxy+cy^٢+٢dx+٢ey+f}\,dx\,dy$ که در آن $a<٠$, $ac-b^٢>٠$.

٤١٧٩ – $$\iint\limits_{\frac{x^٢}{a^٢}+\frac{y^٢}{b^٢}\geqslant ١} e^{-\left(\frac{x^٢}{a^٢}+\frac{y^٢}{b^٢}\right)}\,dx\,dy$$

٤١٨٠ – $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\left(\frac{x^٢}{a^٢}+٢\varepsilon\frac{x}{a}\,\frac{y}{b}+\frac{y^٢}{b^٢}\right)}\,dx\,dy \quad (٠<|\varepsilon|<١)$$

همگرایی انتگرالهای دوگانهٔ ناویژهٔ توابع ناپیوستهٔ زیر را بررسی کنید $(٠<m\leqslant|\varphi(x, y)|\leqslant M)$ ،

٤١٨١ – $\iint\limits_{\Omega}\frac{dx\,dy}{x^٢+y^٢}$ که در آن حوزهٔ Ω از شرایط $|y|\leqslant x^٢$, $x^٢+y^٢\leqslant ١$ تعیین میشود.

٤١٨٢ – $$\iint\limits_{x^٢+y^٢\leqslant ١}\frac{\varphi(x, y)}{(x^٢+xy+y^٢)^p}\,dx\,dy$$

٤١٨٣ – $$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant ١}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q} \quad (p>٠,\ q>٠)$$

٤١٨٤ – $$\int\limits_{٠}^{a}\int\limits_{٠}^{a}\frac{\varphi(x, y)}{|x-y|^p}\,dx\,dy$$

٤١٨٥ – $$\iint\limits_{x^٢+y^٢\leqslant ١}\frac{\varphi(x, y)}{(١-x^٢-y^٢)^p}\,dx\,dy$$

٤١٨٦ – ثابت کنید که اگر : ١) تابع $\varphi(x, y)$ در حوزهٔ محدود $a\leqslant x\leqslant A$, $b\leqslant y\leqslant B$ پیوسته؛ ٢) تابع $f(x)$ روی قطعهٔ $a\leqslant x\leqslant A$ پیوسته و ٣) $p<١$ باشد در آنصورت انتگرال زیر همگرا است :

$$\int\limits_{a}^{A}dx\int\limits_{b}^{B}\frac{\varphi(x, y)}{|f(x)-y|^p}\,dy$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

٤١٨٧ - $$\iint\limits_{x^{۲}=y^{۲}\leqslant ۱} \ln \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}\,dx\,dy$$

٤١٨٨ - $$\int_{۰}^{a} dx \int_{۰}^{x} \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} \quad (a>۰)$$

٤١٨٩ - $\iint\limits_{\Omega} \ln\sin(x-y)\,dx\,dy$ که در آن حوزهٔ Ω به خطوط $y=۰$ و $y=x,\ x=\pi$ محدود است .

٤١٩٠ - $$\iint\limits_{x^{۲}+y^{۲}\leqslant x} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}$$

همگرایی انتگرالهای سه‌گانهٔ زیر را بررسی کنید :

٤١٩١ - $\iiint\limits_{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\geqslant ۱} \frac{\varphi(x,\ y,\ z)}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{p}}\,dx\,dy\,dz$ که در آن $۰<m\leqslant|\varphi(x,\ y,\ z)|\leqslant M$

٤١٩٢ - $\iiint\limits_{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\leqslant ۱} \frac{\varphi(x,\ y,\ z)}{(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})^{p}}\,dx\,dy\,dz$ که در آن $۰<m\leqslant|\varphi(x,\ y,\ z)|\leqslant M$

٤١٩٣ - $$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\geqslant ۱} \frac{dx\,dy\,dz}{|x|^{p}+|y|^{q}+|z|^{r}} \quad (p>۰,\ \ q>۰,\ \ r>۰)$$

٤١٩٤ - $\int_{۰}^{a}\int_{۰}^{a}\int_{۰}^{a} \frac{f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz}{\{[y-\varphi(x)]^{۲}+[z-\psi(x)]^{۲}\}^{p}}$ که در آن $۰<m\leqslant|f(x,\ y,\ z)|\leqslant M$ و $\varphi(x)$, $\psi(x)$ توابع پیوسته‌ای روی قطعهٔ $[۰,\ a]$ میباشند .

٤١٩٥ - $$\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant ۱\\ |y|\leqslant ۱\\ |z|\leqslant ۱}} \frac{dx\,dy\,dz}{|x+y-z|^{p}}$$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

۴۱۹۶ –
$$\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱} \frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}$$

۴۱۹۷ –
$$\iiint\limits_{x^۲+y^۲+z^۲\geqslant ۱} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^۲+y^۲+z^۲)^۳}$$

۴۱۹۸ –
$$\iiint\limits_{x^۲+y^۲+z^۲\leqslant ۱} \frac{dx\,dy\,dz}{(۱-x^۲-y^۲-z^۲)^p}$$

۴۱۹۹ –
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^۲+y^۲+z^۲)}\,dx\,dy\,dz$$

۴۲۰۰ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_۱,\,x_۲,\,x_۳)}\,dx_۱\,dx_۲\,dx_۳$$

که در آن $(a_{ij}=a_{ij})$

$$P(x_۱,\,x_۲,\,x_۳)=\sum_{i=۱}^{۳}\sum_{j=۱}^{۳} a_{ij}x_ix_j$$

صورت کوادراتیک مثبت معین است .

بخش ۱۰ – انتگرالهای چندگانه

بند ۱ – محاسبهٔ مستقیم انتگرال چندگانه . اگر تابع $f(x_۱,\,x_۲,\,\dots,\,x_n)$ در حوزهٔ محدود Ω – ی تعریف شده با نامساویهای زیر ، پیوسته باشد :

$$\begin{cases} x_۱' \leqslant x_۱ \leqslant x_۱'' \\ x_۲'\ (x_۱) \leqslant x_۲ \leqslant x_۲''\ (x_۱) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n'(x_۱,\,x_۲,\,\dots,\,x_{n-۱}) \leqslant x_n \leqslant x_n''\ (x_۱,\,x_۲,\,\dots\,,\,x_n) \end{cases}$$

که در آن $x_۱''$ و $x_۱'$ اعداد ثابت و $x_۲'(x_۱),\,x_۲''(x_۱),\,\dots,\,x_n'(x_۱,\,x_۲,\,\dots\,,\,x_{n-۱}),$ $x_n''(x_۱,\,x_۲,\,\dots\,,\,x_{n-۱})$ توابع پیوسته میباشند در آنصورت انتگرال چندگانهٔ نظیر را میتوان با دستور زیر محاسبه نمود :

$$\iint\limits_{\Omega} \cdots \int f(x_{۱}, x_{۲}, \ldots x_n)\, dx_{۱}\, dx_{۲} \ldots dx_n =$$

$$= \int_{x'_{۱}}^{x''_{۱}} dx_{۱} \int_{x'_{۲}(x_{۱})}^{x''_{۲}(x_{۱})} dx_{۲} \ldots \int_{x'_n(x_{۱}, \ldots, x_{n-۱})}^{x''_n(x_{۱}, \ldots, x_{n-۱})} f(x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_n)\, dx_n$$

بند ۲ — تعویض متغیرها در انتگرال چندگانه. اگر ۱) تابع $f(x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_n)$ در حوزه متناهی اندازه‌پذیر Ω پیوستهٔ یکنواخت ؛ ۲) توابع پیوستهٔ دیفرانسیل‌پذیر

$$x_i = \varphi_i(\xi_{۱}, \xi_{۲}, \ldots, \xi_n) \quad (i = ۱, ۲, \ldots, n)$$

حوزهٔ Ω از فضای $Ox_{۱}x_{۲} \ldots x_n$ را بر حوزهٔ متناهی Ω' از فضای $O'\xi_{۱}\xi_{۲} \ldots \xi_n$ ، با تناظر یک به یک تصویر کند و ۳) در حوزهٔ Ω' ژاکوبین

$$I = \frac{D(x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_n)}{D(\xi_{۱}, \xi_{۲}, \ldots, \xi_n)}$$

در آنصورت دستور

$$\iint\limits_{\Omega} \cdots \int f(x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_n)\, dx_{۱}\, dx_{۲} \ldots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{\Omega'} \cdots \int f(\varphi_{۱}, \varphi_{۲}, \ldots, \varphi_n)\, |I|\, d\xi_{۱}\, d\xi_{۲} \ldots d\xi_n$$

درست است.

بخصوص بازای گذر به مختصات قطبی $(r, \varphi_{۱}, \varphi_{۲}, \ldots, \varphi_{n-۱})$ بکمک دستورهای

$$\begin{aligned}
x_{۱} &= r\cos\varphi_{۱} \\
x_{۲} &= r\sin\varphi_{۱}\cos\varphi_{۲} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-۱} &= r\sin\varphi_{۱}\sin\varphi_{۲} \ldots \sin\varphi_{n-۲}\cos\varphi_{n-۱} \\
x_n &= r\sin\varphi_{۱}\sin\varphi_{۲} \ldots \sin\varphi_{n-۲}\sin\varphi_{n-۱}
\end{aligned}$$

داریم :

$$I = \frac{D(x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_{۱}, \ldots, \varphi_{n-۱})} = r^{n-۱}\sin^{n-۲}\varphi_{۱},\ \sin^{n-۳}\varphi_{۲} \ldots \sin\varphi_{n-۲}$$

۴۲۰۱ – فرض کنیم $K(x, y)$ تابع پیوسته‌ای در حوزهٔ $R(a\leqslant x\leqslant b; a\leqslant y\geqslant b)$ باشد و

$$K_n(x, y)=\int_a^b\int_a^b\dots\int_a^b K(x, t_۱)K(t_۱, t_۲)\dots K(t_n, y)\,dt_۱dt_۲\dots dt_n$$

ثابت کنید که

$$K_{n+m+۱}(x, y)=\int_a^b K_n(x, t)K_m(t, y)\,dt$$

۴۲۰۲ – فرض کنیم $f=f(x_۱, x_۲, \dots, x_n)$ تابع پیوسته‌ای در حوزهٔ $۰\leqslant x_i\leqslant x\ (i=۱, ۲, \dots, n)$ باشد. تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\int_۰^x dx\int_۰^{x_۱}dx_۲\dots\int_۰^{x_{n-۱}}f\,dx_n=\int_۰^x dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-۱}\dots\int_{x_۲}^x f\,dx_۱\quad (n\geqslant ۲)$$

۴۲۰۳ – ثابت کنید که

$$\int_۰^t dt_۱\int_۰^{t_۱}dt_۲\dots\int_۰^{t_{n-۱}}f(t_۱)f(t_۲)\dots f(t_n)\,dt_n=\frac{۱}{n!}\left\{\int_۰^t f(\tau)\,d\tau\right\}^n$$

که در آن f تابع پیوسته‌ای است.

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای چندگانهٔ زیر:

۴۲۰۴ – الف) $\int_۰^۱\int_۰^۱\dots\int_۰^۱(x_۱^۲+x_۲^۲+\dots+x_n^۲)\,dx_۱dx_۲\dots dx_n$

ب) $\int_۰^۱\int_۰^۱\dots\int_۰^۱(x_۱, +x_۲+\dots+x_n)^۲\,dx_۱\,dx_۲\dots dx_n$

۴۲۰۵ – $I_n=\underset{\substack{x_۱\geqslant ۰,\ x_۲\geqslant ۰,\ \dots,\ x_n\geqslant ۰\\ x_۱+x_۲+\dots+x_n\leqslant a}}{\int\int\dots\int}dx_۱\,dx_۲\dots dx_n$

۴۲۰۶ – $\int_۰^۱ dx_۱\int_۰^{x_۱}dx_۲\dots\int_۰^{x_{n-۱}}x_۱x_۲\dots x_n\,dx_n$

۴۲۰۷ – $\underset{\substack{x_۱\geqslant ۰,\ x_۲\geqslant ۰,\ \dots,\ x_n\geqslant ۰\\ x_۱+x_۲+\dots+x_n\leqslant ۱}}{\int\int\dots\int}\sqrt{x_۲+x_۲+\dots+x_n}\,dx_۱dx_۲\dots dx_n$

٤٢٠٨ – مطلوبست تعیین حجم متوازی‌السطوح n – بعدی محدود به صفحات

$$a_{i١}x_١ + a_{i٢}x_٢ + \dots + a_{in}x_n = \pm h_i \quad (i = ١, ٢, \dots , n)$$

اگر

$$\Delta = |a_{ij}| \neq ٠$$

٤٢٠٩ – مطلوبست تعیین حجم هرم n – بعدی

$$\frac{x_١}{a_١} + \frac{x_٢}{a_٢} + \dots + \frac{x_n}{a_n} \leqslant ١, \; x_i \geqslant ٠ \quad (i = ١, ٢, \dots , n)$$

$$(a_i > ٠, \quad i = ١, ٢, \dots , n)$$

٤٢١٠ – مطلوبست تعیین حجم مخروط n – بعدی محدود به سطوح

$$\frac{x_١^٢}{a_١^٢} + \frac{x_٢^٢}{a_٢^٢} + \dots + \frac{x_{n-١}^٢}{a_{n-١}^٢} = \frac{x_n^٢}{a_n^٢}, \quad x_n = a_n$$

٤٢١١ – مطلوبست تعیین حجم کرهٔ n – بعدی

$$x_١^٢ + x_٢^٢ + \dots + x_n^٢ \leqslant a^٢$$

٤٢١٢ – مطلوبست $\iint\limits_{\Omega} \dots \int x_n^٢ \, dx_١ \, dx_٢ \dots dx_n$ که در آن حوزهٔ Ω با نامساویهای

$$x_١^٢ + x_٢^٢ + \dots + x_{n-١}^٢ \leqslant a^٢, \quad -\frac{h}{٢} \leqslant x_n \leqslant \frac{h}{٢}$$

مشخص شده است .

٤٢١٣ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\iint\limits_{x_١^٢ + x_٢^٢ + \dots + x_n^٢ \leqslant ١} \dots \int \frac{dx_١ \, dx_٢ \dots dx_n}{\sqrt{١ - x_١^٢ - x_٢^٢ - \dots - x_n^٢}}$$

٤٢١٤ – تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\int_٠^x dx_١ \int_٠^{x_١} dx_٢ \dots \int_٠^{x_{n-١}} f(x_n) \, dx_n = \int_٠^x f(u) \frac{(x-u)^{n-١}}{(n-١)!} \, du$$

٤٢١٥ – تساوی زیر را ثابت کنید :

$$\int_{۰}^{x} x_{۱}\, dx_{۱} \int_{۰}^{x_{۱}} x_{۲}\, dx_{۲} \dots \int_{۰}^{x_n} f(x_{n+۱})\, dx_{n+۱} = \frac{۱}{۲^n n!} \int_{۰}^{x} (x^{۲}-u^{۲})^n f(u)\, du$$

۴۲۱۶ – مطلوبست اثبات دستور دیریکله :

$$\underset{\substack{x_{۱},\, x_{۲},\, \dots,\, x_n \geqslant ۰ \\ x_{۱}+x_{۲}+\dots+x_n \leqslant ۱}}{\iint \dots \int} x_{۱}^{p_{۱}-۱} x_{۲}^{p_{۲}-۱} \dots x_n^{p_n-۱}\, dx_{۱}\, dx_{۲} \dots$$

$$\dots dx_n = \frac{\Gamma(p_{۱})\,\Gamma(p_{۲}) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_{۱}+p_{۲}+\dots+p_n+۱)} \quad (p_{۱},\ p_{۲},\ \dots,\ p_n > ۰)$$

۴۲۱۷ – مطلوبست اثبات دستور لیو و یل :

$$\underset{\substack{x_{۱},\, x_{۲},\, \dots,\, x_n \geqslant ۰ \\ n_{۱}+x_{۲}+\dots+n_n \leqslant ۱}}{\iint \dots \int} f(x_{۱}+x_{۲}+\dots+x_n)\, x_{۱}^{p_{۱}-۱} x_{۲}^{p_{۲}-۱} \dots x_n^{p_n-۱} dx_{۱} dx_{۲} \dots$$

$$\dots\ dx_n = \frac{\Gamma(p_{۱})\,\Gamma(p_{۲}) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_{۱}+p_{۲}+\dots+p_n)} \int_{۰}^{۲} f(u)\, u^{p_{۱}+p_{۲}+\dots+p_n-۱}\, du$$

$$(p_{۱},\ p_{۲},\ \dots,\ p_n > ۰)$$

که در آن $f(u)$ تابعی است پیوسته .

راهنمایی – روش استقرای ریاضی را بکار برید .

۴۲۱۸ – انتگرال n – گانهٔ $(n \geqslant ۲)$

$$\underset{\Omega}{\iint \dots \int} f\left(\sqrt{x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}+\dots+x_n^{۲}}\right) dx_{۱}\, dx_{۲} \dots dx_n$$

گسترده در حوزهٔ $x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}+\dots+x_n^{۲} \leqslant R^{۲}$ را که در آن $f(u)$ تابعی پیوسته است به انتگرال ساده بدل کنید .

۴۲۱۹ – مطلوبست محاسبهٔ « پتانسیل روی خود » کرهٔ همگن بشعاع R و چگالی $\rho_{۰}$ یعنی تعیین انتگرال

$$u = \frac{\rho_{۰}^{۲}}{۲} \underset{\substack{x_{۱}^{۲}+y_{۱}^{۲}+z_{۱}^{۲} \leqslant R^{۲} \\ x_{۲}^{۲}+y_{۲}^{۲}+z_{۲}^{۲} \leqslant R^{۲}}}{\iiiint\!\!\iint} \frac{dx_{۱}\, dy_{۱}\, dz_{۱}\, dx_{۲}\, dy_{۲}\, dz_{۲}}{r_{۱,\,۲}}$$

که در آن

$$r_{۱,۲} = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲ + (z_۱ - z_۲)^۲}$$

٤۲۲۰ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال n– گانهٔ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sum\limits_{i,j=۱}^{n} a_{ij}x_ix_j + ۲\sum\limits_{i=۱}^{n} b_ix_i + c\right\}}\, dx_۱dx_۲\dots dx_n$$

اگر

$$\sum_{i,j=۱}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

صورت کوادراتیک مثبت معینی باشد.

بخش ۱۱ – انتگرالهای منحنی‌الخط

بند ۱ – انتگرال منحنی‌الخط نوع اول. اگر $f(x, y, z)$ تابعی معین و پیوسته در نقاط منحنی هموار C:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t_۰ \leqslant t \leqslant T) \qquad (۱)$$

و ds دیفرانسیل قوس باشد در اینصورت

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_{t_۰}^{T} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^۲(t) + y'^۲(t) + z'^۲(t)}\, dt$$

خصوصیت این انتگرال در آن است که مستقل از جهت منحنی C است.

بند ۲ – کاربرد مکانیکی انتگرال منحنی‌الخط نوع اول. اگر $\varrho = \varrho(x, y, z)$ چگالی خطی در نقطهٔ متغیر (x, y, z) منحنی C باشد در اینصورت جرم منحنی برابر است با

$$M = \int_C \rho(x, y, z)\, ds$$

مختصات مرکز ثقل $(x_۰, y_۰, z_۰)$ این منحنی با دستورهای زیر بیان میشود:

$$x_۰ = \frac{۱}{M} \int_C x\rho(x, y, z)\, ds, \qquad y_۰ = \frac{۱}{M} \int_C y\rho(x, y, z)\, ds,$$

$$z_۰ = \frac{۱}{M} \int_C z\rho(x, y, z)\, ds$$

بند ۳ — انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم . اگر توابع $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ در نقاط منحنی (۱) پیوموده شده در جهت صعودی پارامتر t پیوسته باشد در آنصورت

$$\int_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \{P(x(t),\ y(t),\ z(t))\,x'(t) + Q(x(t),\ y(t),\ z(t))\,y'(t) +$$

$$+ R(x(t),\ y(t),\ z(t))\,z'(t)\}\,dt \qquad (۲)$$

با تغییر جهت مسیر منحنی C این انتگرال تغییر علامت میدهد . از لحاظ مکانیکی انتگرال (۲) عبارتست از کار نیروی متغیر $\{P, Q, R\}$ که نقطهٔ اثر آن منحنی C را میپیماید .

بند ٤ — حالت دیفرانسیل کامل . اگر

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = du$$

که در آن $u = u(x, y, u)$ یک تابع تک مقداری در حوزهٔ V است در آنصورت مستقل از شکل منحنی C که بتمامی در حوزهٔ V واقع شده است داریم :

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1)$$

که در آن (x_1, y_1, z_1) نقطه مبدأ و (x_2, y_2, z_2) نقطهٔ انتهای مسیر است . در حالت ساده‌تر اگر حوزهٔ V یک ارتباطی و توابع P, Q, R دارای مشتقات جزئی پیوستهٔ مرتبهٔ اول باشند برای آن لازم و کافی است شریط

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

در حوزهٔ V بطور اتحادی برقرار باشند . آنوقت تابع u را میتوان از روی دستور

$$u = (x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy +$$

$$+ \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz + c$$

تعیین نمود که در آن (x_0, y_0, z_0) یک نقطهٔ ثابت از حوزهٔ V و c یک مقدار ثابت دلخواه است .

از لحاظ مکانیکی این حالت نظیر کار نیروی دارای پتانسیل است .

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای منحنی‌الخط نوع اول زیر :

٤٢٢١ - $\int\limits_C (x+y)\,ds$ که در آن C دورگرد (consour) مثلث برئوس $O(٠, ٠)$,
$B(٠, ١)$ و $A(١, ٠)$ میباشد .

٤٢٢٢ - $\int\limits_C y^{٢}\,ds$ که در آن C طاقنمائی است از سیکلویید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(١ - \cos t) \quad (٠ \leqslant x \leqslant ٢\pi)$$

٤٢٢٣ - $\int\limits_C (x^{٢}+y^{٢})\,ds$ که در آن C منحنی زیر است :

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t) \quad (٠ \leqslant t \leqslant ٢\pi)$$

٤٢٢٤ - $\int\limits_C xy\,ds$ که در آن C قوسی است از هذلولی

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,t \quad (٠ \leqslant t \leqslant t_٠)$$

٤٢٢٥ - $\int\limits_C \left(x^{\frac{٤}{٣}} + y^{\frac{٤}{٣}}\right) ds$ که در آن C قوسی از آسترویید $x^{\frac{٢}{٣}} + y^{\frac{٢}{٣}} = a^{\frac{٢}{٣}}$
میباشد .

٤٢٢٦ - $\int\limits_C e^{\sqrt{x^{٢}+y^{٢}}}\,ds$ که در آن C دورگرد بر آمدهٔ محدود به منحنی‌های
$r = a, \ \varphi = ٠, \ \varphi = \frac{\pi}{٤}$ (φ, r مختصات قطبی است) میباشد .

٤٢٢٧ - $\int\limits_C |y|\,ds$ که در آن C قوسی از لمنیسکات زیر است :

$$(x^{٢}+y^{٢})^{٢} = a^{٢}(x^{٢}-y^{٢})$$

٤٢٢٨ - $\int\limits_C x\,ds$ که در آن C بخشی از حلزونی لگاریتمی $(k > ٠)$ $r = ae^{k\varphi}$
است که داخل دایرهٔ $r = a$ قرار دارد .

٤٢٢٩ - $\int\limits_C \sqrt{x^{٢}+y^{٢}}\,ds$ که در آن C دایرهٔ $x^{٢}+y^{٢} = ax$ میباشد .

٤٢٣٠ - $\int\limits_C \frac{ds}{y^{٢}}$ که در آن C خط زنجیری $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ میباشد .

طول قوس منحنی‌های فضایی زیر را پیدا کنید (پارامترها مثبتند):

۴۲۳۱ - $x = ۳t,\ y = ۳t^{۲},\ z = ۲t^{۳}$ از $O(۰, ۰, ۰)$ تا $A(۳, ۳, ۲)$

۴۲۳۲ - $x = e^{-t}\cos t,\ y = e^{-t}\sin t,\ z = e^{-t}$ بازای $۰ < t < +\infty$

۴۲۳۳ - $y = a \arcsin\frac{x}{a},\quad z = \frac{a}{۴}\ln\frac{a-x}{a+x}$ از $O(۰, ۰, ۰)$ تا $A(x_{۰}, y_{۰}, z_{۰})$

۴۲۳۴ - $(x-y)^{۲} = a(x+y),\quad x^{۲}-y^{۲} = \frac{۹}{۸}z^{۲}$ از $O(۰, ۰, ۰)$ تا $A(x_{۰}, y_{۰}, z_{۰})$

۴۲۳۵ - $x^{۲}+y^{۲} = cz,\ \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{z}{c}$ از $O(۰, ۰, ۰)$ تا $A(x_{۰}, y_{۰}, z_{۰})$

۴۲۳۶ - $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=a^{۲}, \sqrt{x^{۲}+y^{۲}}\operatorname{ch}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right) = a$ از نقطهٔ $A(a, ۰, ۰)$ تا نقطهٔ $B(x, y, z)$.

انتگرالهای منحنی الخط نوع اول زیر را در طول منحنی‌های فضایی داده شده حساب کنید:

۴۲۳۷ - $\int_{C}(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})\,ds$ که در آن C بخشی است از مارپیچ

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt \quad (۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi)$$

۴۲۳۸ - $\int_{C} x^{۲}\,ds$ که در آن C دایرهٔ زیر است:

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} = a^{۲},\quad x+y+z = ۰$$

۴۲۳۹ - $\int_{C} z\,ds$ که در آن C منحنی مارپیچی مخروطی زیر است:

$$x = t\cos t,\quad y = t\sin t,\quad z = t \quad (۰ \leqslant t \leqslant t_{۰})$$

۴۲۴۰ - $\int_{C} z\,ds$ که در آن C قوسی است از منحنی $x^{۲}+y^{۲} = z^{۲},\ y^{۲} = ax$، از نقطهٔ $O(۰, ۰, ۰)$ تا نقطهٔ $A(a, a, a\sqrt{۲})$

۴۲۴۱ - مطلوبست محاسبهٔ جرم منحنی $x = a\cos t,\ y = b\sin t\ \ (۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi)$ در صورتیکه چگالی خطی آن در نقطهٔ (x, y) برابر $\rho = |y|$ باشد.

٤٢٤١,١ – مطلوبست محاسبهٔ جرم کمان سهمی

$$y^{۲} = ۲px \quad \left(۰ \leqslant x \leqslant \frac{p}{۲}\right)$$

در صورتیکه چگالی خطی سهمی در نقطهٔ متغیر $M(x, y)$ برابر $|y|$ باشد.

٤٢٤٢ – مطلوبست محاسبهٔ جرم کمان منحنی $x = at,\ y = \frac{a}{۲}t^{۲},\ z = \frac{a}{۳}t^{۳}$ $۰ \leqslant t \leqslant ۱$ در صورتیکه چگالی آن طبق قانون $\rho = \sqrt{\frac{۲y}{a}}$ تغییر کند.

٤٢٤٣ – مختصات مرکز ثقل کمان منحنی همگن $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ از نقطهٔ $A(۰, a)$ تا نقطهٔ $B(b, h)$ را حساب کنید.

٤٢٤٤ – مطلوبست تعیین مرکز ثقل کمان سیکلویید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(۱ - \cos t) \quad (۰ \leqslant t \leqslant \pi)$$

٤٢٤٤,١ – مطلوبست لنگرهای ایستی

$$S_y = \int_C x\,ds, \quad S_x = \int_C y\,ds$$

از کمان C آسترویید

$$x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}} \quad (x \geqslant ۰,\ y \geqslant ۰)$$

نسبت به محورهای مختصات.

٤٢٤٤,٢ – مطلوبست لنگر لختی دایرهٔ

$$x^{۲} + y^{۲} = a^{۲}$$

نسبت بقطرش.

٤٢٤٤,٣ – مطلوبست لنگر لختی قطبی

$$I_{۰} = \int_C (x^{۲} + y^{۲})\,ds$$

نسبت به نقطهٔ $O(۰, ۰)$ از خط‌های زیر: الف) دورگرد (contour) C مربع $\max\{|x|, |y|\} = a$؛ ب) دورگرد C مثلث متساوی‌الاضلاع با رئوس به مختصات قطبی

$$P(a, ۰), \quad Q\left(b, \frac{۲\pi}{۳}\right), \quad R\left(a, \frac{٤\pi}{۳}\right)$$

٤٢٤٤,٤ – مطلوبست محاسبهٔ شعاع قطبی میانگین آسترویید

$$x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$$

یعنی عدد $r_{۰}\ (r_{۰}>۰)$ تعریف شده با دستور

$$I_{۰}=s\times r_{۰}^{۲}$$

که در آن $I_{۰}$ لنگر لختی قطبی آسترویید نسبت به مبدأ مختصات (**٤٢٤٤,٣** را ببینید) و s طول کمان آسترویید است.

٤٢٤٥ – مطلوبست محاسبهٔ مختصات مرکز ثقل دورگرد مثلث کروی

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=a^{۲};\quad x\geqslant ۰,\quad y\geqslant ۰,\quad z\geqslant ۰$$

٤٢٤٦ – مطلوبست محاسبهٔ مختصات مرکز ثقل کمان همگن

$$x=e^{t}\cos t,\quad y=e^{t}\sin t,\quad z=e^{t}\quad (-\infty<t\leqslant ۰)$$

٤٢٤٧ – لنگر لختی یک دور از منحنی مارپیچی

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=\frac{h}{۲\pi}t\quad (۰\leqslant t\leqslant ۲\pi)$$

را نسبت به محورهای مختصات پیدا کنید.

٤٢٤٨ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم

$$\int_{OA} x\,dy-y\,dx$$

که در آن O مبدأ مختصات و نقطهٔ A دارای مختصات (۲ , ۱) است در صورتیکه: الف) OA پاره‌خط باشد؛ ب) OA سهمی باشد که محور آن Oy است؛ پ) OA خط شکستهٔ حاصل از قطعهٔ OB محور Ox و قطعهٔ BA موازی با محور Oy باشد.

٤٢٤٩ – مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_{OA} x\,dy+y\,dx$$

برای مسیرهای الف)، ب) و پ) که در مسئله قبل به آن اشاره شده است.

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای منحنی‌الخط نوع دوم زیر در طول منحنی‌های مشخص شده در جهت صعود پارامترها .

۴۲۵۰ - $\int\limits_C (x^۲ - ۲xy)\,dx + (y^۲ - ۲xy)\,dy$ که در آن C عبارتست از سهمی

$$y = x^۲ \quad (-۱ \leqslant x \leqslant ۱)$$

۴۲۵۱ - $\int\limits_C (x^۲ + y^۲)\,dx + (x^۲ - y^۲)\,dy$ که در آن C عبارتست از منحنی

$$y = ۱ - |۱ - x| \quad (۰ \leqslant x \leqslant ۲)$$

۴۲۵۲ - $\oint\limits_C (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$ که در آن C بیضی $\dfrac{x^۲}{a^۲} + \dfrac{y^۲}{b^۲} = ۱$ است که در خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت پیموده میشود .

۴۲۵۳ - $\int\limits_C (۲a - y)\,dx + x\,dy$ که در آن C عبارتست از طاقنمای سیکلوئید

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(۱ - \cos t) \quad (۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi)$$

۴۲۵۴ - $\oint\limits_C \dfrac{(x + y)\,dx - (x - y)\,dy}{x^۲ + y^۲}$ که در آن C دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = a^۲$ است که در خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت پیموده میشود .

۴۲۵۵ - $\oint\limits_{ABCDA} \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$ که در آن $ABCDA$ دورگرد مربع برئوس $A(۱, ۰)$، $B(۰, ۱)$، $C(-۱, ۰)$ $D(۰, -۱)$ میباشد .

۴۲۵۶ - $\int\limits_{AB} dx \sin y + dy \sin x$ که در آن AB پاره‌خط واصل نقاط $A(۰\ \pi)$ و $B(\pi, ۰)$ میباشد .

۴۲۵۷ - $\int\limits_{OmAnO} dy \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} - dx$ که در آن OmA عبارتست از قطعه‌ای از سهمی $y = x^۲$ و OnA قطعه‌ای است از خط $y = x$.

با استدلال آنکه عبارت تحت انتگرال ، دیفرانسیل کاملی میباشد انتگرال‌های منحنی‌الخط زیر را حساب کنید :

۴۲۵۸ - $\int\limits_{(-۱, ۲)}^{(۲, ۳)} x\,dy + y\,dx$

۴۲۵۹ - $\int\limits_{(۰, ۱)}^{(۳, -۴)} x\,dx + y\,dy$

٤٢٦٠ – $\int\limits_{(٠,\ ١)}^{(٢,\ ٣)} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ ٤٢٦١ – $\int\limits_{(١,\ -١)}^{(١,\ ١)} (x-y)\,(dx-dy)$

٤٢٦٢ – $\int\limits_{(٠,\ ٠)}^{(a,\ b)} f(x+y)\,(dx+dy)$ که در آن $f(u)$ پیوسته است .

٤٢٦٣ – $\int\limits_{(٢,\ ١)}^{(١,\ ٢)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^{٢}}$ در طول مسیرهائی که محور Oy را نبرد .

٤٢٦٤ – $\int\limits_{(١,\ ٠)}^{(٦,\ ٨)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^{٢}+y^{٢}}}$ در طول مسیرهائی که از مبدأ مختصات نگذرد .

٤٢٦٥ – $\int\limits_{(x_{١},\ y_{١})}^{(x_{٢},\ y_{٢})} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$ که در آن φ, ψ توابع پیوسته‌ای میباشند .

٤٢٦٦ – $\int\limits_{(-٢,\ -١)}^{(٣,\ ٠)} (x^{٤} + ٤xy^{٣})\,dx + (٦x^{٢}y^{٢} - ٥y^{٤})\,dy$

٤٢٦٧ – $\int\limits_{(٠,\ -١)}^{(١,\ ٠)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^{٢}}$ در طول مسیرهائی که خط $y = x$ را نبرد .

٤٢٦٨ – $\int\limits_{(١,\ \pi)}^{(٢,\ \pi)} \left(١ - \frac{y^{٢}}{x^{٢}}\cos\frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) dy$ در طول مسیرهائی که محور Oy را نبرد .

٤٢٦٩ – $\int\limits_{(٠,\ ٠)}^{(a,\ b)} e^{x}(\cos y\,dx - \sin y\,dy)$

٤٢٧٠ – ثابت کنید که هرگاه $f(u)$ تابعی پیوسته و C دورگرد هموار قطعه‌ای بسته‌ای باشد آنگاه

$$\oint\limits_{C} f(x^{٢}+y^{٢})\,(x\,dx + y\,dy) = ٠$$

مطلوبست تعیین تابع اولیهٔ z اگر :

٤٢٧١ – $dz = (x^{٢} + ٢xy - y^{٢})\,dx + (x^{٢} - ٢xy - y^{٢})\,dy$

٤٢٧٢ – $dz = \frac{y\,dx - x\,dy}{٣x^{٢} - ٢xy + ٣y^{٢}}$

٤٢٧٣ – $dz = \frac{(x^{٢} + ٢xy + ٥y^{٢})\,dx + (x^{٢} - ٢xy + y^{٢})\,dy}{(x+y)^{٣}}$

٤٢٧٤ – $dz = e^x [e^y (x - y + ٢) + y]\, dx + e^x [e^y (x - y) + ١]\, dy$

٤٢٧٥ – $dz = \frac{\partial^{n+m+١} u}{\partial x^{n+١} \partial y^m}\, dx + \frac{\partial^{n+m+١} u}{dx^n\, dy^{m+١}}\, dy$

٤٢٧٦ – $dz = \frac{\partial^{n+m+١}}{dx^{n+٢} \partial y^{m-١}} \left(\ln \frac{١}{r}\right) dx - \frac{\partial^{n+m+١}}{\partial x^{n-١}\, \partial y^{m+٢}} \left(\ln \frac{١}{r}\right) dy$

که در آن $r = \sqrt{x^٢ + y^٢}$

٤٢٧٧ – ثابت کنید که بر آورد زیر برای انتگرال منحنی‌الخط درست است :

$$\left| \int_C P\, dx + Q\, dy \right| \leqslant LM$$

که در آن L طول مسیر انتگرال گیری و $M = \max \sqrt{P^٢ + Q^٢}$ روی کمان C است .

٤٢٧٨ – انتگرال

$$I_R = \oint_{x^٢ + y^٢ = R^٢} \frac{y\, dx - x\, dy}{(x^٢ + xy + y^٢)^٢}$$

را برآورد و ثابت کنید که $\lim_{R \to \infty} I_R = ٠$

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای منحنی‌الخط گرفته شده در طول منحنی‌های فضائی زیر (دستگاه مختصات دست راستی فرض شده است) :

٤٢٧٩ – $\int_C (y^٢ - z^٢)\, dx + ٢yz\, dy - x^٢\, dz$ که در آن C منحنی $x = t,$ $y = t^٢,$ $z = t^٣$ $(٠ \leqslant t \leqslant ١)$ است که در جهت صعود پارامتر پیموده میشود .

٤٢٨٠ – $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$ که در آن C یک دور منحنی مارپیچی $x = a \cos t,$ $y = a \sin t,$ $z = bt$ $(٠ \leqslant t \leqslant ٢\pi)$ است که در جهت صعود پارامتر پیموده میشود .

٤٢٨١ – $\int_C (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz$ که در آن C دایرهٔ $x^٢ + y^٢ + z^٢ = a^٢,$ $y = x \operatorname{tg} \alpha$ $(٠ < \alpha < \pi)$ که خلاف جهت گردش عقربهٔ ساعت پیموده میشود ، اگر از طرف x – های مثبت بآن نگاه کنیم .

٤٢٨٢ - $\int\limits_C y^٢\,dx + z^٢\,dy + x^٢\,dz$ که در آن C بخشی از منحنی ویویانی $x^٢ + y^٢ + z^٢ = a^٢,\ x^٢ + y^٢ = ax \quad (z \geqslant ٠,\ a > ٠)$ است که خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت پیموده میشود، اگر از طرف مثبت $(x > a)$ محور Ox بآن نگاه کنیم.

٤٢٨٣ - $\int\limits_C (y^٢ - z^٢)\,dx + (z^٢ - x^٢)\,dy + (x^٢ - y^٢)\,dz$ که در آن C دورگرد محدودکنندهٔ بخش از کرهٔ $x \geqslant ٠,\ y \geqslant ٠,\ z \geqslant ٠$ ، $x^٢ + y^٢ + z^٢ = ١$ میباشد و طوری پیموده میشود که قسمت بیرونی این سطح در سمت چپ قرار میگیرد.

مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای منحنی‌الخط دیفرانسیل های کامل زیر :

٤٢٨٤ - $\int\limits_{(١,\,١,\,١)}^{(٢,\,٣,\,-٤)} x\,dx + y^٢\,dy - z^٣\,dz$

٤٢٨٥ - $\int\limits_{(١,\,٢,\,٣)}^{(٦,\,١,\,١)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

٤٢٨٦ - $\int\limits_{(x_١,\,y_١,\,z_١)}^{(x_٢,\,y_٢,\,z_٢)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^٢ + y^٢ + z^٢}}$ که در آن نقطهٔ $(x_١, y_١, z_١)$ روی کرهٔ $x^٢ + y^٢ + z^٢ = a^٢$ و نقطهٔ $(x_٢, y_٢, z_٢)$ روی کرهٔ $x^٢ + y^٢ + z^٢ = b^٢ \quad (b > ٠,\ a > ٠)$ قرار دارد.

٤٢٨٧ - $\int\limits_{(x_١,\,y_١,\,z_١)}^{(x_٢,\,y_٢,\,z_٢)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy + \chi(z)\,dz$ که در آن توابع φ, ψ, λ پیوسته میباشند.

٤٢٨٨ - $\int\limits_{(x_١,\,y_١,\,z_١)}^{(x_٢,\,y_٢,\,z_٢)} f(x + y + z)\,(dx + dy + dz)$ که در آن f تابعی است پیوسته.

٤٢٨٩ - $\int\limits_{(x_١,\,y_١,\,z_١)}^{(x_٢,\,y_٢,\,z_٢)} f\left(\sqrt{x^٢ + y^٢ + z^٢}\right)(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$ که در آن f تابعی است پیوسته.

مطلوبست تعیین تابع اولیهٔ u اگر :

٤٢٩٠ – $$du = (x^{2} - 2yz)\,dx + (y^{2} - 2xz)\,dy + (z^{2} - 2xy)\,dz$$

٤٢٩١ – $$du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^{2}}\right) dy - \frac{xy}{z^{2}}\,dz$$

٤٢٩٢ – $$du = \frac{(x+y-z)\,dx + (x+y-z)\,dy + (x+y+z)\,dz}{x^{2}+y^{2}+z^{2}+2xy}$$

٤٢٩٣ – مطلوبست محاسبهٔ کار انجام شده توسط نیروی ثقل وقتیکه نقطه به جرم m از وضع (x_1, y_1, z_1) به وضع (x_2, y_2, z_2) جا بجا شود (محور Oz در جهت قائم ببالا متوجه است) .

٤٢٩٤ – مطلوبست محاسبهٔ کار نیروی ارتجاعی متوجه به مبدأ مختصات که مقدار آن متناسب با دوری نقطهٔ مادی از مبدأ مختصات است ، اگر این نقطه در جهت خلاف گردش عقربه‌های ساعت ربع مثبت بیضی $\frac{x^{2}}{y^{2}} + \frac{y^{2}}{b^{2}} = 1$ را بپیماید .

٤٢٩٥ – مطلوبست کار نیروی جاذبه $F = \frac{k}{r^{2}}$ که در آن $r = \sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}$ که روی جرم واحد اثر میکند ، وقتیکه این جرم از نقطهٔ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ به نقطهٔ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ جا بجا شود .

بخش ١٢ – دستور گرین

بند ١ – رابطهٔ انتگرال منحنی الخط با انتگرال دوگانه . اگر C دورگرد هموار قطعه‌ای سادهٔ بسته و محدودکنندهٔ حوزهٔ یک‌ارتباطی متناهی S باشد و طوری پیموده شود که حوزهٔ S در سمت چپ قرار گیرد و توابع $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ با مشتق‌های جزئی مرتبه اول خود در حوزهٔ S و مرز آن پیوسته باشند در آنصورت دستور گرین برقرار است :

$$\oint_{C} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (1)$$

دستور (١) برای حوزهٔ متناهی S که با چند دورگرد ساده محدود شده نیز درست است هرگاه منظور از مرز C حوزهٔ مذکور مجموع تمام دورگردهای مرزی باشد که جهت پیمودن آنها طوری انتخاب میشود که حوزهٔ S در سمت چپ قرار گیرد .

بند ۲ — مساحت حوزهٔ مستوی . مساحت S محدود به دورگرد سادهٔ هموار قطعه‌ای C برابر است با

$$S = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{۱}{۲} \oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

در این بخش اگر خلاف آن تصریح نشود فرض بر این است که دورگرد بستهٔ انتگرال‌گیری ساده (بدون نقطه‌های خودبری) است و طوری پیموده میشود که حوزهٔ محدود شدهٔ آن که شامل نقطهٔ بی‌نهایت دور نیست در سمت چپ قرار میگیرد (جهت مثبت) .

٤۲۹۶ — بکمک دستور گرین انتگرال منحنی‌الخط زیر را تبدیل کنید :

$$I = \oint_C \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}\,dx + y\,[xy + \ln(x + \sqrt{x^{۲} + y^{۲}})]\,dy$$

که در آن دورگرد C حوزهٔ متناهی S را محدود میسازد .

٤۲۹۷ — با کاربرد دستور گرین مطلوبست محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط

$$I = \oint_K (x + y)^{۲}\,dx - (x^{۲} + y^{۲})\,dy$$

که در آن K دورگرد مثلث ABC برئوس $A(۱, ۱)$ ، $B(۳, ۲)$ ، $C(۲, ٥)$ پیموده شده در جهت مثبت است .

با محاسبهٔ مستقیم انتگرال ، نتیجهٔ حاصل را امتحان کنید .

با کاربرد دستور گرین انتگرالهای منحنی‌الخط زیر را حساب کنید :

٤۲۹۸ — $\oint_C xy^{۲}dy - x^{۲}y\,dx$ که در آن C دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} = a^{۲}$ میباشد .

٤۲۹۹ — $\oint_C (x + y)\,dx - (x - y)\,dy$ که در آن C بیضی

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$$

میباشد .

٤۳۰۰ — $\oint_C e^x\,[(۱ - \cos y)\,dx - (y - \sin y)\,dy]$ که در آن C دورگرد محدود کنندهٔ حوزهٔ $۰ < x < \pi,\ ۰ < y < \sin x$ میباشد که در جهت مثبت پیموده میشود .

۴۳۰۱ –

$$\oint\limits_{x^۲+y^۲=R^۲} e^{-(x^۲-y^۲)} (\cos ۲xy\,dx + \sin ۲xy\,dy)$$

۴۳۰۲ – انتگرالهای منحنی‌الخط

$$I_۱ = \int\limits_{AmB} (x+y)^۲\,dx - (x-y)^۲\,dy$$

و

$$I_۲ = \int\limits_{AnB} (x+y)^۲\,dx - (x-y)^۲\,dy$$

که در آن AmB خط واصل نقاط $A(۱, ۱)$ و $B(۲, ۶)$ و AnB سهمی به محور قائم مار بر همان نقاط A و B و مبدأ مختصات است چه قدر از همدیگر اختلاف دارند ؟

۴۳۰۳ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط

$$\int\limits_{AmO} (e^x \sin y - my)\,dx + (e^x \cos y - m)\,dy$$

که در آن AmO نیمدایرهٔ بالائی $x^۲ + y^۲ = ax$ پیموده شده از نقطهٔ $A(a, ۰)$ تا نقطهٔ $O(۰, ۰)$ میباشد .

راهنمائی – پاره‌خط مستقیم OA از محور Ox را به مسیر بیافزایید تا بسته شود .

۴۳۰۴ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط

$$\int\limits_{AmB} [\varphi(y) e^x - my]\,dx + [\varphi'(y) e^x - m]\,dy$$

که در آن $\varphi(y), \varphi'(y)$ توابع پیوسته و AmB مسیر دلخواه واصل نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ میباشد که توأماً با پاره‌خط AB مساحت $AmBA$ بمقدار مفروض S را محدود میسازد .

۴۳۰۵ – مطلوبست تعیین دو تابع پیوستهٔ دو بار دیفرانسیل‌پذیر $P(x, y), Q(x, y)$ بقسمی که انتگرال منحنی‌الخط

$$I = \oint\limits_{C} P(x+\alpha,\ y+\beta)\,dx + Q(x+\alpha,\ y+\beta)\,dy$$

برای دورگرد دلخواه بستهٔ C مستقل از ثابت‌های α و β باشد .

۴۳۰۶ – تابع دیفرانسیل‌پذیر $F(x, y)$ در چه شرطی باید صدق کند تا انتگرال منحنی‌الخط

$$\int\limits_{AmB} F(x,\ y)\,(y\,dx + x\,dy)$$

مستقل از شکل مسیر انتگرال‌گیری باشد ؟

٤٣٠٧ – مطلوبست محاسبهٔ

$$I = \oint\limits_{C} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^{۲} + y^{۲}}$$

که در آن C دورگرد بستهٔ سادهٔ ناگذرنده از مبدأ مختصات و پیمود شده در جهت مثب است .

راهنمائی – دو حالت در نظر بگیرید : ۱) مبدأ مختصات در خارج دورگرد قرار دارد ؛ ۲) دورگرد C مبدأ مختصات را در بر میگیرد .

بکمک انتگرالهای منحنی‌الخط مساحت‌های محدود به منحنی‌های زیر را حساب کنید :

٤٣٠٨ – بیضی $(\cdot \leqslant t \leqslant ۲\pi)$ $\quad x = a\cos t,\quad y = b\sin t$

٤٣٠٩ – آسترویید $(\cdot \leqslant t \leqslant ۲\pi)$ $\quad x = a\cos^{۳} t,\quad y = b\sin^{۳} t$

٤٣١٠ – سهمی $(a > \cdot)$ $\quad (x+y)^{۲} = ax$ و محور Ox

٤٣١١ – حلقهٔ برگ دکارتی $(a > \cdot)$ $\quad x^{۳} + y^{۳} = ۳axy$

راهنمائی – فرض کنید $y = tx$.

٤٣١٢ – لمنیسکات $(x^{۲} + y^{۲})^{۲} = a^{۲}(x^{۲} - y^{۲})$

راهنمائی – فرض کنید $x = x\operatorname{tg}\varphi$

٤٣١٣ – منحنی $x^{۳} + y^{۳} = x^{۲} + y^{۲}$ و محورهای مختصات .

٤٣١٤ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت محدود به منحنی

$$(x+y)^{n+m+۱} = ax^{n}y^{m} \quad (a > \cdot,\ n > \cdot,\ m > \cdot)$$

٤٣١٥ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت محدود به منحنی

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{n} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n} = ۱ \quad (a > \cdot,\ b > \cdot,\ n > \cdot)$$

و محورهای مختصات .

راهنمائی – فرض کنید

$$\frac{x}{a} = \cos^{\frac{۲}{n}}\varphi,\quad \frac{y}{b} = \sin^{\frac{۲}{n}}\varphi$$

٤٣١٦ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت محدود به منحنی

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{n}+\left(\frac{y}{b}\right)^{n}=\left(\frac{x}{a}\right)^{n-١}+\left(\frac{y}{b}\right)^{n-١}$$

$(a>٠,\ b>٠,\ n>٠)$ و محورهای مختصات .

٤٣١٧ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت حلقهٔ منحنی

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{٢n+١}+\left(\frac{y}{b}\right)^{٢n+١}=c\left(\frac{x}{a}\right)^{n}\left(\frac{y}{b}\right)^{n}\quad(a>٠,\ b>٠,\ c>٠,\ n>٠)$$

٤٣١٨ – اپی سیکلویید (برون چرخزاد) عبارتست از منحنی پیموده شده توسط نقطه‌ای از دایرهٔ متحرک بشعاع r که بدون لغزش روی دایرهٔ ثابت بشعاع R می‌غلتد و در بیرون آن واقع است .

مطلوبست محاسبهٔ مساحت محدود به اپی سیکلویید با فرض $\frac{R}{r}=n$ که در آن $n\geqslant ١$ عددیست درست .

حالت خاص $r=R$ (کاردیویید) را بررسی کنید .

٤٣١٩ – هیپوسیکلویید (درون چرخزاد) عبارتست از منحنی پیموده شده توسط نقطه‌ای از دایرهٔ متحرک با شعاع r که بدون لغزش روی دایرهٔ ثابت بشعاع R می‌غلتد و در درون آن واقع است . مطلوبست محاسبهٔ مساحت محدود به هیپوسیکلویید با فرض $\frac{R}{r}=n$ که در آن $n\geqslant ٢$ عددیست درست .

حالت خاص $r=\frac{R}{٤}$ (آسترویید) را بررسی کنید .

٤٣٢٠ – مطلوبست محاسبهٔ مساحت بخشی از سطح استوانه‌ای $x^{٢}+y^{٢}=ax$ که توسط سطح $x^{٢}+y^{٢}+z^{٢}=a^{٢}$ بریده میشود .

٤٣٢٠,١ – ثابت کنید که حجم جسم حاصل از دوران دورگرد سادهٔ بستهٔ C واقع در نیم صفحهٔ بالائی $y\geqslant ٠$ حول محور Ox برابر است با

$$V=-\pi\oint_{C}y^{٢}\,dx$$

٤٣٢١ – مطلوبست محاسبهٔ

$$I=\frac{١}{٢\pi}\oint_{C}\frac{X\,dY-Y\,dX}{X^{٢}+Y^{٢}}$$

۱ اگر $X = ax + by,\ Y = cx + dy$ و دورگرد بستهٔ سادهٔ C مبدأ مختصات را در بر بگیرد ($ad - bc \neq 0$) .

٤٣٢٢ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال I (مسئله قبل را ببینید) اگر $X = \varphi(x, y),$ $Y = \psi(x, y)$ و دورگرد سادهٔ C مبدأ مختصات را در بر گیرد ، ضمناً منحنی‌های $\varphi(x, y) = 0,\ \psi(x, y) = 0$ دارای چند نقطهٔ تقاطع ساده واقع در درون دورگرد C باشند .

٤٣٢٣ – نشان دهید که اگر C دورگرد بسته و $\mathbf{l}$ جهت دلخواهی باشد در آنصورت

$$\oint_C \cos(\mathbf{l}, \mathbf{n})\, ds = 0$$

که در آن $\mathbf{n}$ قائم خارجی دورگرد C است .

٤٣٢٤ – مطلوبست تعیین مقدار انتگرال

$$I = \oint_C [x \cos(\mathbf{n}, x)) + y \cos(\mathbf{n}, y)]\, ds$$

که در آن C منحنی سادهٔ بسته‌ای است که حوزهٔ متناهی S را محدود ساخته و $\mathbf{n}$ قائم خارجی دورگرد C است .

٤٣٢٥ – مطلوبست تعیین

$$\lim_{d(S) \to 0} \frac{1}{S} \oint_C (\mathbf{F} \times \mathbf{n})\, ds$$

که در آن S مساحت محدود به دورگرد C احاطه‌کنندهٔ نقطهٔ (x_0, y_0)، $d(S)$ قطر حوزهٔ S و $\mathbf{n}$ بردار یکان قائم خارجی دورگرد C و $\mathbf{F}\{XY\}$ بردار پیوستهٔ دیفرانسیل‌پذیر در $S + C$ است .

بخش ۱۳ – کاربرد فیزیکی انتگرال منحنی‌الخط

٤٣٢٦ – جرم M که بطور یکنواخت روی نیمدایرهٔ بالائی $x^2 + y^2 = a^2,$ $y \geqslant 0$ توزیع شده با چه نیروئی نقطهٔ مادی بجرم m را که وضع $(0, 0)$ را اشغال کرده است جذب میکند ؟

۴۲۲۷ – مطلوبست محاسبهٔ پتانسیل لگاریتمی قشر سادهٔ

$$u(x,\ y) = \oint_{C} \kappa \ln \frac{۱}{r}\, ds$$

که در آن $\kappa = \mathrm{const}$ چگالی و $r = \sqrt{(\xi - x)^{۲} + (\eta - y)^{۲}}$ و دورگرد C دایرهٔ $\xi^{۲} + \eta^{۲} = R^{۲}$ میباشد .

۴۲۲۸ – در مختصات قطبی $\rho,\ \varphi$ مطلوبست محاسبهٔ پتانسیل لگاریتمی قشر سادهٔ

$$I_{۱} = \int_{۰}^{۲\pi} \cos m\psi \ln \frac{۱}{r}\, d\psi, \quad I_{۲} = \int_{۰}^{۲\pi} \sin m\psi \ln \frac{۱}{r}\, d\psi$$

که در آن r فاصلهٔ بین نقطهٔ $(\rho,\ \varphi)$ و نقطهٔ متغیر $(۱,\ \psi)$ و m عدد طبیعی است .

۴۲۲۹ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال گوس :

$$u(x,\ y) = \oint_{C} \frac{\cos(r,\ n)}{r}\, ds$$

که در آن $r = \sqrt{(\xi - x)^{۲} + (\eta - y)^{۲}}$ طول بردار $\vec{r}$ واصل نقطه $A(x,\ y)$ و نقطهٔ متغیر $M(\xi,\ \eta)$ از دورگرد هموار سادهٔ بسته C میباشد و $(\mathbf{r},\ \mathbf{n})$ زاویهٔ بین بردار $\mathbf{r}$ و قائم خارجی $\mathbf{n}$ بر منحنی C در نقطهٔ M آن است .

۴۲۳۰ – در مختصات قطبی $\varrho,\ \varphi$ مطلوبست محاسبهٔ پتانسیل لگاریتمی قشر دوگانهٔ

$$K_{۱} = \int_{۰}^{۲\pi} \cos m\psi \frac{\cos(\mathbf{r},\ \mathbf{n})}{r}\, d\psi, \quad K_{۲} = \int_{۰}^{۲\pi} \sin m\psi \frac{\cos(\mathbf{r},\ \mathbf{n})}{r}\, d\psi$$

که در آن r فاصلهٔ بین نقطهٔ $A(\rho,\ \varphi)$ و نقطهٔ متغیر $M(۱,\ \psi)$ و $(\mathbf{r},\ \mathbf{n})$ زاویهٔ بین امتداد $AM = \mathbf{r}$ و شعاع $OM = \mathbf{n}$ رسم شده از نقطه $O(۰,\ ۰)$ میباشد و m عدد طبیعی است .

۴۲۳۱ – تابع دو بار دیفرانسیل‌پذیر $u = u(x,\ y)$ را هارمونیک نامند اگر $\Delta u = \frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} u}{\partial y^{۲}} = ۰$. ثابت کنید که u وقتی و فقط وقتی هارمونیک است که

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = ٠$$

که در آن C دورگرد بستهٔ دلخواه و $\frac{\partial u}{\partial n}$ مشتق نسبت به قائم خارجی بر این دورگرد است .

٤٣٣٢ – ثابت کنید که

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial u}{dy}\right)^{۲}\right] dx\, dy = -\iint_S u\, \Delta u\, dx\, dy + \oint_C u\, \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$$

که در آن دورگرد هموار C حوزهٔ متناهی S را محدود میکند .

٤٣٣٣ – ثابت کنید تابعی که در درون حوزهٔ متناهی S و در مرز C آن هارمونیک باشد بطور تک‌مقداری با مقادیر خود بر روی دورگرد C تعیین میشود . (مسالهٔ ٤٣٣٢ را ببینید) .

٤٣٣٤ – مطلوبست اثبات دستور دوم گرین در صفحهٔ

$$\iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy = \oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds$$

که در آن دورگرد هموار C حوزهٔ متناهی S را محدود میسازد و $\frac{\partial}{\partial n}$ مشتق نسبت به امتداد قائم خارجی بر C است .

٤٣٣٥ – با استفاده از دستور دوم گرین ثابت کنید که اگر تابع $u = u(x, y)$ در حوزهٔ متناهی بستهٔ S هارمونیک باشد در آنصورت

$$u(x, y) = \frac{۱}{۲\pi} \oint_C \left(u\, \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\, \frac{\partial u}{dn}\right) ds$$

که در آن C مرز حوزهٔ S ، n امتداد قائم خارجی بر دورگرد C و (x, y) نقطهٔ درونی حوزهٔ S و $r = \sqrt{(\xi - x)^{۲} + (\eta - y)^{۲}}$ فاصلهٔ بین نقطهٔ (x, y) و نقطهٔ متغیر (ξ, η) از دورگرد C است .

<u>راهنمائی</u> – نقطهٔ (x, y) را یکجا با همسایگی مدور بی‌نهایت کوچک آن از حوزهٔ S ببرید و برای بخش باقی حوزهٔ S دستور دوم گرین را بکار برید .

٤٣٣٦ – قضیهٔ میانگین را برای تابع هارمونیک $u(M)=u(x, y)$ ثابت کنید :

$$u(M)=\frac{۱}{۲\pi R}\oint_{C} u(\xi, \eta)\, ds$$

که در آن C دایرهٔ بشعاع R و بمرکز نقطهٔ M است .

٤٣٣٧ – ثابت کنید که تابع $u(x, y)$ هارمونیک در حوزهٔ محدود و بسته و ناثابت در این حوزه نمیتواند به بیشترین و کمترین مقدار خود در نقطهٔ درون این حوزه برسد (اصل ماگزیمم)

٤٣٣٨ – مطلوبست اثبات دستور ریمن

$$\iint_{S}\begin{vmatrix} L]u[& M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy=\oint_{C} P\, dx+Q\, dy$$

که در آن

$$L[u]=\frac{\partial^۲ u}{\partial x\, \partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu$$

$$M[v]=\frac{\partial^۲ v}{\partial x\, \partial y}-a\frac{\partial v}{\partial x}-b\frac{\partial v}{\partial y}+cv$$

(a ، b ، c ثابتند) ، P, Q توابع معینی هستند و دورگرد C حوزهٔ متناهی S را محدود میسازد .

٤٣٣٩ – فرض کنیم $u=u(x, y), v=v(x, y)$ موٴلفه‌های سرعت جریان پایای یک مایع باشند . مطلوبست تعیین مقدار مایع جاری‌شده در واحد زمان از حوزهٔ S که با دورگرد C محدود شده است (یعنی تفاوت بین مقدار مایع وارده و مایع خارج شده) . اگر مایع قابلیت تراکم نداشته و حوزهٔ S فاقد سرچشمهٔ آب و آبریز باشد توابع u, v درچه معادله‌ای صدق میکنند ؟

٤٣٤٠ – طبق قانون بیو – ساوار جریان برق i گذرنده از جزٔ ds هادی در نقطهٔ $M(x, y, z)$ از فضا میدان مغناطیسی با شدت

$$d\mathbf{H}=ki\frac{(\mathbf{r}\times ds)}{\mathbf{r}^۳}$$

را ایجاد میکند که در آن $\mathbf{r}$ بردار واصل جز ds به نقطهٔ M و k ضریب تناسب است .

مطلوبست تعیین تصاویر H_x, H_y, H_z شدت میدان مغناطیسی H در نقطهٔ M برای حالت هادی بستهٔ C .

بخش ۱٤ – انتگرال های روی سطح

بند ۱ – انتگرال روی سطح نوع اول . اگر S سطح هموار قطعه‌ای دوطرفهٔ

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad ((u, v) \in \Omega) \qquad (۱)$$

و $f(x, y, z)$ تابع معین و پیوسته‌ای در نقاط سطح S باشد در آنصورت

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), \quad z(u, v)) \sqrt{EG - F^{۲}}\, du\, dv \qquad (۲)$$

که در آن

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^{۲},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{۲},$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\, \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\, \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\, \frac{\partial z}{\partial v}$$

در حالت خاص هرگاه سطح S دارای معادله‌ای بصورت

$$z = z(x, y) \quad ((x, y) \in \sigma)$$

باشد که در آن $z(x, y)$ تابع تک مقداری پیوستهٔ دیفرانسیل‌پذیر است آنگاه

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{\sigma} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{۱ + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{۲}}\, dx\, dy$$

این انتگرال مستقل از انتخاب طرف سطح S است .

اگر تابع $f(x, y, z)$ بعنوان چگالی سطح S در نقطهٔ (x, y, z) در نظر گرفته شود در آنصورت انتگرال (۲) معرف جرم این سطح خواهد بود .

بند ۲ – انتگرال روی سطح نوع دوم . اگر S سطح هموار دوطرفه و S^+ طرفی از آن باشد که با جهت قایم $n\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ مشخص میشود و $P = P(x, y, z),\ Q = Q(x, y, z),\ R = R(x, y, z)$ سه تابع معین پیوسته بر سطح S باشند در آنصورت

$$\iint\limits_{S^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS \qquad (۳)$$

اگر سطح S بشکل پارامتری (۱) داده شود در آنصورت کسینوس‌های هادی قایم $\mathbf{n}$ با دستورهای

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^۲+B^۲+C^۲}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^۲+B^۲+C^۲}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^۲+B^۲+C^۲}}$$

تعیین میشوند که در آن

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

و علامت‌های جلو رادیکال‌ها بطور مناسب انتخاب میشوند.
بازای گذر به طرف دیگر S^- سطح S، انتگرال (۳) تغییر علامت میدهد.

۴۳۴۱ - انتگرالهای روی سطح

$$I_۱ = \iint_S (x^۲ + y^۲ + z^۲)\, dS$$

و

$$I_۲ = \iint_P (x^۲ + y^۲ + z^۲)\, dP$$

که در آنها S سطح کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ و P سطح هشت وجهی $|x| + |y| + |z| = a$ محاط در این کره است با یکدیگر چه قدر اختلاف دارند؟

۴۳۴۲ - مطلوبست محاسبهٔ

$$\iint_S z\, dS$$

که در آن S بخشی از سطح $(a > ۰)$ $x^۲ + z^۲ = ۲az$ است که توسط سطح $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ بریده شده است.

انتگرالهای روی سطح نوع اول زیر را حساب کنید:

۴۳۴۳ - $\iint_S (x + y + z)\, dS$ که در آن S سطح و زیر است:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲, \quad z \geqslant ۰$$

٤٣٤٤ – $\iint\limits_S (x^٢+y^٢)\,dS$ که در آن S رویهٔ جسم زیر است :

$$\sqrt{x^٢+y^٢}\leqslant z\leqslant ١$$

٤٣٤٥ – $\iint\limits_S \frac{dS}{(١+x+y)^٢}$ که در آن S رویهٔ چهار وجهی زیر است .

$$x+y+z\leqslant ١,\quad x\geqslant ٠,\quad y\geqslant ٠,\quad z\geqslant ٠$$

٤٣٤٦ – $\iint\limits_S |xyz|\,dS$ که در آن S بخشی است از سطح $z=x^٢+y^٢$ که توسط صفحهٔ $z=١$ جدا شده است .

٤٣٤٧ – $\iint\limits_S \frac{dS}{h}$ که در آن S سطح بیضوی و h فاصلهٔ مرکز بیضوی از صفحهٔ مماس بر جزء dS سطح بیضوی میباشد .

٤٣٤٨ – $\iint\limits_S z\,dS$ که در آن S بخشی است از سطح هلیکویید

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=v\quad (٠<u<a;\ ٠<v<٢\pi)$$

٤٣٤٩ – $\iint\limits_S z^٢\,dS$ که در آن S بخشی است از سطح مخروط

$$x=r\cos\varphi\sin\alpha,\quad y=r\sin\varphi\sin\alpha,\quad z=r\cos\alpha$$

$(٠\leqslant r\leqslant a,\ ٠\leqslant\varphi\leqslant ٢\pi)$ و $\alpha\left(٠<\alpha<\frac{\pi}{٢}\right)$ ثابت است .

٤٣٥٠ – $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,dS$ که در آن S بخشی است از سطح مخروطی $z=\sqrt{x^٢+y^٢}$ که توسط سطح زیر بریده شده است :

$$x^٢+y^٢=٢ax$$

٤٣٥١ – مطلوبست اثبات دستور پواسون

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,dS=٢\pi\int_{-١}^{١} f\left(u\sqrt{a^٢+b^٢+c^٢}\right)du$$

که در آن S سطح کرهٔ $x^٢+y^٢+z^٢=١$ است .

٤٣٥٢ – مطلوبست تعیین جرم پوستهٔ سهموی

$$z = \frac{۱}{۲}(x^{۲} + y^{۲}) \quad (۰ \leqslant z \leqslant ۱)$$

که چگالی آن طبق قانون $\rho = z$ تغییر میکند.

٤٣٥٢,۱ – مطلوبست تعیین جرم نیمکرهٔ

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = a^{۲} \quad (z \geqslant ۰)$$

که چگالی آن در هر نقطهٔ $M(x, y, z)$ آن برابر $\frac{z}{a}$ میباشد.

٤٣٥٢,۲ – مطلوبست محاسبهٔ لنگر ایستی پلاک همگن مثلثی شکل

$$x + y + z = a \quad (x \geqslant ۰,\ y \geqslant ۰,\ z \geqslant ۰)$$

نسبت به صفحات مختصات.

٤٣٥٣ – مطلوبست محاسبهٔ لنگر لختی پوستهٔ کروی همگن

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = a^{۲} \quad (z \geqslant ۰)$$

نسبت به محور Oz در صورتیکه چگالی آن $\rho_{۰}$ باشد.

٤٣٥٤ – لنگر لختی پوستهٔ مخروطی همگن

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{a^{۲}} - \frac{z^{۲}}{b^{۲}} = ۰ \quad (۰ \leqslant z \leqslant b)$$

به چگالی $\rho_{۰}$ را نسبت به خط

$$\frac{x}{۱} = \frac{y}{۰} = \frac{z-b}{۰}$$

حساب کنید.

٤٣٥٥ – مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل بخشی از سطح همگن

$$z = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$$

که توسط سطح $x^{۲} + y^{۲} = ax$ بریده شده است.

٤٣٥٦ – مطلوبست تعیین مختصات مرکز ثقل سطح همگن

$$z = \sqrt{a^{۲} - x^{۲} - y^{۲}} \quad (x \geqslant ۰;\ y \geqslant ۰;\ x + y \leqslant a)$$

٤٣٥٦,۱ – مطلوبست محاسبهٔ لنگر قطبی

$$I_{۰} = \iint\limits_{S} (x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})\, dS$$

سطوح S زیر:

الف) سطح مکعب $\max\{|x|,\ |y|,\ |z|\}=a$ ؛

ب) تمامی سطح استوانهٔ $x^۲+y^۲\leqslant R^۲;\ ۰\leqslant z\leqslant H$

۴۳۵۶٫۲ – مطلوبست محاسبهٔ لنگر لختی پلاک مثلثی شکل

$$x+y+z=۱\quad (x\geqslant ۰,\ y\geqslant ۰,\ z\geqslant ۰)$$

نسبت به صفحات مختصات .

۴۳۵۷ – سطح مخروطی ناقص همگن

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=r\quad (۰\leqslant\varphi\leqslant ۲\pi,\ ۰<b\leqslant r\leqslant a)$$

به چگالی $\rho_۰$ با چه نیروئی نقطهٔ مادی به جرم m را که در رأس این سطح قرار گرفته است جذب میکند ؟

۴۳۵۸ – مطلوبست پتانسیل سطح کروی همگن $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲\,(S)$ به چگالی $\rho_۰$ روی نقطهٔ $M_۰\,(x_۰,\ y_۰,\ z_۰)$ یعنی محاسبهٔ انتگرال

$$u=\iint_S \frac{\rho_۰\,dS}{r}$$

که در آن $r=\sqrt{(x-x_۰)^۲+(y-y_۰)^۲+(z-z_۰)^۲}$

۴۳۵۹ – مطلوبست محاسبهٔ

$$F(t)=\iint_{x+y+z=t} f(x,\ y,\ z)\,dS$$

که در آن

$$f(x,\ y,\ z)=\begin{cases} ۱-x^۲-y^۲-z^۲, & x^۲+y^۲+z^۲\leqslant ۱ \quad \text{اگر} \\ ۰\qquad\qquad\quad, & x^۲+y^۲+z^۲>۱ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

نمودار تابع $u=F(t)$ را رسم کنید .

۴۳۶۰ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$F(t)=\iint_{x^۲+y^۲+z^۲=t^۲} f(x,\ y,\ z)\,dS$$

که در آن

$$f(x,\ y,\ z)=\begin{cases} x^۲+y^۲, & z\geqslant\sqrt{x^۲+y^۲} \quad \text{اگر} \\ ۰\quad\ \ , & z<\sqrt{x^۲+y^۲} \quad \text{اگر} \end{cases}$$

۴۳۶۱ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$F(x,\ y,\ z,\ t)=\iint_S f(\xi,\ \eta,\ \zeta)\,dS$$

که در آن S کرهٔ متغیر

$$(\xi-x)^{۲}+(\eta-y)^{۲}+(\zeta-z)^{۲}=t^{۲}$$

میباشد و

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\begin{cases} ۱, & \xi^{۲}+\eta^{۲}+\zeta^{۲}<a^{۲} \quad \text{اگر} \\ ۰, & \xi^{۲}+\eta^{۲}+\zeta^{۲}\geqslant a^{۲} \quad \text{اگر} \end{cases}$$

بفرض آنکه

$$r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}>a>۰$$

انتگرالهای روی سطح نوع دوم زیر را حساب کنید :

۴۳۶۲ - $\iint\limits_S (x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy)$ که در آن S طرف بیرونی کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=a^{۲}$ است .

۴۳۶۳ - $\iint\limits_S f(x)\,dy\,dz+g(y)\,dz\,dx+h(z)\,dx\,dy$ که در آن $f(x)$، $g(y)$، $h(z)$ توابعی پیوسته و S طرف بیرونی سطح مکعب مستطیل $۰\leqslant x\leqslant a;\ ۰\leqslant y\leqslant b;\ ۰\leqslant z\leqslant c$ میباشد .

۴۳۶۴ - $\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dz\,dx+(x-y)\,dx\,dy$ که در آن S طرف بیرونی سطح مخروطی $(۰\leqslant z\leqslant h)$ $x^{۲}+y^{۲}=z^{۲}$ میباشد

۴۳۶۵ - $\iint\limits_S \left(\frac{dy\,dz}{x}+\frac{dz\,dx}{y}+\frac{dx\,dy}{z}\right)$ که در آن S طرف بیرونی سطح بیضوی $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۱$ میباشد .

۴۳۶۶ - $\iint\limits_S x^{۲}\,dy\,dz+y^{۲}\,dz\,dx+z^{۲}\,dx\,dy$ که در آن S طرف بیرونی کرهٔ $(x-a)^{۲}+(y-b)^{۲}+(z-c)^{۲}=R^{۲}$ میباسد .

بخش ۱۵ — دستور استوکس

اگر $P=P(x,y,z),\ Q=Q(x,y,z),\ R=R(x,y,z)$ توابع پیوستهٔ دیفرانسیل‌پذیر و C دورگرد هموار قطعه‌ای بستهٔ ساده‌ای باشد که سطح هموار قطعه‌ای دوطرفه متناهی S را محدود میسازد در آنصورت دستور استوکس

$$\oint_{C} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

بر قرار است که در آن $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ کسینوس‌های هادی قایم بر سطح S ممتد در آن جهت است که نسبت بآن پیمایش دورگرد C در جهت خلاف گردش عقربه های ساعت انجام میپذیرد (برای دستگاه مختصات دست راستی) .

۴۳۶۷ – با بکاربردن دستور استوکس مطلوبست محاسبهٔ انتگرال منحنی‌الخط

$$\oint_{C} y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

که در آن C دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = a^{۲},\ \ x + y + z = ۰$ است که در جهت خلاف گردش عقبرهای ساعت پیموده میشود اگر از سمت مثبت محور Ox رؤیت شود .

نتیجه را با محاسبهٔ مستقیم تحقیق کنید .

۴۳۶۸ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$\int_{AmB} (x^{۲} - yz)\,dx + (y^{۲} - xz)\,dy + (z^{۲} - xy)\,dz$$

در قطعه‌ای از منحنی مارپیچی

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = \frac{h}{۲\pi}\varphi$$

از نقطهٔ $A(a, ۰, ۰)$ تا نقطهٔ $B(a, ۰, h)$.

راهنمایی — به منحنی AmB پاره‌خط مستقیمی را افزوده و دستور استوکس را بکار برید .

۴۳۶۹ – فرض کنیم C دورگرد بستهٔ واقع در صفحهٔ $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = ۰$ ($\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ کسینوس‌های هادی قایم بر صفحه است) و محدود کنندهٔ مساحت S باشد .

مطلوبست محاسبهٔ

$$\oint_{C} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

که در آن دورگرد C در جهت مثبت پیموده میشود .

با کاربرد دستور استوکس مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر :

٤٣٧٠ – $\oint\limits_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$ که در آن C بیضی $x=a\sin^{۲}t,\ y=۲a\sin t\cos t,\ z=a\cos^{۲}t\quad (۰\leqslant t\leqslant \pi)$ است که در جهت صعود پارامتر t پیموده میشود .

٤٣٧١ – $\oint\limits_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$ که در آن C بیضی $x^{۲}+y^{۲}=a^{۲},\ \frac{x}{a}+\frac{z}{h}=۱\quad (a>۰,\ h>۰)$ است که در جهت خلاف گردش عقربه‌های ساعت پیموده میشود اگر از طرف مثبت محور Ox به آن نگاه کنیم .

٤٣٧٢ – $\oint\limits_C (y^{۲}+z^{۲})\,dx+(x^{۲}+z^{۲})\,dy+(x^{۲}+y^{۲})\,dz$ که در آن C منحنی $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۲Rx,\quad x^{۲}+y^{۲}=۲rx\quad (۰<r<R,\ z>۰)$ است و طوری پیموده میشود که حوزهٔ کوچکتری که در طرف خارجی کرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۲Rx$ بوسیلهٔ آن محدود میشود در سمت چپ قرار میگیرد .

٤٣٧٣ – $\oint\limits_C (y^{۲}-z^{۲})\,dx+(z^{۲}-x^{۲})\,dy+(x^{۲}-y^{۲})\,dz$ که در آن C مقطع سطح مکعب $۰\leqslant x\leqslant a,\quad ۰\leqslant y\leqslant a,\ ۰\leqslant z\leqslant a$ با سطح $x+y+z=\frac{۳}{۲}a$ است که در جهت خلاف گردش عقربه‌های ساعت پیموده میشود اگر از طرف مثبت محور Ox بآن نگاه کنیم .

٤٣٧٤ – $\oint\limits_C y^{۲}z^{۲}\,dx+x^{۲}z^{۲}\,dy+x^{۲}y^{۲}\,dz$ که در آن C منحنی بستهٔ $x=a\cos t,\ y=a\cos ۲t,\ z=a\cos ۳t$ است که در جهت صعود پارامتر t پیموده میشود .

٤٣٧٥ – ثابت کنید که تابع

$$W(x,\ y,\ z)=ki\iint\limits_S \frac{\cos(r,\ n)}{r^{۲}}\,dS\quad (k=\text{const})$$

که در آن S مساحت محدود به دورگرد C، $\mathbf{n}$ قائم بر سطح S و $\mathbf{r}$ شعاع حامل واصل نقطهٔ فضائی $M(x,\ y,\ z)$ به نقطهٔ متغیر $A(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ از دورگرد C است مساویست با پتانسیل میدان مغناطیسی $\mathbf{H}$ حاصل از عبور جریان برق i از دورگرد C (مسئلهٔ ٤٣٤٠ را ببینید) .

بخش ۱۶ — دستور اوستروگرادسکی

اگر S سطح هموار قطعه‌ای محدودکنندهٔ حجم V و $P=P(x, y, z)$، $Q=Q(x, y, z)$، $R=R(x, y, z)$ توابعی باشند که با مشتقات جزیی مرتبه اول خود در حوزهٔ $V+S$ پیوسته‌اند در آنصورت دستور اوستروگرادسکی

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=$$
$$=\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

درست است که در آن $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ کسینوس‌های هادی قائم خارجی بر سطح S است .

با کاربرد دستور اوستروگرادسکی انتگرال‌های روی سطح زیر را در صورتیکه سطح هموار S حجم متناهی V را محدود سازد و $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ کسینوس‌های هادی قائم خارجی بر سطح S باشند تبدیل کنید :

۴۳۷۶ – $\iint\limits_S x^{۳}\,dy\,dz+y^{۳}\,dz\,dx+z^{۳}\,dx\,dy$

۴۳۷۷ – $\iint\limits_S yz\,dy\,dz+zx\,dz\,dx+xy\,dx\,dy$

۴۳۷۸ – $\displaystyle\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}}\,dS$

۴۳۷۹ – $\displaystyle\iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$

۴۳۸۰ –
$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS$$

۴۳۸۱ – ثابت کنید که اگر S سطح بستهٔ ساده و l امتداد ثابت دلخواهی باشد در آنصورت

$$\iint\limits_S \cos(\mathrm{n},\ \mathrm{l})\,dS=۰$$

که در آن n قائم خارجی بر سطح S است .

٤٣٨٢ – ثابت کنید که حجم جسم محدود به سطح S برابر است با

$$V = \frac{١}{٣} \iint_{S} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, dS$$

که در آن $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ کسینوس‌های هادی قائم خارجی بر سطح S میباشند.

٤٣٨٣ – ثابت کنید که حجم مخروط محدود به سطح مخروطی هموار $F(x, y, z) = ٠$ و صفحهٔ $Ax + By + Cz + D = ٠$ برابر است با

$$V = \frac{١}{٣} SH$$

که در آن S مساحت قاعده مخروط واقع در صفحهٔ مفروض و H ارتفاع آن است.

٤٣٨٤ – مطلوبست تعیین حجم جسم محدود به سطوح $z = \pm c$ و

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos u\cos v + b\sin u\sin v \\ y &= a\cos u\sin v - b\sin u\cos v \\ z &= c\sin u \end{aligned}\right\}$$

٤٣٨٥ – مطلوبست تعیین حجم محدود به سطح

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = -u + a\cos v \quad (u \geqslant ٠)$$

و صفحات $x = ٠,\ z = ٠ \quad (a > ٠)$

٤٣٨٥,١ – مطلوبست تعیین حجم جسم محدود به چنبرهٔ

$$\left.\begin{aligned} x &= (b + a\cos\psi)\cos\varphi \\ y &= (b + a\cos\psi)\sin\varphi \\ z &= a\sin\psi \end{aligned}\right\}$$

$(٠ < a \leqslant b)$

٤٣٨٦ – دستور زیر را ثابت کنید:

$$\frac{d}{dt}\left\{ \iiint\limits_{x^٢ + y^٢ + z^٢ \leqslant t^٢} f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz \right\} =$$

$$= \iint\limits_{x^٢ + y^٢ + z^٢ = t^٢} f(x, y, z, t)\, dS + \iiint\limits_{x^٢ + y^٢ + z^٢ \leqslant t^٢} \frac{\partial f}{\partial t}\, dx\, dy\, dz \quad (t > ٠)$$

بکمک دستور استروگرادسکی انتگرالهای روی سطح زیر را حساب کنید :

۴۲۸۷ – $\iint_S x^{۲}\,dy\,dz + y^{۲}\,dz\,dx + z^{۲}\,dx\,dy$ که در آن S طرف بیرونی سطح مکعب $۰ \leqslant x \leqslant a,\ ۰ \leqslant y \leqslant a,\ ۰ \leqslant z \leqslant a$ میباشد .

۴۲۸۸ – $\iint_S x^{۳}\,dy\,dz + y^{۳}\,dz\,dx + z^{۳}\,dx\,dy$ که در آن S طرف بیرونی سطح کرهٔ $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = a^{۲}$ است .

۴۲۸۹ – $\iint_S (x - y + z)\,dy\,dz + (y - z + x)\,dz\,dx + (z - x + y)\,dx\,dy$

که در آن S طرف بیرونی سطح زیر است :

$$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = ۱$$

۴۲۹۰ – مطلوبست محاسبهٔ

$\iint_S (x^{۲}\cos\alpha + y^{۲}\cos\beta + z^{۲}\cos\gamma)\,dS$ که در آن S بخشی از سطح مخروطی $x^{۲} + y^{۲} = z^{۲}$ $(۰ \leqslant z \leqslant h)$ و $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ کسینوس‌های هادی قائم خارجی بر این سطح هستند .

راهنمایی – بخش صفحهٔ

$$z = h, \quad x^{۲} + y^{۲} \leqslant h^{۲}$$

را الحاق کنید .

۴۲۹۱ – مطلوبست اثبات دستور

$$\iiint_V \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r} = \frac{۱}{۲}\iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})\,dS$$

که در آن S سطح بستهٔ محدودکنندهٔ حجم V ، $\mathbf{n}$ قائم خارجی بر سطح S در نقطهٔ متغیر (ξ, η, ζ) از آن و $r = \sqrt{(\xi - x)^{۲} + (\eta - y)^{۲} + (\zeta - z)^{۲}}$ و $\mathbf{r}$ شعاع حامل رونده از نقطهٔ (x, y, z) به نقطهٔ (ξ, η, ζ) است .

۴۲۹۲ – مطلوبست محاسبهٔ انتگرال گوس :

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^{۲}}\,dS$$

که در آن S سطح هموار بستهٔ سادهٔ محدودکنندهٔ حجم V ، $\mathbf{n}$ قایم خارجی بر سطح S در نقطه (ξ, η, ζ) از آن $\mathbf{r}$ شعاع حامل واصل نقطهٔ (x, y, z) به نقطهٔ (ξ, η, ζ) است و $\mathbf{r} = \sqrt{(\xi - x)^{۲} + (\eta - y)^{۲} + (\zeta - z)^{۲}}$

دو حالت زیر را در نظر بگیرید :

الف) وقتی که سطح S نقطهٔ (x, y, z) را در بر نمیگیرد ؛

ب) وقتی که سطح S نقطهٔ (x, y, z) را در بر میگیرد .

۴۳۹۳ - ثابت کنید که اگر

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}$$

و S سطح هموار محدودکنندهٔ جسم متناهی V باشد در آنصورت دستورهای زیر محققند :

الف) $$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \Delta u \, dx\, dy\, dz$$

ب) $$\iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^۲ + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^۲ + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^۲\right] dx\, dy\, dz + $$

$$+ \iiint_V u \Delta u \, dx\, dy\, dz$$

که در آن u تابعی است که خود و مشتق‌های جزیی آن تا مرتبهٔ دوم (بانضمام مرتبهٔ دوم) در حوزهٔ $V + S$ پیوسته هستند و $\frac{\partial u}{\partial n}$ مشتق نسبت به قائم خارجی سطح S است .

۴۳۹۴ - مطلوبست اثبات دستور دوم گرین در فضا :

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy\, dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS$$

که در آن حجم V محدود به سطح S ، $\mathbf{n}$ امتداد قایم خارجی بر سطح S است و توابع $u = u(x, y, z)$، $v = v(x, y, z)$ در حوزهٔ $V + S$ دو بار دیفرانسیل‌پذیر میباشند .

۴۳۹۵ - تابع $u = u(x, y, z)$ دارای مشتقات جزیی پیوسته تا مرتبهٔ دوم (بانضمام مرتبهٔ دوم) در یک حوزهٔ نامشخص را در این حوزه وقتی هارمونیک نامند که

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲} = ۰$$

ثابت کنید که اگر تابع u در یک حوزهٔ متناهی بستهٔ V محدود به سطح هموار S هارمونیک باشد در آنصورت دستورهای زیر محققند :

الف) $$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = ۰$$

ب) $$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^۲+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^۲+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^۲\right] dx\, dy\, dz=\iint_S u\, \frac{\partial u}{\partial n}\, dS$$

که در آن n قایم خارجی بر سطح S است .

با استفاده از دستور ب) ثابت کنید که تابع هارمونیک در حوزهٔ V، بطور تک‌مقداری بوسیلهٔ مقادیرش روی مرز S آن تعیین میشود .

٤۳۹۶ – ثابت کنید که اگر تابع $u=u(x, y, z)$ در حوزهٔ متناهی بستهٔ V محدود شده به سطح هموار S هارمونیک باشد در آنصورت

$$u(x, y, z)=\frac{۱}{٤\pi}\iint_S \left[u\, \frac{\cos(\mathrm{r}, \mathrm{n})}{r^۲}+\frac{۱}{r}\, \frac{\partial u}{\partial n}\right] dS$$

که در آن r شعاع‌حامل رونده از نقطهٔ درونی (x, y, z) حوزهٔ V به نقطهٔ متغیر (ξ, η, ζ) سطح S است، $r=\sqrt{(\xi-x)^۲+(\eta-y)^۲+(\zeta-z)^۲}$، n بردار قائم خارجی بر سطح S در نقطهٔ (ξ, η, ζ) میباشد .

٤۳۹۷ – ثابت کنید که اگر $u=u(x, y, z)$ تابع هارمونیک در درون کرهٔ S بشعاع R و بمرکز نقطهٔ $(x_۰, y_۰, z_۰)$ باشد در آنصورت

$$u(x_۰, y_۰, z_۰)=\frac{۱}{٤\pi R^۲}\iint_S u(x, y, z)\, dS$$

(قضیهٔ میانگین)

٤۳۹۸ – ثابت کنید که تابع $u=u(x, y, z)$ پیوسته در حوزهٔ محدود بستهٔ V و هارمونیک در درون آن نمیتواند در نقاط درونی حوزه به بیشترین و کمترین مقادیر خویش برسد در صورتیکه این تابع بطور اتحادی برابر مقدار ثابت نباشد (اصل ماگزیمم) .

٤۳۹۹ – جسم V بتمامی در مایعی غوطه‌ور است . از روی قانون پاسکال ثابت کنید که نیروی رانش مایع برابر وزن مایع هم‌حجم جسم و ممتد بطور قائم در جهت بالاست (قانون ارشمیدس) .

٤٤٠٠ - فرض کنیم S_t کرهٔ متغیر $(\xi - x)^۲ + (\eta - y)^۲ + (\zeta - z)^۲ = t^۲$ و تابع $f(\xi, \eta, \zeta)$ پیوسته باشد . ثابت کنید که تابع

$$u(x, y, z, t) = \frac{۱}{٤\pi} \iint\limits_{S_t} \frac{f(\xi, \zeta, \eta)}{t} dS_t$$

در معادلهٔ موجی

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲} = \frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}$$

و شرایط اولیهٔ $u\Big|_{t=۰} = ۰, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=۰} = f(x, y, z)$ صدق میکند .

راهنمایی - مشتق $\frac{\partial u}{\partial t}$ را با انتگرال سه‌گانه بیان کنید .

بخش ۱۷ - مبانی نظریهٔ (نگره) میدان

بند ۱ - گرادیان (شیب) . اگر $u(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$ که در آن $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ میدان عددی (اسکالر) پیوستهٔ دیفرانسیل‌پذیر باشد در آنصورت بردار

$$\text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$$

و یا مختصراً $\text{grad}\, u = \nabla u$ را که در آن $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ گرادیان یا شیب میدان u نامند . گرادیان میدان u در نقطهٔ مفروض (x, y, z) در جهت قائم بر سطح تراز $u(x, y, z) = c$ گذرنده بر این نقطه است . این بردار در هر نقطهٔ میدان از لحاظ مقدار :

$$|\text{grad}\, u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^۲ + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^۲ + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^۲}$$

و جهت بزرگترین سرعت تغییر تابع u را بیان میکند .

مشتق میدان u در یک امتداد $\mathbf{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ برابر است با

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad}\, u \times \mathbf{l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

بند ۲ — واگرایی (دیورژانس) میدان و گردش (روتاسیون) میدان. اگر

$$a(\mathbf{r}) = a_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + a_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + a_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

میدان برداری پیوستهٔ دیفرانسیل‌پذیر باشد در آنصورت اسکالر

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \nabla\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

را دیورژانس یا واگرایی این میدان نامند.

بردار

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

بنام روتاسیون و یا طوفان میدان موسوم است.

بند ۳ — شار بردار از سطح. اگر بردار $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ میدان برداری در حوزهٔ Ω تولید کند در آنصورت شار بردار از سطح مفروض S واقع در Ω در جهت معینی که با بردار یکان قایم $\mathbf{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ مشخص شده است عبارتست از انتگرال

$$\iint\limits_S a_n\,dS = \iint\limits_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,dS$$

که در آن $a_n = \mathbf{an}$ تصویر بردار روی قایم است. دستور استروگرادسکی به زبان برداری بشکل

$$\oiint\limits_S a_n\,dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,dx\,dy\,dz$$

در میاید که در آن S سطح محدودکنندهٔ حجم V و $\mathbf{n}$ بردار یکان قائم خارجی بر سطح S است.

بند ۴ — سیرکولاسیون بردار. انتگرال خطی بردار $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ روی یک منحنی C (کار میدان) عبارتست از عدد

$$\int\limits_C \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_C a_x\,dx + a_y\,dy + a\,_z dz$$

اگر دورگرد C بسته باشد در آنصورت انتگرال خطی را سیرکولاسیون بردار $\mathbf{a}$ در طول دورگرد C نامند.

بصورت دستور برداری استوکس چنین است :

$$\oint_{C} \mathrm{a}\, d\mathrm{r} = \iint_{S} (\mathrm{rot}\ \mathrm{a})_n\, dS$$

که در آن C دورگرد بستهٔ محدودکنندهٔ سطح S است، ضمناً جهت قایم n بر سطح S باید طوری انتخاب شود که برای ناظر ایستاده بر سطح S که سرش در جهت قائم است پیمایش دورگرد C در جهت خلاف گردش عقربهٔ ساعت انجام پذیرد (برای دستگاه مختصات دست راستی).

بند ۵ — میدان پتانسیلی. میدان برداری $\mathrm{a}(\mathrm{r})$ را که گرادیان اسکالر نامشخص u میباشد :

$$\mathrm{grad}\, u = \mathrm{a}$$

پتانسیلی و مقدار n را پتانسیل میدان نامند.

اگر پتانسیل n تابع تک مقداری باشد در آنصورت

$$\int_{AB} \mathrm{a}\, d\mathrm{r} = u(B) - u(A)$$

بویژه در این حالت سیرکولاسیون بردار a برابر صفر است.

شرط لازم و کافی برای پتانسیلی بودن میدان a مفروض در حوزهٔ یک ارتباطی اجرای شرط $\mathrm{rot}\ \mathrm{a} = ۰$ میباشد، چنین میدانی باید بی‌طوفان باشد.

۴۴۰۱ — مطلوبست تعیین مقدار و جهت گرادیان میدان
$u = x^۲ + ۲y^۲ + ۳z^۲ + xy + ۳x - ۲y - ٦z$ در نقاط :
الف) $O(۰, ۰, ۰)$ ؛ ب) $A(۱, ۱, ۱)$ و پ) $B(۲, ۰, ۱)$ در کدام نقطه گرادیان میدان برابر صفر است ؟

۴۴۰۱,۱ — فرض کنیم

$$u = xy - z^۲$$

مطلوبست تعیین مقدار و جهت $\mathrm{grad}\, u$ در نقطهٔ $M(-۹, ۱۲, ۱۰)$. مشتق $\frac{\partial u}{\partial l}$ در امتداد نیمساز زاویهٔ مختصات xOy چقدر است ؟

۴۴۰۲ — در چه نقاطی از فضای $Oxyz$ گرادیان میدان

$$u = x^۳ + y^۳ + z^۳ - ۳xyz$$

الف) عمود بر محور Oz است ؛
ب) موازی محور O است ؛
پ) برابر صفر است ؟

۴۴۰۳ – میدان عددی

$$u=\ln\frac{۱}{r}$$

مفروض است که در آن $r=\sqrt{(x-a)^۲+(y-b)^۲+(z-c)^۲}$ ، در چه نقاطی از فضای $Oxyz$ تساوی زیر بر قرار است :

$$|\operatorname{grad} u| = ۱$$

۴۴۰۴ – سطوح تراز میدان عددی

$$u=\sqrt{x^۲+y^۲+(z+۸)^۲}+\sqrt{x^۲+y^۲+(z-۸)^۲}$$

را بسازید . سطح تراز مار بر نقطهٔ $M(۹, ۱۲, ۲۸)$ را پیدا کنید . $\max u$ در حوزهٔ $x^۲+y^۲+z^۲\leqslant ۳۶$ چقدر است ؟

۴۴۰۵ – مطلوبست تعیین زاویهٔ φ بین گرادیان‌های میدان

$$u=\frac{x}{x^۲+y^۲+z^۲}$$

در نقاط $A(۱, ۲, ۲)$ و $B(-۳, ۱, ۰)$.

۴۴۰۶ – میدان عددی

$$u=\frac{z}{\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}}$$

مفروض است . سطوح تراز و سطوح متساوی المدول گرادیان میدان را بسازید . مطلوبست تعیین $\sup|\operatorname{grad} u|,\ \inf|\operatorname{grad} u|,\ \sup u,\ \inf u$ در حوزهٔ $۱<z<۲$

۴۴۰۷ – با تقریب تا بی‌نهایت کوچک‌های مراتب بالا مطلوبست تعیین فاصلهٔ بین دو سطح تراز بی‌نهایت نزدیک بهم

$$u(x, y, z)=c \quad \text{و} \quad u(x, y, z)=c+\Delta c$$

در نقطهٔ $M_۰(x_۰, y_۰, z_۰)$ که در آن $u(x_۰, y_۰, z_۰)=c$.

۴۴۰۸ – دستورهای زیر را ثابت کنید :

الف) $\operatorname{grad}(u+c)=\operatorname{grad} u$ (c ثابت است)

ب) $\operatorname{grad} cu=c\operatorname{grad} u$ (c ثابت است)

پ) $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad} u+\operatorname{grad} v$

ت) $\operatorname{grad} uv=v\operatorname{grad} u+u\operatorname{grad} v$

ث) $\text{grad}\,(u^{٢}) = ٢u\,\text{grad}\,u$

ج) $\text{grad}\,f'(u) = f'(u)\,\text{grad}\,u$

٤٤٠٩ – مطلوبست محاسبهٔ

الف) $\text{grad}\,r$ ؛ ب) $\text{grad}\,r^{٢}$ ؛ پ) $\text{grad}\,\frac{١}{r}$ که در آن $r = xi + yj + zk$

٤٤١٠ – مطلوبست محاسبهٔ $\text{grad}\,f(r)$ که در آن $r = \sqrt{x^{٢} + y^{٢} + z^{٢}}$.

٤٤١١ – مطلوبست محاسبهٔ $\text{grad}\,(\mathbf{cr})$ که در آن $\mathbf{c}$ بردار ثابت و $\mathbf{r}$ شعاع حامل از مبدأ مختصات است .

٤٤١٢ – مطلوبست محاسبهٔ $\text{grad}\,\{|\mathbf{c} \times \mathbf{r}|^{٢}\}$ ($\mathbf{c}$ برداریست ثابت) .

٤٤١٣ – دستور زیر را ثابت کنید :

$$\text{grad}\,f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u}\,\text{grad}\,u + \frac{\partial f}{\partial v}\,\text{grad}\,v$$

٤٤١٤ – دستور زیر را ثابت کنید :

$$\nabla^{٢}(uv) = u\nabla^{٢}v + v\nabla^{٢}u + ٢\,\nabla u\,\nabla v$$

که در آن

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^{٢} = \nabla\nabla = \frac{\partial^{٢}}{\partial x^{٢}} + \frac{\partial^{٢}}{\partial y^{٢}} + \frac{\partial^{٢}}{\partial z^{٢}}$$

٤٤١٥ – ثابت کنید که اگر تابع $u = u(x, y, z)$ در حوزهٔ محدب Ω دیفرانسیل پذیر باشد و $|\text{grad}\,u| \leqslant M$ که در آن M ثابت است در آنصورت بازای نقاط دلخواه A, B از Ω داریم :

$$|u(A) - u(B) \leqslant M\rho(A, B)$$

که در آن $\rho(A, B)$ فاصلهٔ بین نقاط A و B است .

٤٤١٥,١ – برای تابع $u = u(x, y, z)$ عبارت $\text{grad}\,u$ را : الف) در مختصات استوانه‌ای ؛ ب) در مختصات کروی بیان کنید .

٤٤١٦ – مطلوبست تعیین مشتق میدان $u = \frac{x^{٢}}{a^{٢}} + \frac{y^{٢}}{b^{٢}} + \frac{z^{٢}}{c^{٢}}$ در نقطهٔ مفروض $M(x, y, z)$ در امتداد شعاع حامل r این نقطه .
در چه حالتی این مشتق برابر مقدار گرادیان میشود ؟

٤٤١٧ – مطلوبست تعیین مشتق میدان $u = \frac{١}{r}$، که در آن $r = \sqrt{x^٢+y^٢+z^٢}$، در امتداد $\mathbf{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

در چه حالتی این مشتق برابر صفر میشود ؟

٤٤١٨ – مطلوبست تعیین مشتق میدان $u = u(x, y, z)$ در امتداد گرادیان میدان $v = v(x, y, z)$

در چه حالتی این مشتق صفر میشود ؟

٤٤١٩ – میدان برداری

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} \times \operatorname{grad} u$$

را بزبان بردارهای یکان بنویسید اگر

$$u = \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{\sqrt{x^٢+y^٢}} \quad \text{و} \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

٤٤٢٠ – خطوط نیروی میدان برداری

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + ٢z\mathbf{k}$$

را تعیین کنید .

٤٤٢١ – با محاسبهٔ مستقیم ثابت کنید که دیورژانس بردار $\mathbf{a}$ مستقل از انتخاب دستگاه مختصات قایم است .

٤٤٢٢ – ثابت کنید که

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{d(S) \to ٠} \frac{١}{V} \iint\limits_{S} a_n \, dS$$

که در آن S سطح بستهٔ در برگیرندهٔ نقطهٔ M و محدودکنندهٔ حجم V ، n قایم خارجی بر سطح S و $d(S)$, قطر سطح S است .

٤٤٢٢,١ – مطلوبست تعیین دیورژانس میدان

$$a = \frac{-\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z}{\sqrt{x^٢+y^٢}}$$

در نقطهٔ $M(٣, ٤, ٥)$. Π شار بردار $\mathbf{a}$ از کرهٔ بی‌نهایت کوچک

$$(x-٣)^٢ + (y-٤)^٢ + (z-٥)^٢ = \varepsilon^٢$$

٤٤٢٣ – مطلوبست تعیین

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$$

٤٤٢٤ – ثابت کنید که

الف) $\operatorname{div}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\operatorname{div}\mathbf{a}+\operatorname{div}\mathbf{b}$ ؛

ب) $\operatorname{div}(u\mathbf{c})=\mathbf{c}\operatorname{grad}u$ ؛ ($\mathbf{c}$ بردار ثابت و u اسکالر است) ؛

پ) $\operatorname{div}(u\mathbf{a})=u\operatorname{div}\mathbf{a}+\mathbf{a}\operatorname{drad}u$

٤٤٢٥ – مطلوبست تعیین $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)$

٤٤٢٦ – مطلوبست تعیین $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]$ که در آن $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ در چه حالتی $\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]$ برابر صفر است ؟

٤٤٢٧ – مطلوبست محاسبهٔ الف) $\operatorname{div}\mathbf{r}$ ؛ ب) $\operatorname{div}\dfrac{\mathbf{r}}{r}$

٤٤٢٩ – مطلوبست محاسبهٔ $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{c}]$ که در آن $\mathbf{c}$ برداری ثابت است .

٤٤٢٩ – مطلوبست تعیین $\operatorname{div}[f(r)\mathbf{r}]$. در چه حالتی دیورژانس این بردار برابر صفر است ؟

٤٤٣٠ – مطلوبست تعیین الف) $\operatorname{div}(u\operatorname{drad}u)$ ؛ ب) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)$

٤٤٣١ – مایعی که فضایی را پر کرده در جهت خلاف گردش عقربهٔ ساعت حول محور Oz با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران میکند . مطلوبست تعیین دیورژانس بردار سرعت $\mathbf{v}$ و بردار شتاب w در نقطهٔ $M(x, y, z)$ از فضا در لحظهٔ مفروض از زمان .

٤٤٣٢ – دیورژانس میدان نیروی جاذبهٔ حاصله از دستگاه متناهی مراکز جذب را پیدا کنید .

٤٤٣٣ – مطلوبست عبارت دیورژانس بردار مستوی $\mathbf{a}=\mathbf{a}(r, \varphi)$ در مختصات قطبی r, φ

٤٤٣٤ – عبارت $\operatorname{div}\mathbf{a}(x, y, z)$ را در مختصات منحنی‌الخط متعامد u, v, w بیان کنید در صورتیکه

$$x=f(u, v, w), \quad y=g(u, v, w), \quad z=h(u, v, w)$$

بعنوان حالت خاص ، $\operatorname{div}\mathbf{a}$ را در مختصات استوانه‌ای و کروی بیان کنید .

راهنمائی – شار بردار $\mathbf{a}$ از متوازی‌السطوح بی‌نهایت کوچک محدود به سطوح $u=\text{const},\ v=\text{const},\ w=\text{const}$ را در نظر بگیرید .

٤٤٣٥ – ثابت کنید که :

الف) $\operatorname{rot}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{rot}\mathbf{b}$ ؛

ب) $\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = u\operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{grad}(u \times \mathbf{a})$

٤٤٣٦ – مطلوبست تعیین : الف) $\operatorname{rot}\mathbf{r}$ ؛ ب) $\operatorname{rot}[f(r)\mathbf{r}]$

٤٤٣٦,١ – مطلوبست تعیین مقدار و جهت $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ در نقطهٔ $M(۱, ۲, -۲)$ اگر

$$\mathbf{a} = \frac{y}{z}\mathbf{i} + \frac{z}{x}\mathbf{j} + \frac{x}{y}\mathbf{k}$$

٤٤٣٧ – مطلوبست تعیین :

الف) $\operatorname{rot} \mathbf{c}f(r)$ ؛ ب) $\operatorname{rot}[\mathbf{c} \times f(r)\mathbf{r}]$ ($\mathbf{c}$ برداریست ثابت) .

٤٤٣٨ – ثابت کنید که

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{h}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}$$

٤٤٣٩ – مطلوبست تعیین

الف) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$ ؛ ب) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{a})$

٤٤٤٠ – مایعی که فضایی را پر کرده با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور $\mathbf{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ دوران میکند. مطلوبست تعیین روتاسیون بردار سرعت خطی v در نقطهٔ $M(x, y, z)$ در لحظهٔ مفروض از زمان.

٤٤٤٠,١ – مطلوبست تعیین عبارت روتاسیون بردار مستوی $\mathbf{a} = \mathbf{a}(r, \varphi)$ در مختصات قطبی φ و r .

٤٤٤٠,٢ – مطلوبست بیان $\operatorname{rot}\mathbf{a}(x, y, z)$

الف) در مختصات استوانه‌ای ؛

ب) در مختصات کروی .

٤٤٤١ – مطلوبست تعیین شار بردار $\mathbf{r}$:

الف) از سطح جانبی مخروط $(۰ \leqslant z \leqslant h)$ $x^۲ + y^۲ \leqslant z^۲$ ؛

ب) از قاعدهٔ این مخروط.

٤٤٤٢ – مطلوبست تعیین شار بردار $\mathbf{a} = \mathbf{i}\,yz + \mathbf{j}\,xz + \mathbf{k}\,xy$:

الف) از سطح جانبی استوانهٔ $(۰ \leqslant z \leqslant h)$ $x^۲ + y^۲ \leqslant a^۲$ ؛

ب) از سطح کل این استوانه.

٤٤٤٣ – مطلوبست تعیین شار شعاع حامل $\mathbf{r}$ از سطح

$$z = ۱ - \sqrt{x^۲ + y^۲} \quad (۰ \leqslant z \leqslant ۱)$$

۴۴۴۴ - مطلوبست تعیین شار بردار $\mathbf{a}=x^۲\mathbf{i}+y^۲\mathbf{j}+z^۲\mathbf{k}$ از ثمن مثبت کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۱,\ x\geqslant ۰,\ y\geqslant ۰,\ z\geqslant ۰$

۴۴۴۵ - مطلوبست تعیین شار بردار $\mathbf{a}=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ از سطح کل هرم محدود به صفحات $x=۰,\ y=۰,\ z=۰,\ x+y+z=a\ \ (a>۰)$
نتیجه را با کاربرد دستور اوستروگرادسکی امتحان کنید.

۴۴۴۵,۱ مطلوبست تعیین شار بردار $\mathbf{a}=y^۳\mathbf{i}+y^۳\mathbf{j}+z^۳\mathbf{k}$ از کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=x$.

۴۴۴۶ - ثابت کنید که شار بردار $\mathbf{a}$ از سطح S که بصورت معادلهٔ $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)\ \ ((u,v)\in\Omega)$ داده شده است برابر است با

$$\iint_S a_n\,dS=\iint_\Omega \left(\mathbf{a}\,\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\,\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)du\,dv$$

که در آن $a_n=\mathbf{an}$ و $\mathbf{n}$ بردار یکان قایم بر سطح S است.

۴۴۴۷ - مطلوبست تعیین شار بردار $\mathbf{a}=m\frac{\mathbf{r}}{r^۳}$ (m مقداریست ثابت) از سطح بستهٔ S که مبدأ مختصات را در بر میگیرد.

۴۴۴۸ - مطلوبست تعیین شار بردار

$$a(\mathbf{r})=\sum_{i=۱}^{n}\operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{۴\pi r_i}\right)$$

که در آن e_i ثابت و r_i فواصل نقاط M_i (منابع) از نقطهٔ متغیر $M(\mathbf{r})$ است، از سطح بستهٔ S دربرگیرندهٔ نقاط $M_i\,(i=۱,\ ۲,\ \dots\ n)$.

۴۴۴۹ - ثابت کنید که

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,dS=\iiint_V \nabla^۲u\,dx\,dy\,dz$$

که در آن سطح S حجم V را محدود میکند.

۴۴۵۰ - مقدار گرمای جاری در میدان حرارتی u در واحد زمان از جزء dS سطح برابر است با

$$dQ=-k\mathbf{n}\operatorname{grad}u\,dS$$

که در آن k ضریب رسانایی درونی گرما و $\mathbf{n}$ بردار یکان قائم بر سطح S است. مطلوبست تعیین مقدار گرمای جمع شده در حجم V در واحد زمان. با استفاده از سرعت افزایش درجهٔ حرارت، معادله‌ای را که گرمای جسم (معادله انتقال حرارت) در آن صدق میکند بدست آورید.

۴۴۵۱ – مایع تراکم ناپذیر در حال حرکت، حجم V را اشغال میکند. بفرض آنکه حوزهٔ V فاقد منبع و انشعاب خروجی باشد معادلهٔ پیوستگی

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = ۰$$

را بدست آورید که در آن $\rho = \rho(x, y, z)$ چگالی مایع و $\mathbf{v}$ بردار سرعت و t زمان است.

راهنمایی – شار مایع از حجم دلخواه ω واقع در V را در نظر بگیرید.

۴۴۵۲ – مطلوبست تعیین کار بردار $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ در طول قطعهٔ منحنی مارپیچی

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + \mathbf{k}\,bt \quad (۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi)$$

۴۴۵۲,۱ – مطلوبست تعیین کار میدان

$$\mathbf{a} = \frac{۱}{y}\,\mathbf{i} + \frac{۱}{z}\,\mathbf{j} + \frac{۱}{x}\,\mathbf{k}$$

در طول پاره‌خط واصل نقطهٔ $M(۱, ۱, ۱)$ به نقطهٔ $N(۲, ۴, ۸)$.

۴۴۵۲,۲ – مطلوبست تعیین کار میدان

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}e^{y-z} + \mathbf{j}e^{z-x} + \mathbf{k}e^{x-y}$$

در طول پاره‌خط واصل نقاط $O(۰, ۰, ۰)$ و $M(۱, ۳, ۵)$.

۴۴۵۲,۳ – مطلوبست تعیین کار میدان

$$\mathbf{a} = (y+z)\,\mathbf{i} + (۲+x)\,\mathbf{j} + (x+y)\,\mathbf{k}$$

در طول کمان کوتاهتر دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = ۲۵$ واصل نقاط $M(۳, ۴, ۰)$ و $N(۰, ۰, ۵)$.

۴۴۵۳ – مطلوبست تعیین کار بردار $\mathbf{a} = f(r)\,\mathbf{r}$، که در آن f تابع‌ای پیوسته است، در طول کمان AB.

۴۴۵۴ – مطلوبست تعیین سیرکولاسیون بردار

$$\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

(c ثابت است):

الف) در طول دایرهٔ $(z = ۰)$ $x^{۲} + y^{۲} = ۱$؛

ب) در طول دایرهٔ $(x-۲)^{۲} + y^{۲} = ۱,\ z = ۰$

۴۴۵۵ – مطلوبست تعیین سیرکولاسیون Γ بردار $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)$ در طول دورگرد C در دو حالت: الف) C محور Oz را در بر نمیگیرد؛ ب) C محور Oz را در بر میگیرد.

٤٤٥٥,١ – میدان برداری

$$\mathbf{a}=\frac{y}{\sqrt{z}}\mathbf{i}-\frac{x}{\sqrt{z}}\mathbf{j}+\sqrt{xy}\,\mathbf{k}$$

داده شده است. با محاسبهٔ $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ در نقطهٔ $M(۱,۱,۱)$ ، بطور تقریبی سیرکولاسیون Γ میدان را در طول دایرهٔ بی‌نهایت کوچک

$$\left.\begin{array}{r}(x-۱)^۲+(y-۱)^۲+(z-۱)^۲=\varepsilon^۲\\(x-۱)\cos\alpha+(y-۱)\cos\beta+(z-۱)\cos\gamma=۰\end{array}\right\}$$

که در آن $\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱$ پیدا کنید.

٤٤٥٦ – جریان مستوی پایای مایع با بردار سرعت

$$w=u(x,y)\,\mathbf{i}+v(x,y)\,\mathbf{j}$$

مشخص می‌گردد. مطلوبست تعیین: ۱) مقدار مایع Q که از دورگرد بستهٔ C ، که حوزهٔ S را محدود کرده ، میگذرد (مصرف مایع) ؛ ۲) سیرکولاسیون Γ بردار سرعت در طول دورگرد C. اگر مایع غیر قابل تراکم و جریان بدون گرداب باشد توابع u و v در چه معادلاتی صدق میکنند؟

٤٤٥٧ – نشان دهید که میدان

$$\mathbf{a}=yz(۲x+y+z)\,\mathbf{i}+xz(x+۲y+z)\,\mathbf{j}+xy(x+y+۲z)\,\mathbf{k}$$

پتانسیلی است و پتانسیل این میدان را پیدا کنید.

٤٤٥٧,١ – با حصول اطمینان به پتانسیلی بودن میدان

$$\mathbf{a}=\frac{۲}{(y+z)^{\frac{۱}{۲}}}\mathbf{i}-\frac{x}{(y+z)^{\frac{۳}{۲}}}\mathbf{j}-\frac{x}{(y+z)^{\frac{۳}{۲}}}\mathbf{k}$$

مطلوبست تعیین کار میدان در طول مسیر واصل نقاط $M(۱,۱,۳)$ و $N(۲,٤,٥)$ در ثمن مثبت.

٤٤٥٨ – مطلوبست تعیین پتانسیل میدان جاذبهٔ

$$\mathbf{a}=-\frac{m}{r^۳}\,\mathbf{r}$$

حاصل از جرم m واقع در مبدأ مختصات.

٤٤٥٩ – مطلوبست تعیین پتانسیل میدان جاذبه حاصل از دستگاه اجرام $m_i\,(i=۱,۲,\ldots,n)$ واقع در نقاط $M_i\,(i=۱,۲,\ldots,n)$.

٤٤٦٠ – ثابت کنید که میدان $\mathbf{a} = f(r)\,\mathbf{r}$ که در آن $f(r)$ تابع تک مقداری پیوسته‌ای میباشد پتانسیلی است . پتانسیل این میدان را پیدا کنید .

٤٤٦١ – مطلوبست اثبات دستور

$$\operatorname{grad}_P \left\{ \iiint\limits_V \rho(Q) \frac{dV}{r} \right\} = -\iint\limits_S \rho(Q)\, \mathbf{n} \frac{dS}{r} + \iiint\limits_V \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}$$

که در آن S سطح محدود کنندهٔ حجم V و $\mathbf{n}$ قایم خارجی بر سطح S و r فاصلهٔ بین نقاط $P(x, y, z)$ و $Q(\xi, \eta, \zeta)$ است .

٤٤٦٢ – ثابت کنید که اگر $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$ که در آن

$$u(x, y, z) = \frac{١}{٤\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\rho,\ \xi,\ \eta,\ \zeta)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

و

$$r = \sqrt{(\xi - x)^{٢} + (\eta - y)^{٢} + (\zeta - z)^{٢}}$$

در آنصورت

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \rho(x, y, z)$$

(بفرض آنکه انتگرالهای نظیر دارای معنا باشند) .

جوابهـــــا

قسمت ۱

فصل ۱

۱۶ – ۰ ؛ ۱   ۱۷ – $-\sqrt{۲}$ ؛ $\sqrt{۲}$ ۲۲ – $-۱,۰۱<x<-۰,۹۹$
۲۳ – $x\leqslant -۸$ ؛ $x\geqslant ۱۲$ ۲۴ – $x<-\frac{۱}{۲}$ ۲۵ – $۰<x<\frac{۲}{۳}$ ۲۶ – $|x|\leqslant ۶$
۲۷ – $x>-\frac{۱}{۲}$ ۲۸ – $-\frac{۱}{۲}<x<\frac{۱}{۲}$ ۲۹ – $\frac{۵-\sqrt{۳۰}}{۱۰}<x<\frac{۵-\sqrt{۲۰}}{۱۰}$ ؛
$\frac{۵+\sqrt{۲۰}}{۱۰}<x<\frac{۵+\sqrt{۳۰}}{۱۰}$ ۳۱ – دومی   ۳۲ – دو رقم   ۳۳ – از ۰,۴۱٪
تجاوز نمیکند   ۳۴ – $۹,۹۱۰۲\ \text{cm}^۲\leqslant S\leqslant ۱۰,۰۹۰۲\ \text{cm}^۲$ ؛ $\Delta\leqslant ۰,۰۹۰۲\,\text{cm}^۲$ ؛
$\delta\leqslant ۰,۹۱\%$ ۳۵ – $۲,۹۳\ \text{g/cm}^۳\pm ۰,۲۷\ \text{g/cm}^۳$ ؛ $\delta\leqslant ۷,۳\%$ ۳۶ – $\delta\leqslant ۳,۰۵\%$
۳۷ – $۱۷۲,۴۸۰\,m^۳\leqslant v\leqslant ۲۱۳,۶۴۲\,m^۳$ ؛ $v=۱۹۲,۶۶۰\,m^۳\pm ۲۰,۹۸۲\,m^۳$
$\delta=۱۲\%$ ۳۸ – $\Delta\leqslant ۰,۱۷$ mm   ۳۹ – $\Delta<۰,۰۰۰۵$ m   ۴۲ – الف) $N\geqslant\frac{۱}{\varepsilon}$ ؛
ب) $N\geqslant\sqrt{\frac{۲}{\varepsilon}}$ ؛ پ) $N\geqslant ۱+\frac{\lg\frac{۱}{\varepsilon}}{\lg ۲}$ ؛ ت) $N\geqslant\frac{\lg\varepsilon}{\lg ۰,۹۹۹}\approx ۲۳۳۰\cdot\lg\frac{۱}{\varepsilon}$
۴۳ – الف) $N\geqslant E$ ؛ ب) $N\geqslant\left(\frac{\lg E}{\lg ۲}\right)^۲$ ؛ پ) $N\geqslant ۱۰^{۱۰}$ ۴۶ – ۰
۴۷ – ۰   ۴۸ – ۰   ۴۹ – $\frac{۱}{۳}$ ۵۰ – $\frac{۱-b}{۱-a}$ ۵۱ – $\frac{۱}{۲}$ ۵۲ – $\frac{۱}{۲}$
۵۳ – $\frac{۱}{۳}$ ۵۴ – $\frac{۴}{۳}$ ۵۵ – ۳   ۵۶ – ۱   ۵۷ – ۲   ۶۷ – الف) دومی ؛
ب) اولی ؛ پ) دومی   ۷۲ – $e=۲,۷۱۸۲۸\ldots$ ۹۲ – مساوی ۱ ، اگر
$a\neq ۰$ و متعلق به $[-۱,۱]$ باشد، یا وجود ندارد، اگر $a=۰$ ۹۶ – $x_۳=۱\frac{۱}{۸}$

٩٧ – $x_{١٠٠}=\frac{١}{٢٠}$ ٩٨ – $x_{١٠٠٠}=\frac{١٠٠٠^{١٠٠٠}}{١٠٠٠!}\approx ٢{,}٤٩\times ١٠^{٤٥٢}$

٩٩ – $x_{٤}=x_{٥}=-١٢٠$ ١٠٠ – $x_{١٠}=٢٠$ ١٠١ – ٠ ؛ ١ ؛ ١ ؛ ١

١٠١,١ – $-٣\frac{١}{٢}$ ؛ ٥ ؛ -٢ ؛ ٢   ١٠٢ – -١ ؛ $١\frac{١}{٢}$ ؛ ٠ ؛ ١

١٠٣ – ٠ ؛ ٢ ؛ ٠ ؛ ٢   ١٠٤ – -٤ ؛ ٦ ؛ -٤ ؛ ٦   ١٠٥ – $-\frac{١}{٢}$ ؛ ١ ؛

$-\frac{١}{٢}$ ؛ ١   ١٠٦ – $-\infty$ ؛ $+\infty$ ؛ $-\infty$ ؛ $+\infty$ ١٠٧ – $-\infty$ ؛

-١ ؛ $-\infty$ ؛ $-\infty$ ١٠٨ – ٠ ؛ $+\infty$ ؛ ٠ ؛ $+\infty$ ١٠٩ – $-\infty$ ؛ $+\infty$

$-\infty$ ؛ $+\infty$ ١١٠ – -٥ ؛ ١,٢٥ ؛ ٠ ؛ ٠   ١١١ – $-\frac{١}{٢}$ ؛ ١

١١٢ – $-\left(e+\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ ؛ $e+١$ ١١٣ – ٠ ؛ ١   ١١٤ – ١ ؛ ٢   ١١٥ – ٠ ؛ ١

١١٦ – ٠ ؛ ١   ١١٧ – ١ ؛ $\frac{١}{٢}$ ؛ $\frac{١}{٣}$ ؛ ... ؛ ٠   ١١٨ – جمیع اعداد حقیقی
محصور بین ٠ و ١ بانضمام دو عدد اخیر الذکر   ١١٩ – ١ ؛ ٥   ١٢٠ – a ؛ b
١٢٧ – الف) واگرا است ؛ ب) ممکن است همگرا یا واگرا باشد   ١٢٨ – الف)
نمیتوان ؛ ب) نمیتوان   ١٢٩ – خیر   ١٣٠ – خیر   ١٤٤ – الف) ٠ ؛ ب) ٠

١٤٧ – $\ln ٢$ ١٤٨ – $\frac{١}{٣}(a+٢b)$ ١٥١ – $-\infty<x<+\infty$، $x\neq-١$

١٥٢ – $-\infty<x\leqslant-\sqrt{٣}$ و $٠\leqslant x\leqslant\sqrt{٣}$ ١٥٣ – $-١\leqslant x<١$
١٥٤ – الف) $|x|>٢$ ؛ ب) $x>٢$ ١٥٥ – $٤k^{٢}\pi^{٢}\leqslant x\leqslant(٢k+١)^{٢}\pi^{٢}$
$(k=٠, ١, ٢, \dots)$ ١٥٦ – $|x|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{٢}}$ و $\sqrt{\frac{\pi}{٢}(٤k-١)}\leqslant|x|\leqslant$
$\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{٢}(٤k+١)}\ (k=١, ٢, \dots)$ ١٥٧ – $\frac{١}{٢k+١}<x<\frac{١}{٢k}$ و

$-\frac{١}{٢k+١}<x<-\frac{١}{٢k+٢}\ (k=٠, ١, ٢, \dots)$ ١٥٨ – $x>٠$، $x\neq n$

$(n=١, ٢, \dots)$ ١٥٩ – $-\frac{١}{٣}\leqslant x\leqslant ١$ ١٦٠ – $|x-k\pi|\leqslant\frac{\pi}{٦}\ (k=٠, \pm١,$

$\pm٢, \dots)$ ١٦١ – $١٠^{\left(٢k-\frac{١}{٢}\right)\pi}<x<١٠^{\left(٢k+\frac{١}{٢}\pi\right)}\ (k=٠, \pm١, \pm٢, \dots)$
١٦٢ – $x=-١, -٢, -٣, \dots$ و $x\geqslant٠$ ١٦٣ – $x<٠$، $x\neq-n$

$(n=۱, ۲, \ldots)$ ۱۶۴ - $۱<x\leqslant ۲$ ۱۶۵ - $x=\frac{۱}{۲}, ۱, \frac{۳}{۲}, ۲, \ldots$

۱۶۵,۱ - $x>۴$ ۱۶۵,۲ - $k\pi+\frac{\pi}{۴}\leqslant x<k\pi+\frac{\pi}{۲}\ (k=۰, \pm ۱, \ldots)$

۱۶۵,۳ - $۰\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۴\pi}{۳}\leqslant x\leqslant\frac{۳\pi}{۲}$ ۱۶۶ - $-۱\leqslant x\leqslant ۲$ ؛

$۰\leqslant y\leqslant ۱\frac{۱}{۲}$ ۱۶۷ - $۲k\pi+\frac{\pi}{۳}<x<۲k\pi+\frac{۵\pi}{۳}\ (k=۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$ ؛

$-\infty<y\leqslant \lg ۳$ ۱۶۸ - $-\infty<x<+\infty$ ؛ $۰\leqslant y\leqslant\pi$ ۱۶۹ - $۱\leqslant$

$\leqslant x\leqslant ۱۰۰$ ؛ $-\frac{\pi}{۲}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{۲}$ ۱۷۰ - $x=\frac{p}{۲q+۱}$ که در آن p و q

اعداد درست میباشند ؛ $y=\pm ۱$ ۱۷۱ - $P=۲b+۲\left(۱-\frac{b}{h}\right)x\ (۰<x<h)$ ؛

$S=bx\left(۱-\frac{x}{h}\right)\ (۰<x<h)$ ۱۷۲ - $a=\sqrt{۱۰۰-۹۶\cos x}$ ؛

$S=۲۴\sin x\ (۰<x<\pi)$ ۱۷۳ - $S=\frac{h}{a-b}x^{۲}$ اگر $۰\leqslant x\leqslant\frac{a-b}{۲}$ ؛

$S=h\left(x-\frac{a-b}{۴}\right)$ اگر $\frac{a-b}{۲}<x<\frac{a+b}{۲}$ ؛ $S=h\left[\frac{a+b}{۲}-\frac{(a-x)^{۲}}{a-b}\right]$

اگر $\frac{a+b}{۲}\leqslant x\leqslant a$ ۱۷۴ - $m(x)=۰$ اگر $-\infty\leqslant x\leqslant ۰$ ؛ $m(x)=۲x$

اگر $۰<x\leqslant ۱$ ؛ $m(x)=۲$ اگر $۱<x\leqslant ۲$ ؛ $m(x)=۳$ اگر $۲<x\leqslant ۳$ ؛

$m(x)=۴$ اگر $۳<x<+\infty$ ۱۷۸ - $E_y=\{۰\leqslant y\leqslant ۴\}$ ۱۷۹ - $E_y=$

$=\{۱<y<۳\}$ ۱۸۰ - $E_y=\{۰<y<۱\}$ ۱۸۱ - $E_y=(۱\leqslant |y|<+\infty\}$

۱۸۲ - $E_y=\{۱\leqslant y\leqslant ۲\}$ ۱۸۳ - $a<y<b$ بازای $a<b$ و $b<y<a$

بازای $a>b$ ۱۸۴ - $۱<y<+\infty$ ۱۸۵ - $۰>y>-\infty$ و $+\infty>y>۱$

۱۸۶ - $۰<y\leqslant\frac{۱}{۲}$ ۱۸۷ - $+\infty>y>-\infty$ ۱۸۸ - $۰<y<\frac{۱}{۲}$ و

$\frac{۳}{۲}\leqslant y<۲$ ۱۸۹ - ۰ ؛ ۰ ؛ ۰ ؛ ۰ ؛ ۲۴   ۱۹۰ - ۰ ؛ ۶- ؛ ۴

۱۹۱ - ۱ ؛ ۱ ؛ ۱ ؛ ۲   ۱۹۲ - ۱- ؛ ۰ ؛ ۱ ؛ ۲ ؛ ۴   ۱۹۳ - ۱ ،

$\frac{۱+x}{۱-x}$ ، $\frac{-x}{۲+x}$ ، $\frac{۲}{۱+x}$ ، $\frac{x-۱}{x+۱}$ ، $\frac{۱+x}{۱-x}$ ۱۹۴ - الف) $f(x)=۰$

اگر $x=-۱$ ، $x=۰$ و $x=۱$ ؛ $f(x)>۰$ اگر $-\infty<x<-۱$

و $۰<x<۱$ ؛ $f(x)<۰$ اگر $-۱<x<۰$ و $۱<x<+\infty$ ؛
پ) $f(x)=۰$ اگر $x\leqslant ۰$ و $x=۱$ ؛ $f(x)>۰$ اگر $۰<x<۱$ ؛
$f(x)<۰$ اگر $۱<x<+\infty$ ۱۹۵ – الف) a ؛ ب) $۲x+h$ ؛
پ) $a^x\times\frac{a^h-۱}{h}$ ۱۹۷ – $f(x)=\frac{۷}{۳}x-۲$ ؛ $f(۱)=\frac{۱}{۳}$ ؛ $f(۲)=۲\frac{۲}{۳}$
۱۹۸ – $f(x)=\frac{۷}{۶}x^۲+\frac{۱۷}{۶}x+۱$ ؛ $f(-۱)=-\frac{۲}{۳}$ ؛ $f(۰,۵)=۲\frac{۱۷}{۲۴}$
۱۹۹ – $f(x)=\frac{۱۰}{۳}x^۳-\frac{۷}{۲}x^۲-\frac{۲۹}{۶}x+۲$ ۲۰۰ – $f(x)=۱۰+۵\times ۲^x$
۲۰۳ – الف) $۲k\pi<x<\pi+۲k\pi\ [(k=۰,\ \pm۱,\ \pm۲,\ \dots)$ ؛
ب) $۱<x<e$ ؛ پ) $x>۰$ ، $x\neq k\ (k=۰,\ ۱,\ ۲,\ \dots)$ ۲۰۵ – الف)
$z=x+y$ ؛ ب) $z=\frac{xy}{x+y}$ ؛ پ) $z=\frac{x+y}{۱-xy}$ ؛ ت) $z=\frac{x+y}{۱+xy}$
۲۰۶ – $\varphi(\varphi(x))=x^۴$ ؛ $\psi(\psi(x))=۲^{۲x}$ ، $\varphi(\psi(x))=۲^{۲x}$ ؛ $\psi(\varphi(x))=۲^{x^۲}$
۲۰۷ – $\varphi(\varphi(x))=\operatorname{sgn}x$ ؛ $\psi(\psi(x))=x\ (x\neq ۰)$ ؛ $\varphi(\psi(x))=\psi(\varphi(x))=$
$=\operatorname{sgn}x\ (x\neq ۰)$ ۲۰۸ – $\varphi(\varphi(x))=\varphi(x)$ ؛ $\psi(\varphi(x))=\psi(x)$ ؛
$\psi(\psi(x))=\varphi(\psi(x))=۰$ ۲۰۹ – $-\frac{۱-x}{x}$ ؛ $x\ (x\neq ۰,\quad x\neq ۱)$
۲۱۰ – $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{۱+nx^۲}}$ ۲۱۱ – $x^۲-۵x+۶$ ۲۱۲ – $x^۲-۲(x|\geqslant ۲)$
۲۱۳ – $\frac{۱+\sqrt{۱+x^۲}}{x}$ ۲۱۳,۱ – $f(x)=\left(\frac{x}{۱-x}\right)^۲$ ۲۲۱ – الف) بازای $a>۰$
صعودی و بازای $a<۰$ نزولی است ؛ ب) بازای $a>۰$ در فاصلهٔ
$\left(-\infty,-\frac{b}{۲a}\right)$ نزولی و در فاصلهٔ $\left(-\frac{b}{۲a},+\infty\right)$ صعودی است ؛ پ) صعودی
است ؛ ت) بازای $ad-bc>۰$ در فواصل $\left(-\infty,-\frac{d}{c}\right)$ و $\left(-\frac{d}{c},+\infty\right)$
صعودی است ؛ ث) بازای $a>۱$ صعودی و بازای $۰<a<۱$
نزولی است ۲۲۲ – میتوان ، اگر مبنای لگاریتم بزرگتر از ۱ باشد
۲۲۴ – $\frac{y-۳}{۲}\ (-\infty<y<+\infty)$ ۲۲۵ – الف) $-\sqrt{y}\ (۰\leqslant y<+\infty)$ ؛

ب) $\sqrt{y}\ (0\leqslant y<+\infty)$ ۲۲۶- $\frac{1-y}{1+y}(y\neq-1)$ ۲۲۷- الف) $-\sqrt{1-y^2}$
$(0\leqslant y\leqslant 1)$؛ ب) $\sqrt{1-y^2}\ (0\leqslant y\leqslant 1)$ ۲۲۸- $\operatorname{Arsh} y=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$
$(-\infty<y<+\infty)$ ۲۲۹- $\operatorname{Arth} y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}\ (-1<y<1)$ ۲۳۰- $x=y$
اگر $-\infty<y<1$؛ $x=\sqrt{y}$ اگر $1\leqslant y\leqslant 16$؛ $x=\log_2 y$ اگر
$16<y<+\infty$ ۲۳۱- الف) فرد ؛ ب) زوج ؛ پ) زوج ؛ ت) فرد ؛
ث) فرد ۲۳۳- الف) دوره‌ای $T=\frac{2\pi}{\lambda}$ ؛ ب) دوره‌ای $T=2\pi$؛
پ) دوره‌ای $T=6\pi$؛ ت) دوره‌ای $T=\pi$؛ ث) نادوره‌ای؛ ج) دوره‌ای $T=\pi$؛
چ) نادوره‌ای ؛ ح) نادوره‌ای ۲۴۱- $t=1\frac{2}{3}\sec$، $x=-3\frac{1}{3}m$
۲۴۳- $x_0=-\frac{b}{2a}$، $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$ ۲۴۴- $y=x-\frac{x^2}{36000}$ ؛ ۹ km ؛
۳۶ km ۲۵۱- $x_0=-\frac{d}{c}$ ؛ $y_0=\frac{a}{c}$ ۲۵۲- $p=\frac{12}{v}\ (v>0)$
۲۶۳- $k=\frac{a}{a_1}$ ؛ $m=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}$ ، $n=\frac{c}{a_1}-\frac{b_1}{a_1^3}(a_1b-ab_1)$ ،
$x_0=-\frac{b_1}{a_1}$ ۲۶۴- $y=\frac{10}{x^2}$ ۲۸۷- $A=\sqrt{a^2+b^2}$ ؛ $\sin x_0=-\frac{a}{A}$ ،
$\cos x_0=\frac{b}{A}$ ۳۵۶- $y=2\sin x$ اگر $|x-\pi k|\leqslant\frac{\pi}{6}$ و $y=(-1)^k$
اگر $\frac{\pi}{6}<|x-\pi k|<\frac{5\pi}{6}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ ۳۵۷- الف)
$y=\frac{1}{2}(x+|x|)$؛ ب) و پ) $y=x^2$ اگر $x\geqslant 0$؛ $y=0$ اگر $x<0$؛
ت) $y=x$ اگر $x<0$؛ $y=x^4$ اگر $x\geqslant 0$ ۳۵۸- الف) $y=1$ ؛
ب) $y=1$ اگر $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$؛ $y=0$ اگر $|x|<1$ یا $|x|>\sqrt{3}$؛
پ) $y=1$ اگر $|x|\leqslant 1$ ؛ $=2$ اگر $|x|>1$ ؛ ت) $y=-2$ اگر
$|x|>2$؛ $y=2-(2-x^2)^2$ اگر $|x|\leqslant 2$ ۳۵۹- بازای $x<0$ داریم:
الف) ۱) $f(x)=1+x$، ۲) $f(x)=-(1+x)$؛ ب) ۱) $(x)=-2x-x^2$،
۲) $f(x)=2x+x^2$؛ پ) ۱) $f(x)=\sqrt{-x}$، ۲) $f(x)=-\sqrt{-x}$؛
ت) ۱) $f(x)=-\sin x$، ۲) $f(x)=\sin x$؛ ث) ۱) $f(x)=e^{-x}$،

۲) $f(x)=-e^{-x}$ ؛ ج) ۱) $f(x)=\ln(-x)$ ، ۲) $f(x)=-\ln(-x)$

۳۶۰ – الف) $x=-\frac{b}{۲a}$ ؛ ب) $x=\frac{۱}{۲}$ ؛ پ) $x=\frac{b-a}{۲}$ ؛ ت) $x=k\pi$
$(k=۰, \pm۱, \pm۲, \dots)$ ۳۶۱ – الف) $(x_{۰}, ax_{۰}+b)$ که در آن
اختیاری است ؛ ب) $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ ؛ پ) $(x_{۰}, y_{۰})$ که در آن $x_{۰}=-\frac{b}{۳a}$
و $y_{۰}=ax_{۰}^{۳}+bx_{۰}^{۲}+cx_{۰}+d$ ؛ ت) $(۲, ۰)$ ؛ ث) $(۲, ۱)$ ۳۷۲ – ریشه‌ها :
-۱,۸۸ ؛ ۰,۳۵ ؛ ۱,۵۳ ۳۷۳ – ۲,۱۱ ؛ ۰,۲۵ ؛ -۱,۸۶ ۳۷۴ – ۰,۲۵ ؛
۱,۴۹ ۳۷۵ – ۰,۶۴ ۳۷۶ – ۱,۳۷ ؛ ۱۰ ۳۷۷ – -۰,۵۴ ۳۷۸ – ۰ ؛
۴,۴۹ ۳۷۹ – $x_{۱}=-۰,۵۷$ ، $y_{۱}=-۱,۲۶$ ؛ $x_{۲}=-۰,۴۲$ ، $y_{۲}=۱,۱۹$ ؛
$x_{۳}=۰,۴۵$ ، $y_{۳}=۰,۷۴$ ؛ $x_{۴}=۰,۵۴$ ، $y_{۴}=-۰,۶۸$ ۳۸۰ – $x_{۱}=-۱,۳۰$ ،
$y_{۱}=۹,۹۱$ ؛ $x_{۲}=۲,۳۰$ ، $y_{۲}=۹,۷۳$ ؛ $x_{۳}=-۰,۶۲$ ، $y_{۳}=-۹,۹۸$ ؛
$x_{۴}=۱,۶۲$ ، $y_{۴}=۹,۸۷$ ۳۸۲ – الف) بطور کلی خیر ؛ ب) بلی
۳۸۵ – کراندار از بالا و ناکراندار از پائین است . ۳۸۷ – $f(a)$ و (b)
۳۸۸ – ۰ ؛ ۲۵ ۳۸۹ – ۰ ؛ ۱ ۳۹۰ – ۰ ؛ ۱ ۳۹۱ – ۲ ؛ $+\infty$
۳۹۲ – -۱ ؛ ۱ ۳۹۳ – $-\sqrt{۲}$ ؛ $\sqrt{۲}$ ۳۹۴ – $\frac{۱}{۲}$ ؛ ۴ ۳۹۵ – الف)
۰ ؛ ۱ ؛ ب) ۰ ؛ ۲ ۳۹۶ – ۰ ؛ ۱ ۳۹۷ – الف) ۸ ؛ ب) ۰,۸ ؛
پ) ۰,۰۸ ؛ ث) ۰,۰۰۸ ۳۹۸ – الف) π ؛ ب) π ؛ پ) π ؛ ت) π
۴۱۱ – الف) ۱ ؛ ب) $\frac{۲}{۳}$ ؛ پ) $\frac{۱}{۲}$ ۴۱۲ – ۶ ۴۱۳ – ۱۰
۴۱۴ – $\frac{۱}{۲}nm(n-m)$ ۴۱۵ – $۵^{-۵}$ ۴۱۶ – $\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۳۰}$ ۴۱۷ – $n^{-\frac{n(n+۱)}{۲}}$
۴۱۸ – $-\frac{۱}{۲}$ ۴۱۹ – $\frac{۱}{۲}$ ۴۲۰ – ۱ ۴۲۱ – $\frac{۱}{۴}$ ۴۲۲ – $\frac{۱}{۳}$
۴۲۳ – $\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۱۰}$ ۴۲۴ – $\frac{n(n+۱)}{۲}$ ۴۲۴,۱ – $۲\frac{۱}{۲۴}$ ۴۲۵ – $\frac{m}{n}$
۴۲۶ – $\frac{n(n-۱)}{۲}a^{n-۲}$ ۴۲۷ – $\frac{n(n+۱)}{۲}$ ۴۲۸ – $\frac{m-n}{۲}$ ۴۲۹ – $x+\frac{a}{۲}$
۴۳۰ – $x^{۲}+ax+\frac{a^{۲}}{۳}$ ۴۳۱ – ۱ ۴۳۲ – $\frac{۱}{۲}$ ۴۳۳ – ۳ ۴۳۴ – $\frac{ab}{۳}$
۴۳۵ – ۱ ۴۳۶ – $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۴۳۷ – $\frac{۴}{۳}$ ۴۳۸ – -۲ ۴۳۹ – $\frac{۱}{\sqrt{۲a}}$

۴۴۰- $-\frac{۱}{۱۶}$ ۴۴۱- $\frac{۱}{۱۴۴}$ ۴۴۲- $\frac{۱}{۴}$ ۴۴۳- $\frac{۱۲}{۵}$ ۴۴۴- $\frac{۱}{n}$

۴۴۵- -۲ ۴۴۶- $\frac{۱}{۴}$ ۴۴۷- $\frac{۲}{۲۷}$ ۴۴۸- $\frac{۳}{۲}$ ۴۴۹- $\frac{۴}{۲۷}$ ؛   ۴۵۰- $\frac{۷}{۳۶}$

۴۵۱- $-\frac{۱}{۲}$ ۴۵۲- $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$ ۴۵۳- $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$ ۴۵۵- $\frac{n}{m}$

۴۵۵,۱- $\frac{۱}{۲}$ ۴۵۶- $\frac{۱}{n!}$ ۴۵۷- $\frac{۱}{۲}(a+b)$ ۴۵۸- $\frac{۱}{۲}$ ۴۵۹- $-\frac{۱}{۴}$

۴۶۰- ۱   ۴۶۱- $\frac{۲}{۳}$ ۴۶۲- ۲   ۴۶۳- $\frac{۴}{۳}$ ۴۶۴- $-\frac{۱}{۴}$

۴۶۵- $\frac{۱}{n}\times(a_۱+a_۲+\dots+a_n)$ ۴۶۶- ۲^n ۴۶۷- $۲n$ ۴۶۸- $\lim\limits_{a\to ۰} x_۱=\infty$ ،

$\lim\limits_{a\to ۰} x_۲=-\frac{c}{b}$ ۴۶۹- $a=۱$ ، $b=-۱$ ۴۷۰- $a_i=\pm ۱$ ؛

$b_i=\mp\frac{۱}{۲}$ $(i=۱,\ ۲)$ ۴۷۱- ۵   ۴۷۲- ۰   ۴۷۳- $(-۱)^{m-n}\frac{m}{n}$

۴۷۴- $\frac{۱}{۲}$ ۴۷۴,۱ ۱   ۴۷۴,۲- $\frac{۱}{۳}$ ۴۷۵- $\frac{۱}{۲}$ ۴۷۶- ۲   ۴۷۷- ۴

۴۷۸- $\frac{۱}{p}$ ۴۷۹- $\frac{۱}{۲}$ ۴۸۰- $\frac{۲}{\pi}$ ۴۸۲- $\cos a$ ۴۸۳- $\sin a$

۴۸۴- $\sec^{۲} a\left((a(۲k+۱)\frac{\pi}{۲},\quad k=۰,\pm ۱,\dots\right)$ ۴۸۵- $-\frac{۱}{\sin^{۲} a}$

($a\neq k\pi$ که در آن k عددیست درست)   ۴۸۶- $\frac{\sin a}{\cos^{۲} a}$ $\left(a\neq(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\right.$

که در ان k عددیست درست)   ۴۸۸- $-\sin a$ ۴۸۹- $-\cos a$

۴۹۰- $\frac{۲\sin a}{\cos^{۳} a}$ $\left(a\neq(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\right.$ که در آن k عددیست درست)

۴۹۱- $\frac{۲\cos a}{\sin^{۳} a}$ ($a\neq k\pi$ که در آن k عددیست درست)   ۴۹۲- $\frac{۳}{۲}\sin ۲a$

۴۹۳- -۳ ۴۹۴- ۱۴   ۴۹۵- $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۴۹۶- -۲۴ ۴۹۷- $-\frac{\cos ۲a}{\cos^{۴} a}$

($a \neq (۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ که در آن k عددیست درست) ۴۹۸ – $\frac{۳}{۴}$

۴۹۹ – $\frac{۱}{۴}$ ۵۰۰ – $\frac{۴}{۳}$ ۵۰۱ – $-\frac{۱}{۱۲}$ ۵۰۲ – $\sqrt{۲}$ ۵۰۳ – ۰

۵۰۴ – ۳ ۵۰۵ – ۰ ۵۰۶ – الف) $\frac{۱}{۲}$ ؛ ب) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ؛ پ) ۱

۵۰۷ – ۰ ۵۰۸ – ۰ ۵۰۹ – ۰ ۵۱۰ – ۰ ۵۱۱ – ۱ ۵۱۲ – $e^{۳}$

۵۱۳ – ۱ ۵۱۴ – $e^{-۲}$ ۵۱۵ – $e^{۲a}$ ۵۱۶ – ۰ اگر $a_۱<a_۲$ ؛ $+\infty$ اگر $a_۱>a_۲$ ؛ $e^{\frac{b_۱-b_۲}{a_۱}}$ اگر $a_۱=a_۲$ ۵۱۷ – e ۵۱۸ – $e^{-۱}$ ۵۱۹ – ۱

۵۱۹,۱ – $\sqrt{e}$ ۵۲۰ – $e^{\operatorname{ctg} a}$ ($a \neq k\pi$ ، k عددیست درست)

۵۲۱ – $e^{\frac{۳}{۲}}$. ۵۲۲ – $e^{-۱}$ ۵۲۳ – ۱ ۵۲۴ – $e^{-۲}$ ۵۲۵ – e

۵۲۶ – $\frac{۱}{\sqrt{e}}$ ۵۲۷ – $e^{x+۱}$ ۵۲۸ – $e^{-\frac{x^۲}{۲}}$ ۵۲۹ – ۱ ۵۳۰ – ۱

۵۳۱ – $\frac{۱}{a}$ ۵۳۲ – ۰ ۵۳۳ – $\frac{۱}{e}$ ۵۳۴ – -۲ ۵۳۵ – $\frac{۳}{۲}$

۵۳۶ – $\frac{۳}{۲}$ ۵۳۷ – $-\frac{\log e}{x^۲}$ ۵۳۸ – $\frac{۲a}{b}$ ۵۳۹ – $\left(\frac{a}{b}\right)^۲$ ۵۴۰ – ۰

۵۴۰,۱ – n ۵۴۱ – $\ln a$ ۵۴۲ – $a^a \ln \frac{a}{e}$ ۵۴۳ – $a^a \ln ea$ ۵۴۴ – $e^۲$

۵۴۵ – $\frac{۲}{۳}$ ۵۴۵,۱ – $e^{\beta^۲-\alpha^۲}$ ۵۴۵,۲ – $\frac{\alpha}{\beta}$ ۵۴۵,۳ – ۲ ۵۴۶ – $e^۲$

۵۴۷ – ۱ ۵۴۸ – $\frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta}$ ۵۴۹ – $a^b \ln a$ ۵۵۰ – $a^x \ln^۲ a$ ۵۵۱ – $e^{-(a+b)}$

۵۵۲ – $\ln x$ ۵۵۳ – $\ln x$ ۵۵۴ – $\sqrt[a]{b}$ ۵۵۵ – $\sqrt{ab}$ ۵۵۶ – $\sqrt[۳]{abc}$

۵۵۷ – $(a^a b^b c^c)^{\frac{۱}{a+b+c}}$ ۵۵۸ – $\frac{۱}{\sqrt{ab}}$ ۵۵۹ – $\left(\ln \frac{a}{b}\right)^{-۱}$ ۵۶۰ – $a^{a^a} \ln a$

۵۶۱ – الف) ۰ ؛ ب) $\frac{\ln ۳}{\ln ۲}$ ۵۶۲ – $\ln ۸$ ۵۶۳ – $-\ln ۲$ ۵۶۶ – الف)

$\frac{۱}{۲}$ ؛ ب) $\frac{۱}{۲}$ ۵۶۷ – ۱ ۵۶۸ – ۰ ۵۶۹ – $\ln a^۲$ ۵۷۰ – $\frac{۱}{۸}$

٥٧١ – $\frac{١}{٢}$ ٥٧٢ – -٢ ٥٧٣ – $e^{٢}$ ٥٧٤ – $e^{\frac{٢}{\pi}}$ ٥٧٥ – $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$

٥٧٦ – الف) ١ ؛ ب) $\frac{١}{٢}$ ؛ پ) ١   ٥٧٦,١ – $\frac{٢}{٩}$ ٥٧٧ – $٢\operatorname{sh}\frac{١}{٢}$

٥٧٧,١ – الف) $\operatorname{ch}a$ ؛ ب) $\operatorname{sh}a$ ٥٧٧,٢ – -١ ٥٧٨ – $\ln ٢$ ٥٧٩ – ١

٥٨٠ – $e^{\pi^٢}$ ٥٨١ – $-\frac{\pi}{٢}$ ٥٨٢ – $\frac{\pi}{٣}$ ٥٨٣ – $-\frac{\pi}{٢}$ ٥٨٤ – $\frac{٣\pi}{٤}$

٥٨٥ – $\frac{١}{١+x^٢}$ ٥٨٦ – ٢   ٥٨٧ – $\frac{e^x}{x^٢+١}$ ٥٨٨ – $\frac{١}{٢}$ ٥٨٩ – ١

٥٩٠ – $e^{\frac{٢}{\pi}}$ ٥٩١ ٠   ٥٩٢ – ٠   ٥٩٣ – الف) $+\infty$ ؛ ب) $\frac{١}{٢}$

٥٩٤ – الف) -١ ؛ ب) ١   ٥٩٤,١ – $\ln\frac{b^٢}{a^٢}$ ٥٩٥ – الف) $\frac{\pi}{٢}$ ؛ ب) $-\frac{\pi}{٢}$

٥٩٦ – الف) ١ ؛ ب) ٠   ٥٩٧ – الف) ٠ ؛ ب) ١   ٦٠٠ – ٢ ؛ ١ ؛ ٢

٦٥١ – ٠ ؛ $(-١)^{n-١}$ ؛ $(-١)^n$ ٦٠٢ – ٠   ٦٠٣ – ١   ٦٠٤ – ٠   ٦٠٥ – ١

٦٠٦ – ٠   ٦١٣ – ب) $y=١$ اگر $|x|<١$ ؛ $y=٠$ اگر $|x|=١$

٦١٤ – ب) $y=٠$ اگر $٠\leqslant x<١$ ؛ $y=\frac{١}{٢}$ اگر $x=١$ ؛ $y=١$ اگر

$١<x<+\infty$ ٦١٥ – $y=-١$ اگر $٠<|x|<١$ ؛ $y=٠$ اگر

$|x|=١$ ؛ $y=١$ اگر $|x|>١$ ٦١٦ – $y=|x|$ ٦١٧ – $y=١$

اگر $٠\leqslant x\leqslant ١$ ؛ $y=x$ اگر $x>١$ ٦١٨ – $y=١$ اگر $٠\leqslant x\leqslant ١$ ؛

$y=x$ اگر $١<x<٢$ ؛ $y=\frac{x^٢}{٢}$ اگر $x\geqslant ٢$ ٦١٩ – $y=٠$ اگر

$٠\leqslant x<٢$ ؛ $y=٢\sqrt{٢}$ اگر $x=٢$ ؛ $y=x^٢$ اگر $x>٢$

٦٢٠ – ب) $y=٠$ اگر $x\neq(٢k+١)\frac{\pi}{٢}$ ؛ $y=١$ اگر $x=(٢k+١)\frac{\pi}{٢}$

$(k=٠, \pm١, \pm٢, \ldots)$ ٦٢١ – $y=\ln ٢$ اگر $٠\leqslant x\leqslant ٢$ ؛ $y=\ln x$

اگر $x>٢$ ٦٢٢ – $y=٠$ اگر $-١<x\leqslant ١$ ؛ $y=\frac{\pi}{٢}(x-١)$ اگر

$x>١$ ٦٢٣ – $y=١$ اگر $x\leqslant -١$ ؛ $y=e^{x+١}$ اگر $x>-١$

٦٢٤ – $y=x$ بازای $x<٠$ ؛ $y=\frac{١}{٢}$ بازای $x=٠$ ؛ $y=١$ بازای $x>٠$

٦٢٥ – $\frac{١}{x}$ ٦٢٥,١ – $y=\sqrt{x}$ بازای $٠\leqslant x<١$ و $٤k-١<x<٤k+١$ ؛

$y=x$ بازای $4k-3<x<4k-2$ و $4k-2<x<4k-1$ ؛
$y=\frac{1}{2}(\sqrt{x}+x)$ بازای $(k=1, 2, 3, \dots)$ $x=2k-1$ ۶۲۵,۲ – $y=0$
اگر x گویا باشد ؛ $y=x$ اگر x گنگ باشد ۶۲۵,۳ – دورگرد مربع
$\max\{|x|, |y|\}=1$ ۶۲۷ – الف) $x=1$ ، $x=-2$ ، $y=x-1$ ؛
ب) $y=x+\frac{1}{2}$ بازای $x\to+\infty$ ، $y=-x-\frac{1}{2}$ بازای $x\to-\infty$ ؛
پ) $y=\frac{1}{3}-x$ ؛ ت) $y=x$ بازای $x\to+\infty$ ، $y=0$ بازای $x\to-\infty$ ؛
ث) $y=0$ بازای $x\to-\infty$ ، $y=x$ بازای $x\to+\infty$ ؛ ج) $y=x+\frac{\pi}{2}$
۶۲۸ – 0 ۶۲۹ – $\frac{1}{1-x}$ ۶۳۰ – $\frac{\sin x}{x}$ ۶۳۲ – $\frac{1}{6}$ ۶۳۳ – $\frac{a}{2}$
۶۳۴ – $\frac{1}{2}\ln a$ ۶۳۵ – $\sqrt{e}$ ۶۳۶ – $e^{-\frac{a^2}{6}}$ ۶۳۷ – $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$
۶۳۷,۱ – $\frac{2}{3}$ ۶۳۷,۲ – $\frac{b}{1-\alpha}$ ۶۳۷,۳ – $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ۶۳۸ – $\sqrt{1+x}-1$
۶۳۹ – $1-\sqrt{1-x}$ ۶۴۱ – الف) ۲ ؛ ب) $+\infty$ ؛ پ) ۰ ؛ ت) ۱ ؛
ث) ۲ ؛ ج) ۱ ؛ چ) $2\,\mathrm{sh}\,1$ ۶۴۳ – الف) $l=-1$ ، $L=2$ ؛
ب) $l=-2$ ، $L=2$ ؛ پ) $l=2$ ، $L=e$ ۶۴۴ – الف) $l=-1$ ،
$L=1$ ؛ ب) $l=0$ ، $L=+\infty$ ؛ پ) $l=\frac{1}{2}$ ، $L=2$ ؛ ت) $l=0$ ،
$L=+\infty$ ۶۴۵ – الف) مرتبهٔ یک ؛ ب) مرتبهٔ دو ؛ پ) مرتبهٔ یک ؛
ت) مرتبهٔ سه ؛ ث) مرتبهٔ سه ؛ ج) مرتبهٔ سه ۶۵۳ – الف) $2x$ ؛ ب) x ؛
پ) $\frac{x^2}{2}$ ؛ ت) $\frac{x^3}{2}$ ۶۵۵ – الف) $3(x-1)^2$ ؛ ب) $\frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$ ؛
پ) $x-1$ ؛ ت) $e(x-1)$ ؛ ث) $x-1$ ۶۵۶ – الف) x^2 ؛ ب) $2x^2$ ؛
پ) $x^{\frac{2}{3}}$ ؛ ت) $x^{\frac{1}{8}}$ ۶۵۷ – الف) $\left(\frac{1}{x}\right)^3$ ؛ ب) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ ؛
پ) $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$ ؛ ت) $\left(\frac{1}{x}\right)^2$ ۶۵۸ – الف) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ ؛

ب) $\sqrt{٢}\left(\frac{١}{١-x}\right)^{\frac{١}{٢}}$ ؛ پ) $\frac{١}{\sqrt[٣]{٣}}\left(\frac{١}{١-x}\right)^{\frac{١}{٣}}$ ؛ ت) $\frac{١}{\pi}\times\frac{١}{١-x}$ ؛
ث) $\frac{١}{x-١}$ ٦٦٣ – الف) $٩,٩٥<x<١٠,٠٥$ ؛ ب) $٩,٩٩٥<x<١٠,٠٠٥$ ؛
پ) $٩,٩٩٩٥<x<١٠,٠٠٠٥$ ؛ ت) $\sqrt{١٠٠-\varepsilon}<x<\sqrt{١٠٠+\varepsilon}$
٦٦٤ – $\Delta<\frac{\varepsilon}{٢٧}$ ؛ الف) $\Delta<٣,٧\,\mathrm{mm}$ ؛ ب) $\Delta<٠,٣٧\,\mathrm{mm}$ ؛ پ) $\Delta<٠,٠٣٧\,mm$
٦٦٥ – $١٠٠\,[١-١٠^{-(n+١)}]^٢<x<١٠٠\,[١+١٠^{-(n+١)}]^٢$ ؛ الف)
$٨١<x<١٢١$ ؛ ب) $٩٨,٠١<x<١٠٢,٠١$ ؛ پ) $٩٩,٨٠٠١<x<١٠٠,٢٠٠١$ ؛
ت) $٩٩,٩٨٠٠٠١<x<١٠٠,٠٢٠٠٠١$ ٦٦٦ – $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{١١},\ ١\right)$
٦٦٧ – $\delta=\frac{\varepsilon x_0^٢}{١+\varepsilon x_0}\approx ٠,٠٠١\,x_0^٢$ ؛ الف) $\delta\approx١٠^{-٥}$ ؛ ب) $\delta\approx١٠^{-٧}$ ؛
پ) $\delta\approx١٠^{-٩}$. نمیتوان   ٦٦٩ – الف) نمیتوان؛ ب) میتوان   ٦٧١ – خیر ؛
کراندار بودن در نقطهٔ x_0 ٦٧٢ – خیر ؛ اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ متناهی
(a, b) معین باشد در آنصورت این نامساویها همیشه برقرار خواهند بود ؛
اگر لااقل a یا b مساوی نماد ∞ باشند در آنصورت $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=+\infty$
٦٧٣ – خیر ؛ تک‌مقداری و پیوستگی تابع معکوس   ٦٧٥ – پیوسته است
٦٧٦ – پیوسته است اگر $A=٤$ و بازای $x=٢$ منفصل است اگر $A\neq٤$ ؛
٦٧٧ – بازای $x=-١$ منفصل است   ٦٧٨ – الف) پیوسته است ؛ ب) بازای
$x=٠$ مفصل است   ٦٧٩ – بازای $x=٠$ منفصل است   ٦٨٠ – پیوسته است
٦٨١ – پیوسته است   ٦٨٢ – بازای $x=١$ منفصل است   ٦٨٣ – بازای $a=٠$
پیوسته و بازای $a\neq٠$ منفصل است   ٦٨٤ – بازای $x=٠$ منفصل است
٦٨٥ – بازای $x=k$ (k درست است) منفصل است   ٦٨٦ – بازای $x=k^٢$
$(k=١, ٢, \dots)$ منفصل است   ٦٨٧ – $x=-١$ نقطهٔ انفصال بی‌نهایت است
٦٨٨ – $x=-١$ نقطهٔ انفصال قابل حذف است   ٦٨٩ – $x=-٢$ و $x=١$
نقاط انفصال بی‌نهایت است   ٦٩٠ – $x=٠$ و $x=١$ نقاط انفصال قابل حذف ؛
$x=-١$ نقطهٔ انفصال بی نهایت است   ٦٩١ – $x=٠$ نقطهٔ انفصال قابل
حذف است ؛ $x=k\pi\ (k=\pm١, \pm٢, \dots)$ نقاط انفصال بی‌نهایت هستند
٦٩٢ – $x=\pm٢$ نقاط انفصال قابل حذف میباشند   ٦٩٣ – $x=٠$ نقطهٔ انفصال
نوع دوم است   ٦٩٤ – $x=\frac{١}{k}\ (k=\pm١, \pm٢, \dots)$ نقاط انفصال نوع

اول میباشند ؛ $x = ۰$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است ۶۹۵ – $x = ۰$ و $x = \frac{۲}{۲k+۱}$ $(k = ۰, \pm ۱, \dots)$ نقاط انفصال قابل حذف میباشند ۶۹۶ – $x = ۰$ نقطهٔ انفصال نوع اول است ۶۹۷ – $x = ۰$ نقطهٔ إنفصال قابل حذف است ۶۹۸ – $x = ۰$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است ۶۹۹ – $x = ۰$ نقطهٔ انفصال قابل حذف است ؛ $x = ۱$ نقطهٔ انفصال بی‌نهایت است ۷۰۰ – $x = ۰$ نقطهٔ انفصال بی‌نهایت است ؛ $x = ۱$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است ۷۰۱ – $x = k\pi$ $(k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ نقاط انفصال نوع اول میباشند ۷۰۲ – $x = k$ $(k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ نقاط انفصال نوع اول میباشند ۷۰۴ – تابع پیوسته است ۷۰۵ – $x = \pm \sqrt{n}$ $(n = ۱, ۲, \dots)$ نقاط انفصال نوع اول میباشند ۷۰۶ – $x = \frac{۱}{k}$ $(k = \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ نقاط انفصال نوع اول میباشند ؛ $x = ۰$ نقطهٔ انفصال بی‌نهایت است ۷۰۷ – $x = \frac{۱}{k}$ $(k = \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ نقاط انفصال نوع اول میباشند ؛ $x = ۰$ نقطهٔ انفصال قابل حذف است ۷۰۸ – $x = \frac{۲}{(۲k+۱)\pi}$ $(k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ نقاط انفصال نوع اول میباشند ؛ $x = ۰$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است ۷۰۹ – $x = \pm \frac{۱}{\sqrt{k}}$ $(k = ۱, ۲, \dots)$ و $x = \pm \frac{۱}{k}$ نقاط انفصال نوع اول میباشند ، $x = ۰$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است ۷۱۰ – $x = \frac{۱}{k}$ $(k = \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ نقاط انفصال بی‌نهایت است ؛ $x = ۰$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است ۷۱۱ – $x = \frac{۲}{(۲k+۱)\pi}$ $(k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ – نقاط انفصال بی‌نهایت میباشند ؛ $x = ۰$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است ۷۱۲ – $x = \pm \sqrt{n}$ $(n = ۱, ۲, \dots)$ نقاط انفصال نوع اول میباشند ۷۱۳ – $x = ۰$ ، $x = ۱$ و $x = ۲$ نقاط انفصال نوع اول میباشند ۷۱۴ – $x = k\pi$ $(k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ نقاط انفصال بی‌نهایت میباشند ۷۱۵ – $x = \pm \sqrt{k\pi}$ $(k = ۰, ۱, ۲, \dots)$ نقاط انفصال بی‌نهایت میباشند ۷۱۶ – $x = -۱$ و $x = ۳$ نقاط انفصال بی‌نهایت میباشند ۷۱۷ – $x = ۰$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است ۷۱۸ – $x = ۰$ نقطهٔ انفصال قابل حذف است ۷۱۹ – $x = \pm ۱$ نقاط انفصال نوع اول میباشند ۷۲۰ – $y = ۱$

اگر $۰ \leqslant x < ۱$ ؛ $y=\frac{۱}{۲}$ اگر $x=۱$ ؛ $y=۰$ اگر $x>۱$ ؛ $x=۱$
نقطهٔ انفصال نوع اول است ۷۲۱ - $y=\operatorname{sgn} x$ ؛ $x=۰$ نقطهٔ انفصال نوع
اول است ۷۲۲ - $y=۱$ اگر $|x|\leqslant ۱$ ؛ $y=x^{۲}$ اگر $|x|>۱$. تابع
پیوسته است ۷۲۳ - $y=۰$ اگر $x\neq k\pi$ ؛ $y=۱$ اگر $x=k$
$\pi\,(k=۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ ؛ $x=k\pi$ نقاط انفصال نوع اول می‌باشند
۷۲۴ - $y=x$ اگر $|x-k\pi|<\frac{\pi}{۶}$ ؛ $y=\frac{x}{۲}$ اگر $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$ ؛
$y=۰$ اگر $(k=۰, \pm ۱, \dots)$ $\frac{\pi}{۶}<|x-k\pi|<\frac{۵\pi}{۶}$ ؛ $x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$
نقاط انفصال نوع اول میباشند ۷۲۵ - $y=\frac{\pi}{۲}x$ اگر $k\pi<x<k<k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ؛
$y=-\frac{\pi}{۲}x$ اگر $k\pi+\frac{\pi}{۲}<x<k\pi+\pi$ ؛ $y=۰$ اگر $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$
$(k=۰, \pm ۱, \dots)$ ؛ $x=\frac{k\pi}{۲}$ نقاط انفصال نوع اول میباشند ۷۲۶ - $y=x$
بازای $x\leqslant ۰$ ؛ $y=x^{۲}$ بازای $x>۰$. تابع پیوسته است ۷۲۷ - $y=۰$
بازای $x\leqslant ۰$ و $y=x$ بازای $x>۰$. تابع پیوسته است ۷۲۸ - $y=-(۱+x)$
بازای $x<۰$ ؛ $y=۰$ بازای $x=۰$ و $y=۱+x$ بازای $x>۰$ ؛ $x=۰$
نقطهٔ انفصال نوع اول است ۷۲۹ - خیر ۷۳۰ - $a=۱$ ۷۳۱ - الف)
تابع پیوسته است ؛ ب) $x=-۱$ نقطهٔ انفصال نوع اول است؛ پ) $x=-۱$
نقطهٔ انفصال نوع اول است ؛ ت) $x=k$ $(k=۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ نقاط
انفصال بی‌نهایت است ؛ ث) $x\neq k$ $(k=۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ نقاط انفصال
نوع دوم است ۷۳۲ - $d=-x$ بازای $-\infty<x<۰$ ؛ $d=۰$ بازای
$۰\leqslant x\leqslant ۱$ ؛ $d=x-۱$ بازای $۱<x\leqslant\frac{۳}{۲}$ ؛ $d=۲-x$ بازای
$\frac{۳}{۲}<x<۲$ ؛ $d=۰$ بازای $۲\leqslant x\leqslant ۳$ ؛ $d=x-۳$ بازای $۳<x<+\infty$.
تابع پیوسته است ۷۳۳ - $S=۳y-\frac{y^{۲}}{۲}$ بازای $۰\leqslant y\leqslant ۱$ ؛ $S=\frac{۱}{۲}+۲y$
بازای $۱<y\leqslant ۲$ ؛ $S=\frac{۵}{۲}+y$ بازای $۲<y\leqslant ۳$ ؛ $S=\frac{۱۱}{۲}$ بازای
$۳<y<+\infty$ ؛ تابع پیوسته است ، $b=۳-y$ بازای $۰\leqslant y\leqslant ۱$ ؛
$b=۲$ بازای $۱<y\leqslant ۲$ ؛ $b=۱$ بازای $۲<y\leqslant ۳$ ؛ $b=۰$ بازای
$۳<y<+\infty$ ؛ $x=۲$ و $x=۳$ نقاط انفصال نوع اول میباشند

۷۳۵ – بازای $x \neq ۰$ منفصل و بازای $x = ۰$ پیوسته است ۷۳۷ – بازای
تمام مقادیر منفی و مقادیر مثبت گویای آرگومان منفصل است ۷۳۸ – $f(۰) = ۰{,}۵$
۷۴۰ – الف) ۱,۵ ؛ ب) ۲ ؛ پ) ۰ ؛ ت) ع ؛ ث) ۰ ؛ ج) ۱ ؛چ) ۰
۷۴۱ – الف) بلی ؛ ب) خیر ۷۴۲ – الف) خیر ؛ ب) خیر ۷۴۳ – خیر
مثال : $f(x) = ۱$ اگر x گویا و $f(x) = -۱$ اگر x گنگ باشد
۷۴۴ – الف) $f(g(x))$ پیوسته ، $g(f(x))$ بازای $x = ۰$ منفصل است ؛
ب) $f(g(x))$ بازای $x = -۱$ ، $x = ۰$ و $x = ۱$ منفصل ، $gf(x)) = ۰$
پیوسته است ؛ پ) $f(g(x))$ و $g(f(x))$ پیوسته میباشند ۷۴۵ – $f(\varphi(x)) \equiv x$
۷۵۹ – $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$ ؛ $a+d = ۰$ ۷۶۰ – $x = y - k$ اگر $۲k \leqslant y < ۲k+۱$
$(k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ ۷۶۴ – $f(f(x)) \equiv x$ ۷۶۷ – $x = -\sqrt{y}\ (۰ \leqslant y < +\infty)$ ؛
$x = \sqrt{y}\ (۰ \leqslant y < +\infty)$ ۷۶۸ – $x = ۱ - \sqrt{۱ - y}\ (-\infty < y \leqslant ۱)$ ؛
$x = ۱ + \sqrt{۱ - y}\ (-\infty < y \leqslant ۱)$ ۷۶۹ – $x = \frac{۱ - \sqrt{۱ - y^۲}}{y} (-۱ \leqslant y \leqslant ۱)$ ؛
$(۰ < |y| \leqslant ۱)$ $x = \frac{۱ + \sqrt{۱ - y^۲}}{y}$ ۷۷۰ – $x = (-۱)^k \arcsin y + k\pi$
$(-۱ \leqslant y \leqslant ۱)$ $(k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ ۷۷۱ – $x = ۲k\pi \pm \arccos y$
$(-۱ \leqslant y \leqslant ۱)$ $(k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ ۷۷۲ – $x = \operatorname{arc\,tg} y + k\pi$
$(-\infty < y < +\infty)$ $(k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ ۷۷۶ – $\varepsilon = ۰$ اگر $xy < ۱$ ؛ $\varepsilon = \operatorname{sgn} x$ اگر
$xy > ۱$ ۷۷۹ – الف) $y = -\frac{\pi}{۲}$ اگر $-۱ \leqslant x \leqslant ۰$ ؛ $y = ۲ \arcsin x - \frac{\pi}{۲}$
اگر $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ ؛ ب) $y = -(\pi + ٤ \arcsin x)$ اگر $-۱ \leqslant x \leqslant -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ؛
$y = ۰$ اگر $-\frac{۱}{\sqrt{۲}} < x < \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ؛ $y = \pi - ٤ \arcsin x$ اگر $\frac{۱}{\sqrt{۲}} < x \leqslant ۱$
۷۸۰ – $y = \frac{\pi}{۲} - x \left(-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}\right)$ ۷۸۱ – $y = \sqrt{x^۲ - ۱}$
$(۱ \leqslant x < +\infty)$ ؛ $y = -\sqrt{x^۲ - ۱}\ (۱ \leqslant x < +\infty)$ ۷۸۲ – برای هر
t که بازای آن $\varphi(t) = x$ ، که در آن x مقدار دلخواه تابع $\varphi(t)$ است ،
تابع $\psi(t)$ باید دارای همان مقدار باشد ۷۸۳ – مجموعهٔ مقادیر $\chi(t)$
بازای $\alpha < \tau < \beta$ باید فاصلهٔ (a, b) باشد ۷۸۴ – برای هر مقدار x که
بازای آن $\varphi(x) = u$ که در آن u عدد دلخواهی از فاصلهٔ (A, B) میباشد،
تابع $\psi(x)$ باید همان مقدار را اختیار کند ۷۸۵ – $|\delta| \leqslant \frac{\varepsilon}{۲۰}\,\mathrm{cm}$ ؛

الف) ۰٫۵ mm؛ ب) ۰٫۰۰۵ mm؛ پ) ۰٫۰۰۰۰۵ mm   ۷۸۶ – الف)
$\delta < \frac{۱}{۴}$؛ ب) $\delta < ۲٫۵ \times ۱۰^{-۴}$؛ پ) $\delta < \frac{۵}{۲} \times ۱۰^{-۷}$ ؛ ث) $\delta < \frac{\varepsilon^{۳}}{۴}$
$(\varepsilon \leqslant ۱)$ ۷۹۳ – الف) بلی ؛ ب) خیر   ۷۹۴ – پیوستهٔ یکنواخت است
۷۹۵ – پیوستهٔ یکنواخت نمیباشد ۷۹۶ – پیوستهٔ یکنواخت است ۷۹۷ – پیوستهٔ
یکنواخت نیست   ۷۹۸ – پیوستهٔ یکنواخت است   ۷۹۹ – پیوستهٔ یکنواخت است
۸۰۰ – پیوستهٔ یکنواخت نمیباشد   ۸۰۲ – الف) $\delta = \frac{\varepsilon}{۵}$ ؛ ب) $\delta = \frac{\varepsilon}{۸}$ ؛
پ) $\delta = ۰٫۰۱\,\varepsilon$ ؛ ت) $\delta = \varepsilon^{۲} (\varepsilon \leqslant ۱)$ ؛ ث) $\delta = \frac{\varepsilon}{۳}$ ؛
ج) $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{۳}, \frac{\varepsilon^{۲}}{۳+\varepsilon}\right)$ ۸۰۳ – $n \geqslant ۱۸۰۰۰۰۰۰$ ۸۰۸ – الف)
$\omega_f(\delta) \leqslant ۳\delta$ ؛ ب) $\omega_f(\delta) \leqslant \sqrt{\delta}$ ؛ $\omega_f(\delta) \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{۲a}}$ ؛ پ) $\omega_f(\delta) \leqslant \delta\sqrt{۲}$
۸۱۸ – $f(x) = \cos ax$ یا $f(x) = \operatorname{ch} ax$ ۸۱۹ – $f(x) = \cos ax$ ؛
$g(x) = \pm \sin ax \quad (a = \text{const})$

فصل ۲

۸۲۱ – $\Delta x = ۹۹۹$ ؛ $\Delta y = ۳$ ۸۲۲ – $\Delta x = -۰٫۰۰۹$ ؛ $\Delta y = ۹۹۰۰۰۰۰$
۸۲۳ – الف) $\Delta y = a\,\Delta x$ ؛ ب) $\Delta y = (۲ax + b)\,\Delta x + a(\Delta x)^{۲}$ ؛
پ) $\Delta y = a^{x}(a^{\Delta x} - ۱)$ ۸۲۵ – الف) ۵ ؛ ب) ۴٫۱ ؛ پ) ۴٫۰۱
ت) $۴ + \Delta x$ ؛ ۴   ۸۲۶ – $۳ + ۳h + h^{۲}$ ؛ الف) ۳٫۳۱ ؛ ۳ ؛ ب) ۳٫۰۳۰۱ ؛
پ) ۳٫۰۰۳۰۰۱ ؛ ۳   ۸۲۷ – الف) $v = ۲۱۵$ m/sec ؛ ب) $v = ۲۱۰٫۵$ m/sec ؛
پ) $v = ۲۱۰/۰۰۵$ m/sec ؛ ۲۱۰ m/sec   ۸۲۸ – الف) $۲x$ ؛ ب) $۳x^{۲}$ ؛
پ) $-\frac{۱}{x^{۲}}\ (x \neq ۰)$ ؛ ت) $\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\ (x > ۰)$ ؛ ث) $\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}\ (x \neq ۰)$ ؛
ج) $\frac{۱}{\cos^{۲} x} \left(x \neq (۲k - ۱)\frac{\pi}{۲},\quad k = ۰, \pm ۱, \ldots\right)$ ؛ چ) $-\frac{۱}{\sin^{۲} x}$
$(x \neq k\pi,\quad k = ۰, \pm ۱, \ldots)$ ؛ ح) $\frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}\ (|x| < ۱)$ ؛
خ) $-\frac{۱}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}\ (|x| < ۱)$ ؛ د) $\frac{۱}{۱ + x^{۲}}$ ۸۲۹ – ۸– ؛ ۰ ؛ ۰   ۸۳۰ – ۴

۸۳۱ − $۱+\frac{\pi}{۴}$ ۸۳۲ − $f'(a)$ ۸۳۴ − $y'=۱-۲x$ ؛ ۱ ، ۰ ،

-۱ ، ۲۱ ۸۳۵ − $y'=x^۲+x-۲$ ؛ الف) -۲ ؛ ۱ ؛ ب) -۱ ؛ ۰

پ) -۴ ؛ ۳ ۸۳۶ − $۱۰a^۳x-۵x^۴$ ۸۳۷ − $\frac{a}{a+b}$ ۸۳۸ − $۲x-(a+b)$

۸۳۹ − $۲(x+۲)(x+۳)^۲(۳x^۲+۱۱x+۹)$ ۸۴۰ − $x\sin ۲a+\cos ۲a$

۸۴۱ − $mn[x^{m-۱}+x^{n-۱}+(m+n)x^{m+n-۱}]$ ۸۴۲ − $-(۱-x)^۲(۱-x)^۲\times$

$\times(۱-x^۳)^۲(۱+۶x+۱۰x^۲+۱۴x^۳)$ ۸۴۲٫۱ − $-۲۰(۱۷+۱۲x)$

$(۵+۲x)^۹(۲-۴x)^{۱۹}$ ۸۴۳ − $(x\neq ۰)$ $-\left(\frac{۱}{x^۲}+\frac{۴}{x^۳}+\frac{۹}{x^۴}\right)$

۸۴۵ − $(|x|\neq ۱)$ $\frac{۲(۱+x^۲)}{(۱-x^۲)^۲}$ ۸۴۶ − $\frac{۲(۱-۲x)}{(۱-x+x^۲)^۲}$ ۸۴۷ − $\frac{۱-x+۴x^۲}{(۱-x)^۳(۱+x)^۴}$

$(|x|\neq ۱)$ ۸۴۸ − $(x\neq ۱)$ $\frac{۱۲-۶x-۶x^۲+۲x^۳+۵x^۴+۳x^۵}{(۱-x^۳)}$

۸۴۹ − $(x\neq -۱)$ $\frac{(۱-x)^{p-۲}[(p+q)+(p-q)x]}{(۱+x)^{q+۱}}$ ۸۵۰ − $\frac{x^{p-۱}(۱-x)^{q-۱}}{(۱+x)^۲}\times$

$\times[p-(q+۱)x-(p+q-۱)x^۲](x\neq -۱)$ ۸۵۱ − $\frac{۱}{۳\sqrt[۴]{x^۲}}+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۱$

$(x>۰)$ ۸۵۲ − $(x>۰)$ $-\frac{۱}{x^۲}-\frac{۱}{۲x\sqrt{x}}-\frac{۱}{۳x\sqrt[۳]{x}}$ ۸۵۳ − $+\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$

$(x>۰)$ $\frac{۱}{x\sqrt{x}}+$ ۸۵۴ − $\frac{۱+۲x^۲}{\sqrt{۱+x^۲}}$ ۸۵۵ − $\frac{۶+۳x+۸x^۲+۴x^۳+۲x^۴+۳x^۵}{\sqrt{۲+x^۲}\,\sqrt[۳]{(۳+x^۳)^۲}}$

$\left(x\neq \sqrt[۳]{-۳}\right)$ ۸۵۶ − $\frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)\sqrt[n+m]{(۱-x)^n(۱+x)^m}}$

۸۵۷ − $(|x|<|a|)$ $\frac{a^۲}{(a^۲-x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ ۸۵۸ − $(|x|\neq ۱$ $\frac{۲x^۲}{۱-x^۶}\sqrt[۳]{\frac{۱+x^۳}{۱-x^۳}}$

۸۵۹ − $-\frac{۱}{(۱+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ ۸۶۰ − $(x>۰)$ $\frac{۱+۲\sqrt{x}+۴\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{۸\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

۸۶۱ — $(x \neq ۰,$ $\frac{۱}{۲۷} \times \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲\left(۱+\sqrt[۳]{x}\right)^۲}} \times \frac{۱}{\sqrt[۳]{\left(۱+\sqrt[۳]{۱+\sqrt[۳]{x}}\right)^۲}}$

$x \neq -۱,\ x \neq -۸)$ ۸۶۲ — $-۲\cos x\,(۱+۲\sin x)$ ۸۶۳ — $x^۲\sin x$

۷۲۴ — $-\sin ۲x \times \cos(\cos ۲x)$ ۸۶۵ — $n\sin^{n-۱} \times x\cos(n+۱)x$ ۸۶۶ —

$\cos x \times \cos(\sin x) \times \cos[\sin(\sin x)]$ ۸۶۷ — $\frac{۲\sin x\,(\cos x\sin x^۲ - x\sin x\cos x^۲)}{\sin^۲ x^۲}$

$(x^۲ \neq k\pi;\ k=۱,۲,\dots)$ ۸۶۸ — $(x \neq k\pi;\ k=۰,\pm۱,\pm۲,\dots)$ $-\frac{۱+\cos^۲ x}{۲\sin^۳ x}$

۸۶۹ — ($x \neq \frac{۲k-۱}{۲}\pi$، k عددیست درست) $\frac{n\sin x}{\cos^{n+۱}x}$ ۸۷۰ — $\frac{x^۲}{(\cos x + x\sin x)^۲}$

۸۷۱ — $(x \neq k\pi;\ k=۰,\pm۱,\pm۲,\dots)$ $\frac{۲}{\sin^۲ x}$ ۸۷۲ — $۱+\operatorname{tg}^۶ x\ \left(x \neq (۲k+\right.$

$+۱)\frac{\pi}{۲};\ k=۰,\pm۱,\dots)$ ۸۷۳ — $x \neq k\pi$، k عدد یست درست $\frac{۸}{۳\sin^۴ x\sqrt[۳]{\operatorname{ctg} x}}$

۸۷۴ — ($x \neq \frac{k\pi a}{۲}$، k عددیست درست) $\frac{-۱۶\cos\frac{۲x}{a}}{a\sin^۳\frac{۲x}{a}}$ ۸۷۵ — $-۳\operatorname{tg}^۲ x \times$

($x \neq \frac{\pi}{۳}+k\pi$، k عددیست درست) $\times \sec^۲ x \times \sin(۲\operatorname{tg}^۳ x) \times \cos[\cos^۲(\operatorname{tg}^۳ x)]$

۸۷۶ — $-۲xe^{-x^۲}$ ۸۷۷ — $-\frac{۱}{x^۲}\,۲^{\operatorname{tg}\frac{۲}{x}}\sec^۲\frac{۱}{x}\ln ۲$ ۸۷۸ — $x^۲e^x$

۸۷۹ — $x^۲e^{-x}\sin x$ ۸۸۰ — ($x \neq ۲k\pi$، k عددیست درست) $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}$

۸۸۱ — $-\frac{۱+\ln^۲ ۳}{۳^x}\sin x$ ۸۸۲ — $\sqrt{a^۲+b^۲}\,e^{ax}\sin bx$

۸۸۳ — $e^x\left[۱+e^{e^x}\left(۱+e^{e^{e^x}}\right)\right]$ ۸۸۴ — $(x>۰)$ $y\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{x}\right)$

۸۸۵ — $a^a \times x^{a^a-۱}+x^{a-۱}a^{x^a}\ln a+a^x \times a^{a^x}\ln^۲ a$ ۸۸۶ — $\frac{۶}{x}\lg e \times \lg^۲ x^۲$

$(x \neq ۰)$ ۸۸۷ — $(x>e)$ $\frac{۱}{x\ln x\ln(\ln x)}$ ۸۸۸ — $(x>e$ $\frac{۶}{x\ln x\ln(\ln^۳ x)}$

۸۸۹ — $\frac{۱}{(۱+x)^{۲}(۱+x^{۲})}$ $(x>-۱)$

۸۹۰ — $\frac{x}{x^{٤}-۱}$ $(|x|>۱)$

۸۹۱ — $\frac{۱}{x(۱+x^{٤})^{۲}}$ $(x\neq ۰)$

۸۹۲ — $\frac{۱}{۳x^{۲}-۲}$ $\left(|x|>\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)$

۸۹۳ — $\frac{۲}{(۱-x^{۲})(۱-kx^{۲})}$ $(|x|<۱)$

۸۹۴ — $\frac{۱}{۲(۱+\sqrt{x+۱})}$ $(x>-۱)$

۸۹۵ — $\frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$

۸۹۶ — $\ln\left(x+\sqrt{x^{۲}+۱}\right)$

۸۹۷ — $\ln^{۲}\left(x+\sqrt{x^{۲}+۱}\right)$

۸۹۸ — $\sqrt{x^{۲}+a^{۲}}$

۸۹۹ — $\frac{۱}{a-bx^{۲}}$ $\left(|x|<\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$

۹۰۰ — $-\frac{۸}{x^{٥}\sqrt{۱-x^{۲}}}$ $(۰<x<۱)$

۹۰۱ — $\frac{۱}{\sin x}$ ($۰<x-۲k\pi<\pi$ ، k عددیست درست)

۹۰۲ — $\frac{۱}{\cos x}$ ($|x-۲k\pi|<\frac{\pi}{۲}$ ، k عددیست درست)

۹۰۳ — $-\operatorname{ctg}^{۳} x$ ($۰<x-۲k\pi<\pi$ ، k عددیست درست)

۹۰۴ — $-\frac{۱}{\cos x}$ ($x\neq\frac{۲k-۱}{۲}\pi$ ، k عددیست درست)

۹۰۵ — $\frac{\cos^{۲}x}{\sin^{۳}x}$ ($۰<x-۲k\pi<\pi$ ، k عددیست درست)

۹۰۶ — $\frac{\sqrt{b^{۲}-a^{۲}}}{a+b\cos x}$

۹۰۷ — $-\frac{\ln^{۳}x}{x^{۲}}$ $(x>۰)$

۹۰۸ — $\frac{۱}{x^{٥}}\ln x$ $(x>۰)$

۹۰۹ — $\frac{۲x}{۱+\sqrt[۳]{۱+x^{۲}}}$

۹۱۰ — $\frac{۱+x+\frac{۱}{x}+\ln\frac{۱}{x}}{\left(۱+x\ln\frac{۱}{x}\right)\left[۱+x\ln\left(\frac{۱}{x}+\ln\frac{۱}{x}\right)\right]}$

۹۱۱ — $۲\sin(\ln x)$ $(x>۰)$

۹۱۲ — $\sin x\times\ln\operatorname{tg}x$ ($۰<x-۲k\pi<\frac{\pi}{۲}$ ، k عددیست درست)

۹۱۳ — $\frac{۱}{\sqrt{٤-x^{۲}}}$ $(|x|<۲)$

۹۱۴ — $\frac{۱}{\sqrt{۱+۲x-x^{۲}}}$ $(|x-۱|<\sqrt{۲})$

۹۱۵ — $\frac{۲ax}{x^{٤}+a^{۲}}$ $(a\neq ۰)$

۹۱۶ — $\frac{۱}{x^{۲}+۲}$ $(x\neq ۰)$

۹۱۷ — $\frac{\sqrt{x}}{۲(۱+x)}$ $(x\geqslant ۰)$

۹۱۸ - $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\times\arccos x\ (|x|<1)$ ۹۱۹ - $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\ (x\geqslant 0)$

۹۲۰ - $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\ (|x|>1)$ ۹۲۱ - $\operatorname{sgn}(\cos x)$ ($x\neq\frac{2k-1}{2}$ ،

k عددیست درست) ۹۲۲ - $\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\times\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ ($x\neq k\pi$، k عددیست درست)

۹۲۳ - $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ ($0<x-k\pi<\frac{\pi}{2}$، k عددیست درست) ۹۲۴ -

$\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}(0<|x|<1)$ ۹۲۵ - $\frac{1}{1+x^2}\ (x\neq 1)$ ۹۲۶ - ۱ ($x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$،

k عددیست درست) ۹۲۷ - $\frac{1}{a+b\cos x}$ ۹۲۸ - $-\frac{2\operatorname{sgn}x}{1+x^2}\ (x\neq 0)$

۹۲۹ - $\frac{4x}{\sqrt{1-x^4}\arccos^3(x^2)}\ (|x|<1)$ ۹۳۰ - $\frac{1+x^4}{1+x^6}$ ۹۳۱ - $-2\cos x\times$

$\times\operatorname{arc\,tg}(\sin x)$ ۹۳۲ - $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}\ (x>1)$ ۹۳۳ - $\frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$

$(x>-a)$ ۹۳۴ - $\sqrt{a^2-x^2}$ ۹۳۵ - $\frac{1}{x^3+1}\ (x\neq-1)$

۹۳۶ - $\frac{1}{x^4+1}\ (|x|\neq 1)$ ۹۳۷ - $(\arcsin x)^2\ (|x|<1)$ ۹۳۸ - $-\frac{\arccos x}{x^2}$

$(0<|x|<1)$ ۹۳۹ - $\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\ (x>1)$ ۹۴۰ - $\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\ (|x|<1)$

۹۴۱ - $\frac{x^3}{x^6+1}\left(|x|\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ۹۴۲ - $\frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}$ ۹٤٥ - $-\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}}$

$(x<1)$ ۹۴۴ - $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(|x|<1)$ ٤۹٥ - $\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}(0<x<a)$

۹۴۶ - $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}(|x+1|<\sqrt{2})$ ۹۴۷ - $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

۹۴۸ - $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ ($x\neq\frac{2k-1}{2}\pi$ ، k عددیست درست)

٩٤٩- $(|x|<١)$ $\frac{\sqrt{١-x^٢}}{x}-\frac{x}{\sqrt{١-x^٢}}\times\ln\sqrt{\frac{١-x}{١+x}}$ ٩٥٠- $\frac{x^٢}{١+x^٢}\operatorname{arc\,tg}x$

٩٥١- $\frac{e^x}{\sqrt{١+e^{٢x}}}$ ٩٥٢- $\frac{١}{٢(١+x^٢)}$ ٩٥٣- $\frac{\sin a\,\operatorname{sgn}(\cos x-\cos a)}{١-\cos a\cos x}$

$(\cos x\neq\cos a)$ ٩٥٤- $(٠<|x|<١)$ $\frac{١}{(x^٤-١)\sqrt{x^٢+٢}}$ ٩٥٥- $\frac{\sqrt{١+x^٤}}{١-x^٤}$

$(|x|\neq١)$ ٩٥٦- $(|x|<١)$ $\frac{٤}{(١+x^٢)^٢\sqrt{١-x^٢}}$ ٩٥٧- $\frac{٢x(\cos x^٢+\sin x^٢)}{\sqrt{\sin(٢x^٢)}}$

$\left(٠<|x|<\sqrt{\left(+\frac{١}{٢}\right)\pi},\ k=٠,\ ١,\ \ldots\right)$ ٩٥٨- $٢x[\operatorname{sgn}(\cos x^٢)+$

$\left(|x|\neq\frac{k\pi}{٢},\ \ k=٠,\ ١,\ ٢,\ \ldots\right)$ $+\operatorname{sgn}(\sin x^٢)]$ ٩٥٩- $\frac{٢m}{\sqrt{١-x^٢}}\times$

٩٥٩- $(|x|<١)$ $\times e^{m(\operatorname{arc\,sin}x)}\cos m(\operatorname{arc\,sin}x)$ ٩٦٠- $\frac{e^x-١}{e^{٢x}+١}$

٩٦٠,١- $\frac{x^٣}{\sqrt[٦]{١+\sqrt[٣]{١+\sqrt[٤]{١+x^٤}}}\times\sqrt[٣]{\left(١+\sqrt[٤]{١+x^٤}\right)}\times\sqrt[٤]{١+x^٤)^٣}}$

٩٦٠,٢- $\frac{١}{x^٣\cos\frac{١}{x^٢}\left(\sin\frac{١}{x^٢}+\cos\frac{١}{x^٢}\right)\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{١}{x^٢}}}$

٩٦٠,٣- $\frac{٢^{١+\sqrt[٣]{x}}\ln٢\times\sin\left(٢^{\sqrt[٣]{x}}\right)\times\ln\left(\sec٢^{\sqrt[٣]{x}}\right)}{٣\sqrt[٣]{x^٢}\times\cos^٢\left(٢^{\sqrt[٣]{x}}\right)}$ ٩٦١- $١+x^x(١+$

٩٦١- $(x>٠)$ $+\ln x)+x^xx^{x^x}\left(\frac{١}{x}+\ln x+\ln^٢x\right)$ ٩٦٢-

$x^{a-١}x^{x^a}(١+a\ln x)+a^xx^{a^x}\left(\frac{١}{x}+\ln a\ln x\right)+x^xa^{x^x}\ln a(١+\ln x)(x>٠)$

٩٦٣- $(x>٠)$ $x^{\frac{١}{x}-٢}(١-\ln x)$ ٩٦٤- — $(\sin x)^{١+\cos x}(\operatorname{ctg}^٢x-\ln\sin x)$

$(\cos x)^{١+\sin x}(\operatorname{tg}^٢x-\ln\cos x)$ — ($٠<x-٢k\pi<\frac{\pi}{٢}$، k عددیست درست)

۹۶۵ - $(x > ۱$ $\frac{(\ln x)^{x-۱}}{x^{\ln x+۱}}[x - ۲\ln^{۲}x + x\ln x \times \ln(\ln x)]$

۹۶۵٫۱ - $y' = ۲y\left\{\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{۱+x^{۲}}\ln\frac{\arcsin(\sin^{۲}x)}{\arccos(\cos^{۲}x)} + \right.$

$\left. + \operatorname{arc\,tg}^{۲}x\left[\frac{\sin x \times \operatorname{sgn}(\cos x)}{\arcsin(\sin^{۲}x\sqrt{۱+\sin^{۲}x}} - \frac{\cos x \times \operatorname{sgn}(\sin x)}{\arccos(\cos^{۲}x)\sqrt{۱+\cos^{۲}x}}\right]\right\}$

$\left(x \neq \frac{k\pi}{۲},\ k = ۰, \pm ۱, \ldots\right)$ ۹۶۶ - $(x > ۰,\ x \neq ۱)$ $-\frac{۱}{x}(\log_{x}e)^{۲}$

۹۶۷ - $\operatorname{th}^{۳}x$ ۹۶۸ - $(x > ۰)$ $-\frac{۲}{\operatorname{sh}^{۳}x}$ ۹۶۹ - $\frac{۱}{\operatorname{ch} ۲x}$

۹۷۰ - $(x \neq ۰)$ $\frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}$ ۹۷۱ - $\frac{a+b\operatorname{ch} x}{b+a\operatorname{ch} x}$ ۹۷۲ - $-\frac{\sin ۲x}{\sqrt{۱+\cos^{٤}x}}$

۹۷۳ - $(|x| < ۱)$ $-\frac{۲}{\sqrt{۱-x^{۲}}} \times \arccos x \times \ln(\arccos x)$

۹۷٤ - $-\frac{x^{-۲}}{\sqrt[٤]{(۱+x^{٤})^{۳}}}$ ۹۷۵ - $(x \neq ۰)$ $-\frac{۲xe^{-x^{۲}}\arcsin(e^{-x^{۲}})}{\left(۱-e^{-۲x^{۲}}\right)^{\frac{۳}{۲}}}$

۹۷۶ - $(a > ۰)$ $\frac{٤a^{۲x}\ln a}{(۱+a^{۲x})^{۲}}\operatorname{arc\,ctg} a^{-x}$ ۹۷۷ - الف) $(x \neq ۰)$ $\operatorname{sgn} x$ ؛

ب) $۲|x|$ ؛ پ) $(x \neq ۰)$ $\frac{۱}{x}$ ۹۷۸ - الف) $(x-۱)(x+۱)^{۲}(۵x-۱)$

$\operatorname{sgn}(x+۱)$ ؛ ب) $\frac{۳}{۲}\sin ۲x \times |\sin x|$ ؛ پ) $(|x| > ۱)$ $\frac{۱}{x\sqrt{x^{۲}-۱}}$ ؛

ت) $\pi[x]\sin ۲\pi x$ ۹۷۹ - $y' = -۱$ بازای $-\infty < x < ۱$ ؛ $y' = ۲x-۳$

بازای $۱ \leqslant x \leqslant ۲$ ؛ $y' = ۱$ بازای $۲ < x < +\infty$ ۹۸۰ - $y' = ۲(x-a)$

$(x-b)(۲x-a-b)$ بازای $x \in [a, b]$ ؛ $y' = ۰$ بازای $x \in [a, b]$

۹۸۱ - $y' = ۱$ بازای $x < ۰$ ؛ $y' = \frac{۱}{۱+x}$ بازای $۰ \leqslant x < +\infty$

۹۸۲ - $y' = \frac{۱}{۱+x^{۲}}$ بازای $-۱ < x \leqslant ۱$ ؛ $y' = \frac{۱}{۲}$ بازای $|x| > ۱$

۹۸۳ - $y' = ۲xe^{-x^{۲}}(۱-x^{۲})$ بازای $|x| \leqslant ۱$ ؛ $y' = ۰$ بازای $|x| > ۱$

۹۸٤ - الف) $\frac{۱-x-x^{۲}}{x(۱-x^{۲})}$ ؛ ب) $(x \neq ۰,$ $\frac{۵٤-۳۶x+٤x^{۲}+۲x^{۳}}{۳x(۱-x)(۹-x^{۲})}$

($x \neq ۱,\ x \neq \pm ۳$) ؛ پ) $\sum_{i=۱}^{n} \frac{a_i}{x-a_i}$ ؛ ت) $\frac{n}{\sqrt{۱+x^۲}}$ ۹۸۵ - الف)
$(\varphi^۲(x)+\psi^۲(x)\neq ۰)$ $\frac{\varphi(x)\,\varphi'(x)+\psi(x)\,\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^۲(x)+\psi^۲(x)}}$ ؛ ب) $\frac{\varphi'(x)\,\psi(x)-\varphi(x)\,\psi'(x)}{\varphi^۲(x)+\psi^۲(x)}$ ؛
$(\varphi^۲(x)+\psi^۲(x)\neq ۰)$ ؛ پ) $\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left\{\frac{۱}{\varphi(x)}\,\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(x)}{\varphi^۲(x)}\ln\psi(x)\right\}$ ؛
ت) $-\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\times\frac{۱}{\ln\varphi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\times\frac{\ln\psi(x)}{\ln^۲\varphi(x)}$ ۹۸۶ - الف) $۲xf'(x^۲)$ ؛
ب) $\sin ۲x\,[f'(\sin^۲ x)-f'(\cos^۲ x)]$ ؛ پ) $e^{f(x)}\times[e^x f'(e^x)+f'(x)\,f(e^x)]$ ؛
ت) $f'(x)\times f'[f(x)]\times f'\{f[f(x)]\}$ ؛ ۹۸۶,۱ - $۱۰۰۰!$ ۹۸۸ - $۳x^۲+۱۰$
۹۸۹ - $۶x^۲$ ۹۹۲ - الف) $n>۰$ ؛ ب) $n>۱$ ؛ پ) $n>۲$
۹۹۳ - الف) $n\geqslant m+۱$ ؛ ب) $۱<n<m+۱$ ۹۹۴ - $\varphi(a)$
۹۹۵ - $f'_-(a)=-\varphi(a)$ ، $f'_+(a)=\varphi(a)$ ۹۹۹ - الف) بازای $x=۱$
دیفرانسیل‌ناپذیر است ؛ ب) بازای $x=\frac{۲k-۱}{۲}\pi$ که در آن k عددیست درست
دیفرانسیل‌ناپذیر است ؛ پ) در همه‌جا دیفرانسیل‌پذیر است ؛ ت) بازای
$x=k\pi$ که در آن k عددیست درست دیفرانسیل‌ناپذیر است ؛ ث) بازای
$x=-۱$ دیفرانسیل ناپذیر است ۱۰۰۰ - $f'_-(x)=f'_+(x)=\operatorname{sgn} x$ بازای $x\neq ۰$
و $f'_-(۰)=-۱$ ، $f'_+(۰)=۱$ ۱۰۰۱ - $f'_-(x)=f'_+(x)=\pi[x]\cos\pi x$ بازای
$x\neq$ عدد درست ؛ $f'_-(k)=\pi(k-۱)(-۱)^k$ ، $f'_+(k)=\pi k(-۱)^k$ بازای k-ی
درست ۱۰۰۲. $f'_-(x)=f'_+(x)=\left(\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)\times\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)$
بازای $x\neq\frac{۲}{۲k+۱}$ (k عددیست درست) ؛ $f'_-\left(\frac{۲}{۲k+۱}\right)=-(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ ،
$f'_+\left(\frac{۲}{۲k+۱}\right)=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ ۱۰۰۳ - $f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{x\cos x^۲}{\sqrt{\sin x^۲}}$ بازای
$(k=۰, ۱, ۲, \ldots)$ $\sqrt{۲k\pi}<|x|<\sqrt{۲k+۱)\pi}$ ؛ $f'_-(۰)=-۱$ ،
$f'_+(۰)=۱$ ؛ $f'_\mp(\sqrt{۲k+۱\,\pi})=\mp\infty$ ، $f'_\pm(\sqrt{۲k\pi})=\pm\infty\ (k=۱, ۲, \ldots)$
۱۰۰۴ - $f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{۱+\left(۱+\frac{۱}{x}\right)e^{\frac{۱}{x}}}{\left(۱+e^{\frac{۱}{x}}\right)^۲}$ بازای $x\neq ۰$ ؛ $f'_-(۰)=۱$ ،

$f'_+(۰) = ۰$ ۱۰۰۵ – $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{xe^{-x}}{\sqrt{۱ - e^{-x^۲}}}$ بازای $x \neq ۰$ ؛

$f'_-(۰) = -۱$ ، $f'_+(۰) = ۱$ ۱۰۰٦ – $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{\varepsilon}{x}$ که در آن $\varepsilon = -۱$

بازای $۰ < |x| < ۱$ و $\varepsilon = ۱$ بازای $۱ < |x| < +\infty$ ؛ $f'_-(\mp ۱) = -۱$ ،

$f'_+(\mp ۱) = ۱$ ۱۰۰۷ – $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{۲\operatorname{sgn}(۱ - x^۲)}{۱ + x^۲}$ بازای $x \neq \mp ۱$ ؛

$f'_-(\mp ۱) = \mp ۱$ ، $f'_+(\mp ۱) = \pm ۱$ ۱۰۰۸ – $f'_-(x) = f'_+(x) =$

$= \operatorname{arc\,tg}\frac{۱}{x-۲} - \frac{x-۲}{(x-۲)^۲+۱}$ بازای $x \neq ۲$ ؛ $f'_\mp(۲) = \mp\frac{\pi}{۲}$ ۱۰۰۹,۱ –

الف) $f'_-(۰) = -\frac{۱}{۲}$ ، $f'_+(۰) = \frac{۱}{۲}$ ؛ ب) $f'_-(۱) = f'_+(۱) = \frac{۱}{۲}$ ؛

پ) $f'_-(۰) = f'_+(۰) = ۰$ ۱۰۱۰ – $a = ۲x_۰$ ؛ $b = -x_۰^۲$ ۱۰۱۱ – $a = f'_-(x_۰)$ ؛

$b = f(x_۰) - x_۰ f'_-(x_۰)$ ۱۰۱۲ – $A = \frac{k_۱ + k_۲}{(b-a)^۲}$ ، $c = \frac{ak_۲ + bk_۱}{k_۱ + k_۲}$

۱۰۱۳ – $a = \frac{۳m^۲}{۲c}$ ، $b = -\frac{m^۲}{۲c^۳}$ ۱۰۱٤ – الف) میتوان ؛ ب) نمیتوان

۱۰۱۵ – الف) نمیتوان ؛ ب) نمیتوان ۱۰۱٦ – الف) ، ب(، پ) تابع
$F(x)$ میتواند دارای مشتق $F'(x)$ باشد و یا نباشد ۱۰۱۷ – $x = k\pi$
$(k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots)$ ۱۰۱۸ – الف) نمیتواند ؛ ب) میتواند
۱۰۱۹ – ۱) حتمی نیست ؛ ۲) حتمی است ۱۰۲۰ – حتمی نیست ۱۰۲۱ –
نتیجه نمیشود ۱۰۲۲ – نتیجه نمیشود ۱۰۲۳ – بطور کلی، نمیتوان ۱۰۲٤ –

$P_n = \frac{۱-(n+۱)x^n+nx^{n+۱}}{(۱-x)^۲}$ ؛ $Q_n = \frac{۱+x-(n+۱)^۲x^n+(۲n^۲+۲n-۱)x^{n+۱}-n^۲x^{n+۲}}{(۱-x)^۳}$

۱۰۲۵ – $S_n = \frac{\sin\frac{nx}{۲}\,\sin\frac{n+۱}{۲}x}{\sin\frac{x}{۲}}$ ؛ $T_n = \frac{n\sin\frac{x}{۲}\,\sin\frac{۲n+۱}{۲}x - \sin^۲\frac{nx}{۲}}{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}$

۱۰۲۵,۱ – $S_n = \frac{n\operatorname{sh}\frac{x}{۲}\operatorname{sh}\left(n+\frac{۱}{۲}\right)x - \operatorname{sh}^۲\frac{nx}{۲}}{۲\operatorname{sh}^۲\frac{x}{۲}}$ ۱۰۲٦ – $S_n =$

$= \frac{۱}{۲^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{۲^n} - \operatorname{ctg} x$ ۱۰۲۹ – $٤۰\pi\ \mathrm{cm}^۲/\mathrm{sec}$ ۱۰۳۰ – $۲۵\ \mathrm{m}^۲/\mathrm{sec}$ ؛

۰,٤ m/sec   ۱۰۳۱ – ۵۰ km/h   ۱۰۳۲ – $S(x)=\frac{x^{۲}}{۲}$ اگر $۰\leqslant x\leqslant ۲$ ؛

$S(x)=x^{۲}-۲x+۲$ اگر $x>۲$ ؛ $S'(x)=x$ اگر $۰\leqslant x\leqslant ۲$ ؛ $S'(x)=۲x-۲$

اگر $x>۲$ ۱۰۳۳ – $S(x)=\frac{|x|}{۲}\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}+\frac{a^{۲}}{۲}\arcsin\frac{|x|}{a}$ ؛

$(۰<|x|\leqslant a)$ $S'(x)=\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}\,\operatorname{sgn}x$ ۱۰۳٤ – $y'_x=\frac{۱}{۳(y^{۲}+۱)}$

۱۰۳۵ – $y'_x=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}\varepsilon\cos y}$ ۱۰۳٦ – الف) $-\infty<y<+\infty$ ؛ $x'_y=\frac{x}{x+۱}$ ؛

ب) $-\infty<y<+\infty$ ، $x'_y=\frac{۱}{۱-x+y}$ ؛ پ) $-\infty<y<+\infty$ ،

$x'_y=\frac{۱}{\sqrt{۱+y^{۲}}}$ ؛ ت) $-۱<y<۱$ ، $x'_y=\frac{۱}{۱-y^{۲}}$ ۱۰۳۷ – الف)

$(-\infty<y\leqslant ۱)$ $x_{۱}=-\sqrt{۱+\sqrt{۱-y}}$ ؛ $(۰\leqslant y\leqslant ۱)$ $x_{۲}=-\sqrt{۱-\sqrt{۱-y}}$ ؛

$(۰\leqslant y\leqslant ۱)$ $x_{۳}=\sqrt{۱-\sqrt{۱-y}}$ ؛ $(-\infty<y\leqslant ۱)$ $x_{٤}=\sqrt{۱+\sqrt{۱-y}}$ ؛

$(i=۱,۲,۳,٤)$ $x'_i=\frac{۱}{٤x(۱-x^{۲})}$ ؛ ب) $(۰\leqslant y<۱)$ $x_{۱}=-\sqrt{\frac{y}{۱-y}}$ ؛

$(۰\leqslant y<۱)$ $x_{۲}=\sqrt{\frac{y}{۱-y}}$ ؛ $(i=۱,۲)$ $x'_i=\frac{x^{۳}}{۲y^{۲}}$ ؛ پ) $x_{۱}=$

$(-\infty<y\leqslant ۱)$ $=-\ln(۱+\sqrt{۱-y})$ ؛ $(۰<y\leqslant ۱)$ $x_{۲}=\ln\frac{۱+\sqrt{۱-y}}{y}$ ؛

$(i=۱,۲)$ $x'_i=-\frac{۱}{۲(e^{-x}-e^{-۲x})}$ ۱۰۳۸ – $y'_x=-\frac{۳}{۲}(۱+t)$ ؛ -۳ ؛

$-\frac{۳}{۲}$ و $-\frac{۹}{۲}$ ؛ $(-٤,٤)$ ۱۰۳۹ – $(t>۰, t\neq ۱)$ $\sqrt[٦]{\frac{(۱-\sqrt{t})^{٤}}{t(۱-\sqrt[۳]{t})^{۲}}}$

۱۰٤۰ – $(۰<x<۱)$ $y'_x=-۱$ ۱۰٤۱ – $(۰<|t|<\pi)$ $y'_x=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t$

۱۰٤۲ – $(|t|>۰)$ $y'_x=\frac{b}{a}\operatorname{cth}t$ ۱۰٤۳ – $y'_x=-\operatorname{tg}t$ ($t\neq\frac{۲k+۱}{۲}\pi$ ،

k عددیست درست)   ۱۰٤٤ – $y'_x=\operatorname{ctg}\frac{t}{۲}$ ($t\neq ۲k\pi$ ، k عددیست درست)

۱۰۴۵ - $y'_x = \operatorname{tg} t \times \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{۴}\right) \quad \left(t \neq \frac{\pi}{۴} + k\pi,\ t \neq \frac{\pi}{۲} + k\pi\right)$

۱۰۴۶ - $y'_x = \operatorname{sgn} t$ ۱۰۴۸ - $-\frac{۱}{۲}$; $\frac{۵}{۲}$; $y' = \frac{۱ - x - y}{x - y}$ ۱۰۴۹ - $\frac{p}{y}$

۱۰۵۰ - $-\frac{b^۲ x}{a^۲ y}$ ۱۰۵۱ - $-\sqrt{\frac{y}{x}}$ ۱۰۵۲ - $-\sqrt[۳]{\frac{y}{x}}$

۱۰۵۳ - $\frac{x + y}{x - y}$ ۱۰۵۴ - لف) $\operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{arc\,tg})$ ؛ ب) $-\operatorname{ctg}\frac{۳\varphi}{۲}$

$\left(\varphi \neq ۰,\ \varphi \neq \pm\frac{۲\pi}{۳}\right)$ ؛ پ) $\operatorname{tg}\left(\varphi + \operatorname{arc\,tg}\frac{۱}{m}\right)$ ۱۰۵۵ - الف)

$y = \sqrt[۳]{۴}\,(x + ۱)$ ؛ $y = -\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}(x + ۱)$ ؛ ب) $y = ۳$ ، $x = ۲$ ؛

ب) $x = ۳$ ، $y = ۰$ ۱۰۵۶ - الف) $\left(\frac{۱}{۲},\ ۲\frac{۱}{۴}\right)$ ؛ ب) $(۰,\ ۲)$

۱۰۵۸ - $|x| < \frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۲\pi}{۳} < |x| \leqslant \pi$ ۱۰۵۹ - $\max|y'_۱ - y'| =$

۱۰۵۹ - $= ۱۰\pi \approx ۳۱{,}۴$ ۱۰۶۰ - $\frac{\pi}{۴}$ ۱۰۶۱ - $\frac{\pi}{۲}$ ؛ $\operatorname{arc\,tg}\frac{۳}{۴} \approx \operatorname{arc}\,۳۷^\circ$

۱۰۶۲ - $\operatorname{arc\,tg} ۲\sqrt{۳} \approx \operatorname{arc}\,۷۰^\circ ۳۰'$ ۱۰۶۳ - $n > ۵۷{,}۳$ ۱۰۶۴ - الف)

$۲\operatorname{arc\,tg}\frac{۱}{|a|}$ ؛ ب) $\frac{\pi}{۲}$ ۱۰۶۶ - $\left|\frac{x}{n}\right|$ ۱۰۶۹ - $\frac{y_۰^۲}{|a|}$

۱۰۷۱ - $b^۲ - ۴ac = ۰$ ۱۰۷۲ - $\left(\frac{p}{۳}\right)^۳ + \left(\frac{q}{۲}\right)^۲ = ۰$ ۱۰۷۳ - $a = \frac{۱}{۲e}$

۱۰۷۷ - الف) $۳x - ۲y = ۰$ ، $۲x + ۳y = ۰$ ؛ ب) $۳x - y - ۱ = ۰$ ،

$x + ۳y - ۷ = ۰$ ۱۰۷۸ - الف) $y = x$ ، $y = -x$ ؛ ب) $۳x - y - ۴ = ۰$ ،

$x + ۳y - ۳ = ۰$ ؛ پ) $y = -x$ ، $y = x$ ۱۰۷۹ - $y - ۲a = (x - at_۰)\operatorname{ctg}\frac{t_۰}{۲}$

مماس بر سیکویید عمود بر پاره‌خط واصل نقطهٔ تماس و نقطهٔ تماس دایرهٔ غلطان است . ۱۰۸۱ - $۳x + ۵y - ۵۰ = ۰$ ، $۵x - ۳y - ۱۰{,}۸ = ۰$

۱۰۸۲ - $x + ۲y - ۳ = ۰$ ، $۲x - y - ۱ = ۰$ ۱۰۸۳ - $\Delta f(۱) = \Delta x + ۳(\Delta x)^۲ + (\Delta x)^۳$ ؛ $df(۱) = \Delta x$ الف) ۵ ، ۱ ؛ ب) ۰,۱۳۱ ، ۰,۱ ؛

پ) ۰,۰۱۰۳۰۱ ، ۰,۰۱ ۱۰۸۴ - $\Delta x = ۲۰\Delta t + ۵(\Delta t)^۲$ ، $dx = ۲۰\Delta t$ ؛

الف) ٢٥ m ، ٢٠ m ؛ ب) ٢,٠٥ m، ٢ m ؛ پ) ٠,٠٢٠٠٠٥ m ،
١٠٨٥ – $-\frac{dx}{x^٢}\ (٠\neq x)$ ١٠٨٦ – $\frac{dx}{a^٤+x^٢}$ ١٠٨٧ – $\frac{dx}{x^٢-a^٢}\ (|x|\neq|a|)$
١٠٨٨ – $\frac{dx}{\sqrt{x^٢+a}}$ ١٠٨٩ – $\frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^٢-x^٢}}dx\ (|x|<|b|)$ ١٠٩٠ – الف)
$(١+x)e^x\,dx$ ؛ ب) $x\sin x\,dx$ ؛ پ) $-\frac{٣\,dx}{x^٤}\ (x\neq ٠)$ ؛ ت) $\frac{٢-\ln x}{٢x\sqrt{x}}\,dx$
$(x>٠)$ ؛ ث) $\frac{x\,dx}{\sqrt{a^٢+x^٢}}$ ؛ ج) $\frac{dx}{(١-x^٢)^{\frac{٣}{٢}}}\ (|x|<١)$ ؛ چ) $-\frac{٢x\,dx}{١-x^٢}$
$(|x|<١)$ ؛ ح) $\frac{dx}{x\sqrt{x^٢-١}}\ (|x|>١)$ ؛ خ) $\frac{dx}{\cos^٣ x}\ \left(x\neq\frac{\pi}{٢}+k\pi\right.$ ،
k عددیست درست$\Big)\Big)$ ١٠٩١ – $vw\,du+uw\,dv+uv\,dw$ ١٠٩٢ –
$(v\neq ٠)$ $\frac{v\,du-٢u\,dv}{v^٣}$ ١٠٩٣ – $-\frac{u\,du-v\,dv}{(u^٢+v^٢)^{\frac{٣}{٢}}}\ (u^٢+v^٢>٠)$
١٠٩٤ – $\frac{v\,du-u\,dv}{u^٢+v^٢}\ (u^٢+v^٢>٠)$ ١٠٩٥ – $\frac{u\,du+v\,dv}{u^٢+v^٢}\ (u^٢+v^٢>٠)$
١٠٩٦ – الف) $١-٤x^٣-٣x^٦$ ؛ ب) $\frac{١}{٢x^٢}\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)$ ؛ پ) $-\operatorname{ctg} x$
$(x\neq k\pi$ ، k عددیست درست) ؛ ت) $-\operatorname{tg}^٢ x\ \left(x\neq\frac{\pi}{٢}+k\pi\right.$ ، k عددیست
درست$\Big)$ ؛ ث) $-١\ (|x|<١)$ ١٠٩٧ – الف) بمقدار ١٠٤,٧ $\text{cm}^٢$ افزایش
مییابد ؛ ب) بمقداز ٤٣,٦ $\text{cm}^٢$ کاهش مییابد ١٠٩٨ – – بمقدار ٢,٢٣ cm
باید افزایش داد ١٠٩٩ – ١,٠٠٧ (از روی جدول : ١,٠٠٦٦)
١١٠٠ – ٠,٤٨٤٩ (از روی جدول : ٠,٤٨٤٨) ١١٠١ – −٠,٨٧٤٧ (از
روی جدول : −٠,٨٧٤٦) ١١٠٢ – $٠,٨١٠٤ = \text{arc}\,٤٦^\circ٢٦'$ (از روی
جدول : $\text{arc}\,٤٦^\circ٢٤'$) ١١٠٣ – ١,٠٤٣ (از روی جدول : ١,٠٤١)
١١٠٤ – الف) ٢,٢٥ (از روی جدول : ٢,٢٤) ؛ ب) ٥,٨٣٣ (از روی
جدول : ٥,٨٣١) ؛ پ) ١٠,٩٥٤٦ (از روی جدول : ١٠,٩٥٤٥)
١١٠٥ – الف) ٢,٠٨٣ (از روی جدول : ٢,٠٨٠) ؛ ب) ٢,٩٩٠٧ (از روی
جدول : ٢,٩٩٠٧) ؛پ) ١,٩٣٨ (از روی جدول : ١,٩٣١) ؛ ت) ١,٩٩٥٤

(از روی جدول: ۱٫۹۹۵۳) ۱۱۰۶ – $۰٫۲۴\ \mathrm{m}^۲$؛ ۴٫۲٪ ۱۱۰۷ – $\delta_R \leqslant ۰٫۳۳\%$

۱۱۰۸ – الف) $\delta_g=\delta_l$؛ ب) $\delta_g=۲\delta_T$ ۱۱۰۹ – $۰٫۴۳\delta$ ۱۱۱۱ – $\frac{x(۳+۲x^۲)}{(۱+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

۱۱۱۲ – $\frac{۳x}{(۱-x^۲)^{\frac{۵}{۲}}}$ ۱۱۱۳ – $۲e^{-x^۲}(۲x^۲-۱)$ ۱۱۱۴ – $\frac{۲\sin x}{\cos^۳ x}$

$\left(x\neq\frac{۲k+۱}{۲}\pi,\quad k=۰,\ \pm۱,\ \ldots\right)$ ۱۱۱۵ – $\frac{۲x}{۱+x^۲}+۲\,\mathrm{arc\,tg}\,x$

۱۱۱۶ – $(|x|<۱)$ $\frac{۳x}{(۱-x^۲)^۲}+\frac{(۱+۲x^۲)\arcsin x}{(۱-x^۲)^{\frac{۵}{۲}}}$ ۱۱۱۷ – $\frac{۱}{x}\,(x>۰)$

۱۱۱۸ – $(f(x)>۰)$ $\frac{f(x)f''(x)-f'^۲(x)}{f^۲(x)}$ ۱۱۱۹ – $-\frac{۲}{x}\sin(\ln x)\ (x>۰)$

۱۱۲۰ – $y(۰)=۱$، $y'(۰)=۱$، $y''(۰)=۰$ ۱۱۲۱ – $۲(uu''+u'^۲)$

۱۱۲۳ – $(uv>۰)$ $\frac{uu''-u'^۲}{u^۲}-\frac{vv''-v'^۲}{v^۲}$ ۱۱۲۳ – $\frac{(u^۲+v^۲)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^۲}{(u^۲+v^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

$(u^۲+v^۲>۰)$ ۱۱۲۴ – $y''=u^v\left[\left(v\frac{u'}{u}+v'\ln u\right)^۲+v\frac{uu''-u'^۲}{u^۲}+\right.$

$\left.+\frac{۲u'v'}{u}+v''\ln u\right]$ ۱۱۲۵ – $y''=۴x^۲f''(x^۲)+۲f'(x^۲)$؛ $y'''=$

$=۸x^۳f'''(x^۲)+۱۲xf''(x^۲)$ ۱۱۲۶ – $y''=\frac{۱}{x^۴}f''\left(\frac{۱}{x}\right)+\frac{۲}{x^۳}f'\left(\frac{۱}{x}\right)$؛

$y'''=-\frac{۱}{x^۶}f'''\left(\frac{۱}{x}\right)-\frac{۶}{x^۵}f''\left(\frac{۱}{x}\right)-\frac{۶}{x^۴}f'\left(\frac{۱}{x}\right)$ ۱۱۲۷ – $y''=$

$=e^{۲x}f''(e^x)+e^xf''(e^x)$؛ $y'''=e^{۳x}f'''(e^x)+۳e^{۲x}f''(e^x+e^xf'(e^x)$ ۱۱۲۸ –

؛ $y''=\frac{۱}{x^۲}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$ $y'''=\frac{۱}{x^۳}\ [f'''(\ln x)-۳f''(\ln x)+$

$+۲f'(\ln x)]$ ۱۱۲۹ – $y''=\varphi'_۲(x)f''\varphi(x))+\varphi''(x)f'\varphi(x))$ ؛

$y'''=\varphi'^۳(x)f'''(\varphi(x))+۳\varphi'(x)\varphi''(x)f''(\varphi(x))+\varphi'''(x)f'(\varphi(x))$ ۱۱۳۰ –

الف) $e^xdx^۲$؛ ب) $e^x(dx^۲+d^۲x)$ ۱۱۳۱ – $\frac{dx^۲}{(۱+x^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ ۱۱۳۲ – $\frac{۲\ln x-۳}{x^۳}dx^۲$

$(x>۰)$ ۱۱۳۳ – $x^x\left[(۱+\ln x)^۲+\frac{۱}{x}\right]dx^۲$ ۱۱۳۴ – $ud^۲v+۲du\,dv+$

$+v\,d^{۲}u$ $(v>۰)$ ۱۱۳۵- $\frac{(v\,d^{۲}u-u\,d^{۲}v)-۲\,dv\,(v\,du-u\,dv)}{v^{۳}}$ ۱۱۳۶-

$u^{m-۲}v^{n-۲}\{[m\,(m-۱)\,v^{۲}du^{۲}+۲mn\,uv\,du\,dv+n\,(n-۱)\,u^{۲}dv^{۲}]+$

$+uv\,(mv\,d^{۲}u+nu\,d^{۲}v)\}$ ۱۱۳۷- $a^{u}\ln a\,(du^{۲}\ln a+d^{۲}u)$ ۱۱۳۸-

$[(v^{۲}-u^{۲})\,du^{۲}-۴uv\,du\,dv+(u^{۲}-v^{۲})\,dv^{۲}+(u^{۲}+v^{۲})\,(u\,d^{۲}u+v\,d^{۲}v)]\times$

$\times(u^{۲}+v^{۲})^{-۲}\,(u^{۲}+v^{۲}>۰)$ ۱۱۳۹- $[-۲uv\,du^{۲}+۲\,(u^{۲}-v^{۲})\,du\,dv+$

$+۲uv\,dv^{۲}+(u^{۲}+v^{۲})\,(v\,d^{۲}u-u\,d^{۲}v)]\,(u^{۲}+z^{۲})^{-۲}\,(u^{۲}+v^{۲}>۰)$ ۱۱۴۰-

$y''=-\frac{۳}{۴\,(۱-t)}$ ؛ $y'''=\frac{۳}{۸\,(۱-t)^{۳}}$ $(t\neq۱)$ ۱۱۴۱- $y''=-\frac{۱}{a\sin^{۳}t}$ ؛

$y'''=-\frac{۳\cos t}{a^{۲}\sin^{۵}t}$ ($t\neq k\pi$ ، k عددیست درست) ۱۱۴۲- $y''=-\frac{۱}{۴a\sin^{۴}\frac{t}{۲}}$ ؛

$y'''=\frac{\cos\frac{t}{۲}}{۴a^{۲}\sin^{۷}\frac{t}{۲}}$ ($t\neq۲k\pi$ ، k عددیست درست) ۱۱۴۳- $y''=$

$=\frac{e^{-t}}{\sqrt{۲}\cos^{۳}\left(t+\frac{\pi}{۴}\right)}$ ؛ $\left(t\neq\frac{\pi}{۴}+k\pi,\right.$ $y'''=\frac{e^{-۲t}\,(۲\sin t+\cos t)}{\sqrt{۲}\cos^{۵}\left(t+\frac{\pi}{۴}\right)}$

$\left.k=۰,\pm۱,\dots\right)$ ۱۱۴۴- $y''=\frac{۱}{f''(t)}$ ؛ $y'''=-\frac{f'''(t)}{f''^{۳}(t)}$ $(f''(t)\neq۰)$

۱۱۴۵- $x'=\frac{۱}{y'}$ ؛ $x''=-\frac{y''}{y'^{۳}}$ ؛ $x'''=-\frac{y'y'''-۳y''^{۲}}{y'^{۵}}$ ؛ $x^{(۴)}=-$

$-\frac{y'^{۲}y^{(۴)}-۱۰y'y''y'''+۱۵y''^{۳}}{y'^{۷}}$ $(y'\neq۰)$ ۱۱۴۶- $-\frac{x}{y}$ ، $-\frac{۲۵}{y^{۳}}$ ،

$-\frac{۷۵x}{y^{۰}}$ ؛ $-\frac{۳}{۴}$ ، $-\frac{۲۵}{۶۴}$ ، $-\frac{۲۲۵}{۱۰۲۴}$ ۱۱۴۷- $\frac{p}{y}$ ، $-\frac{p^{۲}}{y^{۳}}$ ، $\frac{۳p^{۳}}{y^{۵}}$

۱۱۴۸- $y'=\frac{۲x-y}{x-۲y}$ ، $y''=\frac{۶}{(x-۲y)^{۳}}$ ، $y'''=\frac{۵۴x}{(۱-۸y)^{۵}}$ ۱۱۴۹- $y'=$

$=\frac{۲x^{۳}y}{۱+y^{۲}}$ ؛ $y''=\frac{۲x^{۲}y}{(۱+y^{۲})^{۳}}\,[۳(۱+y^{۲})^{۲}+۲x^{۴}(۱-y^{۲})]$ ۱۱۵۰- $y'=$

$=\frac{x+y}{x-y}$ ؛ $y''=\frac{۲\,(x^{۲}+y^{۲})}{(x-y)^{۳}}$ ۱۱۵۱- $a=\frac{۱}{۲}f''(x_{۰})$ ؛ $b=f'(x_{۰})$ ؛ $c=f(x_{۰})$

۱۱۵۲- $۲۰-۱۰t$ ، -۱۰ ؛ ۰ ، -۱۰ ۱۱۵۳- $v=-\frac{۲\pi a}{T}\sin\frac{۲\pi}{T}t$ ،

$j=-\frac{۴\pi^۲a}{T^۲}\cos\frac{۲\pi}{T}t$ ۱۱۵۴ - $x=v_۰t\cos\alpha$ ، $y=v_۰t\sin\alpha-\frac{gt^۲}{۲}$ ؛

$v=\sqrt{v_۰^۲-۲v_۰gt\sin\alpha+g^۲t^۲}$ ؛ $j=g$ ؛ $y=x\,\mathrm{tg}\,\alpha-\frac{gx^۲}{۲v_۰^۲\cos^۲\alpha}$ ؛

$\frac{v_۰^۲\sin^۲\alpha}{۲g}$ ؛ $\frac{v_۰^۲}{g}\sin۲\alpha$ ۱۱۵۵ - $x^۲+y^۲=۲۵$ ؛ $۵|\omega|$ ، $۵\omega^۲$

۱۱۵۶ - $y^{(۶)}=۴\times۲!$ ؛ $y^{(۷)}=۰$ ۱۱۵۷ - $y'''=-\frac{am(m+۱)(m+۲)}{x^{m+۳}}\ (y\neq۰)$

۱۱۵۸ - $y^{(۱۰)}=-\frac{۱۷!!}{۲^{۱۰}x^۹\sqrt{x}}\ (x>۰)$ که در آن $n!!$ حاصل‌ضرب اعداد طبیعی است که از عدد n تجاوز نمیکند و از نظر زوج یا فرد بودن با آن یکسان است یعنی $۱۷!!=۱\times۳\times۵\ldots۱۷$ ۱۱۵۹ - $y^{(۸)}=\frac{۸!}{(۱-x)^۹}\ (x\neq۱)$

۱۱۶۰ - $y^{(۱۰۰)}=\frac{۱۹۷!!\,(۴۹۹-x)}{۲^{۱۰۰}(۱-x)^{۱۰۰}\sqrt{۱-x}}\ (x<۱)$

۱۱۶۱ - $y^{(۲۰)}۲^{۲۰}e^{۲x}(x^۲+۲۰x+۹۵)$

۱۱۶۲ - $y^{(۱۰)}=e^x\sum_{i=۰}^{۱۰}(-۱)^i\frac{A_{۱۰}^i}{x^{i+۱}}$ که در آن $A_{۲۰}^i=۱۰\times۹\times\ldots(۱۱-i)$

و $A_{۱۰}^۰=۱$ ۱۱۶۳ - $y^{(۵)}=-\frac{۶}{x^۴}\ (x>۰)$ ۱۱۶۴ - $y^{(۵)}=\frac{۲۷۴}{x^۶}-\frac{۱۲۰}{x^۶}\ln x$

$(x>۰)$ ۱۱۶۵ - $y^{(۵۰)}=۲^{۵۰}\left(-x^۲\sin۲x+۵۰x\cos۲x+\frac{۱۲۲۵}{۲}\sin۲x\right)$

۱۱۶۶ - $y'''=\frac{۲۷(۱-۳x)^۲-۳۶}{(۱-۲x)^{\frac{۷}{۳}}}\sin۳x-\frac{۲۷(۱-۳x)^۲-۲۸}{(۱-۳x)^{\frac{۱۰}{۳}}}\cos۳x\left(x\neq\frac{۱}{۳}\right)$

۱۱۶۷ - $y^{(۱۰)}=-۲^۸\sin۲x-۲^{۱۸}\sin۴x+۳^۸\times۳^{۱۰}\sin۶x$ ۱۱۶۸ - $y^{(۱۰۰)}=$

$=x\,\mathrm{sh}\,x+۱۰۰\,\mathrm{ch}\,x$ ۱۱۶۹ - $y^{(۴)}=-۴e^x\cos x$ ۱۱۷۰ - $y^{(۶)}=$

$=-\frac{۶۰}{x^۶}+\left(\frac{۱۴۴}{x^۵}-\frac{۱۶۰}{x^۳}+\frac{۹۶}{x}\right)\sin۲x+\left(\frac{۶۰}{x^۶}-\frac{۱۸۰}{x^۴}+\frac{۱۲۰}{x^۲}+\right.$

$\left.+۳۲\ln x\right)\cos۲x$ ۱۱۷۱ - $۱۲۰\,dx^۵$ ۱۱۷۲ - $-\frac{۱۵}{۸x^۳\sqrt{x}}dx^۳\ (x>۰)$

۱۱۷۳ - $-۱۰۲۴(x\cos۲x+۵\sin۲x)\,dx^{۱۰}$ ۱۱۷۴ - $e^x\left(\ln x+\frac{۳}{x}-\right.$

$٢u\,d^{١٠}x + \quad -١١٧٦ \quad ٨\sin x\,\mathrm{sh}\,x\,dx^{٦} - ١١٧٥ \quad -\frac{٦}{x^{٢}} + \frac{٨}{x^{٣}} - \frac{٦}{x^{٤}}\Big)\,dx^{٤}$

$+ ٢٠\,du\,d^{٩}u + ٩٠\,d^{٢}u\,d^{٦}u + ٢٤٠\,d^{٣}u\,d^{٧}u + ٤٢٠\,d^{٤}u\,d^{٦}u + ٢٥٢\,(d^{٥}u)^{٢}$

$e^{u}(du^{٤} + ٦\,du^{٢}d^{٢}u + ٤\,du\,d^{٣}u + ٣d^{٢}u^{٢} + d^{٤}u) - ١١٧٧$

؛ $d^{٢}y = y''dx^{٢} + y'd^{٢}x - ١١٧٩ \qquad \frac{٢du^{٢}}{u^{٣}} - \frac{٣du\,d^{٢}u}{u^{٢}} + \frac{d^{٣}u}{u} \quad - ١١٧٨$

؛ $d^{٣}y = y'''dx^{٣} + ٣y''dx\,d^{٢}x + y'd^{٣}x$

$d^{٤}y + y^{(٤)}dx^{٤} + ٦y'''dx^{٢}d^{٢}x + ٤y''dx\,d^{٣}x + ٤y''d^{٢}x^{٢} + y'd^{٤}x$

$$y''' = \frac{dx\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^{٣}x & d^{٣}y \end{vmatrix} - ٣d^{٢}x\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^{٢}x & d^{٢}y \end{vmatrix}}{dx^{٥}} \qquad ؛ \quad y' = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^{٢}x & d^{٢}y \end{vmatrix}}{d^{٣}x} \quad - ١١٨٠$$

$$\frac{(-١)^{n-١}n!\,c^{n-١}\,(ad-bc)}{(cx+d)^{n+١}} - ١١٨٨ \qquad P^{(n)}(x) = a_{٠}n! - ١١٨٧$$

$$(-١)^{n}n!\left[\frac{١}{(x-٢)^{n+١}} - \frac{١}{(x-١)^{n+٢}}\right] - ١١٩٠ \quad n!\left[\frac{(-١)^{n}}{x^{n+١}} + \frac{١}{(١-x)^{n+١}}\right] - ١١٨٩$$

$$\frac{١\times٣\times\ \dots\ -(٢n-١)}{(١-٢x)^{n+\frac{١}{٢}}} \quad \left(x < \frac{١}{٢}\right) - ١١٩١$$

$$\frac{(-١)^{n+١}\times ١\times ٤\times\dots\times(٣n-٥)\,(٣n+٢x)}{٣^{n}\,(١+x)^{n+\frac{١}{٣}}} \qquad (n \geqslant ٢;\quad x \neq -١) - ١١٩٢$$

$$٢^{n-١}\times\cos\left(٢x + \frac{n\pi}{٢}\right) - ١١٩٤ \qquad -٢^{n-١}\cos\left(٢x + \frac{n\pi}{٢}\right) - ١١٩٣$$

$$-١١٩٦ \qquad \frac{٣}{٤}\sin\left(x + \frac{n\pi}{٢}\right) - \frac{٣^{n}}{٤}\sin\left(٣x + \frac{n\pi}{٢}\right) - ١١٩٥$$

$$\frac{(a-b)^{n}}{٢}\times - ١١٩٧ \qquad \frac{٣}{٤}\cos\left(x + \frac{n\pi}{٢}\right) + \frac{٣^{n}}{٤}\cos\left(٣x + \frac{n\pi}{٢}\right)$$

$$-١١٩٨ \quad \times\cos\left[(a-b)\,x + \frac{n\pi}{٢}\right] - \frac{(a+b)^{n}}{٢}\cos\left[(a+b)\,x + \frac{n\pi}{٢}\right]$$

$$\frac{(a-b)^{n}}{٢}\cos\left[(a-b)\,x + \frac{n\pi}{٢}\right] + \frac{(a+b)^{n}}{٢}\times\cos\left[(a+b)\,x\frac{n\pi}{٢}\right]$$

$$\frac{(a-b)^{n}}{٢}\times\sin\left[(a-b)\,x + \frac{n\pi}{٢}\right] + \frac{(a+b)^{n}}{٢}\sin\left[(a+b)\,x + \frac{n\pi}{٢}\right] - ١١٩٩$$

$$\frac{b^{n}}{٢}\cos\left(bx + \frac{n\pi}{٢}\right) - \frac{(٢a-b)^{n}}{٤}\times\cos\left[(٢a-b)\,x + \frac{n\pi}{٢}\right] - -١٢٠٠$$

$-\frac{(۲a+b)^n}{٤}\cos\left[(۲a+b)x+\frac{n\pi}{۲}\right]$

۱۲۰۱ − $٤^{n-۱}\cos\left(٤x+\frac{n\pi}{۳}\right)$

۱۲۰۲ − $a^nx\cos\left(ax+\frac{n\pi}{۲}\right)+na^{n-۱}\sin\left(ax+\frac{n\pi}{۲}\right)$

۱۲۰۳ − $a^n\left[x^۲-\frac{n(n-۱)}{a^۲}\right]\sin\left(ax+\frac{n\pi}{۲}\right)-۲na^{n-۱}x\times\cos\left(ax+\frac{n\pi}{۲}\right)$

۱۲۰۴ − $(-۱)^ne^{-x}[x^۲-۲(n-۱)x+(n-۱)(n-۲)]$

۱۲۰۵ − $e^x\left\{\frac{۱}{x}+\sum_{k=۲}^{n}(-۱)^k\frac{n(n-۱)\dots(n-k+۱)}{x^{k+۱}}\right\}$

۱۲۰۶ − $e^x۲^{\frac{n}{۲}}\cos\left(x+\frac{n\pi}{٤}\right)$

۱۲۰۷ − $e^x۲^{\frac{n}{۲}}\sin\left(x+\frac{n\pi}{٤}\right)$

۱۲۰۸ − $\frac{(n-۱)!b^n}{(a^۲-b^۲x^۲)^n}[(a+bx)^n+$
$+(-۱)^{n-۱}(a-bx)^n]\ \left(|x|<\left|\frac{a}{b}\right|\right)$

۱۲۰۹ − $e^{ax}[a^nP(x)+C_n'\times$
$\times a^{n-۱}P'(x)+\dots+P^{(n)}(x)]$

۱۲۱۰ − $\frac{۱}{۲}\{[(x+n)-(-۱)^n(x-$
$-n)]\operatorname{ch}x+[(x+n)+(-۱)^n(x-n)]\operatorname{sh}x\}$

۱۲۱۱ − $d^ny=e^x\left[x^n+\right.$
$\left.+n^۲x^{n-۱}+\frac{n^۲(n-۱)^۲}{۲!}\times x^{n-۲}+\dots+n!\right]dx^n$

۱۲۱۲ − $\frac{(-۱)^nn!}{x^{n+۲}}\left\{\ln x-\sum_{i=۲}^{n}\frac{۱}{i}\right\}dx^n\ (x>۰)$

۱۲۱٤ − الف) $(a^۲+b^۲)^{\frac{n}{۲}}\times$
$\times\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{۲}\right)\operatorname{ch}ax\cos\left(bx+\frac{n\pi}{۲}\right)-\sin\left(n\varphi-\frac{n\pi}{۲}\right)\operatorname{sh}ax\sin\times\right.$
$\left.\times\left(bx+\frac{n\pi}{۲}\right)\right]$ ؛

ب) $(a^۲+b^۲)^{\frac{n}{۲}}\left[\cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{۲}\right)\operatorname{ch}ax\times\right.$
$\left.\times\sin\left(bx+\frac{n\pi}{۲}\right)+\sin\left(n\varphi-\frac{n\pi}{۲}\right)\operatorname{sh}ax\times\cos\left(bx+\frac{n\pi}{۲}\right)\right]$ که در
آن $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ ؛ $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

۱۲۱۵ − $f^{(n)}(x)=$
$$=\sum_{k=۰}^{p-۲}(-۱)^{p+k}۲^{n-۲p+۱}(p-k)^nC_{۲p}^k\cos\left[(۲p-۲k)x+\frac{n\pi}{۲}\right]$$

۱۲۱۶ – الف) $\sum\limits_{k=۰}^{p}(-۱)^{p+k}\frac{(۲p-۲k+۱)^n}{۲^{۲p}}C_{۲p+۱}^{k}\times\sin\left[(۲p-۲k+۱)x+\frac{n\pi}{۲}\right]$ ؛

ب) $\sum\limits_{k=۰}^{p-۱}۲^{n-۲p+۱}\times(p-k)^nC_{۲p}^{k}\cos\left[(۲p-۲k)x+\frac{n\pi}{۳}\right]$ ؛

پ) $\sum\limits_{k=۰}^{p}\left\{\frac{(۲p-۲k+۱)^n}{۲^{۲p}}C_{۲p+۱}^{k}\cos\left[(۲p-۲k+۱)x+\frac{n\pi}{۲}\right]\right\}$

۱۲۱۸ – $(x\neq۰)$ $\frac{(-۱)^{n-۱}(n-۱)!}{(۱+x^۲)^{\frac{n}{۲}}}\sin(n\,\text{arc ctg}\,x)$ ۱۲۱۹ – الف)

$\frac{n!}{۳}[۲^{n+۱}+(-۱)^n]$ ؛ ب) $\frac{n(۲n-۳)!!}{۲^{n-۱}}\ (n>۱)$ ۱۲۲۰ – الف)

$n(n-۱)n^{n-۲}$ ؛ ب) $f^{(۲k)}(۰)=۰$ ، $f^{(۲k+۱)}(۰)=(-۱)^k(۲k!)$ ؛

$(k=۰,۱,۲,\dots)$ ؛ پ) $f^{(۲k)}(۰)=۰$ ، $f^{(۲k+۱)}(۰)=[۱\times۳\times\dots(۲k-۱)]^۲$

۱۲۲۱ – الف) $f^{(۲k)}(۰)=(-۱)^km^۲(m^۲-۲^۲)\quad\dots\quad[m^۲-(۲k-۲)^۲]$ ،

$f^{)۲k-۱)}(۰)=۰$ ؛ ب) $f^{(۲k)}(۰)=۰$ ، $f'(۰)=m$ ، $f^{(۲k+۱)}(۰)=(-۱)^k\times$

$\times m(m^۲-۱^۲)\dots[m^۲-(۲k-۱)^۲]\ (k=۱,۲,\dots)$ ۱۲۲۲ – الف)

$f^{(۲k)}(۰)=(-۱)^{k-۱}۲(۲k-۱)!\times\left(۱+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{۲k-۱}\right)$ ،

$f^{(۲k-۱)}(۰)=۰\ (k=۱,۲,\dots)$ ؛ ب) $f^{(۲k)}(۰)=۲^{۲k-۱}[(k-۱)!]^۲$ ،

$f^{(۲k-۱)}(۰)=۰\ (k=۱,۲,\dots)$ ۱۲۲۳ – $n!\varphi(a)$ ۱۲۲۸ – $L_m(x)=(-۱)^m$

$\times\left[x^m-m^۲x^{m-۱}+\frac{m^۲(m-۱)^۲}{۱\times۲}\times x^{m-۲}+\dots+(-۱)^mm!\right]$ ۱۲۳۱ –

$H_m(x)=(۲x)^m-\frac{m(m-۱)}{۱!}(۲x)^{m-۲}+\frac{m(m-۱)(m-۲)(m-۳)}{۲!}(۲x)^{m-۴}-\dots$

۱۲۳۶ – بازای $x=۰$ مشتق متناهی $f'(x)$ وجود ندارد ۱۲۴۴ – $A(-۱,-۱)$ ،

$C(۱,۱)$ ۱۲۴۵ – درست نیست ۱۲۴۶ – الف) $\theta=\frac{۱}{۲}$ ؛

ب) $(x\geqslant۰,\ \Delta x>۰)$ $\theta=\frac{\sqrt{x^۲+x\Delta x+\frac{۱}{۳}(\Delta x)^۲}-x}{\Delta x}$ ؛ پ) $\theta=$

$(x(x+\Delta x)>۰)$ $=\frac{x}{\Delta x}\left(\sqrt{۱+\frac{\Delta x}{x}}-۱\right)$ ؛ ت) $\theta=\frac{۱}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x-۱}}{\Delta x}$

۱۲۴۸ – $c=\frac{1}{2}$ یا $\sqrt{2}$ ۱۲۵۰ – بطور کلی نه ۱۲۶۱ – $f(x)=$
$=c_0+c_1x+\dots+c_{n-1}x^{n-1}$ که در آن $c_i\,(i=0, 1, \dots, n-1)$
ثابت هستند ۱۲۶۸ – بازای $-\infty<x<\frac{1}{2}$ صعودی، بازای $\frac{1}{2}<x<+\infty$
نزولی است ۱۲۶۹ – بازای $-\infty<x<-1$ نزولی ، بازای $-1<x<1$
صعودی، بازای $1<x<+\infty$ نزولی است ۱۲۷۰ – بازای $-\infty<x<-1$
نزولی، بازای $-1<x<1$ صعودی، بازای $1<x<+\infty$ نزولی است
۱۲۷۱ – بازای $0<x<100$ صعودی ، بازای $100<x<+\infty$ نزولی است
۱۲۷۲ – صعودی است ۱۲۷۳ – در فاصله های $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ صعودی ،
در فاصله های $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ نزولی است $(k=0, \pm1, \pm2, \dots)$
۱۲۷۴ – در فاصله های $\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$ و $\left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$ صعودی ،
در فاصله های $\left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right)$ و $\left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ نزولی است
$(k=0, 1, 2, \dots)$ ۱۲۷۵ – بازای $-\infty<x<0$ نزولی، بازای $0<x<\frac{2}{\ln 2}$
صعودی، بازای $\frac{2}{\ln 2}<x<+\infty$ نزولی است ۱۲۷۶ – بازای $0<x<n$
صعودی، بازای $n<x<+\infty$ نزولی است ۱۲۷۷ – بازای $-\infty<x<-1$
و $0<x<1$ نزولی، بازای $-1<x<0$ و $1<x<+\infty$ صعودی است
۱۲۷۸ – در فاصله های $\left(e^{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi}, e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi}\right)$ صعودی ، در فاصله های
$\left(e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi}, e^{\frac{17\pi}{12}+2k\pi}\right)$ نزولی است $(k=0, \pm1, \pm2, \dots)$ ۱۲۸۳ – حتمی
نیست ۱۲۹۸ – در نقطهٔ A منحنی تقعرش بسمت بالا و در نقطهٔ B
تقعرش بسمت پائین است ؛ C نقطهٔ عطف است ۱۲۹۹ – نمودار بازای
$-\infty<x<1$ مقعر بسمت بالا ، بازای $1<x<+\infty$ مقعر بسمت پائین
است ؛ $x=1$ نقطهٔ عطف است ۱۳۰۰ – بازای $|x|<\frac{a}{\sqrt{3}}$ مقعر بسمت
پائین، بازای $|x|>\frac{a}{\sqrt{3}}$ مقعر بسمت بالا است ؛ $x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ نقاط عطف

میباشند ۱۳۰۱ – بازای $x<0$ مقعر بسمت پائین، بازای $x>0$ مقعر بسمت بالا است ؛ $x=0$ نقطهٔ عطف است ۱۳۰۲ – – مقعر بسمت بالا است ۱۳۰۳ – بازای $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ مقعر بسمت پائین ، بازای $(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$ مقعر بسمت بالا است ؛ $x=k\pi$ نقاط عطف میباشند $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ۱۳۰۴ – بازای $|x|<\sqrt{\frac{1}{2}}$ مقعر بسمت پائین، بازای $|x|>\sqrt{\frac{1}{2}}$ مقعر بسمت بالا است ؛ $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ نقاط عطف میباشند ۱۳۰۵ – بازای $|x|<1$ مقعر بسمت بالا، بازای $|x|>1$ مقعر بسمت پائین است ؛ $x=\pm 1$ نقاط عطف میباشند ۱۳۰۶ – بازای $e^{2k\pi-\frac{3\pi}{4}}<x<e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ مقعر بسمت بالا، بازای $e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}<x<e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}$ مقعر بسمت پائین است ؛ $x=e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$ نقاط عطف میباشند $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

۱۳۰۷ – بازای $0<x<+\infty$ مقعر بسمت بالا است ۱۳۰۹ – $h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$

۱۳۱۰ – مقعر بسمت پائین (بازای $a>0$) است ۱۳۱۸ – $\frac{a}{b}$ ۱۳۱۹ – 1

۱۳۲۰ – 2 ۱۳۲۱ – -2 ۱۳۲۲ – $\frac{1}{3}$ ۱۳۲۳ – $-\frac{1}{3}$ ۱۳۲۴ – $\frac{1}{3}$

۱۳۲۵ – $\frac{1}{6}$ ۱۳۲۶ – $\frac{1}{2}$ ۱۳۲۷ – 1 ۱۳۲۸ – $\frac{a-b}{3ab}$ ۱۳۲۹ – $\frac{1}{6}\ln a$

۱۳۳۰ – -2 ۱۳۳۱ – 1 ۱۳۳۲ – $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ ۱۳۳۳ – $\frac{1}{6}$ ۱۳۳۴ – $\frac{2}{3}$

۱۳۳۵ – 1 ۱۳۳۶ – 0 ۱۳۳۷ – 0 ۱۳۳۸ – 0 ۱۳۳۹ – 0

۱۳۴۰ – 0 ۱۳۴۱ – 0 ۱۳۴۲ – 1 ۱۳۴۳ – 1 ۱۳۴۴ – -1 ۱۳۴۵ – e^k

۱۳۴۶ – e^{-1} ۱۳۴۷ – $e^{\frac{2}{\pi}}$ ۱۳۴۸ – e^{-1} ۱۳۴۹ – 1 ۱۳۵۰ – 1

۱۳۵۱ – 1 ۱۳۵۲ – $e^{\frac{2}{\sin 2a}}$ ($a\neq\frac{k\pi}{2}$ ، k عددیست درست) ۱۳۵۳ – $e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a-\ln^2 b)}$ ۱۳۵۴ – $\frac{1}{2}$ ۱۳۵۵ – $\frac{1}{2}$ ۱۳۵۶ – 0 ۱۳۵۷ – $-\frac{1}{2}$

۱۳۵۸ – $a^a(\ln a-1)$ ۱۳۵۹ – $-\frac{e}{2}$ ۱۳۶۰ – $\frac{1}{a}$ ۱۳۶۱ – $e^{-\frac{2}{\pi}}$

۱۳۶۲ − ۱ ۱۳۶۳ − $e^{\frac{۱}{۶}}$ ۱۳۶۳,۱ − $e^{-\frac{۱}{۶}}$ ۱۳۶۳,۲ − $e^{\frac{۱}{۳}}$

۱۳۶۳,۳ − $e^{-\frac{۱}{۳}}$ ۱۳۶۳,۴ − $e^{-\frac{۱}{۶}}$ ۱۳۶۴ − $e^{-\frac{۱}{۲}}$ ۱۳۶۵ − $e^{-\frac{۲}{\pi}}$

۱۳۶۶ − $e^{-۱}$ ۱۳۶۷ − $\frac{mn}{n-m}$ ۱۳۶۸ − $\sqrt{e}$ ۱۳۶۸,۱ − ۰ ۱۳۶۹ − $-\frac{۱}{۲}$

۱۳۷۰ − a ۱۳۷۱ − $\operatorname{tg}\alpha$ ۱۳۷۳,۱ − $f'(۰) = -\frac{۱}{۱۲}$ ۱۳۷۳,۲ −

$y=\frac{۱}{e}\left(x+\frac{۱}{۲}\right)$ ۱۳۷۴ − الف) قاعدهٔ لوپیتال کاربردناپذیر و حد برابر صفر است ؛ ب) قاعدهٔ لوپیتال کاربردناپذیر و حد برابر ۱ است ؛ پ) کاربرد اسمی قاعدهٔ لوپیتال نتیجهٔ نادرست مساوی صفر میدهد ، حد وجود ندارد ؛ ت) کاربرد قاعدهٔ لوپیتال فاقد اعتبار و به نتیجهٔ نادرست مساوی صفر منجر میشود، حد وجود ندارد ۱۳۷۵ − $\frac{۴}{۳}$ ۱۳۷۶ − $۵-۱۳(x+۱)+۱۱(x+۱)^{۲}-$

$-۲(x+۱)^{۳}$ ۱۳۷۷ − $۱+۲x+۲x^{۲}-۲x^{۴}+o(x^{۴})$ ؛ -۴۸ ۱۳۷۸ −

$۱+۶۰x+۱۹۰۰x^{۲}+o(x^{۲})$ ۱۳۷۹ − $a+\frac{x}{ma^{m-۱}}-\frac{(m-۱)x^{۲}}{۲m^{۲}a^{۲m-۱}}+o(x^{۲})$

۱۳۸۰ − $\frac{۱}{۶}x^{۲}+x^{۳}+o(x^{۳})$ ۱۳۸۱ − $۱+۲x+x^{۲}-\frac{۲}{۳}x^{۳}-\frac{۵}{۶}x^{۴}-$

$-\frac{۱}{۱۵}x^{۵}+o(x^{۵})$ ۱۳۸۲ − $۱-\frac{x}{۲}+\frac{x^{۲}}{۱۲}-\frac{x^{۴}}{۷۲۰}+o(x^{۴})$

۱۳۸۳ − $x-\frac{x^{۷}}{۱۸}-\frac{x^{۱۳}}{۳۲۴۰}+o(x^{۱۳})$ ۱۳۸۴ − $-\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x^{۴}}{۱۲}-\frac{x^{۶}}{۴۵}+o(x^{۶})$

۱۳۸۵ − $x-\frac{x^{۳}}{۳}+o(x^{۳})$ ۱۳۸۶ − $x+\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{۲x^{۵}}{۱۵}+o(x^{۵})$

۱۳۸۷ − $-\frac{x^{۲}}{۶}-\frac{x^{۴}}{۱۸۰}-\frac{x^{۶}}{۲۸۳۵}+o(x^{۶})$ ۱۳۸۸ − $۱+\frac{۱}{۲}(x-۱)-$

$-\frac{۱}{۸}(x-۱)^{۲}+o((x-۱)^{۲})$ ۱۳۸۹ − $(x-۱)+(x-۱)^{۲}+\frac{۱}{۲}(x-۱)^{۳}+$

$+o((x-۱)^{۳})$ ۱۳۹۰ − $y=a+\frac{x^{۲}}{۲a}+o(x^{۲})$ ۱۳۹۱ − $\frac{۱}{۲x}-\frac{۱}{۸x^{۳}}+o\left(\frac{۱}{x^{۳}}\right)$

۱۳۹۲ − $\ln x+\frac{h}{x}-\frac{h^{۲}}{۲x^{۲}}+\dots+(-۱)^{n-۱}\frac{h^{n}}{nx^{n}}+o(h^{n})$ ۱۳۹۴ − الف)

کمتر از $\frac{٣}{(n+١)!}$ ؛ ب) از $\frac{١}{٣٨٤٠}$ تجاوز نمیکند ؛ پ) کمتر از
٢×١٠^{-٦} ؛ ت) کمتر از $\frac{١}{١٦}$ ١٣٩٥ – $|x| < ٠,٢٢٢ = \mathrm{arc}\,١٢^{\circ}٣٠'$
١٣٩٦ – الف) ٣,١٠٧٢ ؛ ب) ٣,٠١٧١ ؛ پ) ١,٩٩٦١ ؛ ت) ١,٦٤٨٧٢ ؛
ث) ٠,٣٠٩٠١٧ ؛ ج) ٠,١٨٢٣٢١ ؛ چ) $\mathrm{arc}\,٣٨^{\circ}٣٩'٣٥'' = ٠,٦٧٤٧٤$ ؛
ح) $\mathrm{arc}\,٢٦^{\circ}٤٤'٣٧'' = ٠,٤٦٦٧٦$ ؛ خ) ١,١٢١١٧ ١٣٩٧ – الف)
٢,٧١٨٢٨١٨٢٨ ؛ ب) ٠,٠١٧٤٥٢٤١ ؛ پ) ٠,٩٨٧٦٩ ؛ ت) ٢,٢٣٦١ ؛
ث) ١,٠٤١٣٩ ١٣٩٨ – $-\frac{١}{١٢}$ ١٣٩٩ – $\frac{١}{٣}$ ١٤٠٠ – $-\frac{١}{٤}$ ١٤٠١ – $\frac{١}{٣}$
١٤٠٢ – $\frac{١}{٦}$ ١٤٠٣ – $\ln^{٢}a$ ١٤٠٤ – $\frac{١}{٢}$ ١٤٠٥ – ٠ ١٤٠٦ – $\frac{١}{٣}$
١٤٠٦,١ – $\frac{١٩}{٩٠}$ ١٤٠٦,٢ – $\frac{١}{٢}$ ١٤٠٦,٣ – $\frac{١}{٢}$ ١٤٠٧ – $\frac{x^{٧}}{٣٠}$
١٤٠٨ – $x^{٢}$ ١٤٠٩ – $\frac{x}{٢}$ ١٤١٠ – $a = \frac{٤}{٣}$ ؛ $b = -\frac{١}{٣}$ ١٤١٠,١ – $A =$
$= -\frac{٢}{٥}$ ؛ $B = -\frac{١}{١٥}$ ١٤١٠,٢ – $A = \frac{١}{٢}$ ، $B = \frac{١}{١٢}$ ، $C = -\frac{١}{٢}$ ،
$D = \frac{١}{١٢}$ ١٤١١ – الف) $\frac{٢x}{R^{٣}}$ ؛ ب) $\frac{٤}{٣}x$ ؛ پ) $\frac{An}{١٠٠}$ ؛ ت) $\frac{٧٠}{x}$
١٤١٢ – $\alpha = \frac{٢}{٣}$ ؛ $\beta = \frac{١}{٣}$ ١٤١٣ – $\frac{\alpha^{٤}}{١٨٠}$ که در آن α نصف زاویهٔ
مرکزی قوس است ١٤١٤ – ماگزیمم $y = ٢\frac{١}{٤}$ بازای $x = \frac{١}{٢}$
١٤١٥ – اکسترمم ندارد ١٤١٦ – مینیمم $y = ٠$ بازای $x = ١$ ١٤١٧ – مینیمم
$y = ٠$ بازای $x = ٠$ اگر m زوج باشد ، بازای $x = ٠$ اکسترمم ندارد اگر
m فرد باشد ؛ ماگزیمم $y = \frac{m^{m}n^{n}}{(m+n)^{m+n}}$ بازای $x = \frac{m}{m+n}$ ؛ مینیمم $y = ٠$
بازای $x = ١$ اگر n زوج باشد ، اگر n فرد باشد بازای $x = ١$ اکسترمم
ندارد ١٤١٨ – مینیمم $y = ٢$ بازای $x = ٠$ ١٤١٩ – مینیمم $y = ٠$ بازای
$x = -١$ ؛ ماگزیمم $y = ١٠^{١٠}e^{-٩} \approx ١٢٣٤٠٠٠$ بازای $x = ٩$ ١٤٢٠ – ماگزیمم
$y = ١$ بازای $x = ٠$ اگر n فرد باشد ، اگر n زوج باشد بازای $x = ٠$
اکسترمم ندارد ١٤٢١ – مینیمم $y = ٠$ بازای $x = ٠$ ١٤٢٢ – ماگزیمم

$y=\frac{۱}{۳}\sqrt[۳]{۴}\approx ۰,۵۲۹$ بازای $x=\frac{۱}{۳}$ ؛ مینیمم $y=۰$ بازای $x=۱$ ؛ بازای $x=۰$ اکسترمم ندارد ۱۴۲۳ – مینیمم $f(x_۰)=۰$ اگر $\varphi(x_۰)>۰$ و n زوج باشد ؛ ماگزیمم $f(x_۰)=۰$ اگر $\varphi(x_۰)<۰$ و n زوج باشد ؛ اگر n فرد باشد $f(x_۰)$ اکسترمم نیست ۱۴۲۵ – خیر ۱۴۲۷ – الف) مینیمم $f(۰)=۰$ ؛ ب) مینیمم $f(۰)=۰$ ۱۴۲۸ – مینیمم $f(۰)=۰$ ۱۴۲۹ – بازای $x=۱$ ماگزیمم $y=۰$ ؛ بازای $x=۳$ مینیمم $y=-۴$ ۱۴۳۰ – مینیمم $y=۰$ بازای $x=۰$ ؛ ماگزیمم $y=۱$ بازای $x=\pm ۱$ ۱۴۳۱ – بازای $x=\frac{۵-\sqrt{۱۳}}{۶}\approx ۰,۲۳$ مینیمم $y\approx -۰,۷۶$ ؛ بازای $x=۱$ ماگزیمم $y=۰$ ؛ بازای $x=\frac{۵+\sqrt{۱۳}}{۶}\approx ۱,۴۳$ مینیمم $y\approx -۰,۰۵$ ؛ بازای $x=۲$ اکسترمم ندارد ۱۴۳۲ – بازای $x=-۱$ ماگزیمم $y=-۲$ ؛ بازای $x=۱$ مینیمم $y=۲$ ۱۴۳۳ – بازای $x=-۱$ مینیمم $y=-۱$ ؛ بازای $x=۱$ ماگزیمم $y=۱$ ۱۴۳۴ – بازای $x=\frac{۷}{۵}$ مینیمم $y=-\frac{۱}{۲۴}$ ۱۴۳۵ – بازای $x=۰$ و $x=۲$ مینیمم مرزی $y=۰$ ؛ بازای $x=۱$ ماگزیمم $y=۱$ ۱۴۳۶ – بازای $x=\frac{۳}{۴}$ مینیمم $y=-\frac{۳}{۸}\sqrt[۳]{۲}\approx -۰,۴۶$ ؛ بازای $x=۱$ اکسترمم ندارد ۱۴۳۷ – بازای $x=۱$ ماگزیمم $y=e^{-۱}\approx ۰,۳۶۸$ ۱۴۳۸ – بازای $x=+۰$ ماگزیمم مرزی $y=۰$ ؛ بازای $x=e^{-۲}\approx ۰,۱۳۵$ مینیمم $y=-\frac{۲}{e}\approx -۰,۷۳۶$ ۱۴۳۹ – بازای $x=۱$ مینیمم $y=۰$ ؛ بازای $x=e^{۲}\approx ۷,۳۸۹$ ماگزیمم $y=\frac{۴}{e^{۲}}\approx ۰,۵۴۱$ ۱۴۴۰ – بازای $x=k\pi$ $(k=۰,\ \pm ۱,\ \pm ۲,\ \dots)$ ماگزیمم $y=(-۱)^{k}+\frac{۱}{۲}$ ؛ بازای $x=\pm\frac{۲\pi}{۳}+۲k\pi$ $(k=۰,\ \pm ۱,\ \pm ۲,\ \dots)$ مینیمم $y=-\frac{۳}{۴}$ ۱۴۴۱ – بازای $x=k\pi$ $(k=۰,\ \pm ۱,\ \pm ۲,\ \dots)$ ماگزیمم $y=۱۰$ ؛ بازای $x=\pi\left(k+\frac{۱}{۲}\right)$ $(k=۰,\ \pm ۱,\ \pm ۲,\ \dots)$ مینیمم $y=۵$ ۱۴۴۲ – بازای $x=۱$ ماگزیمم $y=\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}\ln ۲\approx ۰,۴۳۹$ ۱۴۴۳ – بازای $x=-\frac{\pi}{۴}+۲\pi k$

$(k=۰, \pm۱, \pm۲, \dots)$ مینیمم $y=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{-\frac{\pi}{۰}+۲k\pi}$ ؛ بازای $x=۱$

$=\frac{۳\pi}{۴}+۲k\pi \quad (k=۰, \pm۱, \pm۲, \dots)$ ماگزیمم $y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{\frac{۳\pi}{۴}+۲k\pi}$

۱۴۴۴ - بازای $x=-۱$ ماگزیمم $y=e^{-۲}\approx ۰,۱۳۵$ ؛ بازای $x=۰$ مینیمم

$y=۰$ (نقطهٔ زاویه‌دار) ؛ بازای $x=۱$ ماگزیمم $y=۱$ ۱۴۴۵ - $\frac{۱}{۲}$ ؛ ۳۲

۱۴۴۶ - ۲ ؛ ۶۶ ۱۴۴۷ - ۰ ؛ ۱۳۲ ۱۴۴۸ - ۲ ؛ ۱۰۰,۰۱ ۱۴۴۹ - ۱ ؛ ۳

۱۴۵۰ - ۰ ؛ $\frac{۱۰۰}{e}\approx ۳۶,۸$ ۱۴۵۱ - ۰ ؛ ۱ ۱۴۵۲ - ۰ ؛

$\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۲})\approx ۱,۲$ ۱۴۵۳ - $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{-\frac{۳\pi}{۴}}\approx -۰,۰۶۷$ ؛ ۱

۱۴۵۴ - $m(x)=-\frac{۱}{۶}$ اگر $-\infty<x\leqslant -۳$ ؛ $m(x)=\frac{۱+x}{۳+x^۲}$ اگر

$-۳<x\leqslant -۱$ ؛ $m(x)=۰$ اگر $-۱<x<+\infty$ ؛ $M(x)=\frac{۱}{۲}$ اگر

$-\infty<x\leqslant ۱$ ؛ $M(x)=\frac{۱+x}{۳+x^۲}$ اگر $۱<x<+\infty$ ۱۴۵۵ - الف)

$\frac{۱۴^{۱۰}}{۲^{۱۴}}\approx ۱,۷۷\times ۱۰^۷$ ؛ ب) $\frac{۱}{۲۰۰}$ ؛ پ) $\sqrt[۳]{۳}\approx ۱,۴۴$ ۱۴۵۷ -

$\frac{۹+۶\sqrt{۳}}{۴}\approx ۴,۸۵$ ۱۴۵۸ - $q=-\frac{۱}{۲}$ ۱۴۵۹ - $\frac{۴}{۲۷}$ ۱۴۶۰ - $g(x)=$

$=(x_۱+x_۲)x-\frac{۱}{۸}(x_۱^۲+x_۲^۲+۶x_۱x_۲)$ ؛ $\Delta=\frac{۱}{۸}(x_۱-x_۲)^۲$ ۱۴۶۱ - $\frac{۲}{۳}$

۱۴۶۲ - یک ریشه: $(۳, +\infty)$ ۱۴۶۳ - یک ریشه: $-\infty<x_۱<-۱$

اگر $h>۲۷$ ؛ سه ریشه: $-\infty<x_۱<-۱$ ، $-۱<x_۲<۳$ و $۳<x_۳<+\infty$

اگر $-۵<h<۲۷$ ؛ یک ریشه: $۳<x_۳<+\infty$ اگر $h<-۵$

۱۴۶۴ - دو ریشه: $-\infty<x_۱<-۱$ و $۱<x_۲<+\infty$ ۱۴۶۵ - یک ریشه:

$-\infty<x_۱<-۱$ اگر $-\infty<a<-۴$ ؛ سه ریشه: $-\infty<x_۱<-۱$ ،

$-۱<x_۲<۱$ ، $۱<x_۳<+\infty$ اگر $-۴<a<۴$ ؛ یک ریشه: $۱<x_۱<+\infty$

اگر $۴<a<+\infty$ ۱۴۶۶ - یک ریشه: $۰<x_۱<۱$ اگر $-\infty<k<۰$ ؛

دو ریشه: $۰<x_۱<\frac{۱}{k}$ و $\frac{۱}{k}<x_۲<+\infty$ اگر $۰<k<\frac{۱}{e}$ ؛ بازای

$k>\frac{۱}{e}$ ریشه ندارد ۱۴۶۷ - اگر $a<۰$، ریشه ندارد؛ اگر $۰<a<\frac{e^۲}{۴}$، یک ریشه: $-\infty<x_۱<۰$ ؛ اگر $\frac{e^۲}{۴}<a<+\infty$ ، سه ریشه: $-\infty<x_۱<۰$ ، $۰<x_۲<۲$ و $۲<x_۳<+\infty$ ۱۴۶۸ - بازای $|a|<۳\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$ دو ریشه ؛ بازای $|a|>۳\frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$ ریشه ندارد ۱۴۶۹ - دو ریشه: $۰<|x_۱|<\xi$ و $\xi<|x_۲|<+\infty$ که در آن $\xi\approx ۱,۲$ ریشهٔ مثبت معادلهٔ $\operatorname{cth} x = x$ میباشد در صورتیکه $|k|>\operatorname{sh}\xi\approx ۱,۵۰$ ؛ اگر $|k|<\operatorname{sh}\xi$ ، ریشه ندارد ۱۴۷۰ - الف) $\frac{p^۳}{۲۷}+\frac{q^۲}{۴}>۰$ ؛ ب) $\frac{p^۳}{۲۷}+\frac{q^۲}{۴}<۰$ ۱۴۷۱* - تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. صفرهای تابع: $x=۰$ و $x=\pm\sqrt{۳}\approx ۱,۷۳$ مینیمم $y=-۲$ بازای ماگزیمم $x=-۱$ ؛ $y=۲$ بازای $x=۱$. نقطهٔ عطف: $x=۰, y=۰$. ۱۴۷۲ - تابع نسبت به محور Oy متقارن است. صفرها: $x=\pm\sqrt{۱+\sqrt{۳}}\approx\pm۱,۶۵$. مینیمم $y=۱$ بازای $x=۰$ ؛ ماگزیمم $y=۱\frac{۱}{۲}$ بازای $x=\pm۱$. نقاط عطف: $x=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}\approx\pm۰,۵۸;\ y=۱\frac{۵}{۱۸}$ ۱۴۷۳ - تابع نسبت به نقطهٔ $A(۱, ۲)$ متقارن است. صفرها: $x=-۱$ و $x=۲$ مینیمم $y=۰$ بازای $x=۲$ ؛ ماگزیمم $y=۴$ بازای $x=۰$. نقطهٔ عطف: $x=۱, y=۲$ ۱۴۷۴ - تابع نسبت به محور Oy متقارن است. صفرهای تابع: $x=\pm\sqrt{۲}\approx\pm۱,۴۱$. ماگزیمم $y=۲$ بازای $x=۰$ ؛ مینیمم $y=۱-\frac{\sqrt{۵}}{۲}\approx-۰,۱۲$ بازای $x=\pm\sqrt{۲+\sqrt{۵}}\approx\pm۲,۰۶$. نقاط عطف: $x_{۱,۲}=\pm۰,۷۷,\ y_{۱,۲}=۱,۰۴$ ؛ $x_{۳,۴}\approx\pm۲,۶۷,\ y_{۳,۴}\approx-۰,۰۱۰$. مجانب $y=۰$ ۱۴۷۵ - نقاط انفصال: $x=۲$ و $x=۳$. صفرها: $x=\pm۱$. مینیمم $y=-(۱۰-\sqrt{۹۶})\approx-۰,۲۰$ بازای $x=\frac{۷-\sqrt{۲۴}}{۵}\approx۰,۴۲$ ؛ ماگزیمم $y=-(۱۰+\sqrt{۹۶})\approx-۱۹,۸۰$ بازای $x=\frac{۷+\sqrt{۲۴}}{۵}\approx۲,۳۸$.

---

* برای مسایل رسم نمودار، در همه‌جا جواب کامل داده نمیشود .

نقطهٔ عطف: $x \approx -۰,۵۸$, $y \approx -۰,۰۷$. مجانب‌ها : $x = ۲$ ، $x = ۳$ و $y = ۱$ ۱۴۷۶ – نقاط انفصال: $x_1 = -۱$ و $x_2 = ۱$. صفر تابع: $x = ۰$. نقاط اکسترمم ندارد . نقطهٔ عطف : $x \approx -۰,۲۲$, $y \approx -۰,۱۹$. مجانب‌ها : $x = -۱$ ، $x = ۱$ و $y = ۰$ ۱۴۷۷ – صفر تابع : $x = ۰$. نقطهٔ انفصال $x = -۱$. مینیمم $y = ۰$ بازای $x = ۰$ ؛ ماگزیمم $y = -۹\frac{۱۳}{۲۷}$ بازای $x = -۴$. نقاط عطف ندارد . مجانب‌ها : $x = -۱$ و $y = x - ۳$

۱۴۷۸ – مینیمم $y = ۰$ بازای $x = -۱$ ؛ نقطهٔ عطف: $x = -۴; y = \frac{۸۱}{۶۲۵}$. مجانب‌ها : $x = ۱$ و $y = ۱$ ۱۴۷۹ – ماگزیمم‌ها : $y = -\frac{۳۴\sqrt{۱۷}+۱۴۲}{۳۲} \approx -۸,۸۲$ بازای $x = -\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲} \approx -۳,۵۶$ و $y = ۰$ بازای $x = ۰$؛ مینیمم $y = \frac{۳۴\sqrt{۱۷}-۱۴۲}{۳۲} \approx -۰,۰۶$ بازای $x = \frac{\sqrt{۱۷}-۳}{۲} \approx ۰,۵۶$ نقطهٔ عطف: $x = \frac{۱}{۵}, y = -\frac{۱}{۴۵}$. مجانب‌ها : $x = -۱$ و $y = x - ۳$ ۱۴۸۰ – تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است . نقاط اکسترمم ندارد ؛ نقطهٔ عطف: $x = ۰, y = ۰$. مجانب‌ها: $x = -۱$ ، $x = ۱$ و $y = ۰$

۱۴۸۱ – مینیمم $y = ۱۳\frac{۱}{۲}$ بازای $x = ۵$؛ نقاط عطف: $x = -۱$ ، $y = ۰$. مجانب‌ها: $x = ۱$ و $y = x + ۵$ ۱۴۸۲ – مینیمم $y = ۲\frac{۲}{۳}$ بازای $x = ۲$؛ ماگزیمم $y \approx -۳,۲$ بازای $x \approx -۲,۴$؛ نقطهٔ عطف: $x = ۰, y = ۸$. مجانب‌ها: $x = -۱$ و $y = x$ ۱۴۸۳ – تابع نسبت به محور Oy متقارن است. صفرهای تابع : $x = \pm\frac{\sqrt{۱۰}}{۴} \approx \pm۰,۷۹$. نقاط اکسترمم ندارد. نقاط عطف: $x = \pm\sqrt{\frac{۱}{۲}} \approx \pm۰,۷۱,\quad y = -۲\frac{۲}{۳}$. مجانب‌ها : $x = -۱$ ، $x = ۰$, $x = ۱$ و $y = ۰$. ۱۴۸۴ – حوزهٔ وجود: $۰ \leqslant x < +\infty$ ؛ صفرها: $x = ۰$ و $x = ۳$. مینیمم $y = -۲$ بازای $x = ۱$ ؛ ماگزیمم $y = ۰$ بازای $x = ۰$. مقعر بسمت بالا است ۱۴۸۵ – حوزهٔ وجود: $|x| \leqslant ۲\sqrt{۲} \approx ۲,۸۳$. تابع نسبت به مبدأ مختصات و محورهای مختصات متقارن است . صفرها: $x = ۰$ و $x = \pm۲\sqrt{۲}$. ماگزیمم $|y| = ۴$ بازای $x = \pm۲$ ، مینیمم

$|y| = ۰$ بازای $x = ۰$؛ مینیمم مرزی: $|y| = ۰$ بازای $x = \pm ۲\sqrt{۲}$.
نقطهٔ عطف ندارد **۱۴۸۵,۱** – صفر تابع: $x = ۲$. مینیمم $y = -\sqrt{۵} \approx -۲,۲۴$
بازای $x = -۰,۵$. نقطهٔ عطف: $x_۱ = -\frac{۳+\sqrt{۴۱}}{۸} \approx -۱,۱۸,\quad y_۱ \approx -۲,۰۶$
و $x_۲ = \frac{\sqrt{۴۱}-۳}{۸} \approx ۰,۴۲,\quad y_۲ \approx -۱,۴۶$. مجانب‌ها: $y = -۱$ بازای
$x \to -\infty$ و $y = ۱$ بازای $x \to +\infty$ **۱۴۸۶** – حوزهٔ وجود: $۱ \leqslant x \leqslant ۲$
و $۳ \leqslant x < +\infty$. صفرها: $x = ۱$ ، $x = ۲$ و $x = ۳$. ماگزیمم
$|y| = \frac{۱}{۳}\sqrt[۴]{۱۲} \approx ۰,۶۲$ بازای $x = \frac{۶-\sqrt{۳}}{۳} \approx ۱,۴۲$؛ مینیمم‌های مرزی
$|y| = ۰$ بازای $x = ۱, ۲, ۳$ **۱۴۸۷** – مینیمم $y = ۰$ بازای $x = ۱$؛
ماگزیمم $y = \frac{۲}{۳}\sqrt[۳]{۴} \approx ۱,۰۶$ بازای $x = -\frac{۱}{۳}$؛ نقطهٔ عطف $x = -۱,$
$y = ۰$. مجانب $y = x - \frac{۱}{۳}$ **۱۴۸۸** – نمودار نسبت به محور Oy متقارن
است . مینیمم: $y = -۱$ بازای $x = ۰$. مقعر بسمت پائین است . مجانب:
$y = ۰$ **۱۴۸۹** – نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است . صفر تابع:
$x = ۰$. مینیم: $y = -\sqrt[۳]{۱۶} \approx -۲,۵۲$ بازای $x = -۲$ ؛ ماگزیمم
$y = \sqrt[۳]{۱۶}$ بازای $x = ۲$. نقطهٔ عطف: $x = ۰, y = ۰$. مجانب: $y = ۰$
۱۴۹۰ – نمودار نسبت به محور Oy متقارن است. مینیمم: $y = \sqrt[۳]{۴} \approx ۱,۵۹$
بازای $x = \pm ۱$؛ ماگزیمم: $y = ۲$ بازای $x = ۰$. مقعر بسمت پائین است
۱۴۹۱ – نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است . نقطهٔ انفصال: $x = \pm ۱$.
صفر تابع: $x = ۰$. مینیمم: $y = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt[۳]{۲}} \approx ۱,۳۸$ بازای $x = \sqrt{۳}$؛
ماگزیمم: $y = -\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt[۳]{۲}}$ بازای $x = -\sqrt{۳}$ نقاط عطف: $x_۱ = ۰,\quad y_۱ = ۰$
و $x_{۲,۳} = \pm ۳,\quad y_{۲,۳} = \pm ۱\frac{۱}{۲}$ **۱۴۹۲** – حوزهٔ وجود تابع: $|x| \geqslant ۱$.
نمودار نسبت به محور Oy متقارن است . مینیمم مرزی: $y = ۰$ بازای

$x = \pm ۱$. مقعر بسمت پائین است . مجانب‌ها : $y = \frac{x}{۲}$ بازای $x \to +\infty$ و $y = -\frac{x}{۲}$ بازای $x \to -\infty$ ۱۴۹۳ – حوزهٔ وجود تابع : $x > ۰$. مینیمم : $y = \frac{۳}{۲}\sqrt{۳} \approx ۲,۶۰$ بازای $x = \frac{۱}{۲}$. مقعر بسمت بالا است . مجانب‌ها : $x = ۰$ و $y = x + \frac{۳}{۲}$ ۱۴۹۴ – حوزهٔ وجود : $x \geqslant ۰$ و $x < -۳$. صفر تابع : ۰ ، $x = \frac{۵+\sqrt{۱۳}}{۲} \approx ۴,۳۰$ مینیمم : $y = ۱۳$ بازای $x = -۴$ ؛ ماگزیمم مرزی : $y = ۱$ بازای $x = ۰$. مقعر بسمت بالا است . مجانب ها : $y = \frac{۵}{۲} - ۲x$ بازای $x \to -\infty$ ؛ $y = -\frac{۱}{۲}$ بازای $x \to +\infty$ ؛ $x = -۳$ بازای $x \to -۳ - ۰$ ۱۴۹۵ – مینیمم $y = ۰$ بازای $x = ۰$ ؛ ماگزیمم $y = -\sqrt[۳]{۴} \approx -۱,۵۹$ بازای $x = -۲$ نقاط عطف : $x_۱ = -(۲-\sqrt{۳}) \approx -۰,۲۷$ ، $y_۱ = \sqrt[۳]{\frac{\sqrt{۲۷}-۵}{۲}} \approx ۰,۴۶$ ؛ $x_۲ = -(۲+\sqrt{۳}) \approx -۳,۷۳$ ، $y_۲ = -\sqrt[۳]{\frac{۵+\sqrt{۲۷}}{۲}} \approx -۱,۷۲$. مجانب $x = -۱$ ۱۴۹۶ – نمودار نسبت به محور Oy متقارن است . تابع مثبت است . ماگزیمم : $y = \sqrt{۳} \approx ۱,۷۳$ بازای $x = ۰$ ، مینیمم : $y = \sqrt{۲} \approx ۱,۴۱$ بازای $x = \pm ۱$. نقاط عطف : $y_{۱,۲} \approx ۱,۱۴$, $x_{۱,۲} \approx \pm ۰,۴۷$, و $x_{۳,۴} = \pm ۴,۵۸$, $y_{۳,۴} \approx ۴,۵۵$. مجانبها : $y = \pm x$ ۱۴۹۷ – – دورهٔ تابع : $T = ۲\pi$ ؛ حوزهٔ اصلی $۰ \leqslant x \leqslant ۲\pi$. صفرهای تابع : $x_۱ = \pi + \arcsin\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \approx ۱,۲۱\pi$ و $x_۲ = ۲\pi - \arcsin\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \approx ۱,۷۹\pi$. مینیمم‌ها : $y = ۱$ بازای $x = \frac{\pi}{۲}$ و $y = -۱$ بازای $x = \frac{۳\pi}{۲}$ ؛ ماگزیمم : $y = ۱\frac{۱}{۴}$ بازای $x = \frac{\pi}{۶}$ و $x = \frac{۵\pi}{۶}$. نقاط عطف : $x_۱ = \arcsin\frac{۱+\sqrt{۳۳}}{۸} \approx ۰,۳۲\pi$ ،

$y_۱ = \frac{۱۹+۳\sqrt{۳۳}}{۳۲} \approx ۱,۱۳$ ؛ $x_۲ = \pi - \arc \sin \frac{۱+\sqrt{۳۳}}{۸} \approx ۰,۶۸\pi$ ،
$y_۲ = \frac{۱۹+۳\sqrt{۳۳}}{۳۲}$ ؛ $x_۳ = \pi + \arc \sin \frac{\sqrt{۳۳}-۱}{۸} \approx ۱,۲۰\pi$ ،
$y_۳ = \frac{۱۹-۳\sqrt{۳۳}}{۳۲} \approx ۰,۰۰۵$ ؛ $x_۴ = ۲\pi - \arc \sin \frac{\sqrt{۳۳}-۱}{۸} \approx ۱,۸۰\pi$ ،
$y_۴ = \frac{۱۹-۳\sqrt{۳۳}}{۳۲}$ ۱۴۹۸ – دورهٔ تابع : ۲π؛ حوزهٔ اصلی : $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.
نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است . صفرها : $x_۱ = ۰$ و $x_{۲,۳} = \pm\pi$.
مینیمم : $y = -\frac{۱۵}{۸}\sqrt{۱۰} \approx -۷,۳$ بازای $x = -\arc \cos \frac{۱}{۴} \approx -۰,۴۲\pi$ ؛
ماگزیمم : $y = \frac{۱۵}{۸}\sqrt{۱۰} \approx ۷,۳$ بازای $x = \arc \cos \frac{۱}{۴} \approx ۰,۴۲\pi$. نقاط
عطف : $x_۱ = ۰,\ y_۱ = ۰$ ؛ $x_{۲,۳} = \pm \arc \cos \left(-\frac{۷}{۸}\right) \approx \pm ۰,۸۴\pi$ ؛
$y_{۲,۳} = \pm\frac{۲۱}{۳۲}\sqrt{۱۰} \approx \pm ۲,۵۴$ ؛ $x_{۴,۵} = \pm\pi$ ، $y_{۴,۵} = ۰,$ ۱۴۹۹ – دورهٔ
تابع : $T = ۲\pi$ ؛ حوزهٔ اصلی : $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. نمودار نسبت به مبدأ
مختصات متقارن است . صفرها : $x_۱ = ۰$ و $x_{۲,۳} = \pm\pi$. مینیمم‌ها :
$y = -\frac{۲}{۳}\sqrt{۲} \approx -۰,۹۴$ بازای $x = -\frac{۳\pi}{۴}$ و $x = -\frac{\pi}{۴}$ ، $y = \frac{۲}{۳}$
بازای $x = \frac{\pi}{۲}$ ؛ ماگزیمم‌ها : $y = -\frac{۲}{۳}$ بازای $x = -\frac{\pi}{۲}$ ، $y = \frac{۲}{۳}\sqrt{۲}$
بازای $x = \frac{\pi}{۴}$ و $x = \frac{۳\pi}{۴}$. نقاط عطف : $x_۱ = ۰,\ y_۱ = ۰$ ؛
$x_{۲,۳} = \pm \arc \sin \sqrt{\frac{۵}{۶}} \approx \pm ۰,۳۷\pi$ ، $y_{۲,۳} = \pm\frac{۴}{۲۷}\sqrt{۳۰} \approx \pm ۰,۸۱$
$x_{۴,۵} = \pm\left(\pi - \arc \sin \sqrt{\frac{۵}{۶}}\right) \approx \pm ۰,۶۳\pi$ ، $y_{۴,۵} = \pm\frac{۴}{۲۷}\sqrt{۳۰}$ ؛
$x_{۶,۷} = \pm\pi$ ، $y_{۶,۷} = ۰$. ۱۵۰۰ – دورهٔ تابع : $T = ۲\pi$ ؛ حوزهٔ اصلی :
$[-\pi, \pi]$. نمودار نسبت به محور Oy . صفرهای تابع :

$x_{۱,۲}=\pm\arccos\frac{۱-\sqrt{۳}}{۲}\approx\pm ۰,٦۲\pi$. مینیمم‌ها : $y=\frac{۱}{۲}$ بازای $x=۰$ ؛ $y=-۱\frac{۱}{۲}$ بازای $x=\pm\pi$ ؛ ماگزیمم‌ها : $y=\frac{۳}{٤}$ بازای $x=\pm\frac{\pi}{۳}$.

نقاط عطف : $x_{۱,۲}=\pm\arccos\frac{۱+\sqrt{۳۳}}{۸}\approx\pm ۰,۱۸\pi$ ، $y_{۱,۲}\approx ۰,٦۳$ ؛ $x_{۳,٤}=\pm\arccos\frac{۱-\sqrt{۳۳}}{۸}\approx\pm ۰,۷۰\pi$ ، $y_{۳,٤}\approx -۰,٤٤$

۱۵۰۱ – دورهٔ تابع : $T=\frac{\pi}{۲}$ ؛ حوزهٔ اصلی : $\left[-\frac{\pi}{٤},\ \frac{\pi}{٤}\right]$. نمودار نسبت به محور Oy متقارن است . تابع مثبت است . ماگزیمم : $y=۱$ بازای $x=۰$ ؛ مینیمم : $y=\frac{۱}{۲}$ بازای $x=\pm\frac{\pi}{٤}$. نقاط عطف : $x_{۱,۲}=\pm\frac{\pi}{۸}$ ، $y_{۱,۲}=\frac{۳}{٤}$.

۱۵۰۲ – دورهٔ تابع : $T=\pi$ ؛ حوزهٔ اصلی $\left[-\frac{\pi}{۲},\ \frac{\pi}{۲}\right]$. نمودار نسبت به محور Oy متقارن است . صفرهای تابع : $x_۱=۰$ و $x_{۲,۳}=\pm\frac{\pi}{۳}$.مینیمم‌ها : $y=۰$ بازای $x=۰$ و $y=-۱$ بازای $x=\pm\frac{\pi}{۲}$ ؛ ماگزیمم : $y=\frac{۹}{۱٦}$ بازای $x=\pm\arccos\frac{۱}{٤}\approx\pm ۰,۲۱\pi$. نقاط عطف :

$x_{۱,۲}=\pm\frac{۱}{۲}\arccos\frac{۱+\sqrt{۱۲۹}}{۱٦}\approx\pm ۰,۱۱\pi$ ، $y_{۱,۲}\approx ۰,۲۹$ ؛

$x_{۳,٤}=\pm\frac{۱}{۲}\arccos\frac{۱-\sqrt{۱۲۹}}{۱٦}\approx\pm ۰,۳٦\pi$ ، $y_{۳,٤}\approx -۰,۲٤$

۱۵۰۳ – دورهٔ تابع : $T=\pi$ ؛ حوزهٔ اصلی : $۰\leqslant x\leqslant\pi$. نقطهٔ انفصال : $x=\frac{۳\pi}{۳}$. صفرها : $x_۱=۰$ ، $x_۲=\pi$. اکسترمم ندارد ، صعودی است . نقطهٔ عطف : $x=\frac{\pi}{٤}$ ، $y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ مجانب : $x=\frac{۳\pi}{٤}$

۱۵۰٤ – دورهٔ تابع : $T=۲\pi$ ؛ حوزهٔ اصلی : $[-\pi,\pi]$. نمودار نسبت به محور Oy متقارن است . صفرهای تابع : $x_{۱,۲}=\pm\frac{\pi}{۲}$. مینیمم : $y=۱$ بازای $x=۰$ ؛ ماگزیمم : $y=-۱$ بازای

$x = \pm\pi$؛ نقاط عطف: $x_{١,٢} = \frac{\pi}{٢},\ y_{١,٢} = ٠$. مجانب ها: $x = \pm\frac{\pi}{٤}$ و
$x = \pm\frac{٣\pi}{٤}$ ١٥٠٤,١ – دورهٔ تابع: $T = ٢\pi$ ؛ حوزهٔ اصلی: $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.
تابع فرد است. مینیمم: $y = -\frac{\sqrt{٣}}{٣} \approx -٠,٥٨$ بازای $x = -\frac{٢\pi}{٣}$ ؛ ماگزیمم:
$y = \frac{\sqrt{٣}}{٣} \approx -٠,٥٨$ بازای $x = \frac{٢\pi}{٣}$. نقطهٔ عطف: $x_١ = ٠,\ y_١ = ٠$ ؛
$x_{٢,٣} = \mp\pi,\ y_{٢,٣} = ٠$ ١٥٠٥ – مراکز متقارن $(k\pi, ٢k\pi)$. صفرهای
تابع: $x_١ = ٠,\ x_{٢,٣} \approx \pm٠,٣٧\pi, \dots$. ماگزیمم ها: $y = \frac{\pi}{٢} - ١ + ٢k\pi$
بازای $x = \frac{\pi}{٤} + k\pi$ ؛ مینیمم ها: $y = -\left(\frac{\pi}{٢} - ١ + ٢k\pi\right)$ بازای $x =$
$= -\left(\frac{\pi}{٤} + k\pi\right)$. نقاط عطف: $x = k\pi,\quad y = ٢k\pi$. مجانب ها:
$x = \frac{٢k+١}{٢}\pi$ (k عددیست درست) ١٥٠٦ – نمودار نسبت به خط $x = ١$
متقارن است. تابع مثبت است. ماگزیمم $y = e$ بازای $x = ١$. نقاط عطف:
$x_{١,٢} = ١ \pm \frac{\sqrt{٢}}{٢}$؛ $y_{١,٢} = \sqrt{e} \approx ١,٦٥$. مجانب $y = ٠$ ١٥٠٧ – نمودار
نسبت به محور Oy متقارن است. تابع مثبت است. ماگزیمم $y = ١$ بازای $x = ٠$
نقاط عطف: $x_{١,٢} = \pm\sqrt{\frac{٣}{٢}} \approx \pm١,١٢$ ، $y_{١,٢} = \frac{٥}{٢}e^{-\frac{٣}{٢}} \approx ٠,٥٦$.
مجانب: $y = ٠$ ١٥٠٨ – تابع مثبت است. مینیمم $y = ١$ بازای $x = ٠$.
مقعر به سمت بالا است. مجانب $y = x$ بازای $x \to +\infty$ ١٥٠٩ – تابع
نامنفی است؛ صفر: $x = ٠$. مینیمم $y = ٠$ بازای $x = ٠$ ؛ ماگزیمم:
$y = \sqrt[٣]{\frac{٤}{٩}}\,e^{-\frac{٢}{٣}} \approx ٠,٣٩$ بازای $x = \frac{٢}{٣}$. نقاط عطف: $x_١ = \frac{٢-\sqrt{٦}}{٣} \approx$
$\approx -٠,١٥$ ، $y_١ \approx ٠,٣٤$ و $x_٢ = \frac{٢+\sqrt{٦}}{٣} \approx ١,٤٨$ ، $y_٢ \approx ٠,٣٠$.
مجانب: $y = ٠$ بازای $x \to +\infty$ ١٥٠٩,١ – تابع نامنفی است. مینیمم:
$y = ٠$ بازای $x = k\pi\quad (k = ٠, \pm١, \pm٢, \dots)$ ؛ ماگزیمم:
$y = \frac{١}{٢}e^{-\left(٢k+\frac{١}{٢}\right)\pi}$ بازای $x = \frac{\pi}{٤} + k\pi$. نقاط عطف: $x_k = (-١)^k\frac{\pi}{٦} + k\pi$ ؛

$y_k = \frac{۱}{۴} e^{-[۲k+\frac{۱}{۳}(-۱)^k]\pi}$ **۱۵۱۰** – تابع بازای $x>-۱$ مثبت و بازای $x<-۱$ منفی است. مینیمم: $y=۱$ بازای $x=۰$. بازای $x>-۱$ مقعر بسمت بالا و بازای $x<-۱$ مقعر بسمت پائین است **۱۵۱۱** – نمودار نسبت به محور Oy متقارن است. تابع نامنفی است؛ صفر: $x=۰$. مینیمم: $y=۰$ (نقطهٔ زاویه‌دار) بازای $x=۰$. مقعر بسمت پائین است **۱۵۱۲** – حوزهٔ وجود تابع: $x>۰$. صفر تابع: $x=۱$. ماگزیمم: $y=\frac{۲}{e}\approx ۰,۷۴$ بازای $x=e^{۲}\approx ۷,۳۹$. نقطهٔ عطف: $x=e^{\frac{۸}{۳}}\approx ۱۴,۳۳$، $y=\frac{۸}{۳}e^{-\frac{۴}{۳}}\approx ۰,۷۰$. مجانب‌ها: $x=۰$ بازای $x\to+۰$ و $y=۰$ بازای $x\to+\infty$ **۱۵۱۳** – نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. صفر: $x=۰$. نقطهٔ اکسترمم ندارد؛ تابع صعودی است. نقطهٔ عطف: $x=۰$، $y=۰$ **۱۵۱۴** – نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. صفر تابع: $x=۰$. تابع صعودی است. بازای $x>۰$ مقعر بسمت بالا و بازای $x<۰$ مقعر بسمت پائین است؛ $O(۰,۰)$ نقطهٔ عطف است. **۱۵۱۵** – حوزهٔ وجود تابع: $|x|<۱$. نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. تابع صعودی یکنوا است. بازای $x>۰$ مقعر به سمت بالا و بازای $x<۰$ مقعر بسمت پائین است؛ نقطهٔ عطف: $x=۰, y=۰$. مجانب‌ها: $x=\pm ۱$ **۱۵۱۶** – نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. صفر تابع: $x=۰$. نقطه اکسترمم ندارد، تابع صعودی است. نقطهٔ عطف: $x=۰, y=۰$. مجانب‌ها: $y=x-\frac{\pi}{۲}$ بازای $x\to-\infty$ و $y=x+\frac{\pi}{۲}$ بازای $x\to+\infty$ **۱۵۱۷** – صفر تابع: $x\approx -۰,۹۵$. مینیمم: $y=\frac{۱}{۲}+\frac{\pi}{۴}\approx ۱,۲۸۵$ بازای $x=۱$؛ ماگزیمم: $y-=\frac{۱}{۲}+\frac{۳\pi}{۴}\approx ۱,۸۵۶$ بازای $x=-۱$. بازای $x>۰$ مقعر بسمت بالا و بازای $x<۰$ مقعر بسمت پائین است؛ نقطهٔ عطف: $x=۰, y=\frac{\pi}{۲}$. مجانب‌ها: $y=\frac{x}{۲}+\pi$ بازای $x\to-\infty$ و $y=\frac{x}{۲}$ بازای $x\to+\infty$ **۱۵۱۸** – نمودار نسبت به محور Oy متقارن است. تابع نامنفی است؛ صفر: $x=۰$. مینیمم: $y=۰$ بازای $x=۰$. نمودار مقعر به سمت بالا است. مجانب‌ها: $y=\frac{\pi}{۲}x-۱$ بازای $x\to+\infty$؛ $y=-\frac{\pi}{۲}x-۱$

بازای $x \to -\infty$ **۱۵۱۹** – بازای نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. صفر تابع: $x = ۰$. مینیمم: $y = -\frac{\pi}{۲}$ (نقطهٔ زاویه‌دار) بازای $x = ۱$؛ ماگزیمم: $y = \frac{\pi}{۲}$ (نقطهٔ زاویه‌دار) بازای $x = ۱$. نقطهٔ عطف : $x = ۰,\ y = ۰$. مجانب: $y = ۰$ **۱۵۲۰** – نمودار نسبت به محور Oy متقارن است. تابع نامنفی است؛ صفر : $x = ۰$. مینیمم: $y = ۰$ بازای $x = ۰$ (نقطهٔ زاویه‌دار) . نمودار مقعر بسمت پائین است . مجانب: $y = \pi$ **۱۵۲۱** – نقطهٔ انفصال تابع : $x = ۰$. صفر تابع : $x = -۲$. مینیمم : $y = ۴\sqrt{e} \approx ۶,۵۹$ بازای $x = ۲$ ؛ ماگزیمم: $y = \frac{۱}{e} \approx ۰,۳۷$ بازای $x = -۱$. نقطهٔ عطف: $x = -\frac{۲}{۵}$ ، $y = \frac{۸}{۵} e^{-\frac{۵}{۲}} \approx ۰,۱۳$. مجانب‌ها: $x = ۰$ و $y = x + ۳$ **۱۵۲۲** – حوزهٔ وجود تابع: $|x| \geqslant ۱$. نمودار نسبت به محور Oy متقارن است . ماگزیمم مرزی : $y = ۲^{\sqrt{۲}} \approx ۲,۶۷$ بازای $x = \pm ۱$. نمودار مقعر بسمت بالا است . مجانب : $y = ۱$ **۱۵۲۳** – حوزهٔ وجود تابع: $x < ۱$ و $x > ۲$. نقاط برخورد با محورهای مختصات : $(۰, \ln ۲)$ و $\left(\frac{۱}{۳}, ۰\right)$. ماگزیمم : $y \approx ۱,۱۲$ بازای $x = \frac{۱-\sqrt{۱۰}}{۳} \approx -۰,۷۲$. مجانب‌ها: $x = ۱$، $x = ۲$ و $y = ۰$ **۱۵۲۴** = حوزهٔ وجود تابع : $|x| \leqslant a$. نقاط تقاطع با محورهای مختصات: $(-a, ۰)$ و $(۰,۶۷a, ۰)$ (تقریباً !) . تابع صعودی یکنوا است . مینیمم مرزی: $y = -\frac{\pi}{۲} a$ بازای $x = -a$ و ماگزیمم مرزی : $y = \frac{\pi}{۲} a$ بازای $x = a$. نمودار مقعر بسمت بالا است **۱۵۲۵** – حوزهٔ وجود تابع : $x \leqslant ۰$ و $x \geqslant \frac{۲}{۳}$. مینیمم مرزی: $y = ۰$ بازای $x = ۰$؛ ماگزیمم مرزی : $y = \pi$ بازای $x = \frac{۲}{۳}$. بازای $x \leqslant ۰$ مقعر بسمت پائین و بازای $x \geqslant \frac{۲}{۳}$ مقعر بسمت بالا است . مجانب: $y = \frac{\pi}{۳}$ **۱۵۲۶** – حوزهٔ وجود :

$x>۰$ تابع مثبت است. مینیمم: $y=\left(\frac{۱}{e}\right)^{\frac{۱}{e}}\approx ۰,۶۹۲$ بازای $x=\frac{۱}{e}\approx ۰,۳۶۸$؛
ماگزیمم مرزی: $y=۱$ بازای $x=+۰$. مقعر بسمت بالا است **۱۵۲۷** – حوزهٔ
وجود تابع: $x>۰$. مینیمم مرزی: $y=۰$ بازای $x=+۰$؛ ماگزیمم
$y=e^{\frac{۱}{e}}\approx ۱,۴۴$ بازای $x=e$. مجانب: $y=۱$ **۱۵۲۸** – ۱ حوزهٔ وجود:
$x>-۱$، $x\neq ۰$. تابع مثبت است. نقطهٔ انفصال قابل حذف: $x=۰$.
نقطهٔ اکسترمم ندارد، تابع نزولی است. مقعر بسمت بالا است. مجانب‌ها:
$x=-۱$ و $y=۱$ **۱۵۲۹** – تابع بازای $x>۰$ یکنوا است. مینیمم مرزی:
$y=۰$ بازای $x=+۰$. مجانب: $y=e\left(x-\frac{۱}{۲}\right)$ **۱۵۳۰** – تابع مثبت
است. نسبت به محور Oy متقارن است. نقاط انفصال: $x=\pm ۱$. مینیمم:
$y=e$ بازای $x=۰$؛ ماگزیمم: $y=\frac{۱}{۴\sqrt{e}}\approx ۰,۱۵$ بازای $x=\pm\sqrt{۳}$.
چهار نقطهٔ عطف. مجانب‌ها: $x=-۱$ بازای $x\to -۱+۰$؛ $x=۱$ بازای
$x\to ۱-۰$ و $y=۰$ بازای $x\to\infty$ **۱۵۳۱** – توابع x و y نامنفی هستند؛
$x_{\min}=۰$ بازای $t=-۱$؛ $y_{\min}=۰$ بازای $t=۱$. بازای $t>-۱$ مقعر
بسمت بالا و بازای $t<-۱$ مقعر بسمت پائین است **۱۵۳۲** – نقاط تقاطع با
محورهای مختصات: $(۰,۰)$ بازای $t=۰$؛ $(\pm ۲\sqrt{۳}-۳,۰)$ بازای
$t=\pm\sqrt{۳}$ و $(۰,-۲)$ بازای $t=۲$؛ $x_{\max}=۱$ و $y_{\max}=۲$ بازای
$t=۱$ (نقطهٔ برگشت)؛ $y_{\min}=-۲$ بازای $t=-۱$. بازای $t<۱$ مقعر
بسمت بالا و بازای $t>۱$ مقعر بسمت پائین است **۱۵۳۳** – نقطهٔ تقاطع
با محورهای مختصات: $(۰,۰)$ بازای $t=۰$؛ $x_{\max}=۰$ بازای $t=۰$، $x_{\min}=۴$
بازای $t=۲$؛ با صعود t، y نزول میکند. نقطهٔ عطف: $(-۰,۰۸;۰,۳)$
بازای $t\approx -۰,۳۲$ (تقریباً). مجانب‌ها: $y=۰$، $x=-\frac{۱}{۲}$ و $y=\frac{x}{۲}-\frac{۳}{۴}$
۱۵۳۴ – نقطهٔ تقاطع با محور Oy: $(۰,۱)$ بازای $t=۰$؛ نقطه تقاطع با محور
Ox: $(-۱,۰)$ بازای $t=\infty$. اکسترمم‌های مرزی: $x_{\min}=۰$ و $y_{\max}=۰$
بازای $t=۰$؛ $x_{\max}=-۱$ و $y_{\min}=۰$ بازای $t=\infty$. نقطهٔ عطف ندارد.
مجانب: $y=\frac{۱}{۲}$. بازای $|t|>۱$ مقعر بسمت بالا و بازای $|t|<۱$ مقعر
بسمت پائین است **۱۵۳۵** – توابع x و y مثبت هستند؛ $x_{\min}=۱$ و $y_{\min}=۱$
بازای $t=۰$ (نقطهٔ برگشت). بازای $t<۰$ مقعر بسمت بالا است؛ بازای
$t>۰$ مقعر بسمت پائین است. مجانب: $y=۲x$ بازای $t\to+\infty$

۱۵۳۶ – حوزهٔ اصلی : $[۰, \pi]$. نقاط تقاطع با محورهای مختصات : $\left(\frac{a}{۲}, ۰\right)$ بازای $t = \frac{\pi}{۶}$ ؛ $\left(۰, -\frac{a}{\sqrt{۲}}\right)$ بازای $t = \frac{\pi}{۴}$ ؛ $(-a, ۰)$ بازای $t = \frac{\pi}{۲}$ ؛ $\left(۰, \frac{a}{\sqrt{۲}}\right)$ بازای $t = \frac{۳\pi}{۴}$ ؛ $\left(\frac{a}{۲}, ۰\right)$ بازای $t = \frac{۵\pi}{۶}$. اکسترمم‌ها : $x_{\max} = a$ و $y_{\max} = a$ بازای $t = ۰$ ؛ $y_{\min} = -a$ بازای $t = \frac{\pi}{۳}$ ؛ $x_{\min} = -a$ بازای $t = \frac{\pi}{۲}$ ؛ $y_{\max} = a$ بازای $t = \frac{۲\pi}{۳}$ ؛ $x_{\max} = a$ و $y_{\min} = -a$ بازای $t = \pi$. بازای $۰ < t < \frac{\pi}{۲}$ مقعر بسمت بالا ، بازای $\frac{\pi}{۲} < t < \pi$ مقعر بسمت پائین است ۱۵۳۷ – توابع x و y نامنفی و دوره‌ای میباشند ؛ حوزهٔ اصلی $۰ \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{۲}$. اکسترمم‌ها : $x_{\min} = ۰$ و $y_{\max} = ۱$ بازای $t = \frac{\pi}{۲}$ و $x_{\max} = ۱$ و $y_{\min} = ۰$ بازای $t = ۰$. مقعر بسمت بالا است ۱۵۳۸ – حوزهٔ وجود : $t > ۰$. نسبت به خط $x + y = ۰$ متقارن است . اکسترمم‌ها : $x_{\min} = -\frac{۱}{e} \approx -۰,۳۷$ ، $y = -e \approx -۲,۷۲$ بازای $t = \frac{۱}{e}$ ؛ $y_{\max} = \frac{۱}{e}$ ، $x = e$ بازای $t = e$. نقاط عطف : $x_۱ = -\sqrt{۲}\, e^{-\sqrt{۲}} \approx -۰,۳۴$ ، $y_۱ = -\sqrt{۲}\, e^{\sqrt{۲}} \approx -۵,۸۲$ بازای $t = e^{-\sqrt{۲}} \approx ۰,۲۴$ و $x_۲ = \sqrt{۲}\, e^{\sqrt{۲}}$ ، $y_۲ = \sqrt{۲}\, e^{-\sqrt{۲}}$ بازای $t = e^{\sqrt{۲}} \approx ۴,۱۰$. بازای $t = \frac{۱}{e}$ علامت تقعر عوض میشود . مجانب‌ها : $x = ۰$ و $y = ۰$ ۱۵۳۹ – توابع x و y دوره‌ای با دورهٔ $T = ۲\pi$ ؛ حوزهٔ اصلی $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$. منحنی نسبت به محورهای مختصات متقارن است . منحنی دارای دو شاخه است . اکسترمم‌ها : $x_{\min} = a$ ، $y = ۰$ بازای $t = ۰$ ؛ $x_{\max} = -a$ ، $y = ۰$ بازای $t = \pm\pi$. بازای $-\pi < t < -\frac{\pi}{۲}$ و $۰ < t < \frac{\pi}{۲}$ مقعر بسمت بالا است ؛ بازای $-\frac{\pi}{۲} < t < ۰$ و $\frac{\pi}{۲} < t < \pi$ مقعر بسمت پائین است ۱۵۴۰ – نسبت به محور Oy متقارن است ؛ $y_{\min} = ۰$ ،

$x = ۰$ بازای $t = ۰$. مقعر به سمت پائین است

۱۵۴۱ – معادلات پاراستری : $x = \frac{۳at}{۱+t^۳}$ ، $y = \frac{۳at^۲}{۱+t^۳}$ $(-\infty < t < +\infty)$. نسبت به خط $y = x$ متقارن است . نقطهٔ تقاطع با محورهای مختصات : $O(۰, ۰)$ (نقطهٔ مضاعف) . $x_{\max} = a\sqrt[۳]{۴} \approx ۱,۵۹a$ بازای $y = a\sqrt[۳]{۲} \approx ۱,۲a$ ؛ $y_{\max} = a\sqrt[۳]{۴}$ بازای $x = a\sqrt[۳]{۲}$. مجانب : $x + y + a = ۰$

۱۵۴۲ – نسبت به مبدأ مختصات، محورهای مختصات و نیمسازهای زوایای مختصات متقارن است . $O(۰, ۰)$ نقطهٔ منفرد است . نقاط تقاطع با محورهای مختصات: $(\pm ۱, ۰)$ و $(۰, \pm ۱)$. $|x|_{\min} = ۱$ بازای $y = ۰$ ؛ $|x|_{\max} = \sqrt{\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}} \approx ۱,۱۰$ بازای $|y| = \sqrt{\frac{۱}{۲}} \approx ۰,۷۱$ ؛ $|y|_{\min} = ۱$ بازای $x = ۰$ ؛ $|y|_{\max} = \sqrt{\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}}$ بازای $|x| = \sqrt{\frac{۱}{۲}}$

۱۵۴۳ – معادلات پارامتری : $x = \frac{۱-t^۳}{t^۲}$, $y = \frac{۱-t^۳}{t}$ که در آن $(-\infty < t < +\infty)$ $t = \frac{y}{x}$. منحنی دارای دو شاخه و نسبت به خط $x + y = ۰$ متقارن است . اکسترمم‌ها : $x_{\min} = \frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۲} \approx ۱,۸۹$ ، $y = -\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۴} \approx -۲,۳۸$ بازای $t = -\sqrt[۳]{۲} \approx -۱,۲۶$ ؛ $y_{\max} =$ $= -\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۲}$ ، $x = \frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۴}$ بازای $t = -\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}} \approx -۰,۷۹$. نقاط عطف : $x_۱ \approx ۲,۱۸$ ، $y_۱ \approx -۴,۱۴$ بازای $t = -\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}(۷ + ۳\sqrt{۵})} \approx -۱,۹۰$ ؛ $x_۲ \approx ۴,۱۴$ ، $y_۲ \approx -۲,۱۸$ بازای $t = -\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}(۷ - ۳\sqrt{۵})} \approx -۰,۵۳$ ؛ بازای $t = -\sqrt[۳]{۲}$ علامت تقعر عوض میشود

۱۵۴۴ – منحنی متشکل از خط $y = x$ و شاخهٔ هذلولی‌گونهٔ $x = (۱+t)^{\frac{۱}{t}}$ ، $y = (۱+t)^{۱+\frac{۱}{t}}$ $(-۱ < t < +\infty)$ میباشد . (e, e) نقطهٔ مضاعف است . منحنی بازای $x \neq y$

مقعر بسمت بالا است . مجانب‌ها : $y = ۱$ و $x = ۱$ ۱۵۴۵ – حوزهٔ
وجود : $|x| \geqslant \ln(۱+\sqrt{۲}) \approx ۰{,}۸۸$. منحنی نسبت به محورهای
مختصات متقارن است . مینیمم مرزی $|y| = ۰$ بازای $x = \pm\ln(۱+\sqrt{۲})$.
بازای $y > ۰$ مقعر به سمت پائین و بازای $y < ۰$ مقعر بسمت بالا
است . مجانب‌ها : $y = x$ و $y = -x$ ۱۵۴۶ – حوزهٔ وجود
تابع : $r \geqslant ۰$ ، $|\varphi| \leqslant \alpha$ که در آن $\alpha = \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$. منحنی بسته
است . نسبت به محور قطبی متقارن است . ماگزیمم : $r = a + b$ بازای
$\varphi = ۰$ ؛ سینیمم مرزی : $r = ۰$ بازای $\varphi = \pm\alpha$ ۱۵۴۷ – حوزهٔ وجود :
$۰ \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{۳}$ ؛ $\frac{۲\pi}{۳} \leqslant \varphi \leqslant \pi$ ؛ $\frac{۴\pi}{۳} \leqslant \varphi \leqslant \frac{۵\pi}{۳}$. تابع r دوره‌ای با دورهٔ
$\frac{۲\pi}{۳}$ است . منحنی بسته و دارای سه برگ مساوی است . محورهای تقارن :
$\varphi = \frac{\pi}{۶}$ ، $\varphi = \frac{۵\pi}{۶}$ و $\varphi = \frac{۳\pi}{۲}$ مبدأ مختصات $O(۰ , ۰)$ نقطهٔ سه‌گانه است.
بازای $۰ \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{۳}$ داریم : ماگزیمم $r = a$ بازای $\varphi = \frac{\pi}{۶}$ و مینیمم $r = ۰$
بازای $\varphi = ۰$ و $\varphi = \frac{\pi}{۳}$ ۱۵۴۸ – حوزهٔ وجود تابع : $|\varphi| < \frac{\pi}{۶}$ و
$\frac{\pi}{۲} < |\varphi| < \frac{۵}{۶}\pi$ ؛ دوره : $\frac{۲\pi}{۳}$. مینیمم : $r = a$ بازای $\varphi = ۰$ و
$\varphi = \pm\frac{۲\pi}{۳}$. مجانب ها : $\varphi + \pm\frac{\pi}{۶}$ ، $\varphi = \pm\frac{\pi}{۲}$ و $\varphi = \pm\frac{۵\pi}{۶}$.
۱۵۴۹ – حلزونی ، مبدأ مختصات نقطهٔ مجانبی‌اش میباشد ؛ r با صعود φ
بطور یکنوا نزول میکند . مجانب : $\varphi = ۱$ ۱۵۵۰ – حوزهٔ وجود :
$r \geqslant \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \approx ۰{,}۶۲$. ماگزیمم مرزی : $\varphi = \pi$ بازای $r = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ ؛
مینیمم : $\varphi = \arccos\frac{۱}{۴} \approx \mathrm{arc}\,۷۵^\circ۳۰'$ بازای $r = ۲$. مجانب : $r\cos\varphi = ۱$
بازای $r \to +\infty$ ۱۵۵۱ – دستهٔ سهمیها براس $(۱, a - ۱)$ (مینیمم ها) . نقاط
تقاطع با محورهای مختصات : $(۰, a)$ و $(۱\mp\sqrt{۱-a}, ۰)$ (بازای $a \leqslant ۱$) .
مقعر بسمت بالا است ۱۵۵۲ – دستهٔ هذلولی‌ها بازای $a \neq ۰$ و خط $y = x$
بازای $a = ۰$. مینیمم‌ها : $y = ۲|a|$ بازای $x = |a|$ و ماگزیمم‌ها :
$y = -۲|a|$ بازای $x = -|a|$ $(a \neq ۰)$. مجانب‌ها : $y = x$ و $x = ۰$

۱۵۵۳ – دستهٔ بیضی‌ها بازای $۰<a<+\infty$ ؛ دسته هذلولیها بازای
$-\infty<a<۰$ ؛ خط $y=x$ بازای $a=۰$. تمام منحنی‌های دسته‌ها از
نقاط $(-۱,-۱)$ و $(۱,۱)$ میگذارند . بازای $y\geqslant x$ داریم : ۱) ماگزیمم
$y=\sqrt{۱+a}$ بازای $x=\frac{۱}{\sqrt{۱+a}}$ اگر $a>۰$؛ ماگزیمم $y=-\sqrt{۱+a}$
بازای $x=-\frac{۱}{\sqrt{۱+a}}$ اگر $-۱<a<۰$ ؛ مینیمم‌های مرزی $y=\mp ۱$
بازای $x=\mp ۱$ $(a\neq ۰)$ ؛ ۲) تقعر بسمت پائین . بازای $y\leqslant x$ داریم :
۱) مینیمم $y=-\sqrt{۱+a}$ بازای $x=-\frac{۱}{\sqrt{۱+a}}$ اگر $a>۰$ ؛ مینیمم
$y=\sqrt{۱+a}$ بازای $x=\frac{۱}{\sqrt{۱+a}}$ اگر $-۱<a<۰$ ؛ ماگزیمم‌های مرزی
$y=\mp ۱$ بازای $x=\mp ۱$ ؛ ۲) تقعر بسمت بالا . مجانب‌ها :
$y=(۱+\sqrt{-a})x$ و $y=(۱-\sqrt{-a})x$ بازای $a<۰$ ۱۵۵۴ – دسته
منحنی‌های نمایی اگر $a\neq ۰$؛ خط $y=۱+\frac{x}{۲}$ اگر $a=۰$. نقطهٔ مشترک
دسته : $(۰,۱)$. مینیمم‌ها : $y=\frac{۱}{۲a}(۱+\ln ۲a)$ بازای $x=\frac{۱}{a}\ln ۲a$ اگر
$a>۰$ ؛ y صعودی یکنواست اگر $a\leqslant ۰$. مجانب : $y=\frac{x}{۲}$ ۱۵۵۵ – دسته
منحنی‌های مار بر نقطهٔ $(۰,۰)$ که مماس مشترک آنها در این نقطه خط
$y=x$ میباشد . ماگزیمم $y=ae^{-۱}\approx ۰,۳۷a$ بازای $x=a$ اگر $a>۰$ ؛
مینیمم $y=ae^{-۱}$ بازای $x=a$ اگر $a<۰$. نقطهٔ عطف : $x=۲a$ ،
$y=۲ae^{-۲}\approx ۰,۲۷a$. مجانب $y=۰$ ۱۵۵۸ – $\frac{a^{m+n}m^{m}n^{n}}{(m+n)^{m+n}}$
۱۵۵۹ – $(m+n)\left(\frac{a^{mn}}{m^{m}n^{n}}\right)^{\frac{۱}{m+n}}$ ۱۵۶۰ – مبنای دستگاه لگاریتمی نبایستی از
$e^{\frac{۱}{e}}\approx ۱,۴۴۵$ تجاوز کند . ۱۵۶۱ – مربع بضلع $\sqrt{S}$ ۱۵۶۲ – زوایای
حادهٔ مثلث ۳۰° و ۶۰° میباشند ۱۵۶۳ – ارتفاع ظرف $H=۲\sqrt[۳]{\frac{V}{۲\pi}}$
مساوی قطر قاعدهٔ آن میباشد ؛ سطح کل $P=\sqrt[۳]{۵۴\pi V^{۲}}$ ۱۵۶۴ –

$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha+\sqrt{\cos^۲\alpha+۸}}{۴}$ که در آن ۲α قوس قطعهٔ دایره و ۲φ قوس
متکی بر ضلع مستطیل است ۱۵۶۵ - اضلاع مستطیل عبارتند از $a\sqrt{۲}$ و
$b\sqrt{۲}$ ۱۵۶۶ - اگر $h>b$ در آنصورت محیط P مستطیل محاطی به پایهٔ
x و ارتفاع y دارای ماگزیمم مرزی بازای $y=h$ است ؛ اگر $h<b$ در
آنصورت P دارای مینیمم مرزی بازای $y=۰$ است . اگر $h=b$ در آنصورت
محیط P ثابت است ۱۵۶۷ - $a=\frac{d}{\sqrt{۳}}$ ، $h=d\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ۱۵۶۸ - ابعاد
متوازی السطوح عبارتند از $\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ ، $\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ و $\frac{R}{\sqrt{۳}}$ ۱۵۶۹ - $\frac{۴\pi}{۳\sqrt{۳}}R^۳$
۱۵۷۰ - $\pi R^۲(۱+\sqrt{۵}) \approx ۸۱\%$ سطح کره ۱۵۷۱ - حجم مخروط مساوی
دو برابر حجم کره است ۱۵۷۲ - $\frac{۲\pi}{۹\sqrt{۳}}l^۳$ ۱۵۷۳ - اگر $\operatorname{tg}\alpha<\frac{۱}{۲}$
در آنصورت ماگزیمم سطح کل استوانه بازای $r=\frac{R}{۲(۱-\operatorname{tg}\alpha)}$ حاصل میشود
که در آن r شعاع قاعدهٔ استوانه است . اگر $\operatorname{tg}\alpha\geqslant\frac{۱}{۲}$ در آنصورت بازای
$r=R$ ماگزیمم مرزی داریم ۱۵۷۴ - $p\left(\sqrt[۳]{۲}-۱\right)\sqrt{\frac{۲+\sqrt[۳]{۲}}{۲}}$
۱۵۷۵ - ۱ ؛ ۳ ۱۵۷۶ - اگر $b\leqslant\frac{a}{\sqrt{۲}}$ در آنصورت ماگزیمم طول وتر
$MB=\frac{a^۲}{c}$ که در آن $c=\sqrt{a^۲-b^۲}$ و نقطهٔ M دارای مختصات
x و y میباشد بازای $x=\pm\frac{a^۲}{c^۲}\sqrt{a^۲-۲b^۲}$ ، $y=\frac{b^۳}{c^۲}$ حاصل میشود ؛
اگر $b>\frac{a}{\sqrt{۲}}$ ماگزیمم مرزی طول وتر $MB=۲b$ بازای $x=۰$ ، $y=b$
حاصل میشود ۱۵۷۷ - $x=\frac{a}{\sqrt{۲}}$ ، $y=\frac{b}{\sqrt{۲}}$ ؛ ab ۱۵۷۸ - مینیمم
سطح بازای $r=h=\sqrt[۳]{\frac{۳۷}{۵\pi}}$ حاصل میشود که در آن r شعاع قاعده استوانه

و h ارتفاع آن است ۱۵۷۹ - $\varphi = ۶۰^\circ$ ۱۵۸۰ - ذوزنقهٔ محیط بر دایره .

ساقها : $AB = CD = a\sec^{۲}\frac{\alpha}{۲}$ ۱۵۸۱ - $\alpha = ۲\pi\sqrt{\frac{۲}{۳}} \approx \operatorname{arc} ۲۹۴^\circ$

که در آن α زاویهٔ مرکزی قطاع باقی‌مانده میباشد ۱۵۸۲ - $\varphi = \operatorname{arc\,cos}\frac{q}{p}$

اگر $\operatorname{arc\,cos}\frac{q}{p} \geqslant \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$ ؛ $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$ اگر $\operatorname{arc\,cos}\frac{q}{p} < \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$

۱۵۸۳ - $\frac{|av \mp bu|\sin\theta}{\sqrt{u^{۲}+v^{۲}-۲uv\cos\theta}}$ ۱۵۸۴ - $AM = a\left(۱+\sqrt[۳]{\frac{S_{۲}}{S_{۱}}}\right)^{-۱}$

۱۵۸۵ - فاصلهٔ نقطهٔ نورانی از مرکز کرهٔ بزرگتر $x = \frac{a}{۱+\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{۳}{۲}}}$

گر $a \geqslant r+R\sqrt{\frac{R}{r}}$ و $x = a-r$ اگر $r+R<a<r+R\sqrt{\frac{R}{r}}$

که در آن a فاصلهٔ مراکز دو کره است ۱۵۸۶ - $\frac{a}{\sqrt{۲}}$

۱۵۸۷ - $\left(a^{\frac{۲}{۳}}+b^{\frac{۲}{۳}}\right)^{\frac{۳}{۲}}$ ۱۵۸۸ - $v = \sqrt[۳]{\frac{a}{۲k}}$ که در آن k ضریب

تناسب است . ۱۵۸۹ - $\operatorname{arc\,tg} k$ ۱۵۹۰ - بازای $l \leqslant ۴a$ زاویهٔ شیب میله

از دستور $\cos\alpha = \frac{l+\sqrt{l^{۲}+۱۲۸a^{۲}}}{۱۶a}$ تعیین میشود ؛ بازای $l > ۴a$ تعادل

برقرار نمیشود ۱۵۹۱ - $k = -۳$ ؛ $b = ۳$ ؛ $y = ۳(۱-x)$ ۱۵۹۲ - $a = \frac{۱}{۲}e^{x_{۰}}$ ؛

$b = e^{x_{۰}}(۱-x_{۰})$ ؛ $c = e^{x_{۰}}\left(۱-x_{۰}+\frac{x_{۰}^{۲}}{۲}\right)$ ۱۵۹۳ - الف) یک ب) دو

پ) دو ۱۵۹۵ - الف) $\sqrt{۲}$ ، ب) $(۲, ۲)$ ۵۰۰۰۰۰۰ ، $(۱۵۰, ۵۰۰۰۰۰۰)$

(تقریباً !) ۱۵۹۶ - $p\left(۱+\frac{۲x}{p}\right)^{\frac{۳}{۲}}$ ۱۵۹۷ - $\frac{(a^{۲}-\varepsilon^{۲}x^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{ab}$ که در آن

$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}}{a}$ خروج از مرکز بیضی است ۱۵۹۸ - $\frac{(\varepsilon^{۲}x^{۲}-a^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{ab}$

که در آن $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{a}$ خروج از مرکز هذلولی است ۱۵۹۹ − $۳|a\,xy|^{\frac{۶}{۳}}$

۱۶۰۰ − $\frac{a^۲}{b}(۱-\varepsilon^۲\cos^۲t)^{\frac{۳}{۲}}$ که در آن ε خروج از مرکز بیضی است

۱۶۰۱ − $۲\sqrt{۲ay}$ ۱۶۰۲ − at ۱۶۰۴ − $\frac{(r^۲+r'^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{|r^۲+۲r'^۲-rr''|}$

۱۶۰۵ − $\frac{(a^۲+r^۲)^{\frac{۳}{۲}}}{۲a^۲+r^۲}$ ۱۶۰۶ − $r\sqrt{۱+m^۲}$ ۱۶۰۷ − $\frac{۲}{۳}\sqrt{۲ar}$

۱۶۰۸ − $\frac{a^۲}{۳r}$ ۱۶۰۹ − $\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}, -\frac{\ln ۲}{۲}\right)$ ۱۶۱۰ − $x_۰\approx ۶۸۰\,m$

۱۶۱۱ − سهمی نیم‌مکعب $۲۷p\eta^۲=۸(\xi-p)^۳$ ۱۶۱۲ − آسترویید

$(a\xi)^{\frac{۲}{۳}}+(b\eta)^{\frac{۲}{۳}}=c^{\frac{۴}{۳}}$ که در آن $c^۲=a^۲-b^۲$ ۱۶۱۳ − آمترویید

$(\xi+\eta)^{\frac{۲}{۳}}+(\xi-\eta)^{\frac{۲}{۳}}=۲a^{\frac{۲}{۳}}$ ۱۶۱۴ − خط زنجیری $\eta=a\,\mathrm{ch}\,\frac{\xi}{a}$

۱۶۱۵ − حلزونی لگاریتمی $\rho=ma\,e^{m\left(\varphi-\frac{\pi}{۲}\right)}$ ۱۶۱۶ − $\xi=\pi a+a(\tau-\sin\tau)$ ؛
$\eta=-۲a+a(۱-\cos\tau)$ که در آن $\tau=(t-\pi)$ ۱۶۱۷ − $x_۱=-۲,۶۰۲$ ؛
$x_۲=۰,۳۴۰$ ؛ $x_۳=۲,۲۶۲$ ۱۶۱۸ − $x_۱=-۰,۷۲۴$ ؛ $x_۲=۱,۲۲۱$
۱۶۱۹ − $x=۲,۰۸۷=\mathrm{arc}\,۱۱۹^\circ۳۵'$ ۱۶۲۰ − $\pm۰,۸۲۴$ ۱۶۲۱ − $x_۱=$
$=۰,۴۷۲$ ؛ $x_۲=۹,۹۹۹$ ۱۶۲۲ − $x_۱=۲,۵۰۶۲$ ۱۶۲۳ − $x_۱=۴,۷۳۰$ ؛
$x_۲=۷,۸۵۳$ ۱۶۲۴ − $x=-۰,۵۶۷۱۵$ ۱۶۲۵ − $x=\pm۱,۱۹۹۶۷۸$
۱۶۲۶ − $x_۱=۴,۴۹۳$ ؛ $x_۲=۷,۷۲۵$ ؛ $x_۳=۱۰,۹۰۴$ ۱۶۲۷ − $x_۱=۲,۰۸۱$ ؛
$x_۲=۵,۹۴۰$

فصل ۳

در جوابهای این فصل محض اختصار ثابت اختیاری C اضافه نشده است

۱۶۲۸ − $۲۷x-۹x^۳+\frac{۹}{۵}x^۵-\frac{۱}{۷}x^۷$ ۱۶۲۹ − $\frac{۶۲۵}{۳}x^۳-۱۲۵x^۴+$

$+۳۰x^۵-\frac{۱۰}{۳}x^۶+\frac{۱}{۷}x^۷$ ۱۶۳۰ − $x-۳x^۲+\frac{۱۱}{۳}x^۳-\frac{۳}{۲}x^۴$

۱۶۳۱ − $x-\frac{۱}{x}-۲\ln|x|$ ۱۶۳۲ − $a\ln|x|-\frac{a^۲}{x}-\frac{a^۳}{۲x^۲}$

١٦٣٣ - $\frac{٢}{٣}x\sqrt{x}+٢\sqrt{x}$ ١٦٣٤ - $+\frac{٤}{٥}x\sqrt[٤]{x}-\frac{٢٤}{١٧}x\sqrt[١٢]{x^٥}$

$+\frac{٤}{٣}\sqrt[٤]{x^٣}$ ١٦٣٥ - $-\frac{٣}{\sqrt[٣]{x}}\left(١+\frac{٣}{٢}x-\frac{٣}{٥}x^٢+\frac{١}{٨}x^٣\right)$

١٦٣٦ - $\frac{٤(x^٢+٧)}{٧\sqrt[٤]{x}}$ ١٦٣٧ - $٢x-\frac{١٢}{٥}\sqrt[٦]{٧٢x^٥}+\frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{٩x^٢}$

١٦٣٨ - $\ln|x|-\frac{١}{٤x^٤}$ ١٦٣٩ - $x-\operatorname{arc\,tg}x$ ١٦٤٠ - $-x+\frac{١}{٢}\ln\left|\frac{١+x}{١-x}\right|$

١٦٤١ - $x+٢\ln\left|\frac{x-١}{x+١}\right|$ ١٦٤٢ - $\arcsin x+\ln\left(x+\sqrt{١+x^٢}\right)$

١٦٤٣ - $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^٢-١}}{x+\sqrt{x^٢+١}}\right|$ ١٦٤٤ - $\frac{٤^x}{\ln٤}+٢\times\frac{٦^x}{\ln٦}+\frac{٩^x}{\ln٩}$

١٦٤٥ - $-\frac{٢}{\ln٥}\left(\frac{١}{٥}\right)^x+\frac{١}{٥\ln٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^x$ ١٦٤٦ - $\frac{١}{٢}e^{٢x}-e^x+x$

١٦٤٧ - $x-\cos x+\sin x$ ١٦٤٨ - $(\cos x+\sin x)\times\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)$

١٦٤٩ - $-x-\operatorname{ctg}x$ ١٦٥٠ - $-x+\operatorname{tg}x$ ١٦٥١ - $a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x$

١٦٥٢ - $x-\operatorname{th}x$ ١٦٥٣ - $x-\operatorname{ctg}x$ ١٦٥٥ - $\ln|x+a|$

١٦٥٦ - $\frac{١}{٢٢}(٢x-٣)^{١١}$ ١٦٥٧ - $-\frac{١}{٤}(١-٣x)^{\frac{٤}{٣}}$

١٦٥٨ - $-\frac{٢}{٥}\sqrt{٢-٥x}$ ١٦٥٩ - $-\frac{٢}{١٥(٥x-٢)^{\frac{٣}{٢}}}$ ١٦٦٠ - $-\frac{٥}{٢}\sqrt[٥]{(١-x)^٢}$

١٦٦١ - $\frac{١}{\sqrt{٦}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{\frac{٣}{٢}}\right)$ ١٦٦٢ - $\frac{١}{٢\sqrt{٦}}\ln\left|\frac{\sqrt{٢}+x\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}-x\sqrt{٣}}\right|$

١٦٦٣ - $\frac{١}{\sqrt{٣}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{٣}{٢}}\right)$ ١٦٦٤ - $\frac{١}{\sqrt{٣}}\ln\left|x\sqrt{٣}+\right.$

$\left.+\sqrt{٣x^٢-٢}\right|$ ١٦٦٥ - $-\left(e^{-x}+\frac{١}{٢}e^{-٢x}\right)$ ١٦٦٦ - $-x\sin٥\alpha-\frac{١}{٥}\cos٥x$

١٦٦٧ - $-\frac{١}{٢}\operatorname{ctg}\left(٢x+\frac{\pi}{٤}\right)$ ١٦٦٨ - $\operatorname{tg}\frac{x}{٢}$ ١٦٦٩ - $-\operatorname{ctg}\frac{x}{٢}$

١٦٧٠ - $-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{٤}-\frac{x}{٢}\right)$ ١٦٧١ - $\frac{١}{٢}[\operatorname{ch}(٢x+١)+\operatorname{sh}(٢x-١)]$

١٦٧٢ − $٢\,\mathrm{th}\,\frac{x}{٢}$ ١٦٧٣ − $-٢\,\mathrm{cth}\frac{x}{٢}$ ١٦٧٤ − $-\sqrt{١-x^{٢}}$

١٦٧٥ − $\frac{١}{٤}(١+x^{٣})^{\frac{٤}{٣}}$ ١٦٧٦ − $-\frac{١}{٤}\ln|٣-٢x^{٢}|$ ١٦٧٧ − $-\frac{١}{٢(١+x^{٢})}$

١٦٧٨ − $\frac{١}{٤}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x^{٢}}{٢}$ ١٦٧٩ − $\frac{١}{٨\sqrt{٢}}\ln\left|\frac{x^{٤}-\sqrt{٢}}{x^{٤}+\sqrt{٢}}\right|$

١٦٨٠ − $٢\,\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{x}$ ١٦٨١ − $\cos\frac{١}{x}$ ١٦٨٢ − $-\ln\left|\frac{١+\sqrt{x^{٢}+١}}{x}\right|$

١٦٨٣ − $-\arcsin\frac{١}{|x|}$ ١٦٨٤ − $\frac{x}{\sqrt{x^{٢}+١}}$ ١٦٨٥ − $-\frac{١}{\sqrt{x^{٢}-١}}$

١٦٨٦ − $\frac{١}{٨}\sqrt[٣]{٨x^{٣}+٢٧}$ ١٦٨٧ − $٢\,\mathrm{sgn}\,x\ln\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|١+x|}\right)$

$(x(١+x)>٠)$ ١٦٨٨ − $٢\arcsin\sqrt{x}$ ١٦٨٩ − $-\frac{١}{٢}e^{-x^{٢}}$

١٦٩٠ − $\ln(٢+e^{x})$ ١٦٩١ − $\mathrm{arc\,tg}\,e^{x}$ ١٦٩٢ − $-\ln\left(e^{-x}+\sqrt{١+e^{-٢x}}\right)$

١٦٩٣ − $\frac{١}{٣}\ln^{٣}x$ ١٦٩٤ − $\ln|\ln(\ln x)|$ ١٦٩٥ − $\frac{١}{٦}\sin^{٦}x$

١٦٩٦ − $\frac{٢}{\sqrt{\cos x}}$ ١٧٩٧ − $-\ln|\cos x|$ ١٦٩٨ − $\ln|\sin x|$

١٦٩٩ − $\frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{١-\sin ٢x}$ ١٧٠٠ − $(a^{٢}\neq b^{٢})$ $\frac{\sqrt{a^{٢}\sin^{٢}x+b^{٢}\cos^{٢}x}}{a^{٢}-b^{٢}}$

١٧٠٠,١ − $-\frac{١}{\sqrt{٢}}\ln\left|\sqrt{٢}\cos x+\sqrt{\cos ٢x}\right|$ ١٧٠٠,٢ −

$\frac{١}{\sqrt{٢}}\arcsin(\sqrt{٢}\sin x)$ ١٧٠٠,٣ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}\ln(\sqrt{٢}\,\mathrm{ch}\,x+\sqrt{\mathrm{ch}\,٢x})$

١٧٠١ − $-\frac{٤}{٣}\sqrt[٤]{\mathrm{ctg}^{٣}x}$ ١٧٠٢ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{٢}}\right)$

١٧٠٣ − $\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{٢}\right|$ ١٧٠٤ − $\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{٢}+\frac{\pi}{٤}\right)\right|$ ١٧٠٥ − $\ln\left|\mathrm{th}\frac{x}{٢}\right|$

١٧٠٦ − $٢\,\mathrm{arc\,tg}\,e^{x}$ ١٧٠٧ − $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}\ln\left(\frac{\mathrm{ch}\,٢x}{\sqrt{٢}}+\sqrt{\mathrm{sh}^{٤}x+\mathrm{ch}^{٤}x}\right)$

١٨٠٨ − $٣\sqrt[٣]{\mathrm{th}\,x}$ ١٧٠٩ − $\frac{١}{٢}(\mathrm{arc\,tg}\,x)^{٢}$ ١٧١٠ − $-\frac{١}{\arcsin x}$

۱۷۱۱ - $\frac{۲}{۳}\ln^{\frac{۳}{۲}}\left(x+\sqrt{۱+x^{۲}}\right)$ ۱۷۱۲ - $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^{۲}-۱}{x\sqrt{۲}}$

۱۷۱۳ - $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\ln\frac{x^{۲}-x\sqrt{۲}+۱}{x^{۲}+x\sqrt{۲}+۱}$ ۱۷۱۴ - $-\frac{۱}{۱۵\left(x^{۵}+۱\right)^{۳}}$

۱۷۱۵ - $\frac{۲}{n+۲}\ln\left(x^{\frac{n+۲}{۲}}+\sqrt{۱+x^{n+۲}}\right)$ بازای $n\neq-۲$ ؛ $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\ln|x|$

بازای $n=-۲$ ۱۷۱۶ - $\frac{۱}{٤}\ln^{۲}\frac{۱+x}{۱-x}$ ۱۷۱۷ - $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{۲}{۳}}\sin x\right)$

۱۷۱۸ - $\frac{۱}{۲}\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}^{۲}x\right)$ ۱۷۱۹ - $\frac{۱}{۲\left(\ln ۳-\ln ۲\right)}\times\ln\left|\frac{۳^{x}-۲^{x}}{۳^{x}+۲^{x}}\right|$

۱۷۲۰ - $۲\sqrt{۱+\sqrt{۱+x^{۲}}}$ ۱۷۲۱ - $\frac{٤}{۳}x^{۳}-\frac{۱۲}{۵}x^{۵}+\frac{۹}{۷}x^{۷}$

۱۷۲۷,۱ - $-\frac{(۱-x)^{۱۱}}{۱۱}+\frac{(۱-x)^{۱۲}}{۱۲}$ ۱۷۲۲ - $-x-۲\ln|۱-x|$

۱۷۲۳ - $\frac{۱}{۲}(۱-x)^{۲}+\ln|۱+x|$ ۱۷۲٤ - $۹x-\frac{۳}{۲}x^{۲}+\frac{۱}{۳}x^{۳}-۲۷\ln|۳+x|$

۱۷۲۵ - $x+\ln\left(۱+x^{۲}\right)$ ۱۷۲۶ - $-x+۲\ln|۲-x^{۲}|+\frac{۳}{\sqrt{۲}}\ln\left|\frac{\sqrt{۲}+x}{\sqrt{۲}-x}\right|$

۱۷۲۷ - $\frac{۱}{۹۷(۱-x)^{۹۷}}-\frac{۱}{٤۹(۱-x)^{۹۸}}+\frac{۱}{۹۹(۱-x)^{۹۹}}$ ۱۷۲۸ -

$\frac{x^{٤}}{۵}-\frac{x^{٤}}{٤}+\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۲}}{۲}+x-\ln|x+۱|$ ۱۷۲۹ - $\frac{۱}{۳}\Big[(x+۱)^{\frac{۳}{۲}}-$

$-(x-۱)^{\frac{۳}{۲}}\Big]$ ۱۷۳۰ - $-\frac{۸+۳۰x}{۳۷۵}(۲-۵x)^{\frac{۳}{۲}}$ ۱۷۳۱ - $-\frac{۱+۲x}{۱۰}\times$

$\times(۱-۳x)$ ۱۷۳۲ - $\frac{۳}{۸}\left(۱+x^{۲}\right)^{\frac{٤}{۳}}-\frac{۳}{۱٤}\left(۱+x^{۲}\right)^{\frac{۷}{۳}}$ ۱۷۳۳ - $\frac{۱}{٤}\ln\left|\frac{x-۱}{x+۳}\right|$

۱۷۳٤ - $\frac{۱}{۳}\ln\left|\frac{x-۱}{x+۲}\right|$ ۱۷۳۵ - $\operatorname{arc\,tg}x-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{۲}}$

۱۷۳۶ - $\frac{۱}{۵\sqrt{۳}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{۳}}-\frac{۱}{۱۰\sqrt{۲}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{۲}}{x+\sqrt{۲}}\right|$

۱۷۳۷ - $\ln\frac{|x+۳|^{۳}}{(x+۲)^{۲}}$ ۱۷۳۸ - $\frac{۱}{۲}\ln\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}+۲}$

١٧٣٩ - $-\frac{٢x+a+b}{(a-b)^٢(x+a)(x+b)}+\frac{٢}{(a-b)^٣}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|$

١٧٤٠ - $\frac{١}{a^٢-b^٢}\left(\frac{١}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b}-\frac{١}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right)\quad(|a|\neq|b|)$

١٧٤١ - $\frac{x}{٢}-\frac{١}{٤}\sin ٢x$ ١٧٤٢ - $\frac{x}{٢}+\frac{١}{٤}\sin ٢x$ ١٧٤٣ - $\frac{x}{٢}\cos\alpha-$

$-\frac{١}{٤}\sin(٢x+\alpha)$ ١٧٤٤ - $\frac{١}{٤}\sin ٢x-\frac{١}{١٦}\sin ٨x$ ١٧٤٥ - $٣\sin\frac{x}{٦}+$

$+\frac{٣}{٥}\sin\frac{٥x}{٦}$ ١٧٤٦ - $-\frac{١}{١٠}\cos\left(٥x+\frac{\pi}{١٢}\right)+\frac{١}{٢}\cos\left(x+\frac{٥\pi}{١٢}\right)$

١٧٤٧ - $-\cos x+\frac{١}{٣}\cos^٣x$ ١٧٤٨ - $\sin x-\frac{١}{٣}\sin^٣x$ ١٧٤٩ -

$\frac{٣}{٨}x-\frac{١}{٤}\sin ٢x+\frac{١}{٣٢}\sin ٤x$ ١٨٥٠ - $\frac{٣}{٨}x+\frac{١}{٤}\sin ٢x+\frac{١}{٣٢}\sin ٤x$

١٧٥١ - $-x-\operatorname{ctg}x$ ١٧٥٢ $\frac{١}{٢}\operatorname{tg}^٢x+\ln|\cos x|$ ١٧٥٣ - $-\frac{٣}{١٦}\cos ٢x-$

$-\frac{٣}{٦٤}\cos ٤x+\frac{١}{٤٨}\cos ٦x+\frac{٣}{١٢٨}\cos ٨x+\frac{١}{١٩٢}\cos ١٢x$

١٧٥٤ - $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$ ١٧٥٥ - $-\frac{١}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{٢}+\frac{\pi}{٤}\right)\right|$

١٧٥٦ - $\frac{١}{٢\cos^٢x}+\ln|\operatorname{tg}x|$ ١٧٥٧ - $\ln|\sin x|-\frac{١}{٢}\sin^٢x$

١٧٥٨ - $\operatorname{tg}x+\frac{١}{٣}\operatorname{tg}^٣x$ ١٧٥٩ - $x-\ln(١+e^x)$ ١٧٦٠ - $x+٢\operatorname{arc\,tg}e^x$

١٧٦١ - $-\frac{x}{٢}+\frac{١}{٤}\operatorname{sh}٢x$ ١٧٦٢ - $\frac{x}{٢}+\frac{١}{٤}\operatorname{sh}٢x$ ١٧٦٣ - $\frac{٢}{٣}\operatorname{sh}^٣x$

١٧٦٤ - $\frac{١}{٤}\operatorname{sh}٢x+\frac{١}{٨}\operatorname{sh}٤x$ ١٧٦٥ - $-(\operatorname{th}x+\operatorname{cth}x)$ ١٧٦٦ -

$-\frac{٣}{١٤٠}(٩+١٢x+١٤x^٢)(١-x)^{\frac{٤}{٣}}$ ١٧٦٧ - $-\frac{١+٥٥x^٢}{٦٦٠٠}(١-٥x^٢)^{١١}$

١٦٧٨ - $-\frac{٢}{١٥}(٣٢+٨x+٣x^٢)\sqrt{٢-x}$ ١٧٦٩ - $-\frac{١}{١٥}(٨+٤x^٢+٣x^٤)\times$

$\times\sqrt{١-x^٢}$ ١٧٧٠ - $-\frac{٦+٢٥x^٣}{١٠٠٠}(٢-٥x^٣)^{\frac{٥}{٣}}$

۱۷۷۱ - $\left(\frac{۲}{۳}-\frac{۴}{۷}\sin^۲x+\frac{۲}{۱۱}\sin^۴x\right)\sqrt{\sin^۳x}$ ۱۷۷۲ - $-\frac{۱}{۲}\cos^۲x+$

$+\frac{۱}{۲}\ln(۱+\cos^۲x)$ ۱۷۷۳ - $\frac{۱}{۳}\operatorname{tg}^۳x+\frac{۱}{۵}\operatorname{tg}^۵x$ ۱۷۷۴ -

$\frac{۲}{۳}(-۲+\ln x)\sqrt{۱+\ln x}$ ۱۷۷۵ - $-x-۲e^{-\frac{x}{۲}}+۲\ln\left(۱+e^{\frac{x}{۲}}\right)$

۱۷۷۶ - $x-۲\ln(۱+\sqrt{۱+e^x})$ ۱۷۷۷ - $(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x})^۲$

۱۷۷۸ - $\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$ ۱۷۷۹ - $\frac{x}{۲}\sqrt{x^۲-۲}+\ln\left|x+\sqrt{x^۲-۲}\right|$

۱۷۸۰ - $\frac{x}{۲}\sqrt{۱-x^۲}+\frac{۱}{۲}\arcsin\frac{x}{a}$ ۱۷۸۱ - $\frac{x}{a^۲\sqrt{a^۲+x^۲}}$

۱۷۸۲ - $-\sqrt{a^۲-x^۲}+a\arcsin\frac{x}{a}$ ۱۷۸۳ - $-\frac{۳a+x}{۲}\sqrt{x(۲a-x)}+$

$+۳a^۲\arcsin\sqrt{\frac{x}{۲a}}$ ۱۷۸۴ - $۲\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$

۱۷۸۵ - $\frac{۲x-(a+b)}{۴}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^۲}{۴}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$

۱۷۸۶ - $\frac{x}{۲}\sqrt{a^۲+x^۲}+\frac{a^۲}{۲}\ln(x+\sqrt{a^۲+x^۲})$

۱۷۸۷ - $\frac{x}{۲}\sqrt{a^۲+x^۲}-\frac{a^۲}{۲}\ln(x+\sqrt{a^۲+x^۲})$

۱۷۸۸ - $\sqrt{x^۲-a^۲}-۲a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})$ اگر $x>a$ ؛

$-\sqrt{x^۲-a^۲}+۲a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})$ اگر $x<-a$

۱۷۸۹ - $۲\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$ اگر $x+a>۰$ و $x+b>۰$ ؛

$-۲\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})$ اگر $x+a<۰$ و $x+b<۰$

۱۷۹۰ - $\frac{۲x+a+b}{۴}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^۲}{۴}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$

اگر $x+a>۰$ و $x+b>۰$ ۱۷۹۱ - $x(\ln x-۱)$

۱۷۹۲ - $(n\neq-۱)\ \frac{x^{n+۱}}{n+۱}\times\left(\ln x-\frac{۱}{n+۱}\right)$ ۱۷۹۳ - $-\frac{۱}{x}(\ln^۲x+۲\ln x+۲)$

۱۷۹۴ - $\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\left(\ln^۲x-\frac{۴}{۳}\ln x+\frac{۸}{۹}\right)$ ۱۷۹۵ - $-(x+۱)e^{-x}$

۱۷۹٦ - $-\frac{e^{-۲x}}{۲}\left(x^۲+x+\frac{۱}{۲}\right)$ ۱۷۹۷ - $-\frac{x^۲+۱}{۲}e^{-x^۲}$

۱۷۹۸ - $x\sin x+\cos x$ ۱۷۹۹ - $-\frac{۲x^۲-۱}{٤}\cos ۲x+\frac{x}{۲}\sin ۲x$

۱۸۰۰ - $x\,\text{ch}\,x-\text{sh}\,x$ ۱۸۰۱ - $\left(\frac{x^۳}{۳}+\frac{۲x}{۹}\right)\text{sh}\,۳x-\left(\frac{x^۲}{۳}+\frac{۲}{۲۷}\right)\text{ch}\,۳x$

۱۸۰۲ - $x\,\text{arc tg}\,x-\frac{۱}{۲}\ln(۱+x^۲)$ ۱۸۰۳ - $x\,\text{arc sin}\,x+\sqrt{۱-x^۲}$

۱۸۰٤ - $-\frac{x}{۲}+\frac{۱+x^۲}{۲}\text{arc tg}\,x$ ۱۸۰۵ - $-\frac{۲+x^۲}{۹}\sqrt{۱-x^۲}+\frac{x^۳}{۳}\text{arc cos}\,x$

۱۸۰٦ - $-\frac{\text{arc sin}\,x}{x}-\ln\left|\frac{۱+\sqrt{۱-x^۲}}{x}\right|$ ۱۸۰۷ - $x\ln(x+\sqrt{۱+x^۲})-$

$-\sqrt{۱+x^۲}$ ۱۸۰۸ - $x-\frac{۱-x^۲}{۲}\ln\frac{۱+x}{۱-x}$ ۱۸۰۹ - $-\sqrt{x}+(۱+x)\times$

$\times\,\text{arc tg}\sqrt{x}$ ۱۸۱۰ - $\ln\text{tg}\,\frac{x}{۲}-\cos x\times\ln\text{tg}\,x$ ۱۸۱۱ -

$\frac{۱}{۳}(x^۳-۱)e^{x^۳}$ ۱۸۱۲ - $x(\text{arc sin}\,x)^۲+۲\sqrt{۱-x^۲}\,\text{arc sin}\,x-۲x$

۱۸۱۳ - $\frac{۱+x^۲}{۲}(\text{arc tg}\,x)^۲-x\,\text{arc tg}\,x+\frac{۱}{۲}\ln(۱+x^۲)$

۱۸۱٤ - $-\frac{۱}{۳}x^۲-\frac{۱}{۳}\ln|۱-x^۲|+\frac{x^۳}{۳}\ln\left|\frac{۱-x}{۱+x}\right|$ ۱۸۱۵ -

$\sqrt{۱+x^۲}\ln(x+\sqrt{۱+x^۲})-x$ ۱۸۱٦ - $-\frac{x}{۲(۱+x^۲)}+\frac{۱}{۲}\text{arc tg}\,x$

۱۸۱۷ - $\frac{x}{۲a^۲(a^۲+x^۲)}+\frac{۱}{۲a^۳}\text{arc tg}\,\frac{x}{a}\ (a\neq۰)$ ۱۸۱۸ - $\frac{x}{۲}\sqrt{a^۲-x^۲}+$

$+\frac{a^۲}{۲}\text{arc sin}\,\frac{x}{|a|}\ (a\neq۰)$ ۱۸۱۹ - $\frac{x}{۲}\sqrt{x^۲+a}+\frac{a}{۲}\ln\left|x+\sqrt{x^۲+a}\right|$

۱۸۲۰ - $\frac{x(۲x^۲+a^۲)}{۸}\sqrt{a^۲+x^۲}-\frac{a^٤}{۸}\ln(x+\sqrt{a^۲+x^۲})$

۱۸۲۱ - $\frac{x^۲}{٤}-\frac{x}{٤}\sin ۲x-\frac{\cos ۲x}{۸}$ ۱۸۲۲ - $۲(\sqrt{x}-۱)e^{\sqrt{x}}$

۱۸۲۳ − $۲(۶-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-۶(۲-x)\sin\sqrt{x}$

۱۸۲۴ − $-\frac{(۱-x)e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{۲\sqrt{۱+x^{۲}}}$ ۱۸۲۵ − $\frac{(۱+x)e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{۲\sqrt{۱+x^{۲}}}$

۱۸۲۶ − $\frac{x}{۲}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$ ۱۸۲۷ − $\frac{x}{۲}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$

۱۸۲۸ − $\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^{۲}+b^{۲}}e^{ax}$ ۱۸۲۹ − $\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^{۲}+b^{۲}}e^{ax}$

۱۸۳۰ − $\frac{e^{۲x}}{۸}(۲-\sin ۲x-\cos ۲x)$ ۱۸۳۱ − − $\frac{x}{۲}+\frac{۱}{٤}\sin ۲x$

$-e^{x}(\cos x+\sin x)+\frac{۱}{۲}e^{۲x}$ ۱۸۳۲ − $-x+\frac{۱}{۲}\ln(۱+e^{۲x})-e^{-x}\operatorname{art\,ctg}(e^{x})$

۱۸۳۳ − $-[x+\operatorname{ctg}x\times\ln(e\sin x)]$ ۱۸۳٤ − $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|$

۱۸۳۵ − $\frac{e^{x}}{x+۱}$ ۱۸۳۶ − $\frac{۱}{\sqrt{ab}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ اگر $ab>۰$ ؛

$\frac{\operatorname{sgn} a}{۲\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}}\right|$ اگر $ab<۰$ ۱۸۳۷ − $\frac{۲}{\sqrt{۷}}\times$

$\times\operatorname{arc\,tg}\frac{۲x-۱}{\sqrt{۷}}$ ۱۸۳۸ − $\frac{۱}{٤}\ln\left|\frac{x-۱}{۳x+۱}\right|$ ۱۸۳۹ − $\frac{۱}{٤\sqrt{۲}}\ln\left|\frac{x^{۲}-(\sqrt{۲}+۱)}{x^{۲}+(\sqrt{۲}-۱)}\right|$

۱۸٤۰ − $\frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+x+۱)+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\operatorname{arc\,tg}\frac{۲x+۱}{\sqrt{۳}}$ ۱۸٤۱ −

$\frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}-۲x\cos\alpha+۱)+\operatorname{ctg}\alpha\times\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ($a\neq k\pi$، k عددی

است درست) ۱۸٤۲ − $\frac{۱}{٤}\ln(x^{٤}-x^{۲}+۲)+\frac{۱}{۲\sqrt{۷}}\operatorname{arc\,tg}\frac{۲x^{۲}-۱}{\sqrt{۷}}$

۱۸٤۳ − $\frac{۱}{۹}\ln\{|x^{۳}+۱|(x^{۳}-۲)^{۲}\}$ ۱۸٤٤ − $\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{۳\sin x-۵\cos x}{\sin x-\cos x}\right|$

۱۸٤۵ − $\operatorname{arc\,tg}\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{۲}+۱\right)}{۲}$ ۱۸٤٦ − $\frac{۱}{\sqrt{b}}\ln\left(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^{۲}}\right)$

اگر $b>۰$ ؛ $\frac{۱}{\sqrt{-b}}\operatorname{arc\,sin}\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)$ اگر $a>۰$ و $b<۰$

١٨٤٧ - $\arcsin \frac{x+١}{\sqrt{٢}}$ ١٨٤٨ - $\ln\left|x+\frac{١}{٢}+\sqrt{x^{٢}+x}\right|$

١٨٤٩ - $\frac{١}{\sqrt{٢}}\ln\left(x-\frac{١}{٤}+\sqrt{x^{٢}-\frac{١}{٢}x+١}\right)$

١٨٥١ - $-\sqrt{٥+x-x^{٢}}+\frac{١}{٢}\arcsin\frac{٢x-١}{\sqrt{٢١}}$

١٨٥٢ - $\sqrt{x^{٢}+x+١}+\frac{١}{٢}\ln\left(x+\frac{١}{٢}+\sqrt{x^{٢}+x+١}\right)$

١٨٥٣ - $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}\arcsin\frac{٤x^{٢}+٣}{\sqrt{١٧}}$ ١٨٥٣,١ - $\arcsin\frac{٢\sin x-١}{٣}$

١٨٥٤ - $\frac{١}{٢}\sqrt{x^{٤}-٢x^{٢}-١}+\frac{١}{٢}\ln\left|x^{٢}-١+\sqrt{x^{٤}-٢x^{٢}-١}\right|$

١٨٥٥ - $-\frac{١}{٢}\sqrt{١+x^{٢}-x^{٤}}+\frac{٣}{٤}\arcsin\frac{٢x^{٢}-١}{\sqrt{٥}}$

١٨٥٦ - $-\ln\left|\frac{x+٢+٢\sqrt{x^{٢}+x+١}}{x}\right|$ ١٨٥٧ - $\left(\left|x+\frac{١}{٢}\right|>\frac{\sqrt{٥}}{٢}\right)$

$\frac{\sqrt{x^{٢}+x-١}}{x}+\frac{١}{٢}\arcsin\frac{x-٢}{|x|\sqrt{٥}}$ ١٨٥٨ - $\frac{-١}{\sqrt{٢}}\ln\left|\frac{١-x+\sqrt{٢(١+x^{٢})}}{١+x}\right|$

١٨٥٩ - $\arcsin\frac{x-٢}{|x-١|\sqrt{٢}}\ (|x|>\sqrt{٢})$ ١٨٦٠ -

$\frac{١}{٥}\times\frac{\sqrt{x^{٢}+٢x-٥}}{x+٢}+\frac{١}{٥\sqrt{٥}}\arcsin\frac{x+٧}{|x+٢|\sqrt{٦}}\ (|x+١|>\sqrt{٦})$

١٨٦١ - $\frac{٢x-١}{٤}\sqrt{٢+x-x^{٢}}+\frac{٩}{٨}\arcsin\frac{٢x-١}{٣}$

١٨٦٢ - $\frac{٢x+١}{٤}\sqrt{٢+x+x^{٢}}+\frac{٧}{٨}\ln\left(\frac{١}{٢}+x+\sqrt{٢+x+x^{٢}}\right)$

١٨٦٣ - $\frac{x^{٢}+١}{٤}\sqrt{x^{٤}+٢x^{٢}-١}-\frac{١}{٢}\ln\left|x^{٢}+١+\sqrt{x^{٤}+٢x^{٢}-١}\right|$

١٨٦٤ - $-\sqrt{١+x-x^{٢}}+\frac{١}{٢}\arcsin\frac{١-٢x}{\sqrt{٥}}-\ln\left|\frac{٢+x+٢\sqrt{١+x-x^{٢}}}{x}\right|$

$\left(\left|x-\frac{١}{٢}\right|<\frac{\sqrt{٥}}{٢}\right)$ ١٨٦٥ - $\ln\left|\frac{x^{٢}-١+\sqrt{x^{٤}+١}}{x}\right|$

$\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{(x+۲)^{٤}}{(x+۱)\,(x+۳)^{۳}}\right|$ − ۱۸٦۷ $\qquad$ $\ln|x-۲|+\ln|x+٥|$ − ۱۸٦٦

$\frac{x^{۹}}{۹}-\frac{x^{۹}}{۸}+\frac{۳x^{۷}}{۷}-\frac{٥x^{٦}}{٦}+\frac{۱۱x^{٥}}{٥}-\frac{۲۱x^{٤}}{٤}+\frac{٤۳x^{۳}}{۳}-\frac{۸٥x^{۲}}{۲}+$ − ۱۸٦۸

$x+\frac{۱}{٦}\ln|x|-\frac{۹}{۲}\ln|x-۲|+$ − ۱۸٦۹ $\qquad$ $+۱۷۱\ x+\frac{۱}{۳}\ln\left|\frac{x-۱}{(x+۲)^{۱۰۲٤}}\right|$

$x+\frac{۱}{۳}\text{arc tg}\,x-\frac{۸}{۳}\text{arc tg}\,\frac{x}{۲}$ − ۱۸۷۰ $\qquad$ $+\frac{۲۸}{۳}\ln|x-۳|$

$\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{۲}\ln|x^{۲}-۱|$ − ۱۸۷۲ $\qquad$ $-\frac{۱}{۳\,(x-۱)}+\frac{۲}{۹}\ln\left|\frac{x-۱}{x+۲}\right|$ − ۱۸۷۱

$\frac{۹x^{۲}+٥۰x+٦۸}{٤\,(x+۲)\,(x+۳)^{۲}}+$ − ۱۸۷٤ $\qquad$ $-\frac{٥x-٦}{x^{۲}-۳x+۲}+٤\ln\left|\frac{x-۱}{x-۲}\right|$ − ۱۸۷۳

$-\frac{۳x^{۲}+۳x-۲}{۸\,(x-۱)\,(x+۱)^{۲}}+\frac{۳}{۱٦}\ln\left|\frac{x+۱}{x-۱}\right|$ − ۱۸۷٥ $\qquad$ $+\frac{۱}{۸}\ln\left|\frac{(x+۱)\ (x+۲)^{۱٦}}{(x+۳)^{۱۷}}\right|$

$\frac{۱}{۲}\,\text{arc tg}\,x+\frac{۱}{٤}\ln\frac{(x+۱)^{۲}}{x^{۲}+۱}$ − ۱۸۷۷ $\qquad$ $\text{arc tg}\,x+\frac{٥}{٦}\ln\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}+٤}$ − ۱۸۷٦

$-\frac{۱}{٥\,(x-۱)}+\frac{۱}{٥۰}\ln\frac{(x-۱)^{۲}}{x^{۲}+۲x+۲}-$ − ۱۸۷۹ $\qquad$ $-\frac{۱}{x-۲}-\text{arc tg}\,(x-۲)$ − ۱۸۷۸

$\ln\left|\frac{x}{۱+x}\right|-\frac{۲}{\sqrt{۳}}\,\text{arc tg}\,\frac{۱+۲x}{\sqrt{۳}}$ − ۱۸۸۰ $\qquad$ $-\frac{۸}{۲٥}\ \text{arc tg}\,(x+۱)$

$\frac{۱}{٦}\ln\frac{(x-۱)^{۲}}{x^{۲}+x+۱}+$ − ۱۸۸۲ $\qquad$ $\frac{۱}{٦}\ln\frac{(x+۱)^{۲}}{x^{۲}-x+۱}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{arc tg}\,\frac{۲x-۱}{\sqrt{۳}}$ − ۱۸۸۱

$\frac{۱}{٤}\ln\left|\frac{x-۱}{x+۱}\right|-\frac{۱}{۲}\,\text{arc tg}\,x$ − ۱۸۸۳ $\qquad$ $+\frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{arc tg}\,\frac{۲x+۱}{\sqrt{۳}}$

$\frac{۱}{٤\sqrt{۲}}\ln\frac{x^{۲}+x\sqrt{۲}+۱}{x^{۲}-x\sqrt{۲}+۱}+\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\,\text{arc tg}\,\frac{x\sqrt{۲}}{۱-x^{۲}}$ − ۱۸۸٤

$\frac{۱}{٤}\ln\frac{x^{۲}+x+۱}{x^{۲}-x+۱}+\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\,\text{arc tg}\,\frac{x^{۲}-۱}{x\sqrt{۳}}$ − ۱۸۸٥

−۱۸۸۷ $\frac{۱}{٤\sqrt{۳}}\ln\frac{۱+x\sqrt{۳}+x^{۲}}{۱-x\sqrt{۳}+x^{۲}}+\frac{۱}{۲}\,\text{arc tg}\,x+\frac{۱}{٦}\,\text{arc tg}\,x^{۳}$ − ۱۸۸٦

$-\frac{۱}{٦\,(۱+x)}+\frac{۱}{٦}\ln\frac{(۱+x)^{۲}}{۱-x+x^{۲}}+\frac{۱}{۲}\,\text{arc tg}\,x-\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}\,\text{arc tg}\,\frac{۲x-۱}{\sqrt{۳}}$

١٨٨٨ - $\frac{١}{٦}\ln\frac{(x-١)^٢}{x^٢+x+١}-\frac{١}{\sqrt{٣}}\operatorname{arc\,tg}\frac{٢x-١}{\sqrt{٣}}$

١٨٨٩ - $\frac{٢}{٥}\ln\frac{x^٢+٢x+٢}{x^٢+x+\frac{١}{٢}}+\frac{٨}{٥}\operatorname{arc\,tg}(x+١)-\frac{٢}{٥}\operatorname{arc\,tg}(٢x+١)$

١٨٩٠ - $a+٢b+٣c=٠$

١٨٩١ - $-\frac{x^٢+x+٢}{٨(x-١)(x+١)^٢}+\frac{١}{١٦}\ln\left|\frac{x+١}{x-١}\right|$

١٨٩٢ - $\frac{x}{٣(x^٣+١)}+\frac{١}{٩}\ln\frac{(x+١)^٢}{x^٢-x+١}+\frac{٢}{٣\sqrt{٣}}\operatorname{arc\,tg}\frac{٢x-١}{\sqrt{٣}}$

١٨٩٣ $\frac{x(٣x^٢+٥)}{٨(x^٢+١)^٢}+\frac{٣}{٨}\operatorname{arc\,tg}x$

١٨٩٤ - $\frac{١}{x^٢+٢x+٢}+\operatorname{arc\,tg}(x+١)$

١٨٩٥ - $\frac{x}{٤(x^٤+١)}+\frac{٣}{١٦\sqrt{٢}}\ln\frac{x^٢+x\sqrt{٢}+١}{x^٢-x\sqrt{٢}+١}-\frac{٣}{٨\sqrt{٢}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{٢}}{x^٢-١}$

١٨٩٦ - $\frac{٥x+٢}{٣(x^٢+x+١)}+\frac{١}{٩}\ln\frac{(x-١)^٢}{x^٢+x+١}+\frac{٨}{٣\sqrt{٣}}\operatorname{arc\,tg}\frac{٢x+١}{\sqrt{٣}}$

١٨٩٧ - $\frac{٧x^٥-١١x}{٣٢(x^٤-١)^٢}+\frac{٢١}{١٢٨}\ln\left|\frac{x-١}{x+١}\right|-\frac{٢١}{٦٤}\operatorname{arc\,tg}x$

١٨٩٨ - $\frac{x^٣+٢x}{٦(x^٤+x^٢+١)}$

١٨٩٩ - $-\frac{٨x^٤+٨x^٢+٤x-١}{٢٨(x^٣+x+١)^٢}$

١٩٠٠ - (همهٔ انتگرال!) $-\frac{x}{x^٥+x+١}$

١٩٠١ - $\frac{٢x+١}{٣(x^٢+x+١)}+\frac{٤}{٣\sqrt{٣}}\operatorname{arc\,tg}\frac{٢x+١}{\sqrt{٣}}$

١٩٠٢ - $a\gamma+c\alpha=٢b\beta$

١٩٠٣ - $-\frac{١}{٩٦(x-١)^{٩٦}}-\frac{٣}{٩٧(x-١)^{٩٧}}-$

$-\frac{٣}{٩٨(x-١)^{٩٨}}-\frac{١}{٩٩(x-١)^{٩٩}}$

١٩٠٤ - $\frac{١}{٨}\ln\left|\frac{x^٢-١}{x^٢+١}\right|-\frac{١}{٤}\operatorname{arc\,tg}x^٢$

١٩٠٥ - $\frac{١}{٤\sqrt{٣}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^٤}{\sqrt{٣}}$

١٩٠٦ - $\frac{١}{١٢}\ln\frac{(x^٢+١)^٢}{x^٤-x^٢+١}+$

$+\frac{١}{٣}\operatorname{arc\,tg}x^٣+\frac{١}{٢\sqrt{٣}}\operatorname{arc\,tg}\frac{٢x^٢-١}{\sqrt{٣}}$

١٩٠٧ - $\frac{٥}{٨}\ln\frac{x^٤}{x^٤+٢}-\ln\frac{x^٤}{x^٤+١}$

١٩٠٨ - $-\frac{١}{١٠٠}\times\left(\frac{x^٥}{x^{١٠}-١٠}+\frac{١}{٢\sqrt{١٠}}\ln\left|\frac{x^٥-\sqrt{١٠}}{x^٥+\sqrt{١٠}}\right|\right)$

١٩٠٩ - $\frac{x^٤}{٤}+\frac{١}{٤}\ln\frac{x^٤+١}{(x^٤+٢)^٤}$

١٩١٠ - $-\frac{x^٥+٢}{١٠(x^{١٠}+٢x^٥+٢)}$

$-\frac{۱}{۱۰}\operatorname{arc\,tg}(x^۵+۱)$

۱۹۱۱ - $\frac{۱}{n}(x^n-\ln|x^n+۱|)\ (n\neq ۰)$

۱۹۱۲ - $\frac{۱}{۲n}\left(\operatorname{arc\,tg} x^n-\frac{x^n}{x^{۲n}+۱}\right)\ (n\neq ۰)$

۱۹۱۳ - $\frac{۱}{۲۰}\ln\frac{x^{۱۰}}{x^{۱۰}+۲}$

۱۹۱۴ - $\frac{۱}{۱۰(x^{۱۰}+۱)}+\frac{۱}{۱۰}\ln\frac{x^{۱۰}}{x^{۱۰}+۱}$

۱۹۱۵ - $\frac{۱}{۷}\ln\frac{|x^۷|}{(۱+x^۷)^۲}$

۱۹۱۶ - $\frac{۱}{۵}\ln\left|\frac{x(x^۴-۵)}{x^۵-۵x+۱}\right|$

۱۹۱۷ - $\frac{۱}{\sqrt{۳}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^۲-۱}{x\sqrt{۳}}$

۱۹۱۸ - $\frac{۱}{\sqrt{۵}}\ln\frac{۲x^۲+(۱-\sqrt{۵})x+۲}{۲x^۲+(۱+\sqrt{۵})x+۲}$

۱۹۱۹ - $\frac{۱}{۴\sqrt{۲}}\ln\frac{x^۴-x^۲\sqrt{۲}+۱}{x^۴+x^۲\sqrt{۲}+۱}$

۱۹۲۰ - $\operatorname{arc\,tg} x+\frac{۱}{۳}\operatorname{arc\,tg} x^۳$

۱۹۲۱ - $I_n=\frac{۲ax+b}{(n-۱)\Delta(ax^۲+bx+c)^{n-۱}}+\frac{۲n-۳}{n-۱}\times\frac{۲a}{\Delta}I_{n-۱}$ که در آن $\Delta=۴ac-b^۲$ ؛

$$I_۳=\frac{۲x+۱}{۶(x^۲+x+۱)^۲}+\frac{۲x+۱}{۳(x^۲+x+۱)}+\frac{۴}{۳\sqrt{۳}}\operatorname{arc\,tg}\frac{۲x+۱}{\sqrt{۳}}$$

۱۹۲۲ - $I=\frac{۱}{(b-a)^{m+n-۱}}\int\frac{(۱-t)^{m+n-۲}}{t^m}dt$ ؛

۱۹۲۳ - $\frac{۱}{۶۲۵}\left(-\frac{۱}{t}+۳t-\frac{t^۲}{۲}-۳\ln|t|\right)$ که در آن $t=\frac{x-۲}{x+۳}$

۱۹۲۴ - $R(x)=-\sum_{k=۰}^{n-۱}\frac{P^{(k)}_{hn}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}}+\frac{P^{(n)}_{n}(a)}{n!}\ln|x-a|$

$=P(x^۲)+\sum_{i=۱}^{k}\sum_{j=۱}^{n_l}\left[\frac{A_{ij}}{(a_l-x)^{\alpha j}}+\frac{A_{ij}}{(a_i+x)^{\alpha j}}\right]$ که در آن P چندجمله‌ای و $\pm a_l\ (i=۱,\dots,k)$ ریشه‌های مخرج کسرها و A_{lj} ضرایب ثابت میباشند.

۱۹۲۵ - $-\frac{۱}{۲n}\sum_{k=۱}^{n}\cos\frac{\pi(۲k-۱)}{۲n}\ln\left(۱-۲x\cos\frac{۲k-۱}{۲n}\pi+x^۲\right)+$

$+\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n}\left\{\sin\frac{\pi(۲k-۱)}{۲n}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{۲k-۱}{۲n}\pi}{\sin\frac{۲k-۱}{۲n}\pi}\right\}$

۱۹۲۶ - $۲\sqrt{x}-۲\ln(۱+\sqrt{x})$

۱۹۲۷- $\frac{۳}{۴}\ln\frac{x\sqrt[۳]{x}}{\left(۱+\sqrt[۶]{x}\right)^{۲}\left(۱-\sqrt[۶]{x}+۲\sqrt[۳]{x}\right)^{۳}}-\frac{۳}{۲\sqrt{۷}}\operatorname{arc\,tg}\times$

$\times\frac{۴\sqrt[۶]{x}-۱}{\sqrt{۷}}$ ۱۹۲۸- $\frac{۳}{۴}t^{۴}-\frac{۳}{۲}t^{۲}-\frac{۳}{۴}\ln|t-۱|+\frac{۱۵}{۸}\times$

$\times\ln(t^{۲}+t+۲)-\frac{۲۷}{۸\sqrt{۷}}\operatorname{arc\,tg}\frac{۲t+۱}{\sqrt{۷}}$ ، $t=\sqrt[۳]{۲+x}$

۱۹۲۹- $۶t-۳t^{۲}-۲t^{۳}+\frac{۳}{۲}t^{۴}+\frac{۶}{۵}t^{۵}-\frac{۶}{۷}t^{۷}+۳\ln(۱+t^{۲})-۶\operatorname{arc\,tg}t$

که در آن $t=\sqrt[۶]{x+۱}$ ۱۹۳۰- $\frac{۲}{\left(۱+\sqrt[۴]{x}\right)^{۲}}-\frac{۴}{۱+\sqrt[۴]{x}}$

۱۹۳۱- $\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{x\sqrt{x^{۲}-۱}}{۲}+\frac{۱}{۲}\ln\left|x+\sqrt{x^{۲}-۱}\right|$ ۱۹۳۲- $-\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{\frac{x+۱}{x-۱}}$

۱۹۳۳- $-\frac{at^{۳}}{۱+t^{۴}}+\frac{a}{۴\sqrt{۲}}\ln\frac{۱+t\sqrt{۲}+t^{۲}}{۱-t\sqrt{۲}+t^{۲}}+\frac{a}{۲\sqrt{۲}}\operatorname{arc\,tg}\frac{۱-t^{۲}}{t\sqrt{۲}}$

که در آن $t=\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ ۱۹۳۴- $-\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}$

۱۹۳۵- $\frac{x}{۲}+\sqrt{x}-\frac{۱}{۲}\sqrt{x(۱+x)}-\frac{۱}{۲}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{۱+x}\right)$

۱۹۳۷- $-\frac{۳-۲x}{۴}\sqrt{۱+x+x^{۲}}-\frac{۱}{۸}\ln\left(\frac{۱}{۲}+x+\sqrt{۱+x+x^{۲}}\right)$

۱۹۳۸- $-\ln\left|\frac{۲-x+۲\sqrt{x^{۲}+x+۱}}{x+۱}\right|$ ۱۹۳۹- $\frac{۲-x}{۳(۱-x)^{۲}}\sqrt{۱-x^{۲}}$

۱۹۴۰- $R+\ln(x+۱+R)-\sqrt{۲}\ln\left|\frac{x+۲+\sqrt{۲}R}{x}\right|$ که در آن

$R=\sqrt{x^{۲}+۲x+۲}$ ۱۹۴۱- $\arcsin\frac{۱+۲x}{\sqrt{۵}}+\ln\left|\frac{۳+x+۲\sqrt{۱-x-x^{۲}}}{۱+x}\right|$

۱۹۴۲- $\frac{۱-۲x}{۴}\sqrt{۱+x-x^{۲}}-\frac{۱۱}{۸}\arcsin\frac{۱-۲x}{\sqrt{۵}}$

١٩٤٣- $-\frac{١٩+٥x+٢x^٢}{٦}\sqrt{١+٢x-x^٢}-٤\arcsin\frac{١-x}{\sqrt{٢}}$

١٩٤٤- $\left(\frac{٦٣}{٢٥٦}x-\frac{٢١}{١٢٨}x^٣+\frac{٢١}{١٦٠}x^٥-\frac{٩}{٨٠}x^٧+\frac{x^٩}{١٠}\right)\sqrt{١+x^٢}-\frac{٦٣}{٢٥٦}\ln\left(x+\sqrt{١+x^٢}\right)$

١٩٤٥- $\left(-\frac{a^٤x}{١٦}-\frac{a^٢x^٣}{٢٤}+\frac{x^٥}{٦}\right)\sqrt{a^٢-x^٢}+\frac{a^٦}{١٦}\arcsin\frac{x}{|a|}$

١٩٤٦- $\left(\frac{x^٢}{٣}-\frac{١٤x}{٣}+٣٧\right)\sqrt{x^٢+٤x+٣}-٦٦\ln\left|x+٢+\sqrt{x^٢+٤x+٣}\right|$

١٩٤٧- $-\frac{١}{٢x^٢}\sqrt{x^٢+١}+\frac{١}{٢}\ln\frac{١+\sqrt{x^٢+١}}{|x|}$

١٩٤٨- $\frac{٢x^٢+١}{٣x^٣}\sqrt{x^٢-١}$

١٩٤٩- $\frac{٣x-٥}{٢٠(x-١)^٢}\sqrt{x^٢+٣x+١}-\frac{١١}{٤٠\sqrt{٥}}\ln\left|\frac{(x+١)\sqrt{٥}+٢\sqrt{x^٢+٣x+١}}{x-١}\right|$

١٩٥٠- $\frac{٣x+٥}{٨(x+١)^٢}\sqrt{x^٢+٢x}-\frac{٣}{٨}\arcsin\frac{١}{|x+١|}$ که در آن $x<-٢$ یا $x>٠$

١٩٥١- $(a\neq)٠$ $٤a(ca_١+bb_١)=٨a^٢c_١+٣b^٢a_١$

١٩٥٢- $\frac{\sqrt{١+٢x-x^٢}}{٢(١-x)}-\frac{١}{\sqrt{٢}}\ln\left|\frac{\sqrt{٢}+\sqrt{١+٢x-x^٢}}{١-x}\right|$

١٩٥٣- $\frac{١}{٢}\arcsin\frac{x-٣}{|x-١|\sqrt{٥}}-\frac{١}{٢}\ln\left|\frac{٣x+١-٢\sqrt{x^٢-x-١}}{x+١}\right|$

١٩٥٤- $-\frac{\sqrt{x^٢+x+١}}{x+١}+\ln\left(x+\frac{١}{٢}+\sqrt{x^٢+x+١}\right)+\frac{١}{٢}\ln\left|\frac{١-x+٢\sqrt{x^٢+x+١}}{x+١}\right|$

١٩٥٥- $-\frac{١+x}{٢}\sqrt{١+٢x-x^٢}-٢\arcsin\frac{١-x}{\sqrt{٢}}-\frac{١}{\sqrt{٢}}\arcsin\frac{x\sqrt{٢}}{|١+x|}$

١٩٥٦- $(x<١$ یا $x>٣)$ $-\frac{\sqrt{x^٢-٤x+٣}}{x-١}-٢\arcsin\frac{١}{|x-٢|}$

١٩٥٧- $\frac{١}{\sqrt{٢}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{٢}}{\sqrt{١-x^٢}}$

١٩٥٨- $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}\ln\left|\frac{x\sqrt{٢}+\sqrt{x^٢-١}}{x\sqrt{٢}-\sqrt{x^٢-١}}\right|$

١٩٥٩- $\frac{x}{٢\sqrt{١+x^٢}}+\frac{١}{٤\sqrt{٢}}\ln\left|\frac{\sqrt{١+x^٢}+x\sqrt{٢}}{\sqrt{١+x^٢}-x\sqrt{٢}}\right|$

١٩٦٠- $\ln\left(x+\sqrt{x^٢+٢}\right)-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^٢+٢}}{x}$

۱۹۶۱- $\frac{۱}{\sqrt{۶}}\ln\left|\frac{(۲x+۱)\sqrt{۲}+\sqrt{۳(x^۲+x-۱)}}{(۲x+۱)\sqrt{۲}-\sqrt{۳(x^۲+x-۱)}}\right|$ ۱۹۶۲-

$\arcsin\frac{x-۱}{\sqrt{۳}}-\frac{\sqrt{۲}}{۳}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{۲+۲x-x^۲}}{(۱-x)\sqrt{۲}}-\frac{۱}{\sqrt{۶}}\ln\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲+۲x-x^۲}}{\sqrt{۶}-\sqrt{۲+۲x-x^۲}}$

۱۹۶۳- $\frac{۲(x-۱)}{۳\sqrt{x^۲+x+۱}}$ ۱۹۶۴- $+$ $-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^۲+x+۱}}{(x-۱)\sqrt{۲}}$

$+\frac{۱}{\sqrt{۶}}\ln\left|\frac{(x+۱)\sqrt{۳}-\sqrt{۳(x^۲+x+۱)}}{\sqrt{x^۲-x+۱}}\right|$ اگر $x+۱>۰$ ۱۹۶۵-

$\frac{۱}{۶\sqrt{۲}}\ln\frac{\sqrt{۲(۲x^۲-۲x+۵)}-(x+۱)}{\sqrt{۲(۲x^۲-۲x+۵)}+(x+۱)}-\frac{۱}{۳}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{۲x^۲-۲x+۵}}{x+۱}$

۱۹۶۶- $\frac{۳}{۲(۲z+۱)}+\frac{۱}{۲}\ln\frac{z^۴}{|۲z+۱|^۳}$ که در آن $z=x+\sqrt{x^۲+x+۱}$

۱۹۶۷- $\ln\left|\frac{z-۱}{z}\right|-۲\operatorname{arc\,tg}z$ که در آن $z=\frac{۱+\sqrt{۱-۲x-x^۲}}{x}$

۱۹۶۸- $\frac{۱}{۸}\left\{\frac{۱}{۳}[(z-۱)^۳+(z-۱)^{-۳}]+[(z-۱)^۲-(z-۱)^{-۲}]+\right.$

$\left.+[(z-۱)+(z-۱)^{-۱}]\right\}+\frac{۱}{۲}\ln|z-۱|$ که در آن $z=x+\sqrt{x^۲-۲x+۲}$

۱۹۶۹- $-\frac{۵}{۱۸(z+۱)}-\frac{۱}{۶(z+۱)^۲}+\frac{۳}{۴}\ln|z-۱|-\frac{۱۶}{۲۷}\ln|z-۲|-$

$-\frac{۱۷}{۱۰۸}\ln|z+۱|$ که در آن $z=\frac{\sqrt{x^۲+۳x+۲}}{x+۱}$ ۱۹۷۰- $+$ $\frac{۲(۳-۴z)}{۵(۱-z-z^۲)}$

$+\frac{۲}{۵\sqrt{۵}}\ln\left|\frac{\sqrt{۵}+۱+۲z}{\sqrt{۵}-۱-۲z}\right|$ که در آن $z=-x+\sqrt{x(۱+x)}$

۱۹۷۱- $\frac{x}{۴}(\sqrt{x^۲+۱}+\sqrt{x^۲-۱})+\frac{۱}{۴}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^۲+۱}}{x+\sqrt{x^۲-۱}}\right|$ ۱۹۷۲-

$\frac{۱}{۳}\sqrt{z}-\frac{۱}{۳\sqrt[۴]{۱۲}}\left(\ln\frac{z\sqrt{۳}+\sqrt[۴]{۱۲z^۲+۱}}{z\sqrt[۴]{۳}-\sqrt[۴]{۱۲z^۲+۱}}-۲\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt[۴]{۱۲z^۲}}{z\sqrt{۳}-۱}\right)$

که در آن $z=\frac{۱+x}{۱-x}$ ۱۹۷۳- $\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\arcsin x$

۱۹۷٤ − $\sqrt{۱+x+x^{۲}}+\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+۲x+۲\sqrt{۱+x+x^{۲}}}{(۲+x+۲\sqrt{۱+x+x^{۲}})^{۲}}$ ۱۹۷٥ −

$\frac{۲}{۳}\left[(x+۱)^{\frac{۳}{۲}}+x^{\frac{۳}{۲}}\right]-\frac{۲}{٥}\left[(x+۱)^{\frac{٥}{۲}}-x^{\frac{٥}{۲}}\right]$ ۱۹۷٦ − $-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times$

$\times\,\mathrm{arc\,sin}\frac{x\sqrt{۲}}{x^{۲}+۱}$ ۱۹۷۷ − $-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\ln\left|\frac{x\sqrt{۲}+\sqrt{x^{٤}+۱}}{x^{۲}-۱}\right|$

۱۹۷۸ − $\frac{۱}{۲}\,\mathrm{arc\,sin}\,\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}\sqrt{۲}}\left(|x|>\sqrt{\sqrt{۲}-۱}\right)$

۱۹۷۹ − $\frac{۱}{۲}\ln\frac{x^{۲}(۲x^{۲}+۱+۲\sqrt{x^{٤}+x^{۲}+۱})}{x^{۲}+۲+۲\sqrt{x^{٤}+x^{۲}+۱}}$

۱۹۸۱ − $\frac{۱}{۳}\sqrt{(x+x^{۲})^{۳}}-\frac{۱+۲x}{۸}\sqrt{x+x^{۲}}+\frac{۱}{۸}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{۱+x})$

بازای $x>۰$ ۱۹۸۲ − $\frac{٦}{٥}x^{\frac{٥}{٦}}+٤x^{\frac{۱}{۲}}+۱۸x^{\frac{۱}{٦}}+\frac{۳x^{\frac{۱}{٦}}}{۱+x^{\frac{۱}{۳}}}-۲۱\,\mathrm{arc\,tg}\,x^{\frac{۱}{٦}}$

۱۹۸۳ − $\frac{۳}{٥}z^{٥}-۲z^{۳}+۳z$ که در آن $z=\sqrt{۱+\sqrt[۳]{x^{۲}}}$

۱۹۸٤ − $-z+\frac{۲}{۳}z^{۳}-\frac{z^{٥}}{٥}$ که در آن $z=\sqrt{۱-x^{۲}}$ ۱۹۸٥ −

$\frac{۱}{٦}\ln\frac{z^{۲}+z+۱}{(z-۱)^{۲}}-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{۲z+۱}{\sqrt{۳}}$ که در آن $z=\frac{\sqrt[۳]{۱+x^{۳}}}{x}$

۱۹۸٦ − $\frac{۱}{٤}\ln\left|\frac{z+۱}{z-۱}\right|-\frac{۱}{۲}\,\mathrm{arctg}\,z$ که در آن $z=\frac{\sqrt[٤]{۱+x^{٤}}}{x}$

۱۹۸۷ − $\frac{۱}{٦}\ln\frac{z-۱}{z+۱}+\frac{۱}{۱۲}\ln\frac{z^{۲}+z+۱}{z^{۲}-z+۱}+\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{z^{۲}-۱}{z\sqrt{۳}}$ که در

آن $z=\sqrt[٦]{۱+x^{٦}}$ ۱۹۸۸ − $\frac{٥}{٤}z^{٤}-\frac{٥}{۹}z^{۹}$ که در آن $z=\sqrt[٥]{۱+\frac{۱}{x}}$

۱۹۸۹ − $\frac{۳z}{۲\,(z^{۳}+۱)}-\frac{۱}{٤}\ln\frac{(z+۱)^{۲}}{z^{۲}-z+۱}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{۲z-۱}{\sqrt{۳}}$ که در آن

$z=\frac{\sqrt[۳]{۳x-x^۳}}{x}$ ۱۹۹۰ - $m=\frac{۲}{k}$ که در آن $k=\pm۱, \pm۲, \ldots$

۱۹۹۱ - $\sin x-\frac{۲}{۳}\sin^۳ x+\frac{۱}{۵}\sin^۵ x$ ۱۹۹۲ - $\frac{۵}{۱۶}x-\frac{۱}{۴}\sin ۲x+$

$+\frac{۳}{۶۴}\sin ۴x+\frac{۱}{۴۸}\sin^۳ ۲x$ ۱۹۹۳ - $\frac{۵}{۱۶}x+\frac{۱}{۴}\sin ۲x+\frac{۳}{۶۴}\sin ۳x-$

$-\frac{۱}{۴۸}\sin^۳ ۲x$ ۱۹۹۴ - $\frac{x}{۱۶}-\frac{\sin ۴x}{۶۴}+\frac{\sin^۳ ۲x}{۴۸}$ ۱۹۹۵ - $\frac{\sin^۵ x}{۵}-$

$-\frac{۲\sin^۷ x}{۷}+\frac{\sin^۹ x}{۹}$ ۱۹۹۶ - $-\frac{\cos ۲x}{۶۴}+\frac{\cos^۳ ۲x}{۹۶}-\frac{\cos^۵ ۲x}{۳۲۰}$

۱۹۹۷ - $\frac{۱}{۳\cos^۳ x}-\frac{۱}{\cos x}$ ۱۹۹۸ - $-\frac{۳}{۲}\cos x-\frac{\cos^۳ x}{۲\sin^۲ x}-\frac{۳}{۲}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{۲}\right|$

۱۹۹۹ - $-\frac{\cos x}{۲\sin^۲ x}+\frac{۱}{۲}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{۲}\right|$ ۲۰۰۰ - $\frac{\sin x}{۲\cos^۲ x}+\frac{۱}{۲}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)\right|$

۲۰۰۱ - $-۸\operatorname{ctg}۲x-\frac{۸}{۳}\operatorname{ctg}^۳ ۲x$ ۲۰۰۲ - $\frac{\operatorname{tg}^۴ x}{۴}+\frac{۳\operatorname{tg}^۲ x}{۲}-\frac{\operatorname{ctg}^۲ x}{۲}+$

$+۳\ln|\operatorname{tg}x|$ ۲۰۰۳ - $\frac{۱}{\cos x}+\frac{۱}{۳\cos^۳ x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{۲}\right|$ ۲۰۰۴ -

$\frac{\operatorname{tg}^۴ x}{۴}-\frac{\operatorname{tg}^۲ x}{۲}-\ln|\cos x|$ ۲۰۰۵ - $-\operatorname{ctg}x+\frac{\operatorname{ctg}^۳ x}{۳}-\frac{\operatorname{ctg}^۵ x}{۵}-x$

۲۰۰۸ - $\frac{۱}{۴}\ln\left|\frac{(۱+t)^۳(۱+t^۳)}{(۱-t)^۳(۱-t^۳)}\right|-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\operatorname{arc\,tg}\frac{۱-t^۲}{t\sqrt{۳}}$ که در آن

$t=\sqrt[۳]{\sin x}$ ۲۰۰۹ - $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\ln\frac{z^۲+z\sqrt{۲}+۱}{z^۲-z\sqrt{۲}+۱}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\operatorname{arc\,tg}\frac{z\sqrt{۲}}{z^۲-۱}$،

$z=\sqrt{\operatorname{tg}x}$ ۲۰۱۰ - $\frac{۱}{۴}\ln\frac{(z^۲+۱)^۲}{z^۴-z^۲+۱}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\operatorname{arc\,tg}\frac{۲z^۲-۱}{\sqrt{۳}}$

که در آن $z=\sqrt[۳]{\operatorname{tg}x}$ ۲۰۱۱ - $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-۱}x}{n}+\frac{n-۱}{n}I_{n-۲}$؛

$K_n=\frac{\sin x\cos^{n-۱}x}{n}+\frac{n-۱}{n}K_{n-۲}$؛ $I_۶=-\frac{۱}{۶}\cos x\sin^۵ x-\frac{۴}{۲۴}\times$

$\times\cos x\sin^۳ x-\frac{۵}{۱۶}\cos x\sin x+\frac{۵}{۱۶}x$ $K_۸=\frac{۱}{۸}\sin x\cos^۷ x+$

$$+\frac{٧}{٤٨}\sin x\cos^{٥}x+\frac{٣٥}{١٩٢}\sin x\cos^{٣}x+\frac{٣٥}{١٢٨}\sin x\cos x+\frac{٣٥}{١٢٨}x$$

$K_n=\dfrac{\sin x}{(n-١)\cos^{n-١}x}+$ ؛ $I_n=-\dfrac{\cos x}{(n-١)\sin^{n-١}x}+\dfrac{n-٢}{n-١}I_{n-٢}$ -٢٠١٢

؛ $I_٥=-\dfrac{\cos x}{٤\sin^{٤}x}-\dfrac{٣\cos x}{٨\sin^{٢}x}+\dfrac{٣}{٨}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{٢}\right|$ ؛ $+\dfrac{n-٢}{n-١}K_{n-٢}$

-٢٠١٣ $K_٧=\dfrac{\sin x}{٦\cos^{٦}x}+\dfrac{٥\sin x}{٢٤\cos^{٤}x}+\dfrac{٥\sin x}{١٦\cos^{٢}x}+\dfrac{٥}{١٦}\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{٢}+\dfrac{\pi}{٤}\right)$

$\dfrac{x}{٤}+\dfrac{\sin ٢x}{٨}+\dfrac{\sin ٤x}{١٦}+\dfrac{\sin ٦x}{٢٤}-٢٠١٤$ $-\dfrac{١}{٨}\cos ٤x-\dfrac{١}{١٢}\cos ٦x$

$\dfrac{٣}{٢}\cos\dfrac{x}{٦}-\dfrac{٣}{١٠}\cos\dfrac{٥x}{٦}-\dfrac{٣}{١٤}\cos\dfrac{٧x}{٦}+\dfrac{٣}{٢٢}\cos\dfrac{١١x}{٦}$ -٢٠١٥

$-\dfrac{١}{٢}\cos(a-b)\cos x-\dfrac{١}{٤}\cos(x+a+b)+\dfrac{١}{١٢}\cos(٣x+a+b)-٢٠١٦$

$\dfrac{x}{٤}+\dfrac{\sin ٢ax}{٨a}+\dfrac{\sin ٢bx}{٨b}+\dfrac{\sin ٢(a-b)x}{١٦(a-b)}+\dfrac{\sin ٢(a+b)x}{١٦(a+b)}$ -٢٠١٧

$-\dfrac{٣}{١٦}\cos ٢x+\dfrac{٣}{٦٤}\cos ٤x+\dfrac{١}{٤٨}\cos ٦x-\dfrac{٣}{١٢٨}\cos ٨x+\dfrac{١}{١٩٢}\cos ١٢x-٢٠١٨$

$\sin(a-b)\neq ٠$ اگر $\dfrac{١}{\sin(a-b)}\ln\left|\dfrac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|$ -٢٠١٩

$\cos(a-b)\neq ٠$ اگر $\dfrac{١}{\cos(a-b)}\ln\left|\dfrac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|$ -٢٠٢٠

$\sin(a-b)\neq ٠$ اگر $\dfrac{٢}{\sin(a-b)}\ln\left|\dfrac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|$ -٢٠٢١

$\dfrac{١}{\sin a}\ln\left|\dfrac{\cos\frac{x-a}{٢}}{\cos\frac{x+a}{٢}}\right|-٢٠٢٣$ $\dfrac{١}{\cos a}\ln\left|\dfrac{\sin\frac{x-a}{٢}}{\cos\frac{x+a}{٢}}\right|(\cos a\neq ٠)-٢٠٢٢$

$-x-\operatorname{ctg}a\ln\left|\dfrac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|(\sin a\neq ٠)-٢٠٢٤$ $(\sin a\neq ٠)$

$\dfrac{١}{٦}\ln\dfrac{(١-\cos x)(٢+\cos x)^{٢}}{(١+\cos x)^{٣}}-٢٠٢٦$ $\dfrac{١}{\sqrt{٥}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{٣\operatorname{tg}\frac{x}{٢}+١}{\sqrt{٥}}-٢٠٢٥$

$-\dfrac{١}{٥}(٢\sin x+\cos x)+\dfrac{٤}{٥\sqrt{٥}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{٢}+\dfrac{\operatorname{arc\,tg}٢}{٢}\right)\right|-٢٠٢٧$

۲۰۲۸- الف) $\frac{۲}{\sqrt{۱-\varepsilon^۲}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{۱-\varepsilon}{۱+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{۲}\right)$ اگر $۰<\varepsilon<۱$؛

ب) $\frac{۱}{\sqrt{\varepsilon^۲-۱}}\ln\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^۲-۱}\sin x}{۱+\varepsilon\cos}$ اگر $\varepsilon>۱$

۲۰۲۹- $x-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{۲}\operatorname{tg}x)$

۲۰۳۰- $\frac{۱}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a\operatorname{tg}x}{b}\right)$

۲۰۳۱- $(ab\neq ۰)$ $\frac{(۲b^۲)^{-۱}z}{(a^۲z^۲+b^۲)}+\frac{۱}{۲ab^۳}\operatorname{arc\,tg}\frac{az}{b}$ که در آن $z=\operatorname{tg}x$

۲۰۳۲- $\frac{۱}{۲}(\sin x-\cos x)-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۸}\right)\right|$

۲۰۳۳- $-\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}$

۲۰۳٤- $-\frac{۱}{٦}\ln\frac{(\sin x+\cos x)^۲}{۱-\sin x\cos x}-$

$-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{۲\cos x-\sin x}{\sqrt{۳}\sin x}\right)$

۲۰۳٥- $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}۲x}{\sqrt{۲}}\right)$

۲۰۳٦- $\frac{۱}{٤}\left\{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{٤+۲\sqrt{۲}}}-\sqrt{۲-\sqrt{۲}}\times\right.$

$\left.\times\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{٤-۲\sqrt{۲}}}\right\}$ که در آن $u=\operatorname{tg}۲x$

۲۰۳۷- $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\times$

$\times\ln\frac{\sqrt{۲}-\sin۲x}{\sqrt{۲}+\sin۲x}$

۲۰۳۸- $\frac{۱}{۲}\operatorname{arc\,tg}(\sin^۲x)$

۲۰۳۹- $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{۱}{۲}\operatorname{tg}۲x\right)$

۲۰٤۰- $-\frac{z}{٤(z^۲+۲)}+\frac{۳}{٤\sqrt{۲}}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\sqrt{۲}}$

که در آن $z=\operatorname{tg}x$

۲۰٤۱- $\frac{۱}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{۲}+\frac{\varphi}{۲}\right|$ که در آن

$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ و $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

۲۰٤۳- $-\frac{x}{٥}-\frac{۳}{٥}\times$

$\times\ln|\sin x+۲\cos x|$

۲۰٤۳,۱- $۰,۱x+۰,۳\ln|\sin x-۳\cos x|$

۲۰٤٤- $\frac{۳x}{۳٤}+\frac{٥}{۳٤}\ln|٥\sin x+۳\cos x|$

۲۰٤٥- $-\frac{ab_۱+a_۱b}{a^۲+b^۲}\times\frac{۱}{a\sin x+b\cos x}+\frac{aa_۱+bb_۱}{(a^۲+b^۲)^{\frac{۳}{۲}}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{۲}+\frac{\varphi}{۲}\right|$

که در آن $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$ و $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$

۲۰٤۷- $-\frac{۳x}{٥}+\frac{٤}{٥}\ln|\sin x-۲\cos x+۳|-\frac{٦}{٥}\operatorname{arc\,tg}\frac{٥\operatorname{tg}\frac{x}{۲}+۱}{۲}$

۲۰٤۸- $\frac{x}{۲}-\frac{۱}{۲}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{۲}-\frac{\pi}{۸}\right)-\frac{۱}{۲}\ln\left(\sqrt{۲}+\sin x+\cos x\right)$

۲۰٤۹- $\frac{۲}{٥}x-\frac{۱}{٥}\ln|۳\sin x+٤\cos x-۲|+\frac{٤}{٥\sqrt{۲۱}}\times$

$\times\ln\left|\frac{\sqrt{۷}+\sqrt{۳}\left(۲\operatorname{tg}\frac{x}{۲}-۱\right)}{\sqrt{۷}-\sqrt{۳}\left(۲\operatorname{tg}\frac{x}{۲}-۱\right)}\right|$

۲۰٥۱- $-\sin x+۳\cos x+۲\sqrt{۲}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۸}\right)\right|$

۲۰٥۲- $\frac{۱}{٥}(\sin x+۳\cos x)+\frac{۸}{٥\sqrt{٥}}\ln\left|\frac{\sqrt{٥}-۱+۲\operatorname{tg}\frac{x}{۲}}{\sqrt{٥}+۱-۲\operatorname{tg}\frac{x}{۲}}\right|$

۲۰٥٤- $-\frac{۲}{\sqrt{۳}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{۳}}\right)-\frac{۱}{٤}\ln\frac{۲+\sin x}{۲-\sin x}$ ‏۲۰٥٥-

$\frac{۳}{٥}\operatorname{arc\,tg}(\sin x-۲\cos x)+\frac{۱}{۱۰\sqrt{٦}}\ln\frac{\sqrt{٦}+۲\sin x+\cos x}{\sqrt{٦}-۲\sin x-\cos x}$ ‏۲۰٥٦-

$\frac{۳}{٤\sqrt{۲}}\ln\left|\frac{\sqrt{۲}(\sin x+\cos x)+۱}{\sqrt{۲}(\sin x+\cos x)-۱}\right|-\frac{۱}{٤\sqrt{٦}}\ln\left|\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}(\sin x-\cos x)}\right|$

۲۰٥۸- $\frac{۲\sin x-\cos x}{۱۰(\sin x+۲\cos x)^{۲}}+\frac{۱}{۱۰\sqrt{٥}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{۲}+\frac{\operatorname{arc\,tg}۲}{۲}\right)\right|$

۲۰٥۹- $A=-\frac{b}{(n-۱)(a^{۲}-b^{۲})},\quad B=\frac{(۲n-۳)a}{(n-۱)(a^{۲}-b^{۲})},\quad C=-\frac{n-۲}{(n-۱)(a^{۲}-b^{۲})}$

۲۰٦۰- $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\ln\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۱+\sin^{۲}x}}{|\cos x|}$ ‏۲۰٦۱- $۲\sqrt{\operatorname{tg}x}-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\times$

$\times\ln\frac{\operatorname{tg}x+\sqrt{۲\operatorname{tg}x}+۱}{\operatorname{tg}x-\sqrt{۲\operatorname{tg}x}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{۲\operatorname{tg}x}}{\operatorname{tg}x-۱}\quad(\operatorname{tg}x>۰)$

۲۰٦۲- $\frac{۱}{۲}\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{۳}}\right)-\frac{۱}{۲}\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{۲+\sin ۲x}\right)$

٢٠٦٣- $-\frac{\varepsilon \sin x}{(١-\varepsilon^٢)(١+\varepsilon\cos x)}+\frac{٢}{(١-\varepsilon^٢)^{\frac{٣}{٢}}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{١-\varepsilon}{١+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{٢}\right)$

٢٠٦٤- $(\cos a \neq ٠)$ $-\frac{٢}{n\cos a}\left(\cos\frac{x+a}{٢}\right)^{n}\left(\sin\frac{x-a}{٢}\right)^{-n}$ ٢٠٦٥-

$I_n=٢I_{n-١}\cos a-I_{n-٢}+\frac{٢\sin a}{n-١}\,t^{n-١}$ که در آن $n>٢$ و × $t=\sin\frac{x-a}{٢}$

$\times\left(\sin\frac{x+a}{٢}\right)^{-١}$ ٢٠٦٨- $e^{٣x}\left(\frac{x^٣}{٣}-\frac{x^٢}{٣}+\frac{٢x}{٩}-\frac{٢}{٢٧}\right)$ ٢٠٦٩- $-e^{-x}(x^٢+٢)$

٢٠٧٠- $-\left(\frac{x^٥}{٥}-\frac{٤x^٣}{٢٥}+\frac{٢٤x}{٦٢٥}\right)\cos ٥x+\left(\frac{x^٤}{٥}-\frac{١٢x^٢}{١٢٥}+\frac{٢٤}{٣١٢٥}\right)\sin ٥x$

٢٠٧١- $(٢١-١٠x^٢+x^٤)\sin x-(٢٠x-٤x^٣)\cos x$ ٢٠٧٢- $-\frac{e^{-x^٢}}{٢}\times$

$\times(x^٦+٣x^٤+٦x^٢+٦)$ ٢٠٧٣- $٢e^{t}(t^٥-٥t^٤+٢٠t^٣-٦٠t^٢+١٢٠t-١٢٠)$

که در آن $t=\sqrt{x}$ ٢٠٧٤- $e^{ax}\left[\frac{١}{٢a}+\frac{a\cos ٢bx+٢b\sin ٢bx}{٢(a^٢+٤b^٢)}\right]$

٢٠٧٥- $\frac{e^{ax}}{٤}\left[\frac{٣(a\sin bx-b\cos bx}{a^٢+b^٢}-\frac{a\sin ٣bx-٣b\cos ٣bx}{a^٢+٩b^٢}\right]$

٢٠٧٦- $\frac{e^{x}}{٢}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]$ ٢٠٧٧- $\frac{e^{x}}{٢}[x^٢(\sin x+\cos x)-$

$-٢x\sin x+(\sin x-\cos x)]$ ٢٠٧٨- $e^{x}\left[\frac{x-١}{٢}-\frac{x}{١٠}(٢\sin ٢x+\cos ٢x)+\right.$

$\left.+\frac{١}{٥٠}(٤\sin ٢x-٣\cos ٢x)\right]$ ٢٠٧٩- $\frac{١}{٤}x^٤+\frac{٣}{٤}x^٢+٣x^٢\cos x-$

$-x\left(٦\sin x+\frac{٣}{٤}\sin ٢x\right)-\left(٥\cos x+\frac{٣}{٨}\cos ٢x\right)-\frac{١}{٣}\cos^٣ x$

٢٠٨٠- $\frac{x}{٢}+\frac{١}{٢}\sqrt{x}\,\sin(٢\sqrt{x})+\frac{١}{٤}\cos(٢\sqrt{x})$

٢٠٨٢- $x+\frac{١}{١+e^{x}}-\ln(١+e^{x})$ ٢٠٨٣- $e^{x}-\ln(١+e^{x})$

٢٠٨٤- $-\frac{x}{٢}+\frac{١}{٣}\ln|e^{x}-١|+\frac{١}{٦}\ln(e^{x}+٢)$ ٢٠٨٥-

$x-٣\ln\left\{\left(١+e^{\frac{x}{٦}}\right)\sqrt{١+e^{\frac{x}{٣}}}\right\}-٣\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x}{٦}}$

$$-٢\arcsin\left(e^{-\frac{x}{٢}}\right)-٢٠٨٧ \qquad x+\frac{٨}{١+e^{\frac{x}{٢}}}-٢٠٨٦$$

$$\sqrt{e^{٢x}+٤e^{x}-١}+-٢٠٨٩ \quad \ln\left(e^{x}+\sqrt{e^{٢x}-١}\right)+\arcsin(e^{-x})-٢٠٨٨$$

$$-٢٠٩٠ \qquad +٢\ln\left(e^{x}+٢+\sqrt{e^{٢x}+٤e^{x}-١}\right)-\arcsin\frac{٢e^{x}-١}{e^{x}\sqrt{٥}}$$

$$-\frac{١}{٢}e^{-x}\left(\sqrt{١+e^{x}}-\sqrt{١-e^{x}}\right)+\frac{١}{٤}\ln\frac{\left(\sqrt{١+e^{x}}-١\right)\left(١-\sqrt{١-e^{x}}\right)}{\left(\sqrt{١+e^{x}}+١\right)\left(١+\sqrt{١-e^{x}}\right)}$$

$$e^{x}\left(١-\frac{٤}{x}\right)-٢٠٩٣ \quad a_{١}+\frac{a_{٢}}{١!}+\frac{a_{٣}}{٢!}+\ldots+\frac{a_{n}}{(n-١)!}=٠-٢٠٩٢$$

$$e^{٤}\operatorname{li}(e^{٢x-٤})-e^{٢}\operatorname{li}(e^{٢x-٢})-٢٠٩٥ \qquad -e^{-x}-\operatorname{li}(e^{-x})-٢٠٩٤$$

$$\frac{e^{٢x}}{٢}\left(x^{٢}+٣x+\frac{٢١}{٢}-\frac{٣٢}{x-٢}\right)+٦٤e^{٤}\operatorname{li}(e^{٢x-٤})-٢٠٩٧ \quad \frac{e^{x}}{x+١}-٢٠٩٦$$

$$x[\ln^{n}x-n\ln^{n-١}x+n(n-١)\ln^{n-٢}x+\ldots+(-١)^{n-١}\times \qquad -٢٠٩٨$$

$$\frac{x^{٤}}{٤}(\ln^{٣}x-\frac{٣}{٤}\ln^{٢}x+-٢٠٩٩ \qquad \times n(n-١)\ldots٢\ln x+(-١)^{n}n!]$$

$$-\frac{١}{٢x^{٢}}\left(\ln^{٣}x+\frac{٣}{٢}\ln^{٢}x+\frac{٣}{٢}\ln x+\frac{٣}{٤}\right)-٢١٠٠ \qquad +\frac{٣}{٨}\ln x-\frac{٣}{٣٢})$$

$$x\ln^{٢}(x+\sqrt{١+x^{٢}}-٢\sqrt{١+x^{٢}}\times-٢١٠٢ \quad \ln(x+a)\ln(x+b)-٢١٠١$$

$$-\frac{x}{٢}+x\ln\left(\sqrt{١-x}+\sqrt{١+x}\right)+-٢١٠٣ \quad \times\ln\left(x+\sqrt{١+x^{٢}}\right)+٢x$$

$$-٢١٠٥ \quad \frac{x\ln x}{\sqrt{١+x^{٢}}}-\ln\left(x+\sqrt{١+x^{٢}}\right)-٢١٠٤ \qquad +\frac{١}{٢}\arcsin x$$

$$-\frac{x}{٣}+\frac{١}{٣}\times-٢١٠٦ \quad -\frac{x}{٢}+\frac{١}{٢}\ln(x^{٢}+٢x+٢)+\frac{x^{٢}}{٢}\operatorname{arc\,tg}(x+١)$$

$$-\frac{٣+x}{٤}\sqrt{٢x-x^{٢}}+-٢١٠٧ \quad \times\ln(١+x)+\frac{٢x\sqrt{x}}{٣}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$$

$$\frac{١}{٢}\sqrt{x-x^{٢}}+\left(x-\frac{١}{٢}\right)\arcsin\sqrt{x}-٢١٠٨ \quad +\frac{٢x^{٢}-٣}{٤}\arcsin(١-x)$$

$$-٢\operatorname{sgn}(١-x)\times-٢١١٠ \quad -\frac{\operatorname{sgn}x}{٢}\sqrt{x^{٢}-١}+\frac{x^{٢}}{٢}\arccos\frac{١}{x}-٢١٠٩$$

$$\frac{x\arccos x}{\sqrt{١-x^{٢}}}-\ln\sqrt{١-x^{٢}}-٢١١١ \quad \times\sqrt{x}+(١+x)\arcsin\frac{٢\sqrt{x}}{١+x}$$

۲۱۱۲ - $\frac{\operatorname{arc\,cos} x}{\sqrt{۱ - x^{۲}}} + \frac{۱}{۲} \ln \frac{۱ + x}{۱ - x}$ ۲۱۱۳ - $x - \operatorname{arc\,tg} x +$

$+ \left(\frac{۱ + x^{۲}}{۲} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{۲}\right) [\ln(۱ + x^{۲}) - ۱]$ ۲۱۱۴ - $x - \frac{۱ - x^{۲}}{۲} \ln \frac{۱ + x}{۱ - x}$

۲۱۱۵ - $\frac{x}{\sqrt{۱ + x^{۲}}} \ln\left(x + \sqrt{۱ + x^{۲}}\right) - \ln \sqrt{۱ + x^{۲}}$

۲۱۱۶ - $\frac{\operatorname{sh} ۴x}{۳۲} - \frac{x}{۸}$ ۲۱۱۷ - $\frac{\operatorname{sh} ۴x}{۳۲} + \frac{\operatorname{sh} ۲x}{۴} + \frac{۳x}{۸}$

۲۱۱۸ - $\operatorname{ch} x - \frac{\operatorname{ch}^{۳} x}{۳}$ ۲۱۱۹ - $\frac{\operatorname{ch} ۲x}{۸} - \frac{\operatorname{ch} ۶x}{۱۶} - \frac{\operatorname{ch} ۶x}{۲۴}$ ۲۱۲۰ - $\ln \operatorname{ch} x$

۲۱۲۱ - $x - \operatorname{cth} x$ ۲۱۲۲ - $۰,۵ \left[\ln\left(e^{۲x} + \sqrt{e^{۴x} - ۱}\right) + \arcsin(e^{-۲x})\right]$

۲۱۲۳ - $\frac{۲}{\sqrt{۳}} \operatorname{arc\,tg} ۳^{-\frac{۱}{۲}}\left(۲ \operatorname{th} \frac{x}{۲} + ۱\right)$ ۲۱۲۳,۱ - $\frac{۱}{\sqrt{۵}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{th} x - ۲}{\sqrt{۵}}$

۲۱۲۳,۲ - $\frac{۲۰}{۳\sqrt{۱۱}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{۳ \operatorname{th} \frac{x}{۲}}{\sqrt{۱۱}}\right)$ ۲۱۲۳,۳ - $\frac{۳}{۷} \times - \frac{۴}{۷} x -$

$\ln |۳ \operatorname{sh} x - ۴ \operatorname{ch} x| \times$ ۲۱۲۴ - $\frac{a \operatorname{ch} ax \sin bx - b \operatorname{sh} ax \cos bx}{a^{۲} + b^{۲}}$

۲۱۲۵ - $\frac{a \operatorname{ch} ax \cos bx + b \operatorname{sh} ax \sin bx}{a^{۲} + b^{۲}}$ ۲۱۲۶ - $\operatorname{arc\,tg} x - \frac{۱}{x} + \frac{۱}{۳x^{۳}} - \frac{۱}{۵x^{۵}}$

۲۱۲۷ - $\ln \left|\frac{۱ + x}{۱ - x}\right| \frac{۱}{۱۶} - \frac{x + x^{۳}}{(۱ - x^{۲})^{۲}} \times \frac{۱}{۸}$

۲۱۲۸ - $\operatorname{arc\,tg} \frac{۱ - x^{۲}}{x\sqrt{۳}} \frac{۱}{۲\sqrt{۳}} - \ln \frac{۱ + x\sqrt{۳} + x^{۲}}{۱ - x\sqrt{۳} + x^{۲}} \frac{۱}{۴\sqrt{۳}}$

۲۱۲۹ - $(x \geqslant ۰) \quad ۲\sqrt{x} - ۳\sqrt[۳]{x} + ۶\sqrt[۶]{x} - ۶ \ln\left(\sqrt[۶]{x} + ۱\right)$

۲۱۳۰ - $(۰ < x < ۱) \quad \arcsin \sqrt{x} \, \frac{۵}{۸} + \sqrt{x(۱ - x)} \, (۱۵ + ۱۰x + ۸x^{۲}) \frac{۱}{۲۴} -$

۲۱۳۱ - $(|x| < ۱) \quad \ln \frac{۱ + \sqrt{۱ - x^{۲}}}{|x|} - \sqrt{۱ - x^{۲}} \frac{۲}{x} -$ ۲۱۳۲ - $\frac{۴}{۳} \times -$

$(x > ۰) \quad \sqrt{۱ - x\sqrt{x}} \times$ ۲۱۳۳ - $\frac{۱}{۱۵}(۸ - ۴x^{۲} + ۳x^{۴}) \sqrt{۱ + x^{۲}}$

۲۱۳٤- $\frac{۱}{۲}\ln\frac{(۱+z)^{۲}}{۱-z+z^{۲}}-\sqrt{۳}\,\text{arc tg}\,\frac{۲z-۱}{\sqrt{۳}}$ که در آن $z=\sqrt[۳]{\frac{۱-x}{x}}$

۲۱۳٥- $-\frac{۱}{۳}\ln\left|\frac{۲+x^{۳}+۲\sqrt{۱+x^{۳}+x^{٦}}}{x^{۳}}\right|$ ۲۱۳٦- $\frac{۱}{۲}\,\text{arc cos}\,\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}\sqrt{۲}}$

۲۱۳۷- $(|x|<۱)$ $-\frac{۲+x^{۲}}{x}-\frac{۲}{x}\sqrt{۱-x^{۲}}-۲\,\text{arc sin}\,x$ ۲۱۳۸-

$$-\frac{۱}{۲}(۱+x)^{۲}+\frac{٥+۲x}{٤}\sqrt{x+x^{۲}}+\frac{۳}{۸}\ln\left|x+\frac{۱}{۲}+\sqrt{x+x^{۲}}\right|$$

$(x>۰;\ x<-۱)$

۲۱۳۹- $-\frac{\ln(۱+x+x^{۲})}{۱+x}-\frac{۱}{۲}\ln\frac{(۱+x)^{۲}}{۱+x+x^{۲}}+\sqrt{۳}\,\text{arc tg}\,\frac{۱+۲x}{\sqrt{۳}}$

۲۱٤۰- $\text{arc cos}\,(۲x-۳)\left(x^{۲}+۳x-\frac{٥٥}{۸}\right)+\sqrt{-x^{۲}+۳x-۲}\,\frac{۲x+۲۱}{٤}-$

$(۱<x<۲)$ ۲۱٤۱- $-x^{۲}+\frac{x^{۲}}{۲}\times\ln(٤+x^{٤})+۲\,\text{arc tg}\,\frac{x^{۲}}{۲}$

۲۱٤۲- $-\frac{\sqrt{۱-x^{۲}}}{x}\,\text{arc sin}\,x+\frac{۱}{۲}(\text{arc sin}\,x)^{۲}+\ln|x|\quad(۰<|x|<۱)$

۲۱٤۳- $(۱+\sqrt{۱+x^{۲}})\ln(۱+\sqrt{۱+x^{۲}})-\sqrt{۱+x^{۲}}$ ۲۱٤٤-

$$-\frac{x^{۲}+۷}{۹}\sqrt{x^{۲}+۱}+\frac{(x^{۲}+۱)^{\frac{۳}{۲}}}{۳}\ln\sqrt{x^{۲}-۱}-\frac{۱}{۳}\ln\frac{\sqrt{x^{۲}+۱}-۱}{\sqrt{x^{۲}+۱}+۱}\quad(|x|>۱)$$

۲۱٤٥- $\left(\frac{۳-x}{۱-x}-\ln\frac{x}{\sqrt{۱-}}\right)\sqrt{۱-x^{۲}}-\frac{۱}{۲}\,\text{arc sin}\,x-\ln\frac{۱+\sqrt{۱-x^{۲}}}{x}$

$(۰<x<۱)$ ۲۱٤٦- $\frac{\cos x}{۳(۲+\sin x)}+\frac{٤}{۳\sqrt{۳}}\,\text{arc tg}\,\frac{۲\,\text{tg}\,\frac{x}{۲}+۱}{\sqrt{۳}}$

۲۱٤۷- $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\ln\frac{۷+٤\sqrt{۲}+\cos ٤x}{۷-٤\sqrt{۲}-\cos ٤x}$

۲۱٤۸- $\frac{۱}{\sqrt{۱+\cos x}}-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\ln\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۱+\cos x}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۱+\cos x}}$

۲۱٤۹- $a\left[x\,\text{arc tg}\,x-\frac{۱}{۲}\ln(x^{۲}+۱)\right]-\frac{a-b}{۲}(\text{arc tg}\,x)^{۲}$

٢١٥٠- $a\left(x\ln\left|\frac{x-١}{x+١}\right|-\ln|x^٢-١|\right)+\frac{a+b}{٤}\ln^٢\left|\frac{x-١}{x+١}\right|$ ٢١٥١-

$-\frac{\ln x}{٢(١+x^٢)}+\frac{١}{٤}\ln\frac{x^٢}{١+x^٢}\quad(x>٠)$ ٢١٥٢- $\sqrt{١+x^٢}\ \operatorname{arc\,tg} x-$

$-\ln\left(x+\sqrt{١+x^٢}\right)$ ٢١٥٣- $-\ln\left(\cos^٢x+\sqrt{١+\cos^٤x}\right)$

٢١٥٤- $(|x|<١)\ -\frac{٦x+x^٣}{٩}-\frac{٢+x^٢}{٣}\sqrt{١-x^٢}\arccos$

٢١٥٥- $-\frac{x^٢}{٦}-\left(x-\frac{x^٣}{٣}\right)\operatorname{arc\,tg} x+\frac{١}{٢}(\operatorname{arc\,tg} x)^٢+\frac{٢}{٣}\ln(١+x^٢)$

٢١٥٦- $-\frac{x}{٤(١+x^٢)}-\frac{١-x^٢}{٤(١+x^٢)}\operatorname{arc\,ctg} x$

٢١٥٧- $(|x|<١)\quad\frac{\ln\left(x+\sqrt{١+x^٢}\right)}{٢(١-x^٢)}+\frac{١}{٤\sqrt{٢}}\ln\frac{\sqrt{١+x^٢}-x\sqrt{٢}}{\sqrt{١+x^٢}+x\sqrt{٢}}$

٢١٥٨- $(|x|<١)\quad -\frac{x^٢}{٤}+\frac{x}{٢}\sqrt{١-x^٢}\arcsin x+\frac{١}{٤}(\arcsin x)^٢$

٢١٥٩- $\frac{x}{٤}+\frac{x^٣}{١٢}+\frac{١}{٤}(١+x^٢)^٢\operatorname{arc\,ctg} x$ ٢١٦٠- $x^x(x>٠)$

٢١٦١- $x-e^{-x}\arcsin(e^x)-\ln\left(١+\sqrt{١-e^{٢x}}\right)\quad(x<٠)$

٢١٦٢- $x-\ln(١+e^x)-٢e^{-\frac{x}{٢}}\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{٢}}-\left(\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{٢}}\right)^٢$

٢١٦٣- $-\frac{\operatorname{cth}١}{٤}[x-\ln(١+e^x\operatorname{ch}١)]-\frac{e^{-x}}{٤\operatorname{sh}١}$

٢١٦٤- $-٢\ln\left(\operatorname{th}x+\sqrt{١+\operatorname{th}^٢x}\right)+\frac{١}{\sqrt{٢}}\ln\frac{\sqrt{١+\operatorname{th}^٢x}+\sqrt{٢}\operatorname{th}x}{\sqrt{١+\operatorname{th}^٢x}-\sqrt{۴}\operatorname{th}x}$

٢١٦٥- $e^x\operatorname{tg}\frac{x}{٢}$ ٢١٦٦- $\frac{x|x|}{٢}$ ٢١٦٧- $\frac{x^٢|x|}{٣}$

٢١٦٨- $\frac{٢x^٢}{٣}(x+|x|)$ ١٢٦٩- $\frac{(١+x)|١+x|}{٢}+\frac{(١-x)|١-x|}{٢}$

٢١٧٠- $e^x-١$ اگر $x<٠$ ؛ $١-e^{-x}$ اگر $x\geqslant ٠$

٢١٧١- x اگر $|x|\leqslant ١$ ؛ $\frac{x^٣}{٣}+\frac{٢}{٣}\operatorname{sgn} x$ اگر $|x|>١$

٢١٧٢- $\frac{x}{٤}+\frac{١}{٤}\left((x)-\frac{١}{٢}\right)\left\{١-٢\left|(x)-\frac{١}{٢}\right|\right\}$ که در آن

$(x) = x - [x]$ ۲۱۷۳ - $\frac{[x]}{\pi}\{[x] - (-۱)^{[x]}\cos\pi x\}$

۲۱۷٤ - $x - \frac{x^۳}{۳}$ بازای $|x| \leqslant ۱$ ؛ $x - \frac{x}{۲}|x| + \frac{۱}{۶}\operatorname{sgn} x$ بازای $|x| > ۱$

۲۱۷۵ - x اگر $-\infty < x \leqslant ۰$ ؛ $\frac{x^۲}{۲} + x$ اگر $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ ؛

$x^۲ + \frac{۱}{۲}$ اگر $x > ۱$ ۲۱۷۶ - $xf'(x) - f(x)$ ۲۱۷۷ - $\frac{۱}{۲}f(۲x)$

۲۱۷۸ - $f(x) = ۲\sqrt{x}$ ۲۱۷۹ - $x - \frac{x^۲}{۲}$ ۲۱۸۰ - $f(x) = x$ بازای
$-\infty < x \leqslant ۰$ ؛ $f(x) = e^x - ۱$ بازای $۰ < x < +\infty$

فصل ٤

۲۱۸۱ - $۱۲\frac{۱}{۲}$ ۲۱۸۲ - الف) $\underline{S}_n = ۱۶\frac{۱}{٤} - \frac{۱۷۵}{۲n} + \frac{۱۲۵}{٤n^۲}$ ،

$\overline{S}_n = ۱۶\frac{۱}{٤} + \frac{۱۷۵}{۲n} + \frac{۱۲۵}{٤n^۲}$ ؛ ب) $\underline{S}_n = \frac{۱}{n}\sum_{i=۰}^{n-۱}\sqrt{\frac{i}{n}}$ ،

$\overline{S}_n = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$ ؛ پ) $\underline{S}_n = \frac{۱۰۲۳۰}{n\left(۲^{\frac{۱۰}{n}} - ۱\right)}$ ، $\overline{S}_n = \frac{۱۰۲۰ \times ۲^{\frac{۱۰}{n}}}{n\left(۲^{\frac{۱۰}{n}} - ۱\right)}$

۲۱۸۳ - $\underline{S}_n = ۳۱ \times \frac{\sqrt[n]{۲} - ۱}{\sqrt[n]{۳۲} - ۱}$ ؛ $\frac{۳۱}{۵}$ ۲۱۸٤ - $v_۰T + \frac{۱}{۲}gT^۲$

۲۱۸۵ - ۳ ۲۱۸۶ - $\frac{a - ۱}{\ln a}$ ۲۱۸۷ - ۱ ۲۱۸۸ - $\sin x$

۲۱۸۹ - $\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}$ ۲۱۹۰ - $\frac{b^{m+۱} - a^{m+۱}}{m+۱}$ ۲۱۹۱ - $\ln\frac{b}{a}$

۲۱۹۲ - الف) ۰ اگر $|\alpha| < ۱$ ؛ ب) $\pi\ln\alpha^۲$ اگر $|\alpha| > ۱$

۲۱۹۳,٤ - $\frac{b-a}{۲}[f(a) - f(b)]$ ۲۲۰۱ - بطور کلی نه ۲۲۰۳ - حتمی نیست

۲۲۰۶ - $۱۰۱\frac{۱}{٤}$ ۲۲۰۷ - ۲ ۲۲۰۸ - $\frac{\pi}{۶}$ ۲۲۰۹ - $\frac{\pi}{۳}$ ۲۲۱۰ - ۱

۲۲۱۱– ۱ ‏ ۲۲۱۲– $\frac{\pi}{۲\sin\alpha}$ ‏ ۲۲۱۳– $\frac{۲\pi}{\sqrt{۱-\varepsilon^۲}}$

۲۲۱۴– $\frac{۱}{\sqrt{ab}}\ln\frac{۱+\sqrt{ab}}{۱-\sqrt{ab}}$ ‏ ۲۷۱۵– $\frac{\pi}{۲|ab|}$ ‏ ۲۲۱۶– الف) تابع تحت

انتگرال $\frac{۱}{x}$ و تابع اولیهٔ آن $\ln|x|$ در فاصلهٔ انتگرال گیری $[-۱, ۱]$ منفصل‌اند ؛

ب) تابع $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{۲}}\right)$ بازیگر نقشهٔ تابع اولیه بازای $۰\leqslant x\leqslant ۲\pi$

منفصل است ؛ پ) تابع $\operatorname{arc\,tg}\frac{۱}{x}$ بازای $x=۰$ منفصل است .

۲۲۱۷– $\frac{۲}{۳}$ ‏ ۲۲۱۸– $۲۰۰\sqrt{۲}$ ‏ ۲۲۱۹– $\frac{۱}{۲}$ ‏ ۲۲۲۰– $\ln ۲$

۲۲۲۱– $\frac{\pi}{۴}$ ‏ ۲۲۲۲– $\frac{۲}{\pi}$ ‏ ۲۲۲۳– $\frac{۱}{p+۱}$ ‏ ۲۲۲۴– $\frac{۲}{۳}\left(۲\sqrt{۲}-۱\right)$

۲۲۲۵– $\frac{۱}{e}$ ‏ ۲۲۲۶– $\frac{۱}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ‏ ۲۲۲۷– $\frac{۵}{۶}\pi$ ‏ ۲۲۲۸– $\frac{\pi}{\sqrt{۳}}$

۲۲۲۹– $x+\frac{۱}{۲}$ ‏ ۲۲۳۰– $\frac{۱}{\ln ۲}$ ‏ ۲۲۳۱– ۰ ؛ $-\sin a^۲$ ؛ $\sin b^۲$

۲۲۳۲– الف) $۲x\sqrt{۱+x^۴}$ ؛ ب) $\frac{۳x^۲}{\sqrt{۱+x^{۱۲}}}-\frac{۲x}{\sqrt{۱+x^۸}}$ ؛

پ) $(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^۲x)$ ‏ ۲۲۳۳– الف) ۱ ؛ ب) $\frac{\pi^۲}{۴}$ ؛ پ) ۰ .

۲۲۳۳,۱– A ‏ ۲۲۳۵– ۱ ‏ ۲۲۳۷– الف) $\frac{۵}{۶}$ ؛ ب) $\frac{t}{۲}$

۲۲۳۸– الف) $\frac{۱}{۳}-\frac{\alpha}{۲}$ اگر $\alpha<۰$ ؛ $\frac{۱}{۳}-\frac{\alpha}{۲}+\frac{\alpha^۳}{۳}$ اگر

$۰\leqslant\alpha\leqslant۱$ ؛ $\frac{\alpha}{۲}-\frac{۱}{۳}$ اگر $\alpha>۱$ ؛ ب) $\frac{\pi}{۲}$ اگر $|\alpha|\leqslant۱$ ؛

$\frac{\pi}{۲\alpha^۲}$ اگر $|\alpha|>۱$ ؛ پ) ۲ اگر $|\alpha|\leqslant۱$ ؛ $\frac{۲}{|\alpha|}$ اگر $|\alpha|>۱$

۲۲۳۹– $\frac{۱}{۲}\ln\frac{e}{۲}$ ‏ ۲۲۴۰– π ‏ ۲۲۴۱– ۴π ‏ ۲۲۴۲– $۲\left(۱-\frac{۱}{e}\right)$

۲۲۴۳ – ۱   ۲۲۴۴ – $\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{۲\pi}{۳}$ ۲۲۴۵ – $\frac{۱}{۶}$ ۲۲۴۶ – $\frac{\pi a^۴}{۱۶}$

۲۲۴۷ – $\frac{۱}{\sqrt{۲}} \ln \frac{۹ + ۴\sqrt{۲}}{۷}$ ۲۲۴۸ – $۲ - \frac{\pi}{۲}$ ۲۲۴۹ – $\frac{\pi^۲}{۴}$

۲۲۵۰ – $\frac{\pi}{\sqrt{۲}}$ ۲۲۵۱ – الف) تابع معکوس $x = \pm t^{\frac{۳}{۲}}$ دو مقداری است ؛ ب) تابع $x = \frac{۱}{t}$ بازای $t = ۰$ منفصل است ؛ پ) شاخهٔ پیوستهٔ تک مقداری تابع $x = \text{Arc tg}\, t$ معین و پیماینده مقادیر قطعهٔ متناهی از ۰ تا π وجود ندارد.

۲۲۵۲ – خیر   ۲۲۵۳ – میتوان   ۲۲۵۶ – $f(x+b) - f(x+a)$

۲۲۶۰ – $\frac{۳}{۲} e^{\frac{۵}{۲}}$ ۲۲۶۱ – $\int_۰^۱ [f(\text{arc} \sin t) - f(\pi - \text{erc} \sin t)] +$

$+ \int_{-۱}^{۰} [f(۲\pi + \text{arc} \sin t) - f(\pi - \text{arc} \sin t)]\, dt$ ۲۲۶۲ – $۴n$

۲۲۶۳ – $\frac{\pi^۲}{۴}$ ۲۲۶۴ – $۲\pi - \text{arc tg} \frac{۳۲}{۲۷}$ ۲۲۶۸ – $۳۱۵\frac{۱}{۲۶}$

۲۲۶۹ – $\frac{۱}{۲} \ln ۳ - \frac{\pi}{۲\sqrt{۳}}$ ۲۲۷۰ – $\frac{۵}{۲۷} e^۳ - \frac{۲}{۲۷}$ ۲۲۷۱ – $-۶۶\frac{۶}{۷}$

۲۲۷۲ – $-\frac{\pi}{۳}$ ۲۲۷۳ – $\frac{۲۹}{۲۷۰}$ ۲۲۷۴ – $\frac{۴}{۳}\pi - \sqrt{۳}$

۲۲۷۵ – $۲\pi\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}} - \frac{۲}{۲\sqrt{۲}}\right)$ ۲۲۷۶ – $۲\pi\sqrt{۲}$ ۲۲۷۷ – $\frac{۱}{۶}$

۲۲۷۸ – $\frac{\pi^۳}{۶} - \frac{\pi}{۴}$ ۲۲۷۹ – $\frac{۳}{۵}(e^n - ۱)$ ۲۲۸۰ – $\frac{۳}{۸} \ln ۲ - \frac{۲۲۵}{۱۰۲۴}$

۲۲۸۱ – $I_n = \frac{(۲k-۱)!!}{(۲k)!!} \times \frac{\pi}{۲}$ اگر $n = ۲k$ ؛ $I_n = \frac{(۲k)!!}{(۲k+۱)!!}$

اگر $n = ۲k + ۱$ ۲۲۸۲ – شمارهٔ ۲۲۸۱ را ببینید.   ۲۲۸۳ –

$-(۱)^n \left[\frac{\pi}{۴} - \left(۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \ldots + \frac{(-۱)^{n-۱}}{۲n-۱}\right)\right]$ ۲۲۸۴ – $۲^{۲n} \frac{(n!)^۲}{(۲n+۱)!}$

۲۲۸۵ – شمارهٔ ۲۲۸۱ را ببینید.   ۲۲۸۶ – $I_n = \frac{(-۱)^n n!}{(m+۱)^{n+۱}}$

۲۲۸۷- $I_n = (-۱)^n \left\{-\ln \sqrt{۲} + \frac{۱}{۲}\left[۱ - \frac{۱}{۲} + \dots + (-۱)^{n-۱}\frac{۱}{n}\right]\right\}$

۲۲۹۰- $\frac{\pi\,(۲m)!\,(۲n)!}{۲^{۲m+۲n+۱}m!\,n!\,(m+n)!}$ ۲۲۹۱- ۰ ، اگر n زوج ، π اگر
n فرد باشد . ۲۲۹۲- $(-۱)^n\pi$ ۲۲۹۳- $\frac{\pi}{۲^n}$ ۲۲۹۴- $\frac{\pi}{۲^n}\sin\frac{n\pi}{۲}$

۲۲۹۵- ۰ ۲۲۹۶- ۰

۲۲۹۷- $$\frac{۱}{۲^{۲n}a}\left(۱-e^{-۲a\pi}\right)\left[C_{۲n}^{n} + ۲\sum_{k=۰}^{n-۱} C_{۲n}^{k}\frac{a^۲}{a^۲+(۲n-۲k)^۲}\right]$$

۲۲۹۸- $\frac{\pi}{۴n}(-۱)^{n-۱}$ ۲۲۹۹- $\frac{(m-۱)!\,(n-۱)!}{(m+n-۱)!}$ ۲۳۰۲- در نقاط
انفصال تابع $f(x)$ مشتق $F'(x)$ ممکن است وجود داشته باشد و یا نداشته باشد.

۲۳۰۳- $|x|+C$ ۲۳۰۴- $\arccos(\cos x)+C$ ۲۳۰۵- $x[x]-\frac{[x]([x]+۱)}{۲}+C$

۲۳۰۶- $\frac{x^۲[x]}{۲}-\frac{[x]([x]+۱)(۲[x]+۱)}{۱۲}+C$ ۲۳۰۷- $C+\frac{۱}{\pi}\arccos(\cos\pi x)$

۲۳۰۸- $\frac{۱}{۲}(|l+x||-|l-x|)+C$ ۲۳۰۹- -۱ ۲۳۱۰- $۱۴-\ln ۸!$

۲۳۱۱- $\frac{۳۰}{\pi}$ ۲۳۱۲- $-\frac{\pi^۲}{۴}$ ۲۳۱۳- $\ln n!$ ۲۳۱۴- $-\operatorname{th}\frac{\pi}{۲}$

۲۳۱۵- $\frac{۸}{۳}$ ۲۳۱۶- الف) — ؛ ب) + ؛ پ) + ؛ ت) —

۲۳۱۷- الف) دومی ؛ ب) دومی ؛ پ) اولی ۲۳۱۸- لف) $\frac{۱}{۳}$ ؛

ب) $\frac{۲}{۳}$ ۶ ؛ پ) ۱۰ ؛ ت) $\frac{۱}{۲}\cos\varphi$ ۲۳۱۹- نیم قطر اقصر بیضی :

$b=\frac{p}{\sqrt{۱-\varepsilon^۲}}$ ۲۳۲۰- $v_{\text{متوسط}}=\frac{۱}{۲}(v_۰+v_۱)$ که در آن $v_۱$ سرعت نهایی

جسم است ۲۳۲۱- $\frac{۱}{۲}i_۰^۲$ ۲۳۲۱,۱- A ۲۳۲۲- الف) $\theta=\sqrt[n]{\frac{۱}{n+۱}}$ ؛

ب) $\theta=\frac{۱}{e}$ ؛ پ) $\theta=\frac{۱}{x}\ln\frac{e^x-۱}{x},\quad \lim_{x\to۰}\theta=\frac{۱}{۲},\quad \lim_{x\to+\infty}\theta=۱$

۲۳۲۳- $(|\theta|<۱)\quad \frac{۸\pi}{۳}\pm\frac{۴\pi}{۳}\theta$ ۲۳۲۴- بین $\frac{۱}{۱۰\sqrt{۲}}$ و $\frac{۱}{۱۰}$ قرار دارد

۲۳۲۵- $۰{,}۰۱-۰{,}۰۰۰۵\theta\,(۰<\theta<۱)$ ۲۳۲۶,۱- الف) ۱؛ ب) $f(۰)\ln\frac{b}{a}$

۲۳۲۸- $(۰<\theta<۱)\quad \frac{\theta}{۵۰\pi}$ ۲۳۲۹- $(|\theta|<۱)\quad \frac{۲}{a}\theta$

۲۳۳۰- $(|\theta|<۱)\quad \frac{\theta}{a}$ ۲۳۳۴- $\frac{۱}{a}$ ۲۳۳۵- -۱ ۲۳۳۶- π ۲۳۳۷- π

۲۳۳۸- $\frac{۲}{۳}\ln ۲$ ۲۳۳۹- $\frac{۴\pi}{۳\sqrt{۳}}$ ۲۳۴۰- $\frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}$ ۲۳۴۱- $\frac{\pi}{\sqrt{۲}}$

۲۳۴۲- $\frac{\pi}{۲}$ ۲۳۴۳- $\frac{۱}{۵}\ln\left(۱+\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right)$ ۲۳۴۴- ۰

۲۳۴۵- $\frac{\pi}{۲}-۱$ ۲۳۴۶- $\frac{a}{x^۲+b^۲}$ ۲۳۴۷- $\frac{b}{a^۲+b^۲}$

۲۳۴۸- $I_n=n!$ ۲۳۴۹- $I_n=\frac{(۲n-۳)!!}{(۲n-۲)!!}\times\frac{\pi a^{n-۱}\operatorname{sgn} a}{(ac-b^۲)^{n+\frac{۱}{۲}}}$

۲۳۵۰- $I_n=n!\sum_{k=۱}^{n}(-۱)^{n+۱}C_n^k\ln(k+۱)$ که در آن C_n^k تعداد ترکیبات
n عنصر k به k میباشد ۲۳۵۱- $I_n=\frac{(n-۱)!!}{n!!}\,\frac{\pi}{۲}$ اگر n زوج و
$I_n=\frac{(n-۱)!!}{n!!}$ اگر n فرو باشد ۲۳۵۲- $I_n=\frac{(n-۱)!!}{n!!}\pi$، اگر n زوج و
$I_n=\frac{(n-۱)!!}{n!!}$ اگر n فرد باشد ۲۳۵۳- الف) $-\frac{\pi}{۲}\ln ۲$؛

ب) $-\frac{\pi}{۲}\ln ۲$ ۲۳۵۴- $\frac{۲\sqrt[۴]{۸e}^{\,-\frac{\pi}{۸}}}{۱-e^{-\pi}}$ ۱۲۵۶- الف) ۱؛ ب) $\frac{\pi}{۲}$؛

پ) ۰ ۲۳۵۷- الف) ۱؛ ب) $\frac{۱}{۳}$؛ پ) ۱؛ ت) $\frac{۱}{\alpha}f(۰)$

۲۳۵۸- همگرا ۲۳۵۹- همگرا ۲۳۶۰- واگرا ۲۳۶۱- بازای $p>۰$ همگرا
۲۳۶۲- همگرا اگر $p>-۱$ و $q>-۱$ ۲۳۶۳- همگرا اگر $m>-۱$،
$n-m>۱$ ۲۳۶۴- بازای $۱<n<۲$ همگرا ۲۳۶۵- بازای $۱<n<۲$
همگرا ۲۳۶۶- همگرا اگر $m>-۲$، $n-m>۱$ ۲۳۶۷- بازای

$(a\neq ۰)$ $n>۰$ همگرا ۲۳٦۸ – واگرا ۲۳٦۹ – همگرا اگر $p<۱$ ،
$q<۱$ ۲۳۷۰ – بازای $n>-۱$ همگرا ۲۳۷۰,۱ – همگرا ۲۳۷۱ – همگرا اگر
$\min(p, q)<۱$ ، $\max(p, q)$ ۲۳۷۲ – همگرا ۲۳۷٤ – همگرا اگر
$p>۱$ ، $q<۱$ ۲۳۷٥ – بازای $p>۱$ ، q دلخواه، ، $r<۱$ و بازای
$p=۱$ ، $q>۱$ ، $r<۱$ همگرا است. ۲۳۷٦ – همگرا اگر $p_i<۱$
$(i=۱, ۲, \ldots, n)$ ، $\sum_{i=۱}^{n} p_i>۱$ ۲۳۷٦,۱ – بازای $\alpha>-۱$ ، $\beta>-۱$ ،
$\alpha+\beta<-۱$ همگرا ۲۳۷۸ – همگرا اگر $P_n(x)$ در فاصلهٔ $[۰, +\infty]$
دارای ریشه نباشد و $n>m+۱$ ۲۳۷۸ – همگرای نامطلق ۲۳۷۹ همگرای
نامطلق ۲۳۸۰ – همگرای مطلق اگر $-۱<\frac{p+۱}{q}<۰$ ؛ همگرای مشروط
اگر $۰\leqslant\frac{p+۱}{q}<۱$ ۲۳۸۰,۱ – همگرا ۲۳۸۰,۲ – همگرا ۲۳۸۱ – همگرای
مطلق اگر $p>-۲$ ، $q>p+۱$ ؛ همگرای مشروط اگر $p>-۲$ ،
$p<q\leqslant p+۱$ ۲۳۸۲ – بازای $۰<n<۲$ همگرای مشروط ۲۳۸۳ – بازای
$n>m+۱$ همگرای مطلق ، بازای $m<n\leqslant m+۱$ همگرای مشروط

۲۳۸٥ – خیر ۲۳۹۲ – $\ln\frac{۱}{۲}$ ۲۳۹۳ – ۰ ۲۳۹٤ – π ۲۳۹٥ – ۰

۲۳۹۷ – $\frac{a^۲}{۳}$ ۲۳۹۸ – $\frac{۱}{۲}$ ؛ ۲۳۹۹ – $\frac{۱}{۲}$ ؛ ۲٤۰۰ – $۹,۹-۸,۱\ \lg e\approx ٦,۳۸$

۲٤۰۰,۱ – $۲-\frac{۱}{\ln ۲}\approx ۰,٥٦$ ۲٤۰۰,۲ – $\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{\pi}\approx ۰,۹۷$

۲٤۰۱ – $\frac{\pi}{۲}$ ۲٤۰۲ – $\pi a^۲$ ۲٤۰۳ – πab ۲٤۰٤ – $\frac{٤}{۳}a^۳$

۲٤۰٥ – $\frac{۸۸}{۱٥}\sqrt{۲}\,p^۲$ ۲٤۰٦ – $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^۲}}$ ۲٤۰۷ – $۳\pi a^۲$

۲٤۰۸ – $\frac{\pi a^۲}{۲}$ ۲٤۰۹ – $\frac{۲\pi}{n+۲}$ ۲٤۱۰ – $\frac{۱}{۲}\operatorname{cth}\frac{\pi}{۲}\approx ۰,٥٤٦$
۲٤۱۱ – $(۳\pi+۲):(۹\pi-۲)$ ۲٤۱۲ – $x=\operatorname{ch}S$ ، $y=\operatorname{sh}S$ ۲٤۱۳ – $۳\pi a^۲$

۲٤۱٤ – $\frac{۸}{۱٥}$ ۲٤۱٥ – $\frac{a^۲}{۳}(٤\pi^۳+۳\pi)$ ۲٤۱٦ – $٦\pi a^۲$

۲٤۱۷ – $\frac{۳\pi}{۸}\times\frac{c^٤}{ab}$ ۲٤۱۷,۱ – $\pi a^۲\left(\frac{۱٦}{\sqrt{۳}}-۹\right)$ ۲٤۱۸ – $a^۲$

٢٤١٩ − $\frac{٣\pi a^{٢}}{٢}$ ٢٤٢٠ − $\frac{\pi a^{٢}}{٤}$ ٢٤٢١ − $\frac{p^{٢}}{٦}\left(٣+٤\sqrt{٢}\right)$

٢٤٢٢ − $\frac{\pi p^{٢}}{(١-\varepsilon^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}$ ٢٤٢٢,١ − ١١π ٢٤٢٢,٢ − $\frac{١}{\pi}$ ٢٤٢٣ − $(\pi-١)\frac{a^{٢}}{٤}$

٢٤٢٤ − $\frac{١}{٢}\left(١-\ln ٢+\frac{\pi}{\sqrt{٣}}\right)$ ٢٤٢٤,١ − $\frac{٢}{٣}$ ٢٤٢٤,٢ − $\frac{١}{\pi}$

٢٤٢٤,٣ − $٤\frac{٤}{١٥}$ ٢٤٢٤,٤ − $\pi\left(١+\frac{\pi^{٢}}{٦}\right)$ ٢٤٢٥ − $\pi\left(١-\frac{\pi}{٤}\right)a^{٢}$

٢٤٢٦ − $\frac{٣}{٢}a^{٢}$ ٢٤٢٧ − $\pi a^{٢}\sqrt{٢}$ ٢٤٢٨ − $a^{٢}$ ٢٤٢٩ − $\frac{٣}{٨}\pi a^{٢}$

٢٤٣٠ − $\frac{\pi a^{٢}}{٨\sqrt{٢}}$ ٢٤٣١ − $\frac{٨}{٢٧}\left(١٠\sqrt{١٠}-١\right)$ ٢٤٣٢ −

$٢\sqrt{x_{٠}\left(x_{٠}+\frac{p}{٢}\right)}+p\ln\frac{\sqrt{x_{٠}}+\sqrt{x_{٠}+\frac{p}{٢}}}{\sqrt{\frac{p}{٢}}}$ ٢٤٣٣ − $\sqrt{h^{٢}-a^{٢}}$

٢٤٣٤ − $x_{٠}-\sqrt{٢}+\sqrt{١+e^{٢x_{٠}}}-\ln\frac{١+\sqrt{١+e^{٢x_{٠}}}}{١+\sqrt{٢}}$ ٢٤٣٥ − $\frac{e^{٢}+١}{٤}$

٢٤٣٦ − $a\ln\frac{a+b}{a-b}-b$ ٢٤٣٧ − $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{٤}+\frac{a}{٢}\right)$ ٢٤٣٨ − $a\ln\frac{a}{b}$

٢٤٣٩ − $٤a\left(١+\sqrt{٣}\ln\frac{١+\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}\right)$ ٢٤٤٠ − $٦a$ ٢٤٤١ − $\frac{٤\,(a^{٣}-b^{٣})}{ab}$

٢٤٤٢ − $\frac{\ln\left(١+\sqrt{٢}\right)}{\sqrt{٢}}$ ٢٤٤٣ − $٨a$ ٢٤٤٤ − $٢\pi^{٢}a$ ٢٤٤٥ −

$٢\left(\operatorname{ch}\frac{T}{٢}\sqrt{\operatorname{ch}T}-١\right)-\sqrt{٢}\ln\frac{\sqrt{٢}\operatorname{ch}\frac{T}{٢}+\sqrt{\operatorname{ch}T}}{١+\sqrt{٢}}$ ٢٤٤٥,١ −

$\frac{١}{٢}\left(\operatorname{ch}^{\frac{٣}{٢}}٢T-١\right)$ ٢٤٤٦ − $\pi a\sqrt{١+٤\pi^{٢}}+\frac{a}{٢}\ln\left(٢\pi+\sqrt{١+٤\pi^{٢}}\right)$

٢٤٤٧ − $\frac{\sqrt{١+m^{٢}}}{m}a$ ٢٤٤٨ − $٨a$ ٢٤٤٩ − $p\left[\sqrt{٢}+\ln\left(١+\sqrt{٢}\right)\right]$

٢٤٥٠ − $\frac{٣\pi a}{٢}$ ٢٤٥١ − $a\left(٢\pi-\operatorname{th}\pi\right)$ ٢٤٥٢ − $٢+\frac{١}{٢}\ln ٣$

۲۴۵۲,۱– $۶\frac{۱}{۳}$ ۲۴۵۲,۲– $\operatorname{sh}R$ ۲۴۵۲,۳– T ۲۴۵۵– $۰,۷۳ \approx \frac{۲\pi}{۵\sqrt{۳}}$

۲۴۵۶–– $\frac{bh}{۶}(۲a+c)$ ۲۴۵۷– $\frac{h}{۶}[(۲A+a)B+(A+۲a)b]$

۲۴۵۸– $\frac{\pi h}{۶}[(۲A+a)B+(A+۲a)b]$ ۲۴۵۹– $\frac{۱}{۲}SH$ ۲۴۶۲– $\frac{۲}{۳}abc$

۲۴۶۳– $\frac{۴}{۳}\pi abc$ ۲۴۶۴– $\frac{۸\pi abc}{۳}$ ۲۴۶۵– $\frac{۱۶}{۳}a^۳$

۲۴۶۶– $\frac{۲}{۳}a^۳\left(\pi-\frac{۴}{۳}\right)$ ۲۴۶۷– $\frac{۱۶}{۱۵}a^۲\sqrt{ab}$ ۲۴۶۸– $\frac{\pi a^۳}{۲}$

۲۴۶۹– $\frac{۴}{۱۵}$ ۲۴۷۰– $\frac{۴\pi\sqrt{۲}}{۳}a^۳$ ۲۴۷۲– $\frac{۳}{۷}\pi ab^۲$

۲۴۷۳– الف) $\frac{۱۶\pi}{۱۵}$ ؛ ب) $\frac{۸\pi}{۳}$ ۲۴۷۴– الف) $\frac{\pi^۲}{۲}$ ؛ ب) $۲\pi^۲$

۲۴۷۵– الف) $\frac{۴}{۱۵}\pi ab^۲$ ؛ ب) $\frac{\pi a^۲b}{۶}$ ۲۴۷۶– الف) $\frac{\pi}{۲}$ ؛ ب) ۲π

۲۴۷۷– $۲\pi^۲a^۲b$ ۲۴۷۸– $\frac{۸\pi a^۳}{۳}$ ۸۴۷۹– $\frac{\pi}{۵(۱-e^{-۲\pi})}$ ۲۴۸۰– الف)

$۵\pi^۲a^۳$ ؛ ب) $۶\pi^۳a^۳$ ؛ پ) $۷\pi^۲a^۳$ ۲۴۸۲– الف) $\frac{۳۲}{۱۰۵}\pi ab^۲$ ؛

ب) $\frac{۳۲}{۱۰۵}\pi a^۲b$ ۲۴۸۱,۱– $V_x=\frac{۶۴}{۳۵}\pi$ ؛ $V_y=\frac{۶۴}{۱۰۵}\pi$ ۲۴۸۳– الف)

$\frac{۸}{۳}\pi a^۳$ ؛ ب) $\frac{۱۳}{۳}\pi^۲a^۳$ ۲۴۸۴– الف) $\frac{\pi a^۳}{۴}\left[\sqrt{۲}\ln(۱+\sqrt{۲})-\frac{۲}{۳}\right]$ ؛

ب) $\frac{\pi^۲a^۳}{۴\sqrt{۲}}$ ؛ پ) $\frac{\pi^۲a^۳}{۴}$ ۲۴۸۴,۱– $\frac{۲}{۳}(\pi^۴-۶\pi^۲)a^۳$ ۲۴۸۴,۲– $\frac{۲}{۳}\pi$

۲۴۸۵– $\frac{\pi^۲a^۳}{۲\sqrt{۲}}$ ۲۴۸۶– $\frac{۴\pi a^۲}{۲۴۳}\left(۲۱\sqrt{۱۳}+۲\ln\frac{۳+\sqrt{۱۳}}{۲}\right)$

۲۴۸۷– $۲a\sqrt{\pi^۲a^۲+۴b^۲}+\frac{۸b^۲}{\pi}\ln\frac{\pi a+\sqrt{\pi^۲a^۲+۴b^۲}}{۲b}$

۲۴۸۸– $\pi\left[(\sqrt{۵}-\sqrt{۲})+\ln\frac{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۵}-۱)}{۲}\right]$

۲٤۸۹ – الف) $\frac{۲\pi}{۳}[(۲x_۰+p)\sqrt{۲px_۰+p^۲}-p^۲]$ ؛

ب) $\frac{\pi}{٤}\left[(p+٤x_۰)\sqrt{۲x_۰(p+۲x_۰)}-p^۲\ln\frac{\sqrt{۲x_۰}+\sqrt{p+۲x_۰}}{\sqrt{p}}\right]$

۲٤۹۰ – الف) $۲\pi b^۲+۲\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$ ؛ ب) $۲\pi a^۲+\frac{۲\pi b^۲}{\varepsilon}\ln\left[\frac{a}{b}(۱+\varepsilon)\right]$

که در آن $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^۲-b^۲}}{a}$ خروج از مرکز بیضی است   ۲٤۹۱ – $٤\pi^۲ab$

۲٤۹۲ – $\frac{۱۲}{۵}\pi a^۲$ ۲٤۹۳ – الف) $\pi a\left(۲b+a\,\mathrm{sh}\frac{۲b}{a}\right)$ ؛

ب) $۲\pi a\left(a+b\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}-a\,\mathrm{ch}\frac{b}{a}\right)$ ۲٤۹٤ – $٤\pi a^۲$ ؛ ۲٤۹۵ – الف) $\frac{٦٤}{۳}\pi a^۲$ ؛

ب) $۱٦\pi^۲a^۲$ ؛ پ) $\frac{۳۲}{۳}\pi a^۲$ ۲٤۹٦ – $\frac{۳\pi}{۵}a^۲(٤\sqrt{۲}-۱)$

۲٤۹۷ – $\frac{۳۲}{۵}\pi a^۲$ ۲٤۹۸ – الف) $۲\pi a^۲(۲-\sqrt{۲})$ ؛ ب) $۲\pi a^۲\sqrt{۲}$ ؛

پ) $٤\pi a^۲$ ۲٤۹۹ – $\frac{۵}{۱۲۸\sqrt[۳]{۱۰}}[۱٤\sqrt{۵}+۱۷\ln(۲+\sqrt{۵})]\approx ۱,۰۱۳$

۲۵۰۰ – $V=\frac{٤\pi}{۳}p^۲$ ؛ $P=۲\pi p^۲[(۲+\sqrt{۲})+\ln(۱+\sqrt{۲})]$

۲۵۰۱ – $M_۱=۲a^۲$ ؛ $M_۲=\frac{\pi a^۳}{۲}$ ۲۵۰۱,۱ – $\frac{p^۲}{۸}[\sqrt{۲}+۵\ln(۱+\sqrt{۲})]$

۲۵۰۲ – $M_۱=\frac{bh^۲}{٦}$ ؛ $M_۲=\frac{bh^۳}{۱۲}$ ۲۵۰۲,۱ – $I_x=\frac{۸}{۳۵}a^٤$ ،

$I_y=\frac{۸}{۵}a^٤$ ، $r_x=a\sqrt{\frac{٦}{۳۵}}$ ، $r_y=a\sqrt{\frac{٦}{۵}}$

۲۵۰۳ – $M_۲^{(x)}=\frac{\pi ab^۳}{٤}$ ؛ $M_۲^{(y)}=\frac{\pi a^۳b}{٤}$ ۲۵۰٤ – $M_۱=\frac{\pi r^۲h^۲}{۱۲}$ ،

$M_۲=\frac{\pi}{۳۰}r^۲h^۳$ ۲۵۰٤,۱ – $I=\frac{۲}{۵}MR^۲$ ۲۵۰۷ – $x_۰=a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ ؛

$y_۰=۰$ ۲۵۰۸ – $\left(\frac{۹}{۲۰}a,\ \frac{۹}{۲۰}a\right)$ ۲۵۰۹ – $\left(\frac{٤a}{۳\pi},\ \frac{٤b}{۳\pi}\right)$

٢٥١٠- $\left(٠,\ ٠,\ \frac{٣}{٨}a\right)$ ٢٥١١- $\varphi_{٠} = \varphi - \alpha$ که در آن

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{١}{٢m}$؛ $r_{٠} = \frac{mr}{\sqrt{١+٤m^{٢}}}$؛ حلزونی لگاریتمی

$r_{٠} = \frac{am}{\sqrt{١+٤m^{٢}}}e^{m(\varphi_{٠}+\alpha)}$ را.   ٢٥١٢- $\varphi_{٠} = ٠$، $r_{٠} = \frac{٥}{٦}a$

٢٥١٣- $x_{٠} = \pi a$، $y_{٠} = \frac{٥}{٦}a$ ٢٥١٤- $x_{٠} = \frac{٢}{٣}a$، $y_{٠} = ٠$

٢٥١٥- $\left(٠,\ ٠,\ \frac{a}{٢}\right)$ ٢٥١٦- ٧٥kg ٢٥١٧- $A_{h} = mg\frac{Rh}{R+h}$

که در آن R شعاع زمین است؛ $A_{\infty} = mgR$ ٢٥١٨- ٠,٥ kgm

٢٥١٩- ١٧٤٠ kgm   ٢٥٢٠- $\frac{٢}{٣}a^{٣}$ ٢٥٢١- $٧٠٨\frac{١}{٣}T$

٢٥٢٢- $v_{٠}T + \frac{a}{٢}T^{٢}$ ٢٥٢٣- $\frac{٤}{١٥}\pi\delta\omega^{٢}R^{٥}$ ٢٥٢٤- تصاویر نیروی جاذبه روی محورهای مختصات : $X = ٠$، $Y = -\frac{٢km\mu_{٠}}{a}$ که در آن k ثابت جاذبه است   ٢٥٢٥- $٢\pi km\delta_{٠}\left(١-\frac{b}{\sqrt{a^{٢}+b^{٢}}}\right)$ که در آن k ثابت جاذبه است   ٢٥٢٦- تقریباً سه ساعت   ٢٥٢٧- ظرف باید به سطح حاصل از دوران منحنی $y = Cx^{٤}$ حول محور قایم Oy محدود شود   ٢٥٢٨- $Q = Q_{٠}٢^{-\frac{t}{١٦٠٠}}$

٢٥٢٩- ٩٩,٩٢٪   ٢٥٣٠- $\frac{\gamma H^{٢}}{٦E}$

در جواب‌های محاسبات تقریبی انتگرالهای معین مقادیر جدول داده شده است   ٢٥٣١- ٦,٢٨٣٢-   ٢٥٣٢- ٠,٦٩٣١٥   ٢٥٣٣- ٠,٨٣٥٦٦

٢٥٣٤- ١,٤٦٧٥   ٢٥٣٥- ١٧,٣٣٣   ٢٥٣٦- ٥,٤٠٢٤   ٢٥٣٧- ١,٣٧٠٣٩

٢٥٣٨- ٠,٢٢٨٨   ٢٥٣٩- ٠,٩١٥٩٦٦   ٢٥٤٠- ٣,١٤١٥٩   ٢٥٤١- ١,٤٦٣

٢٥٤٢- ٠,٣١٧٩   ٢٥٤٣- ٠,٨٨٦٢   ٢٥٤٤- ٥١,٠٤   ٢٥٤٥-

x	٠	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٤\pi}{٣}$	$\frac{٥\pi}{٣}$	٢π
y	٠	٠,٩٩	١,٦٥	١,٨٥	١,٧٢	١,٥٢	١,٤٢

فصل ٥

٢٥٤٦ – $\frac{2}{3}$ ٢٥٤٧ – $\frac{3}{2}$ ٢٥٤٨ – ٣   ٢٥٤٩ – ١   ٢٥٥٠ – $\frac{1}{3}$
٢٥٥١ – الف) $\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$ ؛ ب) $\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}$ ٢٥٥٢ – $1-\sqrt{2}$
٢٥٥٣ – فقط بازای $x=k\pi$ (k عدد یست درست) همگرا   ٢٥٥٦ – واگرا
٢٥٥٧ – واگرا   ٢٥٥٨ – همگرا   ٢٥٥٩ – واگرا   ٢٥٦٠ – واگرا   ٢٥٦١ – واگرا
٢٥٦٢ – همگرا   ٢٥٦٣ – همگرا   ٢٥٦٤ – واگرا   ٢٥٦٦ – میتواند همگرا یا
واگرا باشد   ٢٥٦٧ – الف) میتواند همگرا یا واگرا باشد ؛ ب) واگرا
٢٥٧٨ – همگرا   ٢٥٧٩ – همگرا   ٢٥٨٠ – همگرا   ٢٥٨١ – الف) همگرا ؛
ب) واگرا   ٢٥٨٢ – همگرا   ٢٥٨٣ – همگرا   ٢٥٨٤ – همگرا   ٢٥٨٥ – همگرا
٢٥٨٥,١ – همگرا   ٢٥٨٥,٢ – بازای α و x دلخواه همگرا   ٢٥٨٦ – همگرا
٢٥٨٧ – واگرا   ٢٥٨٨ – واگرا   ٢٥٨٩ – همگرا   ٢٥٨٩,١ – همگرا
٢٥٨٩,٢ – همگرا   ٢٥٩٠ – همگرا   ٢٥٩١,٢ – $n\geqslant 13$ ٢٥٩٥ – همگرا
٢٥٩٦ – همگرا   ٢٥٩٧ – همگرا   ٢٥٩٧,١ – همگرا   ٢٥٩٨ بازای $p>2$
همگرا   ٢٥٩٩ بازای $\frac{b-a}{d}>1$ همگرا   ٢٦٠٠ – بازای $p>\frac{3}{2}$ همگرا
٢٦٠١ – همگرا   ٢٦٠٢ – بازای $p+q>1$ همگرا   ٢٦٠٣ – بازای $q>p$
همگرا   ٢٦٠٤ – بازای $\frac{p}{2}+q>1$ همگرا   ٢٦٠٥ – بازای $\alpha(q-p)>1$
همگرا   ٢٦٠٧ – بازای $q>p+1$ همگرا   ٢٦٠٨ – بازای $p>0$ همگرا
٢٦٠٩ – بازای $p>0$ همگرا   ٢٦١٠ – بازای $p>\frac{1}{2}$ همگرا   ٢٦١١ – بازای
$b\neq 1$ همگرا   ٢٦١٢ – بازای $p>1$ همگرا   ٢٦١٣ – واگر   ٢٦١٤ – واگرا
٢٦١٤,٢ – بازای $p+x>1$ همگرا   ٢٦١٦ – بازای $x<\frac{1}{e}$ همگرا
٢٦١٧ – همگرا   ٢٦١٨ – واگرا   ٢٦١٩ – بازای $p>1$ همگرا   ٢٦٢٠ – بازای
$p>1$ و q اختیاری و بازای $p=1$ و $q>1$ همگرا   ٢٦٢٠,١ – واگرا
٢٦٢٠,٢ – همگرا   ٢٦٢٠,٣ – همگرا   ٢٦٢١ – واگرا   ٢٦٢٣ – ١,٢٠
٢٦٢٦ – بازای $\alpha>\frac{1}{2}$ همگرا   ٢٦٢٧ – همگرا اگر $a=\frac{1}{2}$
٢٦٢٨ – واگرا   ٢٦٢٩ – همگرا   ٢٦٣٠ – بازای $a>2$ همگرا   ٢٦٣١ – همگرا

۲۶۳۲ – همگرا   ۲۶۳۳ – همگرا   ۲۶۳۴ – همگرا اگر $c=۰$ ، $\frac{a}{d}<-۱$
۲۶۳۵ – واگرا   ۲۶۳۶ – همگرا اگر $\alpha\neq۰$ ۲۶۳۷ – همگرا   ۲۶۳۸ – واگرا
۲۶۳۹ – همگرا   ۲۶۴۰ – همگرا اگر $a=\sqrt{bc}$ ۲۶۴۱ – همگرا اگر
$\alpha<-۱$ ۲۶۴۲ – همگرا اگر $\alpha>\frac{۱}{۲}$ ۲۶۴۳ – بازای $a^b>e$ ، $c=۰$
و بازای $a^c>۱$ همگرا   ۲۶۴۴ – بازای $a+b>۱$ همگرا   ۲۶۴۵ – همگرا
۲۶۴۶ – همگرا   ۲۶۴۷ – همگرا   ۲۶۴۸ – واگرا   ۲۶۴۹ – همگرا
۲۶۵۰ – همگرا   ۲۶۵۱ – همگرا   ۲۶۵۲ – بازای $\alpha>۲$ همگرا   ۲۶۵۳ همگرا
۲۶۵۴ – همگرا   ۲۶۵۵ – الف) $N>۱۰۰۰۰۰۰$ ؛ ب) $N\geqslant۱۲$ ؛
پ) $N>۴$ ۲۶۵۹ – $\frac{۲}{۹}$ ۲۶۶۰ – $۱\frac{۳}{۷}$ ۲۶۶۱ – $\ln ۲$ ۲۶۶۲ – الف)
$\frac{۳}{۲}\ln ۲$ ؛ ب) $\frac{۱}{۲}\ln ۲$ ۲۶۶۴ – همگرا   ۲۶۶۵ – همگرا   ۲۶۶۶ – همگرا
۲۶۶۶,۱ – نتیجه نمیشود   ۲۶۶۷ – همگرا   ۲۶۶۸ – همگرا   ۲۶۶۹ – همگرا
۲۶۷۰ – واگرا   ۲۶۷۱ – همگرا   ۲۶۷۲ – همگرا   ۲۶۷۳ – واگرا   ۲۶۷۳,۱ – همگرا
۲۶۷۵ – بازای $p>۱$ همگرای مطلق ، بازای $۰<p\leqslant۱$ همگرای مشروط
۲۶۷۶ – بازای $p>۱$ همگرای مطلق ، بازای $۰<p\leqslant۱$ همگرای مشروط
۲۶۷۷ – بازای $p>۱$ همگرای مطلق ، بازای $\frac{۱}{۲}<p\leqslant۱$ همگرای مشروط
۲۶۷۸ – بازای $|x-\pi k|<\frac{\pi}{۴}$ (k عددیست درست) همگرای مطلق ؛ بازای
$x=\pi k\pm\frac{\pi}{۲}$ همگرای مشروط   ۲۶۷۹ – بازای x دلخواه که عدد درست
منفی نباشد. همگرای مشروط   ۲۶۸۰ – بازای $p>۱$ همگرای مطلق ؛ بازای
$۰<p\leqslant۱$ همگرای مشروط   ۲۶۸۱ – بازای $p>۲$ همگرای مطلق ؛ بازای
$۱<p\leqslant۲$ همگرای مشروط   ۲۶۸۲ – بازای $p>۱$ همگرای مطلق ؛ بازای
$\frac{۱}{۲}<p\leqslant۱$ همگرای مشروط   ۲۶۸۳ – همگرای مشروط   ۲۶۸۴ – همگرای
مطلق   ۲۶۸۵ – واگرا   ۲۶۸۶ – همگرای مشروط   ۲۶۸۷ – بازای $p>۱$
همگرای مطلق ؛ بازای $\frac{۱}{۲}<p\leqslant۱$ همگرای مشروط   ۲۶۸۸ – واگرا
۲۶۸۹ – بازای $p>۲$ همگرای مطلق ؛ بازای $۰<p\leqslant۲$ همگرای مشروط
۲۶۹۰ – همگرا   ۲۶۹۱ – واگرا   ۲۶۹۲ – بازای $q>p+۱$ همگرای مطلق؛

بازای $p<q\leqslant p+۱$ همگرای مشروط ۲۶۹۳– بازای $p>۱$ ، $q>۱$
همگرای مطلق ؛ بازای $۰<p=q\leqslant ۱$ همگرای مشروط ۲۶۹۴– بازای
$p>۱$ همگرای مطلق ؛ بازای $p=۱$ همگرای مشروط ۲۶۹۵– بازای
$p>۱$ همگرای مطلق ؛ بازای $p=۱$ همگرای مشروط ۲۶۹۶– بازای
$p>۱$ ،$q>۱$ همگرای مطلق ؛ بازای $۰<p=q\leqslant ۱$ همگرای مشروط
۲۶۹۸– الف) $p>۱$ ؛ ب) $۰<p\leqslant ۱$ ۲۶۹۸,۱– الف) همگرا ؛
ب) همگرا ؛ پ) همگرا ۲۶۹۹– الف) $q>p+۱$ ؛ ب) $p<q\leqslant p+۱$
۲۷۰۰– بازای $m\geqslant ۰$ همگرای مطلق ؛ بازای $-۱<m<۰$ همگرای مشروط
۲۷۰۳,۱– الف) $n\geqslant ۱۰۰۰۰۰۰$ ؛ ب) $n\geqslant ۱,۳۲\times ۱۰^{۱۶}$ ۲۷۰۶– الف)
واگرا ؛ ب) میتواند همگرا یا واگرا باشد ۲۷۰۷– $\frac{۲}{۳}$ ۲۷۰۸– $\frac{۳}{۴}$

۲۷۰۹– $-\frac{۳}{۷}$ ۲۷۱۰– $\frac{۱+y}{۱-xy}$ ۲۷۱۶– بازای $|x|>۱$ همگرای مطلق
۲۷۱۷– بازای $x>۰$ همگرای مطلق ؛ بازای $x=۰$ همگرای مشروط
۲۷۱۸– بازای $x>-\frac{۱}{۳}$ و بازای $x<-۱$ همگرای مطلق ۲۷۱۹– بازای
$|x|\neq ۱$ همگرای مطلق و بازای $x=-۱$ همگرای مشروط ۲۷۲۰– بازای
$-\frac{\sqrt{۱۷}-۳}{۶}<x<\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}<x<\frac{\sqrt{۱۷}+۳}{۶}$ همگرای مطلق ۲۷۲۱–بازای
$|x-\pi k|\leqslant\frac{\pi}{۶}\ (k=۰, \pm ۱, \pm ۲ \ldots)$ همگرای مطلق ۲۷۲۲– بازای
$p>۱$ و $x\neq k\ (k=-۱, -۲, \ldots)$ همگرای مطلق و بازای $۰<p\leqslant ۱$ ،
$x\neq k$ همگرای مشروط ۲۷۲۳– بازای $q>p+۱$ همگرای مطلق و بازای
$p<q\leqslant p+۱$ همگرای مشروط ۲۷۲۴– بازای $|x|<۱$ همگرای مطلق
۲۷۲۶– بازای $|x|\neq ۱$ همگرای مطلق ۲۷۲۷– بازای $x\neq -۱$ همگرای مطلق
۲۷۲۸– بازای $x>۰$ همگرای مطلق ۲۷۲۹– بازای $۰<|x|<+\infty$
همگرای مطلق اگر $|a|>۱$ ؛ واگرا اگر $|a|\leqslant ۱$ یا $x=۰$
۲۷۳۰– بازای $x=۲$ و $x>e$ همگرای مطلق ۲۷۳۱– بازای $x>۱$
همگرای مطلق ۲۷۳۲– همگرا اگر $۰<\min(x, y)<۱$ ۲۷۳۳– بازای
$|x|<۱$، $۰\leqslant y<+\infty$ و بازای $|x|>۱$، $y>|x|$ همگرای مطلق ؛
بازای $x=-۱$، $۰\leqslant y\leqslant ۱$ همگرای مشروط ۲۷۳۴– بازای
$\max(|x|, |y|)<۱$ همگرای مطلق ۲۷۳۵– همگرای مطلق بازای :
۱) $۰\leqslant x<۱$ ، $-\infty<y<+\infty$ ؛ ۲) $x=۱$ ، $y>۱$ ؛

۳) $x>۱$، $y>۲$ **۲۷۳۶** - بازای $|x-k\pi|<\frac{\pi}{۴}$ که در آن k عددیست
درست ، همگرای مطلق **۲۷۳۸** - $\frac{۱}{۲}<|x|<۲$ ؛ $\frac{۶x(x^{۲}-۱)}{(۲-x)^{۲}(۲x-۱)^{۲}}$
۲۷۳۹ - الف) بازای $x\geqslant ۰$ همگرای مطلق، بازای $-۱<x<۰$ همگرای
مشروط ؛ ب) بازای $p+x>۱$ و بازای $x=۰, ۱, ۲, \ldots$ همگرای مطلق،
بازای $۰<p+x\leqslant ۱$ همگرای مشروط ؛ پ) همگرای مطلق بازای :
۱) $|x|<۱$ و y اختیاری ؛ ۲) $x=\pm ۱$، $y>\frac{۱}{۲}$ ؛ ۳) x اختیاری
است ، $y=۰, ۱, ۲ \ldots$ ؛ بازای $x=۱$ ، $-\frac{۱}{۲}<y<\frac{۱}{۲}$ همگرای
مشروط **۲۷۴۳** - بازای $\varepsilon=۰,۰۰۱$ و $x=\sqrt[m]{۰,۱}$ ، $N\geqslant ۳m$. خیر .
۲۷۴۴ - $n>\frac{۱}{\varepsilon}$ **۲۷۴۵** - $n\geqslant ۲۶$ **۲۷۴۶** - الف) همگرای یکنواخت ؛
ب) همگرای نایکنواخت **۲۷۴۷** - همگرای یکنواخت **۲۷۴۸** - همگرای
نایکنواخت **۲۷۴۹** - همگرای یکنواخت **۲۷۵۰** - همگرای یکنواخت
۲۷۵۱ - الف) همگرای یکنواخت ؛ ب) همگرای نایکنواخت ؛ پ) همگرای
یکنواخت **۲۷۵۳** - همگرای یکنواخت **۲۷۵۴** - همگرای نایکنواخت
۲۷۵۵ - الف) همگرای یکنواخت ؛ ب) همگرای نایکنواخت **۲۷۵۶** - الف)
همگرای نایکنواخت ؛ ب) همگرای یکنواخت **۲۷۵۷** - همگرای نایکنواخت
۲۷۵۸ - الف) همگرای یکنواخت؛ ب) همگرای نایکنواخت **۲۷۵۹** - همگرای
یکنواخت **۲۷۶۰** - الف) همگرای یکنواخت ؛ ب) همگرای نایکنواخت
۲۷۶۱ - همگرای یکنواخت **۲۷۶۲** - همگرای یکنواخت **۲۷۶۳** - همگرای
نایکنواخت **۲۷۶۷** - الف) همگرای یکنواخت ؛ ب) همگرای نایکنواخت
۲۷۶۸ - همگرای یکنواخت **۲۷۶۸,۱** - همگرای نایکنواخت **۲۷۶۹** - همگرای
نایکنواخت **۲۷۷۰** - همگرای یکنواخت **۲۷۷۱** - همگرای نایکنواخت
۲۷۷۲ - همگرای یکنواخت **۲۷۷۳** - الف) همگرای نایکنواخت ؛ ب) همگرای
یکنواخت **۲۷۷۵** - الف) همگرای یکنواخت ؛ ب) همگرای نایکنواخت
۲۷۷۶ - همگرای نایکنواخت **۲۷۷۷** - همگرای یکنواخت **۲۷۷۸** - همگرای
یکنواخت **۲۷۷۹** - همگرای یکنواخت **۲۷۸۰** - همگرای یکنواخت
۲۷۸۱ - همگرای یکنواخت **۲۷۸۲** - همگرای یکنواخت **۲۷۸۳** - میتواند
۲۷۸۵ - حتمی نیست **۲۷۹۵** - الف) بازای $|x|<۱$ موجود و پیوسته است ؛
ب) بازای $|x|<+\infty$ موجود و پیوسته است ؛ پ) بازای $|x|<+\infty$ وجود

دارد ، بازای $x = ۰$ منفصل است ۲۷۹۹ – الف) بازای $x \neq -k$
$(k = ۱, ۲, ۳, \dots)$ موجود و دیفرانسیل پذیر است؛ ب) بازای $|x| < +\infty$
وجود دارد ، در همه‌جا سوای $x = ۰$ دیفرانسیل‌پذیر است ۲۸۰۲ – الف) α
دلخواه ؛ ب) $\alpha < ۱$ ؛ پ) $\alpha < ۲$ ۲۸۰۵ – خیر ۲۸۰۶ – $\frac{۱}{۲}\ln ۲$
۲۸۰۱ – ۱ ۲۸۰۸ – ۱ ۲۸۰۸,۱ – $\frac{\pi^۲}{۶}$ ۲۸۰۹ – قابل اعتبار است
۲۸۱۰ – بلی ۲۸۱۲ – $R = ۱$ ؛ $(-۱, ۱)$؛ بازای $x = -۱$ همگرای مطلق
است اگر $p > ۱$ و همگرای مشروط است اگر $۰ < p \leqslant ۱$ ؛ بازای $x = ۱$
همگرای مطلق است اگر $p > ۱$ و واگراست اگر $p \leqslant ۱$ ۲۸۱۳ – $R = \frac{۱}{۳}$ ؛
$\left(-\frac{۴}{۳}, \frac{۲}{۳}\right)$. بازای $x = -\frac{۴}{۳}$ همگرای مشروط؛ بازای $x = -\frac{۲}{۳}$ واگرا
۲۸۱۴ – $R = ۴$ ؛ $(-۴, ۴)$. بازای $x = \pm ۴$ واگرا ۲۸۱۵ – $R = +\infty$؛
$(-\infty, +\infty)$ ۲۸۱۶ – $R = \frac{۱}{e}$ ؛ $\left(-\frac{۱}{e}, \frac{۱}{e}\right)$. بازای $x = \pm\frac{۱}{e}$ واگرا
۲۸۱۷ – $R = +\infty$ ؛ $(-\infty, +\infty)$ ۲۸۱۸ – $R = ۲$ ؛ $(-۱, ۳)$. بازای
$x = -۱$ همگرای مطلق است اگر $p > ۲$ و همگرای مشروط است اگر
$۰ < p \leqslant ۲$ ؛ بازای $x = ۳$ همگرای مطلق است اگر $p > ۲$ و واگراست اگر
$p \leqslant ۲$ ۲۸۱۹ – $R = ۲^p$؛ $(-۲^p, ۲^p)$. بازای $x = -۲^p$ همگرای مطلق
است اگر $p > ۲$ و واگراست اگر $p \leqslant ۲$؛ بازای $x = ۲^p$ همگرای مطلق
است اگر $p > ۲$ و همگرای مشروط است اگر $۰ < p \leqslant ۲$ ۲۸۲۰ – $R = ۱$؛
$(-۱, ۱)$. بازای $x = -۱$ همگرای مطلق است اگر $m \geqslant ۰$ و واگراست
اگر $m < ۰$؛ بازای $x = ۱$ [همگرای مطلق است اگر $m \geqslant ۰$ و همگرای
مشروط است اگر $-۱ < m < ۰$ ۲۸۲۱ – $R = \min\left(\frac{۱}{a}, \frac{۱}{b}\right)$؛ $(-R, R)$
بازای $x = -R$ همگرای مشروط است اگر $a \geqslant b$ و همگرای مطلق است اگر
$a < b$ ؛ بازای $x = R$ واگراست اگر $a \geqslant b$ و همگرای مطلق است اگر
$a < b$ ۲۸۲۲ – $R = \max(a, b)$؛ $(-R, R)$. بازای $x = \pm R$ واگرا
۲۸۲۳ – $R = ۱$ ؛ $(-۱, ۱)$. بازای $x = \mp ۱$ همگرای مطلق است اگر
$a > ۱$ و واگراست اگر $a \leqslant ۱$ ۲۸۲۴ – $R = ۱$ ؛ $(-۱, ۱)$. بازای
$x = \pm ۱$ همگرای مطلق ۲۸۲۵ – $R = ۱$؛ $(-۱, ۱)$. بازای $x = -۱$
همگرای مشروط ؛ بازای $x = ۱$ واگرا ۲۸۲۶ – $R = ۱$ ؛ $(-۱, ۱)$.
بازای $x = -۱$ واگرا؛ بازای $x = ۱$ همگرای مشروط ۲۸۲۷ – $R = ۱$؛

$(-۱, ۱)$. بازای $x=\pm ۱$ واگرا ۲۸۲۸ – $R=\frac{۱}{٤}$ ؛ $\left(-\frac{۱}{٤}, \frac{۱}{٤}\right)$.
بازای $x=\pm\frac{۱}{٤}$ واگرا ۲۸۲۹ – $R=\frac{۱}{۳}$ ؛ $\left(-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}\right)$. بازای
$x=\pm\frac{۱}{۳}$ واگرا ۲۸۳۰ – $R=۱$ ؛ $(-۱, ۱)$. بازای $x=\pm ۱$ همگرای
مطلق ۲۸۳۱ – $R=۱$ ؛ $(-۱, ۱)$ ؛ بازای $x=\pm ۱$ همگرای مشروط
۲۸۳۱,۱ – بازای $۰<x<۲$ همگرای مطلق ؛ بازای $x=۲$ همگرای مشروط
۲۸۳۱,۲ – تنها بازای $x=۰$ همگراست ۲۸۳۲ – $R=۱$ ؛ $(-۱, ۱)$ ؛ بازای
$x=-۱$ همگرای مطلق است اگر $\gamma-\alpha-\beta>۰$ و همگرای مشروط است
اگر $-۱<\gamma-\alpha-\beta\leqslant ۰$ ؛ بازای $x=۱$ همگرای مطلق است اگر
$\gamma-\alpha-\beta>۰$ و واگراست اگر $\gamma-\alpha-\beta\leqslant ۰$ ۲۸۳۳ – $x>۰$

۲۸۳٤ – $|x|>\frac{۱}{۲}$ ۲۸۳٥ – $۰<|x|<+\infty$ ۲۸۳٦ – $x>-۱$

۲۸۳۷ – $|x-k\pi|<\frac{\pi}{٤}$ که در آن k عددیست درست ۲۸۳۸ –

$-۱+۲(x+۱)-۳(x+۱)^۲+(x+۱)^۳$ ۲۸۳۹ – الف) $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+۱}}(|x|<|a|)$ ؛

ب) $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+۱}}(|x-b|<|a-b|)$ ؛ پ) $-\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{a^n}{x^{n+۱}}(|x|>|a|)$

۲۸٤۰ – $(۰<x\leqslant ۲)$ $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{(x-۱)^n}{n}$ ؛ $\ln ۲$ ۲۸٤۱ – $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}$

$(|x|<+\infty)$ ۲۸٤۲ – $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{x^{۲n}}{(۲n)!}(|x|<+\infty)$ ۲۸٤۳ –

$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{۲^{۲n-۱}}{(۲n)!}x^{۲n}(|x|<+\infty)$ ۲۸٤٤ – $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n(|x|<+\infty)$

۲۸٤٥ – $(|x|<۱)$ $\mu x+\frac{\mu(۱^۲-\mu^۲)}{۳!}x^۳+\frac{\mu(۱^۲-\mu^۲)(۳^۲-\mu^۲)}{٥!}x^٥+\dots$

۲۸٤٦ – $(|x|<۱)$ $۱-\frac{\mu^۲}{۲!}x^۲-\frac{\mu^۲(۲^۲-\mu^۲)}{٤!}x^٤-\dots$

۲۸۴۷- $(۰ < x < ۲)$ $۱ + (x-۱) + (x-۱)^۲ + \frac{(x-۱)^۳}{۲} + \dots$

۲۸۴۸- $(|x| < ۱)$ $e\left(۱ - \frac{x}{۲} + \frac{۱۱}{۲۴}x^۲ - \frac{۷}{۱۶}x^۳ + \dots\right)$

۲۸۴۹- $\sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \frac{h^۲}{۲!}\sin x - \frac{h^۳}{۳!}\cos x + \dots$

$(|h| < +\infty)$ ؛ $\cos(x+h) = \cos x - h\sin x - \frac{h^۲}{۲!}\cos x + \frac{h^۳}{۳!}\sin x + \dots$ $(|h| < +\infty)$

۲۸۵۰- الف) $(-۲, ۲)$ ؛ ب) $(۳, ۷)$

۲۸۵۰,۱- خیر

۲۸۵۱- $(|x| < +\infty)$ $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n x^{۲n}}{n!}$

۲۸۵۲- $(|x| < +\infty)$ $۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{۲^{۲n-۱}}{(۲n)!} x^{۲n}$

۲۸۵۳- $(|x| < +\infty)$ $\frac{۳}{۴} \sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n+۱} \frac{۳^{۲n}-۱}{(۲n+۱)!} x^{۲n+۱}$

۲۸۵۴- $(|x| < ۱)$ $\sum_{n=۱۰}^{\infty} x^n$

۲۸۵۵- $(|x| < ۱)$ $\sum_{n=۰}^{\infty} (n+۱)x^n$

۲۸۵۶- $\left(-\frac{۱}{۲} \leqslant x < \frac{۱}{۲}\right)$ $x + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۲n-۱)!!}{n!} x^{n+۱}$

۲۸۵۷- $(|x| < ۱)$ $\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱}$

۲۸۵۸- $\frac{۱}{۳} \sum_{n=۱}^{\infty} [۱ - (-۲)^n] x^n$ $\left(|x| < \frac{۱}{۲}\right)$

۲۸۵۹- $(|x| < ۱)$ $\sum_{n=۰}^{\infty} \left[۱ + \frac{(-۱)^n}{۶^n}\right] x^n$

۲۸۶۰- $(|x| < ۱)$ $\frac{۱}{۲} \sum_{n=۱}^{\infty} \left[n + \frac{۱-(-۱)^n}{۲}\right] x^n$

۲۸۶۱- $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$

که در آن $a_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\left(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\right)^{n+۱} + (-۱)^n \left(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}\right)^{n+۱}\right]$

(اعداد فیبوناچی)

۲۸٦۲- $(|x|<1)\ \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin\frac{2\pi(n+1)}{3}$

۲۸٦۲,۱- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ که در آن $c_n=1$ اگر $n=4k$؛ $c_n=-1$ اگر $n=2k+1$؛ $c_n=0$ اگر $n=2k+2$ یا $n=2k+3\ (k=0, \pm1, \pm2, \dots)$

$f^{(1000)}(0)=1000!$

۲۸٦۳- $(|x|<1)\ \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha$

۲۸٦٤- $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin na$

۲۸٦٥- $(|x|<e^{-|a|})\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n \operatorname{sh} na$

۲۸٦٦- $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$

۲۸٦۷- $(-1<x\leqslant 1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n}x^n$

۲۸٦۸- $(|x|<+\infty)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!}x^n$

۲۸٦۹- $(|x|\leqslant 1)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$؛ $\frac{\pi}{4}$

۲۸۷۰- $(|x|\leqslant 1)\ x+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

۲۸۷۱- $(|x|\leqslant 1)\ x+\sum_{n=1}^{\infty} \left\{(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}$

۲۸۷۲- $(|x|\leqslant 1)\ -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}x^n$

۲۸۷۳- الف) $(-1\leqslant x\leqslant 1)\ x+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$؛ ب) $(-1<x<1)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$؛ پ) $\left(-\frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{2}\right)\ \operatorname{arc\,tg}2+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$؛ ت) $(|x|<\sqrt{2})\ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}\right\}$؛ ث) $(|x|\leqslant 1)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$؛

ج) $\text{٢}\,|x|\left\{١+\sum_{n=١}^{\infty}\frac{(٢n-١)!!}{(٢n)!!}\times\frac{x^{٢n}}{٢n+١}\right\}$ بازای $٠\leqslant x\leqslant ١$ و $-١\leqslant x\leqslant ٠$ ؛

چ) $(|x|\leqslant ١)$ $١+\frac{x^٢}{٢}+\sum_{n=١}^{\infty}\left\{\frac{(٢n-١)!!}{(٢n+٢)!!}\times\frac{x^{٢n+٢}}{٢n+١}\right\}$ ؛

ح) $(|x|\leqslant ١)$ $-١+\frac{x^٢}{٢}+\sum_{n=١}^{\infty}(-١)^n\frac{(٢n-١)!!}{(٢n+٢)!!}\times\frac{x^{٢n+٢}}{٢n+١}$ ٢٨٧٤−الف)

$e^{x^٢}\left[(٢x)^n+\frac{n(n-١)}{١!}(٢x)^{n-٢}+\frac{n(n-١)(n-٢)(n-٣)}{٢!}(٢x)^{n-٤}+\dots\right]$ ؛

ب) $\frac{(-١)^n}{x^{٢n}}e^{\frac{a}{x}}\left[a^n+\frac{n(n-١)}{١!}a^{n-١}x+\frac{n(n-١)(n-٢)}{٢!}a^{n-٢}x^٢+\dots\right]$ ؛

پ) $\times\frac{(-١)^{n-١}n!}{(١+x^٢)^n}\left[x^{n-١}-\frac{(n-١)(n-٢)}{٣!}x^{n-٣}+\frac{(n-١)(n-٢)(n-٣)(n-٤)}{٥!}\right.$

$\left.\times x^{n-٥}-\dots\right]$

٢٨٧٥− $(-٢\leqslant x\leqslant ٠)$ $\sum_{n=١}^{\infty}\frac{(-١)^n}{n}(x+١)^{٢n}$

٢٨٧٦− $(|x|>١)$ $-\sum_{n=١}^{\infty}\frac{١}{x^n}$

٢٨٧٧− $(x>٠)$ $\sum_{n=٠}^{\infty}\frac{٢}{٢n+١}\left(\frac{x-١}{x+١}\right)^{٢n+١}$

٢٨٧٨− $\left(x>-\frac{١}{٢}\right)$ $\frac{x}{١+x}+\sum_{n=١}^{\infty}\frac{(٢n-١)!!}{(٢n)!!}\left(\frac{x}{١+x}\right)^{n+١}$

٢٨٨١− $(|x|<١)$ $١-\frac{١}{٢}x-\frac{١}{١٢}x^٢-\frac{١}{٢٤}x^٣-\dots$

٢٨٨٢− $(|x|<+\infty)$ $١+\sum_{n=٢}^{\infty}\frac{(-١)^{n+١}(n-١)}{n!}x^n$

٢٨٨٣− $(|x|<+\infty)$ $\sum_{n=٠}^{\infty}\left[\frac{١}{(٢n)!}-\frac{٢}{(٢n-٢)!}+\frac{١}{(٢n-٤)!}\right]x^n$

که در آن $٠!=١$ ، $(-١)!=\infty$ ، $(-٢)!=\infty$ و الی آخر .

٢٨٨٤− $(-١\leqslant x<١)$ $٢\sum_{n=١}^{\infty}\left(١+\frac{١}{٢}+\dots+\frac{١}{n}\right)\frac{x^{n+١}}{n+١}$

۲۸۸٥- $x+۲\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{٤n^{۲}-۱}x^{۲n+۱}\quad(|x|\leqslant ۱)$ ۲۸۸٦-

$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^{\frac{n}{۲}}\cos\frac{n\pi}{٤}}{n!}x^{n}\ (|x|<+\infty)$ ۲۸۸۷- $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^{\frac{n}{۲}}\sin\frac{n\pi}{٤}}{n!}x^{n}\ (|x|<+\infty)$

۲۸۸۸- $\sum_{n=۱}^{\infty}\left\{(-۱)^{n-۱}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{n}\right)x^{n}\right\}\quad(-۱<x<۱)$

۲۸۸۹- $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\left(۱+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{۲n-۱}\right)\frac{x^{۲n}}{n}\quad(|x|\leqslant ۱)$

۲۸۹۰- $\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲^{۲n+۱}(n!)^{۲}}{(۲n+۲)!}x^{۲n}\ (|x|\leqslant ۱)$ ۲۸۹۱- $x+\frac{۱}{۳}x^{۳}+\frac{۲}{۱٥}x^{٥}+\dots$

$\left(|x|<\frac{\pi}{۲}\right)$ ۲۸۹۲- $x-\frac{۱}{۳}x^{۳}+\frac{۲}{۱٥}x^{٥}+\dots\ \left(|x|<\frac{\pi}{۲}\right)$

۲۸۹۳- $-\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{٤٥}x^{۳}-\frac{۲}{۹٤٥}x^{٥}-\dots\ (|x|<\pi)$ ۲۸۹٤- $E_{۰}=۱$،

$\sum_{k=۰}^{n}\left\{(-۱)^{k}\frac{E_{n-k}}{(۲k)!\,(۲n-۲k)!}\right\}=۰$ ؛ ۲۸۹٥- $P_{۰}(x)=۱$ ؛

$P_{n}(t)=\frac{(۲n-۱)!!}{n!}\left[x^{n}-\frac{n(n-۱)}{۲(۲n-۱)}x^{n-۲}+\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۲\times ٤\times(۲n-۱)(۲n-۳)}x^{n-٤}-\dots\right]\quad(n\geqslant ۱)$ (چندجمله‌ای‌های لژاندر)

۲۸۹٦- $\sum_{n=۰}^{\infty}s_{n}x^{n}$ که در آن $s_{n}=\sum_{k=۰}^{n}a_{k}$ ۲۸۹۷- الف) $R\geqslant\min(R_{۱},R_{۲})$ ؛ ب) $R\geqslant R_{۱}R_{۲}$ ۲۹۰۱- $\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{x^{۲n+۱}}{n!(۲n+۱)}\ (|x|<+\infty)$

۲۹۰۲- $x+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(۲n-۱)!!}{(۲n)!!}\times\frac{x^{٤n+۱}}{٤n+۱}\quad(|x|\leqslant ۱)$ ۲۹۰۳-

$(|x|<+\infty)$ $\sum\limits_{n=٠}^{\infty}(-١)^n\frac{x^{٢n+١}}{(٢n+١)(٢n+١)!}$ ٢٩٠٤ – $\sum\limits_{n=٠}^{\infty}(-١)^n\frac{x^{٢n+١}}{(٢n+١)^٢}$

$(|x|\leqslant ١)$ ٢٩٠٥ – $x+\frac{x^٢}{٤}-\frac{x^٣}{٣٦}+\frac{x^٤}{٩٦}-\dots$ $(|x|<١)$

٢٩٠٦ – $\frac{١}{٢}\ln\frac{١+x}{١-x}$ $(|x|<١)$ ٢٩٠٧ – $\operatorname{arc\,tg} x\,(|x|\leqslant ١)$

٢٩٠٨ – $\operatorname{ch} x\,(|x|<+\infty)$ ٢٩٠٩ – $١+\frac{١-x}{x}\ln(١-x)$ $(|x|\leqslant ١)$

٢٩١٠ – $\frac{١}{\sqrt{١-x}}$ $(-١\leqslant x<١)$ ٢٩١١ – $\frac{x}{(١-x)^٢}$ $(|x|<١)$

٢٩١٢ – $\frac{x(١-x)}{(١+x)^٣}$ $(|x|<١)$ ٢٩١٣ – $\frac{٢x}{(١-x)^٣}$ $(|x|<١)$ ٢٩١٦ –

$R=٢$ ؛ $(x-١)^٢+(y-١)^٢<٤$ ٢٩١٧ – $R=\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ؛ $x^٢+y^٢<\frac{١}{٢}$

٢٩١٨ – $R=١$ ؛ $x^٢+y^٢<١$

٢٩٢٠ – $R=\left|٢\sin\frac{\alpha}{٢}\right|$ ؛ $(x-\cos\alpha)^٢+(y-\sin\alpha)^٢<٤\sin^٢\frac{\alpha}{٢}$

٢٩٢١ – ٢,٠٨٠ ٢٩٢٢ – الف) $٠,٨٧٦٠٦=\operatorname{arc}٥٠^{\circ}١١'٤٠''$ ؛

ب) ١,٩٩٥٢٧ ؛ پ) ٠,٦٠٦٥٣ ؛ ث) ٠,٢٢٣١٤ ٢٩٢٣ – ٠,٣٠٩٠٢

٢٩٢٤ – ٠,٩٩٩٩٨٤٨ ٢٩٢٥ – ٠,١٥٨ ٢٩٢٦ – ٢,٧١٨٢٨٢

٢٩٢٧ – ٠,١٨٢٣ ٢٩٢٨ – ٣,١٤١٦ ٢٩٢٩ – ٣,١٤٢

٢٩٣٠ – ٣,١٤١٥٩٢٦٥٤ ٢٩٣١ – $\ln٢=٠,٦٩٣١٥$ ؛ $\ln٣=١,٠٩٨٦١$

٢٩٣٢ – الف) ٠,٧٤٨ ؛ ب) ٢,٨٣٥ ؛ پ) ١,٦٠٥ ؛ ت) ٠,٩٠٥ ؛

ث) ١,٠٥٧ ؛ ج) ٠,١١٩ ؛ چ) ٠,٣٣٧ ؛ ح) ٠,٩٢٧ خ) ٤٨,٠٤١ ؛

د) ٠,٤٨٨ ؛ ذ) ٠,٥٠٧ ؛ ر) ٠,٧٨٣ ٢٩٣٣ – ٣,٨٢ ٢٩٣٤ – ٤,٨٤

٢٩٣٥ – $٢٠,٠٢\,m$ ٢٩٣٦ – $\frac{٣}{٨}-\frac{١}{٢}\cos٢x+\frac{١}{٨}\cos٤x$ ٢٩٣٧ – سری

فوریه بر چند جمله‌ای $P_n(x)$ منطبق است ٢٩٣٨ – $\frac{٤}{\pi}\sum\limits_{k=١}^{\infty}\frac{\sin(٢k-١)x}{٢k-١}$ ؛

$\frac{\pi}{٤}$ ٢٩٣٩ – $\frac{A}{٢}-\frac{٢A}{\pi}\sum\limits_{k=٠}^{\infty}\frac{١}{٢k+١}\sin(٢k+١)\frac{\pi x}{l}$

۲۹۴۰ − $۲\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{\sin nx}{n}$

۲۹۴۱ − $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

۲۹۴۲ − $\frac{\pi}{۲}-\frac{۴}{\pi}\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{\cos(۲k+۱)x}{(۲k+۱)^{۲}}$

۲۹۴۳ − $\frac{(a-b)\pi}{۴}-\frac{۲(a-b)}{\pi}\times\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{\cos(۲k+۱)x}{(۲k+۱)}+(a+b)\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{\sin nx}{n}$

۲۹۴۴ − $\frac{۲}{۳}\pi^{۲}+$ $+۴\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^{۲}}\cos nx$

۲۹۴۵ − $\frac{۲\sin\pi a}{\pi}\left[\frac{۱}{۲a}+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{a\cos nx}{n^{۲}-a^{۲}}\right]$

۲۹۴۶ − $\frac{۲\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}n\sin nx}{n^{۲}-a^{۲}}$

۲۹۴۷ − $\frac{۲\,\mathrm{sh}\,\pi a}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}n\sin nx}{n^{۲}+a^{۲}}$

۲۹۴۸ − $۲\,\mathrm{sh}\,ah\left[\frac{۱}{۲ah}+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{ah\cos\frac{nx}{h}-\pi n\sin\frac{nx}{h}}{(ah)^{۲}+(\pi n)^{۲}}\right]$

۲۹۴۹ − $a+l+\frac{۲l}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ $(a<x<a+۲l)$

۲۹۵۰ − $۱-\frac{۱}{۲}\cos x+۲\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^{۲}-۱}\cos nx$

۲۹۵۱ − $\frac{۱۶}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}n}{(۴n^{۲}-۱)^{۲}}\sin ۲nx$

۲۹۵۲ − $\frac{۴}{\pi}\sum_{k=۰}^{\infty}\left\{(-۱)^{k}\frac{\cos(۲k+۱)x}{۲k+۱}\right\}$

۲۹۵۳ − $\frac{۴}{\pi}\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{k}}{(۲k+۱)^{۲}}\sin(۲k+۱)x$

۲۹۵۴ − $\frac{۴}{\pi}\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{\cos(۲k+۱)x}{(۲k+۱)^{۲}}$

۲۹۵۵ − (عدد درست $x\neq$) $\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin ۲\pi nx}{n}$

۲۹۵۶ −

$\frac{١}{٤}-\frac{٢}{\pi^{٢}}\sum_{n=٠}^{\infty}\frac{\cos ٢\pi(٢n+١)x}{(٢n+١)^{٢}}$ ٢٩٥٧ - $\frac{٢}{\pi}-\frac{٤}{\pi}\sum_{k=١}^{\infty}\frac{\cos ٢kx}{٤k^{٢}-١}$ ٢٩٥٨ -

$\frac{٢}{\pi}+\frac{٤}{\pi}\sum_{k=١}^{\infty}\frac{(-١)^{k+١}}{٤k^{٢}-١}\cos ٢kx$ ٢٩٥٩ - $\frac{\alpha}{١-\alpha^{٢}}+٢\sum_{n=١}^{\infty}\frac{\alpha^{n+٢}}{١-\alpha}\cos nx$

٢٩٦٠ - $\frac{٤}{\pi}\ln(١+\sqrt{٢})+\sum_{k=٠}^{\infty}\Big\{(-١)^{k}\Big[٢+\frac{٨}{\pi}\sum_{m=١}^{k}\frac{(-١)^{m}}{m}\sin\frac{m\pi}{٢}\Big]\times$

$\times\cos(٨k+٤)x\Big\}+\sum_{k=١}^{\infty}\Big\{(-١)^{k}\Big[\frac{٨}{\pi}\ln(١+\sqrt{٢})+\frac{١٦}{\pi}\sum_{m=١}^{k}\frac{(-١)^{m}}{٢m-١}\times$

$\times\sin(٢m-١)\frac{\pi}{٤}\Big]\cos ٨kx\Big\}$ ٢٩٦١ - الف) $\frac{\pi^{٢}}{٣}+٤\sum_{n=١}^{\infty}\frac{(-١)^{n}}{n^{٢}}\cos nx$

؛ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ ب) $٢\pi\sum_{n=١}^{\infty}\frac{(-١)^{n+١}}{n}\sin nx-\frac{٨}{\pi}\sum_{k=٠}^{\infty}\frac{\sin(٢k+١)x}{(٢k+١)^{٣}}$

؛ $(٠\leqslant x<\pi)$ پ) $\frac{٤\pi^{٢}}{٣}+٤\sum_{n=١}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{٢}}-٤\pi\sum_{n=١}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\ (٠<x<٢\pi)$ ؛

$\frac{\pi^{٢}}{٦}$ ، $\frac{\pi^{٢}}{١٢}$ ، $\frac{\pi^{٢}}{٨}$ ٢٩٦٢ - $x^{٢}=\frac{\pi^{٢}}{٣}+٤\sum_{n=١}^{\infty}(-١)^{n}\frac{\cos nx}{n^{٢}}$ ؛

$x^{٣}=٢\pi^{٢}\sum_{n=١}^{\infty}(-١)^{n+١}\frac{\sin nx}{n}+١٢\sum_{n=١}^{\infty}(-١)^{n}\frac{\sin nx}{n^{٣}}$ ؛

$x^{٤}=\frac{١}{\pi}\pi^{٤}+٨\pi^{٢}\sum_{n=١}^{\infty}(-١)^{n}\frac{\cos nx}{n^{٢}}+٤٨\sum_{n=١}^{\infty}\frac{(-١)^{n+١}}{n^{٤}}\cos nx$

٢٩٦٣ - $\frac{\alpha(\alpha-\alpha)}{٢}$ ؛ $\frac{\pi^{٢}-٣\pi\alpha+٣\alpha^{٢}}{٦}$ ٢٩٦٤ - $\frac{٢}{٣}-\frac{٩}{٣\pi^{٢}}\sum_{n=١}^{\infty}\frac{١}{n^{٢}}\times$

$\times\cos\frac{٢\pi nx}{٣}+\frac{١}{٢\pi^{٢}}\sum_{n=١}^{\infty}\frac{\cos ٢\pi nx}{n^{٢}}\ (٠\leqslant x\leqslant ٣)$ ٢٩٦٥ -

$\frac{۱}{۲^m} C_{۲m}^{m} + \frac{۱}{۲^{m-۱}} \sum_{k=۱}^{m} C_{۲m}^{m-k} \cos ۲kx$ ۲۹٦٦– $\sum_{n=۱}^{\infty} q^n \sin nx \ (|q|<۱)$

۲۹٦۷– $۱+۲\sum_{n=۱}^{\infty} q^n \cos nx \ (|q|<۱)$ ۲۹٦۸– $\sum_{n=۰}^{\infty} q^n \cos nx$

۲۹٦۹– $-۲\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx$ ۲۹۷۰– $-\ln ۲ - \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$

۲۹۷۱– $-\ln ۲ + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}\cos nx}{n}$ ۲۹۷۲– $-۲\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{\cos(۲k+۱)x}{۲k+۱}$

۲۹۷۳– $\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{\sin(۲k+۱)x}{(۲k+۱)^۲}$ ۲۹۷٤–

$$x(s) = \frac{a}{۲} - \frac{٤a}{\pi^۲} \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{(۲k+۱)^۲} \times$$

$$y(s) = \frac{a}{۲} - \text{؛} \times \cos \frac{(۲k+۱)\pi s}{۲a} + \frac{٤a}{\pi^۲} \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^k}{(۲k+۱)^۲} \sin \frac{(۲k+۱)\pi s}{۲a}$$

$$-\frac{٤a}{\pi^۲} \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{(۲k+۱)^۲} \cos \frac{(۲k+۱)\pi s}{۲a} + \frac{٤a}{\pi^۲} \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^{k+۱}}{(۲k+۱)^۲} \sin \frac{(۲k+۱)\pi s}{۲a}$$

۲۹۷٥– $f(-x)=f(x)$؛ $f(\pi-x)=-f(x)$ ۲۹۷٦– $f(-x)=-f(x)$؛ $f(\pi-x)=f(x)$

۲۹۷۷ الف) $\left(۰\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{۲}\right) \quad \sum_{k=۰}^{\infty} \left\{\left[\frac{۲}{(۲k+۱)^۲} - \frac{۸}{\pi}\frac{(-۱)^k}{(۲k+۱)^۳}\right]\cos(۲k+۱)x\right\} -$ ؛

ب) $\left(۰\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{۲}\right) \quad \sum_{k=۰}^{\infty} \left\{\left[\frac{۲(-۱)^{k+۱}}{(۲k+۱)^۲} + \frac{۸}{\pi}\frac{۱}{(۲k+۱)^۳}\right]\sin(۲k+۱)x\right\}$

۲۹۷۸– $a_{۲n} = b_{۲n} = ۰ \ (n=۰, ۱, ۲, \dots)$ ۲۹۷۹– $a_{۲n-۱} = b_{۲n-۱} = ۰$

$(n=۱, ۲, ۳, \dots)$ ۲۹۸۰– الف) $a_n=۰$ ، $b_{۲k-۱}=۰$ ؛ ب) $a_n=۰$ ، $b_{۲k}=۰$

۲۹۸۱– $\alpha_n = a_n$ ، $\beta_n = -b_n$ ۲۹۸۲– $\alpha_n = -a_n$ ، $\beta_n = b_n$

۲۹۸۳– $\overline{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh$ ، $\overline{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh$

۲۹۸٤– $A_۰ = a_۰$ ، $A_n = a_n \frac{\sin nh}{nh}$ ، $B_n = b_n \frac{\sin nh}{nh} \ (n=۱, ۲, \dots)$

۲۹۸٥– $A_۰ = a_۰^۲$ ، $A_n = a_n^۲ + b_n^۲$ ؛ $B_n = ۰ \ (n=۱, ۲ \ \dots)$

۲۹۸۶ - $\frac{۱}{۲}$ ۲۹۸۷ - $\frac{۱}{٤}$ ۲۹۸۸ - $۲\ln ۲-۱$ ۲۹۸۹ - $\frac{۱}{٤}$

۲۹۹۰ - $\frac{۱}{m}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{m}\right)$ ۲۹۹۱ - $\ln ۲-\frac{۱}{۲}$ ۲۹۹۲ - $\frac{۳}{٤}$

۲۹۹۳ - ۱   ۲۹۹٤ - $۲(۱-\ln ۲)$ ۲۹۹۵ - $۲e$ ۲۹۹٦ - $۳e^{۲}$

۲۹۹۷ - $\frac{\pi^{۲}}{۳}-۳$ ۲۹۹۸ - $\frac{\pi^{۲}}{٤}-\frac{۳۹}{۱٦}$ ۲۹۹۹ - $\frac{۱}{۲}(\cos ۱-\sin ۱)$

۳۰۰۰ - $\frac{۱}{٦}(٤\ln ۲-۱)$ ۳۰۰۱ - $e^{x}(\alpha_m x^{m}+\alpha_{m-۱}x^{m-۱}+\dots+\alpha_{۰}$

که در آن ضرایب $\alpha_k\ (k=۰, ۱, \dots, m)$ از تساوی $P(n)=\alpha_m n(n-۱)\dots(n-m+۱)+\alpha_{m-۱}n(n-۱)\dots(n-m+۲)+\dots+\alpha_{۱}n+\alpha_{۰}$ تعیین میشود

۳۰۰۲ - $e^{\frac{x}{۲}}\left(\frac{x^{۲}}{٤}+\frac{x}{۲}+۱\right)$ ۳۰۰۳ - $\left(x^{۲}+x+\frac{۱}{x}\right)e^{-x}-\frac{۱}{x}$

۳۰۰٤ - $\left(۱-\frac{x^{۲}}{۲}\right)\cos x-\frac{x}{۲}\sin x$ ۳۰۰۵ - $\frac{۱}{٤}\left(\frac{x+۱}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}-\operatorname{ch}\sqrt{x}\right)$

اگر $x\geqslant ۰$؛ $\frac{۱}{٤}\left(\frac{x+۱}{\sqrt{|x|}}\sin\sqrt{|x|}-\cos\sqrt{|x|}\right)$ اگر $x<۰$

۳۰۰٦ - $\ln\frac{۱}{۱-x}$ ۳۰۰۷ - $۲x\,\mathrm{arc\,tg}\,x-\ln(۱+x^{۲})\ (|x|\leqslant ۱)$

۳۰۰۸ - $\frac{۱}{۲}\mathrm{arc\,tg}\,x+\frac{۱}{٤}\ln\frac{۱+x}{۱-x}\ (|x|<۱)$ ۳۰۰۹ - $(۱-x)^{-\frac{a}{d}}-۱$

$(|x|<۱)$ ۳۰۱۰ - $\left(۱-\frac{x}{۲}\right)^{-\frac{۱}{۳}}-۱$ ۳۰۱۱ - $\frac{۱+x}{(۱-x)^{۳}}\ (|x|<۱)$

۳۰۱۲ - $\frac{x(۳-x)}{(۱-x)^{۳}}\ (|x|<۱)$ ۳۰۱۳ - $(۱+۲x^{۲})e^{x^{۲}}$ ۳۰۱٤ -

$\frac{\pi}{۳\sqrt{۳}}+\frac{۱}{۳}\ln ۲$ ۳۰۱۵ - $\frac{\pi}{٤}$ ۳۰۱٦ - $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۳۰۱۷ - $\frac{\pi}{۲}$

۳۰۱۸ - $\frac{\pi-x}{۲}\ (۰<x<۲\pi)$ ۳۰۱۹ - $-\ln\left|۲\sin\frac{x}{۲}\right|\ (۰<x<۲\pi)$

۳۰۲۰ - $\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{\sin\frac{x+\alpha}{۲}}{\sin\frac{x-\alpha}{۲}}\right|$ ۳۰۲۱ - $\frac{\pi}{٤}$ اگر $۰<x<۲\alpha$؛ ۰ اگر

$\alpha<x<۲\pi-۲\alpha$ ؛ $-\frac{\pi}{٤}$ اگر $۲\pi-۲\alpha<x<۲\pi$ ۳۰۲۲ –

$\frac{\pi}{٤}\operatorname{sgn} x\,(|x|<\pi)$ ۳۰۲۳ – $\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{\cos x}{۲}\right)-\frac{x}{۲}\sin x\,(|x|<\pi)$

۳۰۲٤ – $\frac{\pi^۲}{۸}-\frac{\pi}{٤}|x|\;(|x|\leqslant\pi)$ ۳۰۲۵ – $\frac{x}{۲}(۱+\cos x)-\sin x\ln\times$

$\times\left(۲\cos\frac{x}{۲}\right)\;(|x|<\pi)$ ۳۰۲٦ – $e^{\cos x}\cos(\sin x)\quad(|x|<+\infty)$

۳۰۲۷ – $x=i\pi,\ y=j\pi\ (i, j=۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$ ۳۰۲۸ – $۲(\arcsin x)^۲$

$(|x|\leqslant۱)$ ۳۰۲۹ – $\frac{٤}{٤-x}+\frac{٤\sqrt{x}}{(٤-x)^{\frac{۳}{۲}}}\arcsin\frac{\sqrt{x}}{۲}$ اگر $x\geqslant۰$ ؛

$\frac{٤}{٤-x}-\frac{٤\sqrt{|x|}}{(٤-x)^{\frac{۳}{۲}}}\ln\frac{\sqrt{|x|}+\sqrt{٤-x}}{۲}$ اگر $x<۰$ ۳۰۳۰ – $\frac{۱}{x-۱}$

۳۰۳۱ – $\frac{a_۱}{x}$ ۳۰۳۲ – الف) $\frac{x}{۱-x}$ ؛ ب) $\frac{۱}{۱-x}$ ۳۰۳۳ – الف) $\frac{x^۲}{(۱-x)^۲}$ ؛

ب) $\frac{x}{(x-۱)^۲}$ ۳۰۳٤ – ۱ ۳۰۳۵ – $۱+\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{(۲n-۱)!!}{(۲n)!!}\frac{۱}{(۲n+۱)^۲}$

۳۰۳٦ – $\frac{\pi^۲}{۱۲}$ ۳۰۳۷ – $-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(p+nq)}$ ۳۰۳۸ – $۲-\frac{\pi^۲}{٦}$ ۳۰۳۹ – $\frac{۱}{۲٤}$

۳۰٤۰ – $\frac{\pi^۲}{۱۲}$ ۳۰٤۱ – $F(k)=\frac{\pi}{۲}\left\{۱+\sum_{n=۱}^{\infty}\left[\frac{(۲n-۱)!!}{(۲n)!!}\right]^۲k^{۲n}\right\}$

۳۰٤۲ – $E(k)=\frac{\pi}{۲}\left\{۱-\sum_{n=۱}^{\infty}\left[\frac{(۲n-۱)!!}{(۲n)!!}\right]^۲\frac{k^{۲n}}{۲n-۱}\right\}$ ۳۰٤۳ –

$۲\pi a\left[۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲\varepsilon^۲-\left(\frac{۱\times۳}{۲\times٤}\right)^۲\frac{\varepsilon^٤}{۳}-\ldots\right]$ که در آن ε خروج از مرکز

بیضی است ۳۰٤۷ – $\frac{۲\pi a^n}{n!}$ ۳۰٤۸ – $\ln(۱+\alpha)$ بازای $|\alpha|<۱$

و $\frac{۱}{\alpha^۲}\ln\left(۱+\frac{۱}{\alpha}\right)$ بازای $|\alpha|>۱$ ۳۰٤۹ – ۰ بازای $|\alpha|\leqslant۱$ و $\pi\ln a^۲$

بازای $|\alpha|>۱$ ۳۰۵۰ – ۲×۱۰^{-۶} ۳۰۶۱ – $\frac{۱}{۴}$ ۳۰۶۲ – ۲

۳۰۶۳ – $\frac{۳}{۷}$ ۳۰۶۴ – $a^{-\ln ۲}$ ۳۰۶۵ – الف) خیر ؛ ب) بلی ؛ پ) بلی ؛
ت) بلی ۳۰۶۶ – واگرا بسمت صفر ۳۰۶۷ – همگرا ۳۰۶۸ – بازای $p>۱$
همگرا ۳۰۶۹ – واگرا بسمت صفر ۳۰۷۰ – به ازای تمام مقادیر p همگرا
۳۰۷۱ – بازای $a_۱=a$ همگرا ۳۰۷۲ – همگرا اگر $\sum_{i+۱}^{p} a_i = \sum_{i=۱}^{p} b_i$
۳۰۷۳ – واگر بسمت صفر ۳۰۷۴ – همگرا ۳۰۷۵ – همگرا ۳۰۷۶ – همگرا
۳۰۷۷ – به ازای تمام مقادیر x همگراست ۳۰۷۸ – به ازای تمام
مقادیر x همگراست ۳۰۷۹ – بازای $|x|<۱$ همگراست ۳۰۸۰ – بازای
$|x|<۲$ همگراست ۳۰۸۱ – بازای $|x|>e$ همگراست ۳۰۸۲ – بازای تمام
مقادیر x همگراست ۳۰۸۳ – به ازای $|x|<۱$ ، p دلخواه و بازای

$x=\pm ۱$ ، $p>۱$ ، $q>\frac{۱}{۲}$ همگراست ۳۰۸۴ – بازای x و p دلخواه

همگراست ۳۰۸۵ – واگرا ۳۰۸۸ – همگرای مشروط ۳۰۸۹ – واگرا

۳۰۹۰ – بازای $p>۱$ همگرای مطلق و بازای $\frac{۱}{۲}<p\leqslant ۱$ همگرای مشروط

۳۰۹۱ – واگرا ۳۰۹۲ – واگرا ۳۰۹۳ – واگرا ۳۰۹۴ – همگرای مشروط
۳۰۹۵ – همگرای مشروط ۳۰۹۶ – واگرا ۳۰۹۷ – بازای $\alpha>۱$ همگرای

مطلق و بازای $\frac{۱}{۲}<\alpha\leqslant ۱$ همگرای مشروط ۳۱۰۹ – $F'(x) =$

$= F(x) \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{f'_n(x)}{۱+f_n(x)}$ ؛ $\sum_{n=۱}^{\infty}|f_n(x)|<+\infty$ ، $|f'_n(x)|<c_n\ (n=۱,۲,\ldots)$

که در آن $\sum_{n=۱}^{\infty} c_n<+\infty$ ۳۱۱۱ – $(۰<\theta<۱)$ $۱۵۷,۹۷۰+\theta\times ۰,۰۰۰۴$

۳۱۱۲ – $(|\theta|<۱)$ $۱۰^{۲۸۶۶}\times ۷,۷\times\left(۱+\frac{\theta}{۱۲۰۰۰}\right)$ ۳۱۱۳ –

$(|\theta|<۱)$ $۰,۰۷۹۸\left(۱+\frac{\theta}{۳۰۰}\right)$ ۳۱۱۴ – $۱۰^{۲۸}\times ۱,۳۷۸\times\left(۱+\frac{\theta}{۲۸۸}\right)$

$(|\theta|\leqslant ۱)$ ۳۱۱۵ – $(|\theta|\leqslant ۱)$ $۱۰^{۴۲}\times ۴,۷۹۲\times\left(۱+\frac{\theta}{۱۲۰}\right)$

۳۱۱۶ – $(|\theta|<۱)$ $۰,۱۲۴\times\left(۱+\frac{\theta}{۳۰۰}\right)$ ۳۱۱۷ – $۰,۳۵۵\times\left(۱+\frac{\theta}{۶۰۰}\right)$

$(|\theta|<۱)$ ۳۱۱۸- $(۲n-۱)!!=\sqrt{۲}\,(۲n)^n e^{-n+\frac{\theta_n}{۱۲n}}\ (|\theta_n|<۱)$

۳۱۱۹- $\frac{۲^{۲n}}{\sqrt{\pi n}}e^{\frac{\theta_n}{۶n}}\ (|\theta_n|<۱)$ ۳۱۲۰- الف) ۱ ؛ ب) e ؛ پ) $\frac{e}{۲}$ ؛

ت) ۱ ۳۱۲۱- $P_۳(x)=۱-\frac{۵۵}{۲۱}x-\frac{۱}{۱۴}x^۲+\frac{۵}{۴۲}x^۳$ ؛ $P_۳(-۱)\approx ۳{,}۴۳$ ؛

$P_۳(۱)=-۱{,}۵۷$ ؛ $P_۳(۶)\approx ۸{,}۴۳$ ۳۱۲۲- $y=b_۰+\frac{y_۱-y_{-۱}}{۲h}(x-x_۰)+$

$+\frac{y_۱-۲y_۰+y_{-۱}}{۲h^۲}(x-x_۰)^۲$ ۳۱۲۳- $y=۰{,}۸۰۸+۰{,}۱۹۳x-۰{,}۰۰۱۰۱x^۲$

۳۱۲۴- $\sin x^\circ\approx\frac{۵x}{۲۸۸}\left[۱-\left(\frac{x}{۱۵۰}\right)^۲\right]$ ؛ $\sin ۲۰^\circ\approx ۰{,}۳۴۱$ ؛

$\sin ۴۰^\circ\approx ۰{,}۶۴۵$ ؛ $\sin ۸۰^\circ\approx ۰{,}۹۹۴$ ۳۱۲۵- $P(x)=\frac{۱}{۳}(۷x^۲-۴x^۴)$

۳۱۲۶- $۷\frac{۱}{۳}$ ۳۱۲۷- $B_n(x)=x$ ؛ $B_n(x)=x^۲+\frac{x(۱-x)}{n}$ ؛

$B_n(x)=\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\left(۱-\frac{۲}{n}\right)x^۳+\frac{۳}{n}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)x^۲+\frac{۱}{n^۲}x$ ۳۱۲۸-

۳۱۲۸- $B_n(x)=\sum_{i=۰}^{n} f\left(a+\frac{i}{n}l\right)C_n^i\frac{(x-a)^i(b-x)^{n-i}}{l^n}$ که در آن

$l=b-a$ ۳۱۲۹- $B_n(x)=\frac{۱}{۸}(۱-x)(۱+x)^۳+\frac{۱}{۱۶}(۱+x)^۴$

۳۱۳۰- $B_{۲n}(x)=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱-x^۲}{۴}\right)^n\sum_{i=۱}^{n} i\,C_{۲n}^{n-i}\left[\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)^i+\left(\frac{۱-x}{۱+x}\right)^i\right]$

۳۱۳۱- $B_n(x)=e^{ka}\left[۱+\left(e^{\frac{kl}{n}}-۱\right)\frac{x-a}{l}\right]^n$ که در آن $l=b-a$

۳۱۳۲- $B_n(x)=\frac{۱}{۲}\left[\left(\cos\frac{\pi}{۲n}+i\frac{۲x}{\pi}\sin\frac{\pi}{۲n}\right)^n+\left(\cos\frac{\pi}{۲n}-i\frac{۲x}{\pi}\times\right.\right.$

$\left.\left.\times\sin\frac{\pi}{۲n}\right)^n\right]$ که در آن $i=\sqrt{-۱}$ ۳۱۳۵- $\sigma_{۲n-۱}(x)=\frac{\pi}{۲}-$

$-\frac{۸}{\pi}\sum_{k=۱}^{n-k}\frac{n-k}{۲n-۱}\frac{\cos(۲k-۱)x}{(۲k-۱)^۲}$

قسمت ۲

فصل ۶

۳۱۳۶ - نیم صفحهٔ $y\geqslant ۰$ ۳۱۳۷ - $|x|\leqslant ۱$ ؛ $|y|\geqslant ۱$ ۳۱۳۸ -
دایرهٔ $x^۲+y^۲\leqslant ۱$ ۳۱۳۹ - خارج دایرهٔ $x^۲+y^۲>۱$ ۳۱۴۰ - حلقهٔ
$۱\leqslant x^۲+y^۲\leqslant ۴$ ۳۱۴۱ - هلال $x\leqslant x^۲+y^۲<۲x$ ۳۱۴۲ - $-۱\leqslant x^۲+y\leqslant ۱$
۳۱۴۳ - نیم صفحهٔ $x+y<۰$ ۳۱۴۴ - جفت زاویهٔ متقابل $|y|\leqslant|x|$
$(x\neq ۰)$ ۳۱۴۵ - جفت زاویهٔ منفرجهٔ متقابل محدود به خطوط $y=۰$ و
$y=-۲x$ بانضمام مرز آنها بدون رأس مشترک $O(۰, ۰)$ ۳۱۴۶ - مثلث
منحنی‌الخط محدود به سهمی‌های $y^۲=x$ ، $y^۲=-x$ و خط $y=۲$ بدون
رأس $O(۰, ۰)$ ۳۱۴۷ - دسته حلقه‌های متحدالمرکز $۲\pi k\leqslant x^۲+y^۲\leqslant\pi(۲k+۱)$
$(k=۰, ۱, ۲, \ldots)$ ۳۱۴۸ - خارج مخروط $x^۲+y^۲-z^۲=۰$ بانضمام
مرز آن بدون رأس   ۳۱۴۹ - چهار ثمن فضا با هم   ۳۱۵۰ - داخل هذلولوی
دوپارچه $x^۲+y^۲-z^۲=-۱$ ۳۱۵۱ - خطوط موازی   ۳۱۵۲ - دوایر
متحدالمرکز   ۳۱۵۳ - دسته هذلولی‌های متساوی‌الساقین با مجانب‌های مشترک
$y=\pm x$ ۳۱۵۴ - خطوط موازی   ۳۱۵۵ - دسته خط به رأس مبداء مختصات،
باستثنای رأس   ۳۱۵۶ - دسته بیضی‌های متشابه   ۳۱۵۷ - مجموعهٔ هذلولی های
متساوی‌الساقین واقع در ربع اول و سوم که مجانب‌های آنها محورهای
مختصات است   ۳۱۵۸ - دسته خطوط منکسر دوتایی که رأس آنها روی محور
Oy واقع است   ۳۱۵۹ - ربع اول و سوم بازای $z=۰$ ؛ دسته خطوط منکسر
دو تایی که قطعه‌های آنها موازی محورهای مختصات است و رأس آنها روی
خط $x+y=۰$ بازای $z>۰$ واقع است   ۳۱۵۹,۱ - خطوط تراز عبارتند از
اضلاع زاوایای موازی با امتداد مثبت محورهای مختصات Ox و Oy برئوس
واقع روی خط $y=x$ ۳۱۵۹,۲ - دسته دورگردهای مربع‌های به مرکز
مشترک $O(۰, ۰)$ و باضلاع موازی با محورهای مختصات Ox و Oy بازای
$z>۰$ ؛ نقطهٔ $O(۰, ۰)$ بازای $z=۰$ ۳۱۵۹,۳ - خطوط موازی با محور
Ox بازای $z<۰$ ؛ اضلاع زوایای موازی با محور مختصات Ox و نیم محور
مثبت Oy برئوس واقع بر سهمی $y=x^۲$ بازای $z>۰$ ؛ نیم‌محور مثبت Oy
بازای $z=۰$ ۳۱۶۰ - دسته دوایر گذرنده از مبداء مختصات (باستثنای این
مبداء) و عمود بر محور Ox ۳۱۶۱ - منحنی‌های $y=\dfrac{C}{\ln x}$
۳۱۶۲ - منحنی‌های $y=\dfrac{C+x}{\ln x}$ ۳۱۶۳ - دسته دوایر بمرکز واقع روی محور

Ox و عمود بر دایرهٔ $x^۲+y^۲=a^۲$ ۳۱٦٤ – دسته دوایر عمود بر محور
Oy و گذرنده از نقاط $(-a, ۰)$، $(a, ۰)$ باستثنای نقاط مذکور ۳۱٦٥ – بازای
$z=۰$ خطوط $x=m\pi,\quad y=n\pi\quad(m, n=۰, \pm۱, \pm۲, \dots)$ ؛ بازای
$z=-۱$ یا $z=۱$ دستگاه مربعات $m\pi<x<(m+۱)\pi$، $n\pi<y<(n+۱)\pi$
که در آن $(-۱)^{m+n}=z$ ۳۱٦٦ – دسته صفحات متوازی ۳۱٦۷ – دسته
کرات متحدالمرکز بمرکز مبدأ مختصات ۳۱٦۸ – دسته هذلولوی‌های
دوپارچه بازای $u<۰$ ؛ دسته هذلولوی‌های یک‌پارچه بازای $u>۰$ ؛
مخروط بازای $u=۰$ ۳۱٦۹ – دسته استوانه‌های بیضی گونه که محور
مشترک آنها خط $x+y=۰$، $z=۰$ میباشد ۳۱۷۰ – دسته کرات متحدالمرکز
$x^۲+y^۲+z^۲=\pi n\quad(n=۰, ۱, ۲, \dots)$ بازای $u=۰$ ؛ دسته قشرهای کروی
$\pi n<x^۲+y^۲+z^۲<\pi(n+۱)$، که در آن $(-۱)^n=u$، بازای $u=-۱$
یا $u=۱$ ۳۱۷۱ – سطح استوانه به هادی $z=f(y)$، $x=۰$ که مولدهای
آن موازی خط $y=ax$، $z=۰$ میباشد ۳۱۷۲ – سطح دوار حاصل از دوران
منحنی $z=f(x)$، $y=۰$ حول محور Oz ۳۱۷۳ – سطح مخروطی برأس مبدأ
مختصات و هادی $x=۱$، $z=f(y)$ ۳۱۷٤ – شبه مخروط به هادی $x=۱$،
$z=f(y)$ که مولدهای آن موازی صفحهٔ Oxy است ۳۱۷٦ – $f\left(۱, \frac{y}{x}\right)=$
$=f(x, y)$ ۳۱۷۷ – $\sqrt{۱+x^۲}$ ۳۱۷۸ – $f(t)=۲t+t^۲;$
$z=x-۱+\sqrt{y}\quad(x>۰)$ ۳۱۷۹ – $f(x)=x^۲-x;\ z=۲y+(x-y)^۲$
۳۱۸۰ – $f(x, y)=x^۲\frac{۱-y}{۱+y}$ ۳۱۸۳,۱ – خیر ۳۱۸۳,۲ – ۰ ؛ خیر
۳۱۸٤ – الف) ۰ ، ۱ ؛ ب) $\frac{۱}{۲}$ ، ۱ ؛ پ) ۰ ، ۱ ؛ ت) ۰ ، ۱ ؛
ث) ۱ ، ∞ ۳۱۸٥ – ۰ ۳۱۸٦ – ۰ ۳۱۸۷ – a ۳۱۸۸ – ۰
۳۱۸۹ – ۰ ۳۱۹۰ – ۱ ۳۱۹۱ – e ۳۱۹۲ – $\ln ۲$ ۳۱۹۳ – الف)
$\frac{\pi}{۲}\leqslant\varphi\leqslant\frac{۳\pi}{۲}$ ؛ ب) $\frac{\pi}{٤}<\varphi<\frac{۳\pi}{٤}$ و $\frac{٥\pi}{٤}<\varphi<\frac{۷\pi}{٤}$ ۳۱۹٤ – نقطهٔ
انفصال : $x=۰, y=۰$ ۳۱۹٥ – تمام نقاط خط $x+y=۰$
۳۱۹٦ – $O(۰, ۰)$ نقطهٔ انفصال بی نهایت است ؛ نقاط خط $x+y=۰$
$(x\neq۰)$ نقاط انفصال قابل حذف است ۳۱۹۷ – نقاط واقع روی محورهای
مختصاوت ۳۱۹۸ – مجموعهٔ نقاط خطوط $x=m\pi$ و $y=n\pi$
$(m, n=۰, \pm۱, \pm۲, \dots)$ ۳۱۹۹ – نقاط دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ ۳۲۰۰ – نقاط
صفحات مختصات : $x=۰$ ، $y=۰$ ، $z=۰$ ۳۲۰۱ – (a, b, c)

۳۲۰۳,۱ پیوستهٔ یکنواخت ۳۲۰۳,۲ – پیوستهٔ یکنواخت ۳۲۰۳,۳ – پیوستهٔ
نایکنواخت ۳۲۰۳,٤ – تابع روی E پیوسته است ولی نایکنواخت ۳۲۱۲ –
$f'_x(x, ۱) = ۱$ ۳۲۱۲,۱ – $f'_x(۰, ۰) = ۰$ ، $f'_y(۰, ۰) = ۰$ ؛ تابع در
نقطهٔ $O(۰, ۰)$ دیفرانسیل پذیر نیست ۳۲۱۲,۲ – تابع در نقطهٔ $O(۰, ۰)$
دیفرانسیل پذیر نیست ۳۲۱۲,۳ – تابع در نقطهٔ $O(۰, ۰)$ دیفرانسیل پذیر
است ۳۲۱۳ – $\frac{\partial u}{\partial x} = ٤x^۳ - ۸xy^۲$ ، $\frac{\partial u}{\partial y} = ٤y^۳ - ۸x^۲y$ ،

$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = ۱۲x^۲ - ۸y^۲$ ، $\frac{\partial^۲ u}{\partial x\, \partial y} = -۱٦xy$ ، $\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۱۲y^۲ - ۸x^۲$

۳۲۱٤ – $\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{۱}{y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{x}{y^۲}$ ، $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = ۰$ ،

$\frac{\partial^۲ u}{\partial x\, \partial y} = ۱ - \frac{۱}{y^۲}$ ، $\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = \frac{۲x}{y^۳}$ ۳۲۱٥ – $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{۱}{y^۲}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{۲x}{y^۳}$ ،

$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = ۰$ ، $\frac{\partial^۲ u}{\partial x\, \partial y} = -\frac{۲}{y^۳}$ ، $\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = \frac{٦x}{y^٤}$ ۳۲۱٦ – $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^۲}{(x^۲ + y^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ ،

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^۲ + y^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ ، $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = -\frac{۳xy^۲}{(x^۲ + y^۲)^{\frac{٥}{۲}}}$ ، $\frac{\partial^۲ u}{\partial x\, \partial y} = \frac{y(۲x^۲ - y^۲)}{(x^۲ + y^۲)^{\frac{٥}{۲}}}$ ،

$\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = -\frac{x(x^۲ - ۲y^۲)}{(x^۲ + y^۲)^{\frac{٥}{۲}}}$ ۳۲۱۷ – $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(x + y) + x\cos(x + y)$ ،

$\frac{\partial u}{\partial y} = x\cos(x + y)$ ، $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = ۲\cos(x + y) - x\sin(x + y)$ ،

$\frac{\partial^۲ u}{\partial x\, \partial y} = \cos(x + y) - x\sin(x + y)$ ، $\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = -x\sin(x + y)$ ۳۲۱۸ –

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{۲x\sin x^۲}{y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos x^۲}{y^۲}$ ، $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = -\frac{۲\sin x^۲ + ٤x^۲\cos x^۲}{y}$ ،

$\frac{\partial^۲ u}{\partial x\, \partial y} = \frac{۲x\sin x^۲}{y^۲}$ ، $\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = \frac{۲\cos x^۲}{y^۳}$ ۳۲۱۹ – $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{۲x}{y}\sec^۲\frac{x^۲}{y}$ ،

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^۲}{y^۲}\sec^۲\frac{x^۲}{y}$ ، $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = \frac{۲}{y}\sec^۲\frac{x^۲}{y} + \frac{۸x^۲}{y^۲}\sin\frac{x^۲}{y}\sec^۳\frac{x^۲}{y}$ ،

$\frac{\partial^۲ u}{\partial x\, \partial y} = -\frac{۲x}{y^۲}\sec^۲\frac{x^۲}{y} - \frac{٤x^۳}{y^۳}\sin\frac{x^۲}{y}\sec^۳\frac{x^۲}{y}$ ، $\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = \frac{۲x^۲}{y^۳}\sec^۲\frac{x^۲}{y} +$

$+\frac{٢x^{٤}}{y^{٤}}\sin\frac{x^{٢}}{y}\sec^{٣}\frac{x^{٢}}{y}$ ٣٢٢٠ − $\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-١}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}=x^{y}\ln x$ ،

$\frac{\partial^{٢}u}{\partial x^{٢}}=y(y-١)x^{y-٢}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial x\,\partial y}=x^{y-١}(١+y\ln x)$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial y^{٢}}=x^{y}\ln^{٢}x$

$(x>٠)$ ٣٢٢١ − $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{١}{x+y^{٢}}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{٢y}{x+y^{٢}}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial x^{٢}}=-\frac{١}{(x+y^{٢})^{٢}}$ ،

$\frac{\partial^{٢}u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{٢y}{(x+y^{٢})^{٢}}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial y^{٢}}=\frac{٢(x-y^{٢})}{(x+y^{٢})^{٢}}$ ٣٢٢٢ − $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^{٢}+y^{٢}}$ ،

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{x^{٢}+y^{٢}}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial x^{٢}}=\frac{٢xy}{(x^{٢}+y^{٢})^{٢}}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{x^{٢}-y^{٢}}{(x^{٢}+y^{٢})^{٢}}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial y^{٢}}=-\frac{٢xy}{(x^{٢}+y^{٢})^{٢}}$

٣٢٢٣ − $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{١}{١+x^{٢}}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{١}{١+y^{٢}}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial x^{٢}}=-\frac{٢x}{(١+x^{٢})^{٢}}$ ،

$\frac{\partial^{٢}u}{\partial x\,\partial y}=٠$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial y^{٢}}=-\frac{٢y}{(١+y^{٢})^{٢}}\ (xy\neq ١)$ ٣٢٢٤ − $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{|y|}{x^{٢}+y^{٢}}$ ،

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x\,\mathrm{sgn}\,y}{y^{٢}+y^{٢}}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial x^{٢}}=-\frac{٢x|y|}{(x^{٢}+y^{٢})^{٢}}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial x\,\partial y}=\frac{(x^{٢}-y^{٢})\,\mathrm{sgn}\,y}{(x^{٢}+y^{٢})^{٢}}$ ،

$\frac{\partial^{٢}u}{\partial y^{٢}}=\frac{٢x|y|}{(x^{٢}+y^{٢})^{٢}}\ (y\neq ٠)$ ٣٢٢٥ − $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^{٢}+y^{٢}+z^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}$ ،

$\frac{\partial^{٢}u}{\partial x^{٢}}=\frac{٢x^{٢}-y^{٢}-z^{٢}}{(x^{٢}+y^{٢}+z^{٢})^{\frac{٥}{٢}}}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial x\,\partial y}=\frac{٣xy}{(x^{٢}+y^{٢}+z^{٢})^{\frac{٥}{٢}}}$ ، ٣٢٢٦ −

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}$ ، $\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\ln\frac{x}{y}$ ،

$\frac{\partial^{٢}u}{\partial x^{٢}}=\frac{z(z-١)}{x^{٢}}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial y^{٢}}=\frac{z(z+١)}{y^{٢}}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial z^{٢}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\ln^{٢}\frac{x}{y}$

$\frac{\partial^{٢}u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{z^{٢}}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial x\,\partial z}=\frac{١}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\left(١+z\ln\frac{x}{y}\right)$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial y\,\partial z}=$

$=-\frac{١}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z}\left(١+z\ln\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}>٠\right)$ ٣٢٢٧ − $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{yu}{xz}$ ،

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u\ln x}{z}$ ، $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{yu}{z^{٢}}\ln x$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial x^{٢}}=\frac{y(y-z)u}{x^{٢}z^{٢}}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial y^{٢}}=\frac{u\ln^{٢}x}{z^{٢}}$

$\frac{\partial^{٢}u}{\partial z^{٢}}=\frac{yu\ln x}{z^{٤}}(٢z+y\ln x)$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial x\,\partial y}=\frac{(z+y\ln x)u}{xz^{٢}}$ ، $\frac{\partial^{٢}u}{\partial x\,\partial z}=-\frac{yu(z+y\ln x)}{xz^{٣}}$

$\frac{\partial^{۲}u}{\partial y\,\partial z} = -\frac{u\ln x\,(z+y\ln x)}{z^{۳}}\,(xz\neq ۰)$ ۳۲۲۸ − $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^{z}}{x}u$ ،

$\frac{\partial u}{\partial y} = zy^{z-۱}u\ln x$ ، $\frac{\partial u}{\partial z} = y^{z}u\ln x\ln y$ ، $\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}} = \frac{y^{z}(y^{z}-۱)}{x^{۲}}u$ ،

$\frac{\partial\ u}{\partial y^{۲}} = zy^{z-۲}u\,(z-۱+zy^{z}\ln x)\ln x$ ، $\frac{\partial^{۲}u}{\partial z^{۲}} = y^{z}u\,(۱+y^{z}\ln x)\ln x\ln^{۲}y$ ،

$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y} = \frac{zy^{z-۱}u}{x}(۱+y^{z}\ln x)$ ، $\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial z} = \frac{y^{z}u\ln y}{x}(۱+y^{z}\ln x$ ،

$\frac{\partial^{۲}u}{\partial y\,\partial z} = y^{z-۱}u\ln x\,[۱+z\ln y\,(۱+y^{z}\ln x)]\ \ (x>۰,\ y>۰)$ ۳۲۳۰,۱ −

$f''_{xy}(۰,\ ۰)$ وجود ندارد ۳۲۳۵ − $du = x^{m-۱}y^{n-۱}(my\,dx+nx\,dy)$ ،

$d^{۲}u = x^{m-۲}y^{n-۲}\,[m\,(m-۱)\,y^{۲}\,dx^{۲}+۲\,mn\,xy\,dx\,dy+n\,(n-۱)\,x^{۲}\,dy^{۲}]$

۳۲۳۶ − $\partial u = \frac{y\,dx-x\,dy}{y^{۲}}$ ، $\partial^{۲}u = -\frac{۲}{y^{۳}}dy\,(y\,dx-x\,dy)$ ۳۲۳۷ −

$du = \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}$ ، $d^{۲}u = \frac{(y\,dx-x\,dy)^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$ ۳۲۳۸ − $du = \frac{x\,dx+y\,dy}{x^{۲}+y^{۲}}$ ،

$d^{۲}u = \frac{(y^{۲}-x^{۲})\,(dx^{۲}-dy^{۲})-۴\,xy\,dx\,dy}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}$ ۳۲۳۹ − $du = e^{xy}(y\,dx+x\,dy)$ ،

$d^{۲}u = e^{xy}\,[y^{۲}\,dx^{۲}+۲\,(۱+xy)\,dx\,dy+x^{۲}\,dy^{۲}]$ ۳۲۴۰ −

$du=(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$ ، $d^{۲}u = ۲\,(dx\,dy+dy\,dz+dz\,dx)$

۳۲۴۱ − $du = \frac{(x^{۲}+y^{۲})\,dz-۲z\,(x\,dx+y\,dy)}{(x^{۲}+y^{۲})^{۲}}$ ، $\longrightarrow \ldots\ d^{۲}u = \frac{۲z\,[(۳x^{۲}-y^{۲})\,dx^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{۳}}$

$\frac{+۸xy\,dx\,dy+(۳y^{۲}-x^{۲})\,dy^{۲}]-۴\,(x^{۲}+y^{۲})\,(x\,dx+y\,dy)\,dz}{(x^{۲}+y^{۲})^{۳}}\ \ldots\longrightarrow$ ۳۲۴۲ −

$dx-dy$ ، $-۲\,(dx-dy)\,(dy+dz)$ ۳۲۴۴ الف) $۱+mx+ny$ ؛

ب) xy ؛ پ) $x+y$ ۳۲۴۵ − الف) ۱۰۸,۹۷۲ ؛ ب) ۱,۰۰۵ ؛

پ) ۲,۹۵ ؛ ت) ۰,۵۰۲ ؛ ث) ۰,۹۷ ۳۲۴۶ − قطر تقریباً ۲mm و

مساحت تقریباً $۱۴۰\text{cm}^{۲}$ کم میشود ۳۲۴۷ − باندازهٔ ۱,۷mm کم شود

۳۲۴۹ − $\Delta\approx ۱۰,۲\,m^{۳}$ ؛ $\delta\approx ۱۲\%$ ۳۲۵۰ − $\Delta\approx ۷,۶\,\text{m}$ ۳۲۵۱ − $f'_{x}(x,\ y)$

و $f'_{y}(x,\ y)$ در همسایگی نقطهٔ $(۰,\ ۰)$ کراندار نیستند ۳۲۵۶ − $\frac{\partial^{۴}u}{dx^{۴}} = ۲۴$ ،

$\frac{d^{۴}u}{dx^{۳}dy} = ۰$ ، $\frac{d^{۴}u}{dx^{۲}\partial y^{۲}} — ۱۶$ ۳۲۵۷ − $\frac{d^{۳}u}{dx^{۲}\partial y} = ۰$ ۳۲۵۸ − $\frac{d^{۶}u}{dx^{۳}dy^{۳}} =$

$= -۶\,(\cos x + \cos y)$ ۳۲۵۹ – $\frac{d^{۳}u}{dx\,dy\,dz} = ۰$ ۳۲۶۰ $\frac{d^{۳}u}{dx\,dy\,dz} = e^{xyz} \times$

$\times(۱ + ۳xyz + x^{۲}y^{۲}z^{۲})$ ۳۲۶۱ – $\frac{d^{۴}u}{dx\,dy\,d\xi d\eta} = -\frac{۶}{r^{۴}} + \frac{۴۸\,(x-\xi)^{۲}(y-\eta)^{۲}}{r^{۸}}$

که در آن $r = \sqrt{(x-\xi)^{۲} + (y-\eta)^{۲}}$ ۳۲۶۲ – $\frac{\partial^{n+q}u}{\partial x^{p}dx^{q}} = p!q!$

۳۲۶۳ – $\frac{۲\,(-۱)^{m}(m+n-۱)!\,(nx+my)}{(x-y)^{m+n+۱}}$ ۳۲۶۴ – $e^{x+y}[x^{۲} + y^{۲} +$

$+ ۲(mx + ny) + m\,(m-۱) + n\,(n-۱)]$ ۳۲۶۵ – $(x+p)\,(y+q) \times$

$\times\,(z+r)\,e^{x+y+z}$ ۳۲۶۶ – $\sin\frac{n\pi}{۲}$ ۳۲۶۷ – $F(t) = f'(t) + ۳tf''(t) +$

$+ t^{۲}f'''(t)$ ۳۲۶۸ – $d^{۴}u = ۲۴\,(dx^{۴} - ۲dx^{۳}\,dy - ۲dx\,dy^{۳} + dy^{۴})$؛

$\frac{\partial^{۴}u}{\partial x^{۴}} = ۲۴$ ، $\frac{\partial^{۴}u}{\partial x^{۳}\partial y} = -۱۲$ ، $\frac{\partial^{۴}u}{\partial x^{۲}\partial y^{۲}} = ۰$ ، $\frac{\partial^{۴}u}{\partial x\,\partial y^{۳}} = -۱۲$ ، $\frac{\partial^{۴}u}{\partial y^{۴}} = ۲۴$

۳۲۶۹ – $d^{۳}u = ۶\,(dx^{۳} - ۳dx^{۲}dy + ۳dx\,dy^{۲} + dy^{۳})$ ۳۲۷۰ –

$d^{۳}u = -۸(x\,dx + y\,dy)^{۳}\cos(x^{۲} + y^{۲}) - ۱۲\,(x\,dx + y\,dy)\,(dx^{۲} + dy^{۲}) \times$

$\times \sin(x^{۲} + y^{۲})$ ۳۲۷۱ – $d^{۱۰}u = -\frac{۹!\,(dx+dy)^{۱۰}}{(x+y)^{۱۰}}$ ۳۲۷۲ – $d^{۶}u =$

$= -(dx^{۶} - ۱۵\,dx^{۴}\,dy^{۲} + ۱۵\,dx^{۲}\,dy^{۴} - dy^{۶})\cos x\,\mathrm{ch}\,y - ۲\,dx\,dy\,(۳\,dx^{۴} -$

$- ۱۰\,dx^{۲}\,dy^{۲} + ۳dy^{۴})\sin x\,\mathrm{sh}\,y$ ۳۲۷۳ – $d^{۳}u = ۶dx\,dy\,dz$

۳۲۷۴ – $d^{۴}u = ۲\left(\frac{dx^{۴}}{x^{۳}} + \frac{dy^{۴}}{y^{۳}} + \frac{dz^{۴}}{z^{۳}}\right)$ ۳۲۷۵ – $d^{n}u = e^{ax+by}(a\,dx + b\,dy)^{n}$

۳۲۷۶ – $d^{n}u = \sum_{k=۰}^{n} C_{n}^{k}X^{(n-k)}(x)\,Y^{(k)}(y)\,dx^{n-k}\,dy^{k}$ ۳۲۷۷ – $d^{n}u =$

۳۲۷۷ – $= f^{(n)}(x + y + z)\,(dx + dy + dz)^{n}$ ۳۲۷۸ – $d^{n}u = e^{ax+by+cz} \times$

$\times\,(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^{n}$ ۳۲۸۰ – الف) $Au = -u$ ، $A^{۲}u = u$ ؛

ب) $Au = ۱$ ، $A^{۲}u = ۰$ ۳۲۸۱ – الف) $\Delta u = ۰$ ؛ ب) $\Delta u = ۰$

۳۲۸۲ – الف) $\Delta_{۱}u = ۹\,[(x^{۲} - yz)^{۲} + (y^{۲} - xz)^{۲} + (z^{۲} - xy)^{۲}]$ ،

$\Delta_{۲}u = ۶\,(x + y + z)$ ؛ ب) $\Delta_{۱}u = \frac{۱}{r^{۴}}$ که در آن $r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}}$ ،

$\Delta_{۲}u = ۰$ ۳۲۸۳ – $\frac{\partial u}{\partial x} = ۲xf'(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})$ ؛ $\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}} = ۲f'(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}) +$

$+ ۴x^{۲}f''(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})$ $\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y} = ۴xyf''(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})$

۳۲۸۴ — $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_{۱}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{۱}{y}f'_{۲}\left(x,\frac{x}{y}\right)$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^{۲}}f'_{۲}\left(x,\frac{x}{y}\right)$ ؛

$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}=f''_{۱۱}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{۲}{y}f''_{۱۲}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{۱}{y^{۲}}f''_{۲۲}\left(x,\frac{x}{y}\right)$ ؛

$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{x}{y^{۲}}f''_{۱۲}\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^{۳}}f''_{۲۲}\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{۱}{y^{۲}}f'_{۲}\left(x,\frac{x}{y}\right)$ ؛

$\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=\frac{x^{۲}}{y^{۴}}f''_{۲۲}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{۲x}{y^{۳}}f'_{۲}\left(x,\frac{x}{y}\right)$ ۳۲۸۵ — $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_{۲}+yf'_{۲}+yz\,f'_{۳}$ ؛

$\frac{\partial u}{\partial y}=xf'_{۲}+xzf'_{۳}$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial z}=xyf''_{۳}$ ؛ $\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}=f''_{۱۱}+y^{۲}f''_{۲۲}+y^{۲}z^{۲}f''_{۳۳}+$

$+۲yf''_{۱۲}+۲yzf''_{۱۳}+۲y^{۲}zf''_{۲۳}$ $\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=x^{۲}f''_{۲۲}+۲x^{۲}zf''_{۲۳}+x^{۲}z^{۲}f''_{۳۳}$ ؛

$\frac{\partial^{۲}u}{\partial z^{۲}}=x^{۲}y^{۲}f''_{۳۳}$ ؛ $\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y}=xyf''_{۲۲}+xyz^{۲}f''_{۳۳}+xf''_{۱۲}+xzf''_{۱۳}+۲xyzf''_{۲۳}+f'_{۲}+zf'_{۳}$

$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial z}=xyf''_{۱۳}+xy^{۲}f''_{۲۳}+xy^{۲}zf''_{۳۳}+yf'_{۳}$ ؛ $\frac{\partial^{۲}u}{\partial y\,\partial z}=x^{۲}yf''_{۲۳}+x^{۲}yzf''_{۳۳}+xf'_{۳}$

۳۲۸۶ — $\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\,\partial y}=f''_{۱۱}+(x+y)f''_{۱۲}+xyf''_{۲۲}+f'_{۲}$ ۳۲۸۷ — $\Delta u=۳f''_{۱۲}+$

$+۴(x+y+z)f''_{۱۲}+۴(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})f''_{۲۲}+۶f'_{۲}$ ۳۲۸۸ —

$du=f'(t)(dx+dy)$ ؛ $d^{۲}u=f''(t)(dx+dy)^{۲}$ ۳۲۸۹ —

$du=f'(t)\frac{x\,dy-y\,dx}{x^{۲}}$ ؛ $d^{۲}u=f''(t)\frac{(x\,dy-y\,dx)^{۲}}{x^{۴}}-۲f'(t)\frac{dx\,(x\,dy-y\,dx)}{x^{۳}}$

۳۲۹۰ — $du=f'\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}}$ ؛ $d^{۲}u=f''\frac{(x\,dx+y\,dy)^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}+f'\frac{(y\,dx-x\,dy)^{۲}}{(x^{۲}+y^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$

۳۲۹۱ — $du=f'(t)\,dt$ ، $d^{۲}u=f''(t)\,dt^{۲}+f'(t)\,d^{۲}t$ که در آن

$dt=yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$ و $d^{۲}t=۲(z\,dx\,dy+y\,dx\,dz+x\,dy\,dz)$

۳۲۹۲ — $du=۲f'(x\,dx++y\,dy+z\,dz)$ ؛

$d^{۲}u=۴f''(x\,dx+y\,dy+z\,dz)+۲f'(dx^{۲}+dy^{۲}+dz^{۲})$ ۳۲۹۳ —

$du=af'_{۱}\,dx+bf'_{۲}\,dy$ ؛ $d^{۲}u=a^{۲}f''_{۱۱}dx^{۲}+۲ab\,f''_{۱۲}\,dx\,dy+b^{۲}f''_{۲۲}\,dx^{۲}$

۳۲۹۴ — $du=f'_{۱}(dx+dy)+f'_{۲}(dx-dy)$ ؛

$d^{۲}u=f''_{۱۱}(dx+dy)^{۲}+۲f''_{۱۲}(dx^{۲}-dy^{۲})+f''_{۲۲}(dx-dy)^{۲}$ ۳۲۹۵ —

$du=f'_{۱}(y\,dx+x\,dy)+f'_{۲}\frac{y\,dx-x\,dy}{y^{۲}}$ $d^{۲}u=f''_{۱۱}(y\,dx+x\,dy)^{۲}+$

$+۲f''_{۱۲}\frac{y^{۲}dx^{۲}-x^{۲}dy^{۲}}{y^{۳}}+f''_{۲۲}\frac{(y\,dx-x\,dy)^{۲}}{y^{۴}}+۲f'_{۱}\,dx\,dy-۲f'_{۲}\frac{(y\,dx-x\,dy)dy}{y^{۳}}$

۳۲۹٦- $du = f'_{۱}(dx+dy) + f'_{۲}\,dz$؛ $d^{۲}u = f''_{۱۱}(dx+dy)^{۲} + ۲f''_{۱۲}(dx+dy)\,dz + f''_{۲۲}dz^{۲}$

۳۲۹۷- $du = f'_{۱}(dx+dy+dz) + ۲f'_{۲}(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$؛ $d^{۲}u = f''_{۱۱}(dx+dy+dz)^{۲} + ٤f''_{۱۲}(dx+dy+dz)(x\,dx+y\,dy+z\,dz) + ٤f''_{۲۲}(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^{۲} + ۲f'_{۲}(dx^{۲}+dy^{۲}+dz^{۲})$

۳۲۹۸- $du = f'_{۱}\frac{y\,dx-x\,dy}{y^{۲}} + f'_{۲}\frac{z\,dy-y\,dz}{z^{۲}}$؛ $d^{۲}u = f''_{۱۱}\frac{(y\,dx-x\,dy)^{۲}}{y^{٤}} + ۲f''_{۱۲}\times\frac{(y\,dx-x\,dy)(z\,dy-y\,dz)}{y^{۲}z^{۲}} + f''_{۲۲}\frac{(z\,dy-y\,dz)^{۲}}{z^{٤}} - ۲f'_{۱}\frac{(y\,dx-x\,dy)\,dy}{y^{۳}} - ۲f'_{۲}\frac{(z\,dy-y\,dz)\,dz}{z^{۳}}$

۳۲۹۹- $du = (f'_{۱} + ۲tf'_{۲} + ۳t^{۲}f'_{۳})\,dt$؛ $d^{۲}u\,(f''_{۱۱} + ٤tf''_{۱۲} + ٤t^{۲}f''_{۲۲} + ٦t^{۲}f''_{۱۳} + ۱۲t^{۳}f''_{۲۳} + ۹t^{٤}f''_{۳۳} + ۲f'_{۲} + ٦tf'_{۳})\,dt^{۲}$

۳۳۰۰- $du = af'_{۱}dx + bf'_{۲}dy + cf'_{۳}dz$؛ $d^{۲}u = a^{۲}f''_{۱۱}dx^{۲} + b^{۲}f''_{۲۲}dy_{۲} + c^{۲}f''_{۳۳}dz^{۲} + ۲ab\,f''_{۱۲}dx\,dy + ۲ac\,f''_{۱۳}dx\,dz + ۲bc\,f''_{۲۳}dy\,dz$

۳۳۰۱- $du = ۲f'_{۱}(x\,dx+y\,dy) + ۲f'_{۲}(x\,dx-y\,dy) + ۲f'_{۳}(y\,dx+x\,dy)$؛ $d^{۲}u = ٤f''_{۱۱}(x\,dx+y\,dy)^{۲} + ٤f''_{۲۲}(x\,dx-y\,dy)^{۲} + ٤f''_{۳۳}(y\,dx+x\,dy)^{۲} + ۸f''_{۱۲}(x^{۲}dx^{۲}-y^{۲}dy^{۲}) + ۸f''_{۱۳}(x\,dx+y\,dy)(y\,dx+x\,dy) + ۸f''_{۲۳}\times(x\,dx-y\,dy)(y\,dx+x\,dy) + ۲f'_{۱}(dx^{۲}+dy)_{۲} + ۲f'_{۲}(dx^{۲}-dy^{۲}) + ٤f'_{۳}dx\,dy$

۳۳۰۲- $d^{n}u = f^{(n)}(ax+by+cz)(a\,dx+b\,dy+c\,dz)^{n}$

۳۳۰۳- $d^{n}u = \left(a\,dx\frac{\partial}{\partial\xi} + b\,dy\frac{\partial}{\partial\eta} + c\,dz\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^{n} f\,(\xi, \eta, \zeta)$ که در آن $\xi = ax$، $\eta = by$، $\zeta = cz$

۳۳۰٤- $d^{n}u = \left[dx\left(a_{۱}\frac{\partial}{\partial\xi} + a_{۲}\frac{\partial}{\partial\eta} + a_{۳}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) + dy\left(b_{۱}\frac{\partial}{\partial\xi} + b_{۲}\frac{\partial}{\partial\eta} + b_{۳}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) + dz\left(c_{۱}\frac{\partial}{\partial\xi} + c_{۲}\frac{\partial}{\partial\eta} + c_{۳}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]^{n} f\,(\xi, \eta, \zeta)$

۳۳۰٥- $F(r) = f''(r) + \frac{۲}{r}f'(r)$ ۳۳۱٦- ۱ ۳۳۱۹- xyz

۳۳۳۱- $x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x$ ۳۳۳۲- $۲x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ۲z$

۳۳۳۳- $y\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ ۳۳۳٤- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = ۰$ ۳۳۳٥- $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = ۰$

۳۳۳٦- $\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\,\partial y} = ۰$ ۳۳۳۷- $z\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}$

۳۳۳۸- $\frac{\partial^{۲}z}{\partial x^{۲}} - \frac{\partial^{۲}z}{\partial y^{۲}} = ۰$ ۳۳۳۹- $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial u} = z$ ۳۳٤۰-

$x^۲ \frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} - y^۲ \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = ۰$ ۳۳۴۱ - $۱ - \sqrt{۳}$

۳۳۴۲ - $\frac{\partial z}{\partial l} = \cos\alpha + \sin\alpha$ ؛ الف) $\alpha = \frac{\pi}{۴}$ ؛ ب) $\alpha = \frac{۵\pi}{۴}$ ؛

پ) $\alpha = \frac{۳\pi}{۴}$ ، $\alpha = \frac{۷\pi}{۴}$ ۳۳۴۳ - $\frac{۲}{\sqrt{x_۰^۲ + y_۰^۲}}$ ۳۳۴۴ - $\frac{۱}{ab}\sqrt{۲(a^۲ + b^۲)}$

۳۳۴۵ - $\frac{\partial u}{\partial l} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ ؛ $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{۳}$ ۳۳۴۶ -

$|\operatorname{grad} u| = \frac{۱}{r_۰^۲}$ ؛ $\cos(\widehat{\operatorname{grad} u, x}) = -\frac{x_۰}{r_۰}$ ؛ $\cos(\widehat{\operatorname{grad} u, y}) = -\frac{y_۰}{r_۰}$ ؛

$\cos(\widehat{\operatorname{grad} u, z}) = -\frac{z_۰}{r_۰}$ که در آن $r_۰ = \sqrt{x_۰^۲ + y_۰^۲ + z_۰^۲}$ ۳۳۴۷ - $\frac{\pi}{۲}$

۳۳۴۸ - ۳۱۴۲ ≈ ۳۳۵۰ - $\frac{\partial^۲ u}{\partial l^۲} = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}\cos^۲\alpha + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}\cos^۲\beta + \frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}\cos^۲\gamma +$

$+ ۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y}\cos\alpha\cos\beta + ۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial z}\cos\alpha\cos\gamma + ۲\frac{\partial^۲ u}{\partial y \partial z}\cos\beta\cos\gamma$ ۳۳۵۲ -

$\frac{\partial u}{\partial y} = -۰,۵$ ۳۳۵۳ - $u''_{xx}(x, ۲x) = u''_{yy}(x, ۲x) = -\frac{۴}{۳}x$

$u''_{xy}(x, ۲x) = \frac{۵}{۳}x$ ۳۳۵۴ - $z = x\varphi(y) + \psi(y)$ ۳۳۵۵ - $z = \varphi(x) + \psi(y)$

۳۳۵۶ - $z = \varphi_۰(x) + y\varphi_۱(x) + \dots + y^{n-۱}\varphi_{n-۱}(x)$ ۳۳۵۷ -

$u = \varphi(x, y) + \psi(x, z) + \chi(y, z)$ ۳۳۵۸ - $u = ۱ + x^۲y + y^۲ - ۲x^۴$

۳۳۵۹ - $z = ۱ + xy + y^۲$ ۳۳۶۰ - $z = x + y^۲ + ۰,۵\, xy(x + y)$

۳۳۶۲ - مجموعهٔ صفرهای تابع $f(x)$ باید همه جای فاصلهٔ (a, b) نامتراکم باشند یعنی صفرهای تابع $f(x)$ نباید تماماً هیچ فاصلهٔ $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ را پر کنند ۳۳۶۳ - مجموعهٔ صفرهای تابع $f(x)$ باید همه جای فاصلهٔ (a, b) نامتراکم باشند، ضمناً هر صفر ξ تابع $f(x)$ بطور همزمان صفر تابع $g(x)$ است و علاوه بر آن حد متناهی $\lim\limits_{x \to \xi} [g(x)/f(x)]$ وجود دارد ۳۳۶۴ -

۱) مجموعهٔ شمارش ناپذیر (ناشمارا) ؛ ۲) دوتا ؛ ۳) الف) یکتا ؛ ب) دوتا
۳۳۶۵ - مجموعهٔ شمارش ناپذیر ؛ ۲) چهارتا: $y = x$ ، $y = -x$ ، $y = |x|$
و $y = -|x|$ ؛ ۳) دوتا ؛ ۴) الف) دوتا ؛ ب) چهارتا ؛ ۵) یکتا

۳۳۶۶ - ۱) هیچ جا؛ ۲) $۰ < |x| < ۱$ ، $|x| = \sqrt{\frac{۱ + \sqrt{۲}}{۲}}$ ؛ ۳) $x = ۰$ ،

$|x| = ۱$ ؛ ۴) $۱ < x < \sqrt{\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}}$ ؛ شاخه‌های تک مقداری :

$\left(|x| \leqslant \sqrt{\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}}\right)$ $y = \varepsilon \sqrt{\frac{۱}{۲} + \sqrt{\frac{۱}{۴} + x^۲ - x^۴}}$ ؛

$\left(۱ \leqslant |x| \leqslant \sqrt{\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}}\right)$ $y = \varepsilon \sqrt{\frac{۱}{۲} - \sqrt{\frac{۱}{۴} + x^۲ - x^۴}}$

که در آن $\varepsilon = -۱, ۱$ ۳۳۶۷ – نقاط انشعاب : $(-۱, ۰)$ ، $(۰, ۰)$ ، $(۱, ۰)$ ؛

$(|x| \leqslant ۱)$ $y = \varepsilon(x) \sqrt{\frac{\sqrt{۸x^۲+۱} - (۲x^۲+۱)}{۲}}$ که در آن $\varepsilon(x) = -۱,$

$۱, \operatorname{sgn} x, -\operatorname{sgn} x$ ۳۳۶۸ – مجموعهٔ مقادیر تابع $\varphi(y)$ باید با مجموعهٔ

مقادیر تابع $f(x)$ دارای نقاط مشترک باشد ۳۳۷۱ – $y' = -\frac{x+y}{x-y}$ ؛

$y'' = \frac{۲a^۲}{(x-y)^۳}$ ۳۳۷۲ – $y' = \frac{x+y}{x-y}$ ؛ $y'' = \frac{۲(x^۲+y^۲)}{(x-y)^۳}$

۳۳۷۳ – $y' = \frac{۱}{۱-\varepsilon \cos y}$ ؛ $y'' = \frac{-\varepsilon \sin y}{(۱-\varepsilon \cos y)^۳}$ ۳۳۷۴ – $y' = \frac{y^۲(۱-\ln x)}{x^۲(۱-\ln y)}$ ؛

$$y'' = \frac{y^۲[y(۱-\ln x)^۲ - ۲(x-y)(۱-\ln x)(۱-\ln y) - x(۱-\ln y)^۲]}{x^۴(۱-\ln y)^۳}$$

۳۳۷۵ – $y' = \frac{y}{x}$ ؛ $y'' = ۰$ ۳۳۷۸ – $y'_۱(۰) = -۱$ ؛ $y'_۲(۰) = ۱$

۳۳۷۹ – $y'_۱(۰) = ۰$ ؛ $y'_۲(۰) = -\sqrt{۳۳}$ ؛ $y'_۳(۰) = \sqrt{۳}$ ۳۳۸۰ –

$y' = -\frac{۲x+y}{x+۲y}$ ؛ $y'' = -\frac{۱۸}{(x+۲y)^۳}$ ؛ $y''' = -\frac{۱۶۲x}{(x+۲y)^۵}$ ۳۳۸۱ – $y' = ۰$ ؛

$y'' = -\frac{۲}{۳}$ ؛ $y''' = -\frac{۲}{۳}$ ۳۳۸۳ – $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$ ؛ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$ ؛

$\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = -\frac{x^۲+z^۲}{z^۳}$ ؛ $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^۳}$ ؛ $\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = -\frac{y^۲+z^۲}{z^۳}$ ۳۳۸۴ –

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^۲-xy}$ ؛ $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^۲-xy}$ ، $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = -\frac{۲xy^۳z}{(z^۲-xy)^۳}$ ؛

$\frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = -\frac{۲x^۳yz}{(z^۲-xy)^۳}$ ؛ $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} = \frac{z(z^۴-۲xyz^۲-x^۲y^۲)}{(z^۲-xy)^۳}$ ۳۳۸۵ –

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{۱}{x+y+z-۱}$ ؛ $\frac{\partial^۲ z}{\partial x^۲} = \frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^۲ z}{\partial y^۲} = -\frac{x+y+z}{(x+y+z-۱)^۳}$

۳۳۸۶ — $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xz}{x^{۲}-y^{۲}}$ ؛ $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yz}{x^{۲}-y^{۲}}$ ؛ $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}}=-\frac{y^{۲}z}{(x^{۲}-y^{۲})^{۲}}$ ؛ $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x\,\partial y}=\frac{xyz}{(x^{۲}-y^{۲})^{۲}}$ ؛ $\frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}}=-\frac{x^{۲}z}{(x^{۲}-y^{۲})^{۲}}$

۳۳۸۷ — $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=-۱$ ؛ $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}}=\frac{\partial^{۲} z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}}=۰$

۳۳۸۸ — الف) -۲ ؛ ب) -۱

۳۳۸۹ — $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}}=-\frac{۲}{۵}$ ؛ $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{۱}{۵}$ ؛ $\frac{\partial^{۲} z}{\partial y^{۲}}=-\frac{۳۹۴}{۱۲۵}$

۳۳۹۰ — $dz=-\frac{c^{۲}}{z}\left(\frac{x\,dx}{a^{۲}}+\frac{y\,dy}{b^{۲}}\right)$ ؛ $d^{۲}z=-\frac{c^{۴}}{z^{۳}}\left[\left(\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}\right)\frac{dx^{۲}}{a^{۲}}+\frac{۲xy}{a^{۲}b^{۲}}dx\,dy+\left(\frac{y^{۲}}{b^{۲}}+\frac{z^{۲}}{c^{۲}}\right)\frac{dy^{۲}}{b^{۲}}\right]$

۳۳۹۱ — $dz=-\frac{(۱-yz)\,dx+(۱-xz)\,dy}{۱-xy}$ ؛

$$d^{۲}z=-\frac{۲\,\{y\,(۱-yz)\,dx^{۲}+[x+y-z\,(۱+xy)]\,dx\,dy+x\,(۱-xz)\,dx^{۲}\}}{(۱-xy)^{۲}}$$

۳۳۹۲ — $dz=\frac{z\,(y\,dx+z\,dy)}{y\,(x+z)}$ ؛ $d^{۲}z=-\frac{z^{۲}\,(y\,dx-x\,dy)^{۲}}{y^{۲}\,(x+z)^{۳}}$

۳۳۹۳ — $dz=dx-\frac{(x-z)\,dy}{(x-z)^{۲}+y\,(y+۱)}$ ؛ $d^{۲}z=\frac{۲(x-z)\,(y+۱)\,[(x-z)^{۲}+y^{۲}]}{[(x-z)^{۲}+y\,(y+۱)]^{۳}}dy^{۲}$

۳۳۹۴ — $du=-\frac{u^{۲}(dx+dy)-z^{۲}dz}{u\,[۲\,(x+y)-u]}$

۳۳۹۵ — $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{۴\,(x-z)\,(y-z)}{(F'_{۱}+۲zF'_{۲})^{۳}}\times[F'^{۲}_{۲}F''_{۱۱}-۲F'_{۱}F'_{۲}F''_{۱۲}+F'^{۲}_{۱}F''_{۲۲}]-\frac{۲\,(F'_{۱}+۲xF'_{۲})\,(F'_{۱}+۲yF'_{۲})\,F'_{۲}}{(F'_{۱}+۲zF'_{۲})^{۳}}$

۳۳۹۶ — $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F'_{۱}-F'_{۳}}{F'_{۲}-F'_{۳}}$ ؛ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F'_{۲}-F'_{۱}}{F'_{۲}-F'_{۳}}$

۳۳۹۷ — $\frac{\partial z}{\partial x}=-\left(۱+\frac{F'_{۱}+F'_{۲}}{F'_{۳}}\right)$ ؛ $\frac{\partial z}{\partial y}=-\left(۱+\frac{F'_{۲}}{F'_{۳}}\right)$ ؛ $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}}=-F'^{-۳}_{۳}\times[F'^{۲}_{۳}(F''_{۱۱}+۲F''_{۱۲}+F''_{۲۲})-۲(F'_{۱}+F'_{۲})\,F'_{۳}\,(F''_{۱۳}+F''_{۲۳})+(F'_{۱}+F'_{۲})^{۲}F''_{۳۳}]$

۳۳۹۸ — $\frac{\partial^{۲} z}{\partial x^{۲}}=-(xF'_{۱}+yF'_{۲})^{-۳}[y^{۲}z^{۲}\,(F'^{۲}_{۲}F''_{۱۱}-۲F'_{۱}F'_{۲}F''_{۱۲}+F'^{۲}_{۱}F''_{۲۲})-۲z\,(xF'_{۱}+yF'_{۲})F'^{۲}_{۱}$

۳۳۹۹ — الف) $d^{۲}z=-\frac{F'^{۲}_{۲}F''_{۱۱}-۲F'_{۱}F'_{۲}F''_{۱۲}+F'^{۲}_{۱}F''_{۲۲}}{(F'_{۱}+F'_{۲})^{۳}}\times(dx-dy)^{۲}$ ؛ ب) $d^{۲}z=\frac{F'^{۲}_{۲}F''_{۱۱}-۲F'_{۱}F'_{۲}F''_{۱۲}+F'^{۲}_{۱}F''_{۲۲}}{(xF'_{۱}+yF'_{۲})^{۳}}(y\,dx-x\,dy)^{۲}$

٣٣٩٩,١ — $dz = \frac{١}{٩}(٢dx - dy)$ ؛ $d^٢z = -\frac{٢}{٢٤٣}(٢dx^٢ - ٥dx\,dy + ٢dy^٢)$

٣٤٠١ — $\frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y}$ ؛ $\frac{dy}{dz} = \frac{z-y}{x-y}$ ٣٤٠٢ — $\frac{dx}{dz} = ٠$ ،

$\frac{dy}{dz} = -١$ ، $\frac{d^٢x}{dz^٢} = -\frac{d^٢y}{dz^٢} = -\frac{١}{٤}$ ٣٤٠٣ — $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu+yv}{x^٢+y^٢}$ ؛

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu-xv}{x^٢+y^٢}$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv-yu}{x^٢+y^٢}$ ؛ $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu+yv}{x^٢+y^٢}\ (x^٢+y^٢>٠)$

٣٤٠٣,١ — $du = -\frac{١}{٣}dy$ ، $dv = -dx + \frac{١}{٣}dy$ ٣٤٠٤ —

$du = \frac{(\sin v + x\cos v)\,dx - (\sin u - x\cos v)\,dy}{x\cos v + y\cos u}$ ؛ $dv = \frac{-(\sin v - y\cos u)\,dx}{x\cos v + y\cos u} +$

$+ \frac{(\sin u + y\cos u)\,dy}{x\cos v + y\cos u}$ ؛ $d^٢u = -d^٢v = \frac{(٢dx\cos v - x\,dv\sin v)\,dv}{x\cos v + y\cos u} -$

$- \frac{(٢dy\cos u - y\,du\sin u)\,du}{x\cos v + y\cos u}$ ٣٤٠٥ — $du = \frac{١}{٢}(dx+dy)$ ؛

$dv = \frac{\pi}{٤}dy - \frac{١}{٢}(dx-dy)$ ؛ $d^٢u = dx^٢$ ؛ $d^٢v = \frac{١}{٢}(dx-dy)^٢$

٣٤٠٦ — $\frac{dy}{dx} = ٢\left(t+\frac{١}{t}\right)$ ؛ $\frac{dz}{dx} = ٣\left(t^٢+\frac{١}{t^٢}+١\right)$ ؛ $\frac{d^٢y}{dx^٢} = ٢$ ؛

$\frac{d^٢z}{dx^٢} = ٦\left(t+\frac{١}{t}\right)$ ٣٤٠٧ — $y \geqslant \frac{x^٢}{٢}$ ؛ $\frac{\partial z}{\partial x} = -٢uv$ ؛

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{٣}{٢}(u+v)\quad (u \neq v)$ ٣٤٠٧,١ — $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{٣}{٢}$ ؛ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{١}{٢}$

٣٤٠٧,٣ — $\frac{\partial^٢ z}{\partial x\,\partial y} = \frac{٢٦}{١٢١}$ ٣٤٠٨ — $\frac{\partial^٢ z}{\partial x^٢} = -\frac{\sin^٢\varphi + \cos^٢\varphi\cos^٢\psi}{\sin^٣\varphi}$

٣٤٠٩ — $\frac{\partial^٢ z}{\partial x^٢} = \frac{\sin ٢v}{u^٢}$ ، $\frac{\partial^٢ z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\cos ٢v}{u^٢}$ ، $\frac{\partial^٢ z}{\partial y^٢} = -\frac{\sin ٢v}{u^٢}$

٣٤١٠ — $dz = ٠$ ؛ $d^٢z = \frac{١}{٢}(dx^٢ - dy^٢)$ ٣٤١١ — $\frac{dz}{dx} = \frac{٢(x^٢-y^٢)}{x-٢y}$ ؛

$\frac{d^٢z}{dx^٢} = \frac{٤x-٢y}{x-٢y} + \frac{٦x}{(x-٢y)^٣}$ ٣٤١٢ — $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{١}{y+z} +$

$+ \frac{(x+١)(y-x)}{(z+١)(y+z)^٢}e^{x-z}$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x+z}{(y+z)^٢} + \frac{(y+١)(y-x)}{(z+١)(y+z)^٢}e^{y-z}$

۳۴۱۳ − $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{۱}{I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{uv}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)$ ، $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{۱}{I}\times$

$\times\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$ که در آن $I = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$

۳۴۱۴ − $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{۱}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v}$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{۱}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ ؛ $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = -\frac{۱}{I^۳}\times$

$\times\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^۲\varphi}{\partial u^۲} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^۲\psi}{\partial u^۲}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^۲ - ۲\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^۲\varphi}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^۲\psi}{\partial u\,\partial v}\right)\times\right.$

$\left.\times\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^۲\varphi}{\partial v^۲} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^۲\psi}{\partial v^۲}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^۲\right\}$ ؛ $\frac{\partial^۲ u}{\partial x\,\partial y} = \frac{۱}{I^۳}\times$

$\times\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^۲\varphi}{\partial u^۲} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^۲\psi}{\partial u^۲}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^۲\varphi}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^۲\psi}{\partial u\,\partial v}\right)\times\right.$

$\left.\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^۲\varphi}{\partial v^۲} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^۲\psi}{\partial v^۲}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\}$ ؛

$\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = -\frac{۱}{I^۳}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^۲\varphi}{\partial u^۲} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^۲\psi}{\partial u^۲}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^۲ - ۲\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^۲\varphi}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^۲\psi}{\partial u\,\partial v}\right)\times\right.$

$\left.\times\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^۲\varphi}{\partial v^۲} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^۲\psi}{\partial v^۲}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^۲\right\}$ ؛ که در آن

$I = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}$

۳۴۱۵ − الف) $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\frac{v}{u}$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial y} = \sin\frac{v}{u}$ ؛ $\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\sin\frac{v}{u} - \frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}\right)$ ؛ $\frac{\partial v}{\partial y} = \cos\frac{v}{u} +$

$+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}$ ؛ ب) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u\,(\sin v - \cos v) + ۱}$ ؛

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{e^u\,(\sin v - \cos v) + ۱}$ ؛ $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-(e^u - \cos v)}{u\,[e^u\,(\sin v - \cos v) + ۱]}$ ؛

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^u + \sin}{u\,[e^u\,(\sin v - \cos v) + ۱]}$

۳۴۱۶ − $\frac{du}{dx} = \frac{I}{I_۱}$ ؛

$\frac{d^۲ u}{dx^۲} = \frac{۱}{I_۱^۳}\left\{\frac{\partial(g,\ h)}{\partial(y,\ z)}\left(I_۱\frac{\partial}{\partial x} + I_۲\frac{\partial}{\partial y} + I_۳\frac{\partial}{\partial z}\right)^۲ f + \frac{\partial(h,\ f)}{\partial(y,\ z)}\times\right.$

$\times\left(I_۱\frac{\partial}{\partial x} + I_۲\frac{\partial}{\partial y} + I_۳\frac{\partial}{\partial z}\right)^۲ g + \frac{\partial(f,\ g)}{\partial(y,\ z)}\left(I_۱\frac{\partial}{\partial x} + I_۲\frac{\partial}{\partial y} +\right.$

$\left.\left. + I_۳\frac{\partial}{\partial z}\right)^۲ h\right\}$ که در آن $I_۱ = \frac{\partial(g,\ h)}{\partial(y,\ z)}$ ، $I_۲ = \frac{\partial(g,\ h)}{\partial(z,\ x)}$ ،

$I_{٣} = \frac{\partial (g, h)}{\partial (x, y)}$ و $I = \frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)}$ ٣٤١٧ - $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$ ؛

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{I_{٢}\partial g}{I_{١}\partial y}$ که در آن $I_{١} = \frac{\partial (g, h)}{\partial (z, t)}$ و $I_{٢} = \frac{\partial (h, f)}{\partial (z, t)}$

٣٤١٨ - $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{I_{١}}{I}$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{I_{٢}}{I}$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{I_{٣}}{t}$ که در آن

$I_{١} = \frac{\partial (g, h)}{\partial (v, w)}$ ، $I_{٢} = \frac{\partial (h, f)}{\partial (v, w)}$ ، $I_{٣} = \frac{\partial (f, g)}{\partial (v, w)}$ و $I = \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)}$

٣٤١٩ - $dz = -\frac{I_{١}dx + I_{٢}dy}{I_{٣}}$ که در آن $I_{١} = \frac{\partial (f, g)}{\partial (x, t)}$ ، $I_{٢} = \frac{\partial (f, g)}{\partial (y, t)}$ ،

$I_{٣} = \frac{\partial (f, g)}{\partial (z, t)}$ ٣٤٣١ - $x''' + xx'^{٥} = ٠$ ٣٤٣٢ - $x^{(٤)} = ٠$

٣٤٣٣ - $\frac{d^{٢}x}{dt^{٢}} - t\left(\frac{dx}{dt}\right)^{٣} = ٠$ ٣٤٣٤ - $\frac{d^{٢}y}{dt^{٢}} + y = ٠$ ٣٤٣٥ -

$\frac{d^{٣}y}{dt^{٣}} - ٣\frac{d^{٢}y}{dt^{٢}} + ٢\frac{dy}{dt} - ٦y = ٠$ ٣٤٣٦ - $\frac{d^{٢}y}{dt^{٢}} + n^{٢}y = ٠$

٣٤٣٧ - $\frac{d^{٢}y}{dt^{٢}} + m^{٢}y = ٠$ ٣٤٣٨ $u'' + \left[q(x) - \frac{١}{٤}p^{٢}(x) - \frac{١}{٢}p'(x)\right]u = ٠$

٣٤٣٩ - $\frac{d^{٢}u}{dt^{٢}} + (u + ٣)\frac{du}{dt} + ٢u = ٠$ ٣٤٤٠ - $\frac{d^{٢}u}{dt^{٢}} = ٠$ ٣٣٤١ $\frac{d^{٢}u}{dt^{٢}} = ٠$

٣٤٤٢ - $\frac{d^{٢}u}{dt^{٢}} + ٨u\left(\frac{du}{dt}\right)^{٣} = ٠$ ٣٤٤٣ - $t^{٥}\frac{d^{٣}u}{dt^{٣}} + (٣t^{٤} + ١)\frac{d^{٢}u}{dt^{٢}} + \frac{du}{dt} = ٠$

٣٤٤٤ - $u'' - u' = \frac{A}{(a - b)^{٢}}u$ ٣٤٤٦ - $\Phi(١, u, u' + u^{٢}) = ٠$

٣٤٤٧ - $F(xu' + u^{٢} - u, u, ١) = ٠$ ٣٤٥٠ - $\frac{dr}{d\varphi} = r$ ٣٤٥١ -

$r'^{٢} = \frac{١ - \sin ٢\varphi}{\sin ٢\varphi} r^{٢}$ ٣٤٥٢ - $r(r^{٢} + ٢r'^{٢} - rr'') = r'^{٣}$ ٣٤٥٣ - $\frac{r'}{r}$

٣٤٥٤ - $K = \frac{|r^{٢} + ٢r'^{٢} - rr''|}{(r^{٢} + r'^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}$ ٣٤٥٥ - $\frac{dr}{dt} = kr^{٣}$ ؛ $\frac{d\varphi}{dt} = -١$

٣٤٥٦ - $w = \frac{d}{dt}\left(r^{٢}\frac{d\varphi}{dt}\right)$ ٣٤٥٧ - $Y' = x$ ؛ $Y'' = \frac{١}{y''}$ ؛ $Y''' = -\frac{y'''}{y''^{٣}}$

٣٤٥٨ - $z = \varphi(x + y)$ که در آن φ تابع اختیاری دیفرانسیل‌پذیر است

۳۴۵۹ - $z=\varphi(x^۲+y^۲)$ ۳۴۶۰ - $z=\frac{x}{a}+\varphi(y-bz)$

۳۴۶۱ - $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ۳۴۶۲ - $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u \operatorname{sh} v$ ۳۴۶۳ - $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}$

۳۴۶۴ - $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{۱}{۲}$ ۳۴۶۵ - $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{z}{v}\,\frac{z^۲+u}{z^۲-u}$ ۳۴۶۶ - $(۲u+v-z)\times$

$\times\frac{\partial z}{\partial u}+(u+۲v-z)\frac{\partial z}{\partial v}=u+v-z$ ۳۴۶۷ - $\frac{e^{x+y}-z^۲}{۱-e^{-x}\frac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\frac{\partial z}{\partial \eta}}$

۳۴۶۸ - $\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^۲+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^۲}{u^۲+v^۲}$ ۳۴۶۹ - $\frac{\partial u}{\partial \xi}=۰$ ۳۴۷۰ - $\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{x-z}{y}$

۳۴۷۱ - $\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{u}{v}$ ۳۴۷۲ - $A=\frac{x^۲-۲xu+u^۲\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^۲+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^۲\right]}{x^۴\left(u\frac{\partial x}{\partial u}+v\frac{\partial x}{\partial v}\right)^۲}$

۳۴۷۳ - $\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}+۳u+(e^\xi+e^\eta+e^\zeta)=۰$ ۳۴۷۴ - $\frac{\partial w}{\partial v}=۰$

۳۴۷۵ - $\frac{\partial w}{\partial u}=۰$ ۳۴۷۶ - $\frac{\partial w}{\partial v}=۰$ ۳۴۷۷ - $u^۲\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^۲+v^۲\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^۲=$

$=w^۲\frac{\partial w}{\partial u}\,\frac{\partial w}{\partial v}$ ۳۴۷۸ - $\frac{e^{۲u}\left(۱-\frac{\partial w}{\partial v}\cos^۲ v\right)}{\frac{\partial w}{\partial u}}$ ۳۴۷۹ - $A=\frac{\partial w}{\partial u}:\frac{\partial w}{\partial v}$

۳۴۸۰ - $\frac{\partial w}{\partial \zeta}=\frac{\xi\eta}{\zeta}$ ۳۴۸۱ - $w=\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ ۳۴۸۲ - $w=r\frac{\partial u}{\partial r}$

۳۴۸۳ - $w=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^۲+\frac{۱}{r^۲}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^۲$ ۳۴۸۴ - $w=\frac{\partial^۲ u}{\partial r^۲}+$

$+\frac{۱}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{۱}{r^۲}\,\frac{\partial^۲ u}{\partial \varphi^۲}$ ۳۴۸۵ - $w=r^۲\,\frac{\partial^۲ u}{\partial r^۲}$ ۳۴۸۶ - $w=\frac{\partial^۲ u}{\partial \varphi^۲}$ ۳۴۸۷ -

$I=\frac{۱}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{\partial v}{\partial \varphi}-\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\frac{\partial v}{\partial r}\right)$ ۳۴۸۸ - $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$

که در آن ψ و φ توابع دلخواهی هستند ۳۴۸۹ - $۳\frac{\partial^۲ z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}=۰$

۳۴۹۰ - $\frac{\partial^۲ z}{\partial u^۲}+\frac{\partial^۲ z}{\partial v^۲}=۰$ ۳۴۹۱ - $a\left(\frac{\partial^۲ z}{\partial u^۲}-\frac{\partial z}{\partial u}\right)+۲b\frac{\partial^۲ z}{\partial u\,\partial v}+=۰$

$+b\left(\frac{\partial^۲ z}{\partial v^۲}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)=۰$ ۳۴۹۲ - $\frac{\partial^۲ z}{\partial u^۲}+\frac{\partial^۲ z}{\partial v^۲}=۰$ ۳۴۹۳ - $\frac{\partial^۲ z}{\partial u^۲}+\frac{\partial^۲ z}{\partial v^۲}+$

$+m^2e^{2u}z=0$ ۳۴۹۴− $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0$ ۳۴۹۵− $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$

۳۴۹۶− $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\frac{2}{u(4-uv)}\frac{\partial z}{\partial v}$ ۳۴۹۷− $(u^2-v^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=v\frac{\partial z}{\partial u}$

۳۴۹۸− $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{2u}{u^2+v^2}\frac{\partial z}{\partial u}$ ۳۴۹۹− $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{u^2-v^2}\left(v\frac{\partial z}{\partial u}-u\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0$

۳۵۰۰− $\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=1$ ۳۵۰۱− $u=\varphi(x+\lambda_1 y)+$

$+\psi(x+\lambda_2 y)$ که در آن λ_1 و λ_2 ریشه‌های معادلهٔ $A+2B\lambda+C\lambda^2=0$

میباشند ۳۵۰۳− الف) $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}$ ؛ $\Delta(\Delta u)=\frac{d^4u}{dr^4}+$

$+\frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{du}{dr}$ ۳۵۰۴− $u\frac{d^2w}{\partial u^2}+\frac{dw}{du}+cw=0$

۳۵۰۵− $A=X\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}-Y\frac{\partial^2 u}{\partial X\,\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial X}$ ۳۵۰۸− $\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)+$

$+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)+\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\zeta\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)=2\left(\xi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\xi\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\zeta}+\eta\zeta\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right)$

۳۵۰۹− $\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2}=0$ ۳۵۱۰− $\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}=0$

۳۵۱۱− $\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$ ؛

$\Delta_2 u=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]$

۳۵۱۲− $w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$ ۳۵۱۳− $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$

۳۵۱۴− $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$ ۳۵۱۵− $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$ ۳۵۱۶− $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=2w$

۳۵۱۷− $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$ ۳۵۱۸− $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+$

$+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0$ ۳۵۱۹− $\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=\frac{w}{4\sin^2(u-v)}$ ۳۵۲۰− $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$

۳۵۲۳− $\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=0$ ۳۵۲۴− $\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}=\frac{\partial w}{\partial\xi}+\frac{\partial w}{\partial\eta}+\frac{\partial w}{\partial\zeta}+$

$+(e^{w}-۱)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^{۲}\right]$ ۳۵۲۶– $x=y\varphi(z)+\psi(z)$

۳۵۲۷– $A(X,Y)\frac{\partial^{۲}Z}{\partial Y^{۲}}-۲B(X,Y)\frac{\partial^{۲}Z}{\partial X\,\partial Y}+C(X,Y)\frac{\partial^{۲}Z}{\partial X^{۲}}=۰$ ۳۵۲۸–

$\frac{x-x_{۰}}{-\cos\alpha\sin t_{۰}}=\frac{y-y_{۰}}{-\sin\alpha\sin t_{۰}}=\frac{z-z_{۰}}{\cos t_{۰}}$ ؛ $z-z_{۰}=(x-x_{۰})\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,t_{۰}+$

$+(y-y_{۰})\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,t_{۰}$ که در آن $x_{۰}=a\cos\alpha\cos t_{۰}$ ، $y_{۰}=a\sin\alpha\cos t_{۰}$ ،

$z_{۰}=a\sin t_{۰}$ ۳۵۲۹– $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=۱$ ، $y=\frac{b}{۲}$ ؛ $ax-cz=\frac{۱}{۲}(a^{۲}-c^{۲})$

۳۵۳۰– $\frac{x-۱}{۱}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z-۱}{۲}$ ؛ $x+y+۲z=۴$ ۳۵۳۱–

$\frac{x-۱}{۳}=\frac{y-۱}{۳}=\frac{z-۳}{-۱}$ ؛ $۳x+۲y-z=۳$ ۳۵۳۲– $x+z=۲$ ؛

$y+۲=۰$ ؛ $x-z=۰$ ۳۵۳۳– $M_{۱}(-۱,۱,-۱)$ ؛ $M_{۲}\left(-\frac{۱}{۳},\ \frac{۱}{۹},\ -\frac{۱}{۲۷}\right)$

۳۵۳۷– $\mathrm{tg}\,\varphi=f'_{x}(x_{۰},y_{۰})\cos\alpha+f'_{y}(x_{۰},y_{۰})\sin\alpha$ ۳۵۳۸– $\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{۱۶}{۲۴۳}$

۳۵۳۹– $۲x+۴y-z-۵=۰$ ؛ $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y-۲}{۴}=\frac{z-۵}{-۱}$ ۳۵۴۰–

$۳x+۴y+۱۲z=۱۶۹$ ؛ $\frac{x}{۳}=\frac{y}{۴}=\frac{z}{۱۲}$ ۳۵۴۱– $z=\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}(x-y)$ ؛

$\frac{x-۱}{۲}=\frac{y-۱}{-۱}=\frac{z-\frac{\pi}{۴}}{۲}$

۳۵۴۲– $ax_{۰}x+by_{۰}y+cz_{۰}z=۱$

$\frac{x-x_{۰}}{ax_{۰}}=\frac{y-y_{۰}}{by_{۰}}=\frac{z-z_{۰}}{cz_{۰}}$ ۳۵۴۳– $x+y-۲z=۰$ ؛ $\frac{x-۱}{-۱}=\frac{y-۱}{-۱}=\frac{z-۱}{۲}$

۳۵۴۴– $x+y+۴z=۰$ ؛ $\frac{x-۲}{۱}=\frac{y-۲}{۱}=\frac{z-۱}{-۴}$ ۳۵۴۵–

$\frac{x}{a}\cos\psi_{۰}\cos\varphi_{۰}+\frac{y}{b}\cos\psi_{۰}\sin\varphi_{۰}+\frac{z}{c}\sin\psi_{۰}=۱$ ؛ $\frac{x\sec\psi_{۰}\sec\varphi_{۰}-a}{bc}=$

$=\frac{y\sec\psi_{۰}\operatorname{cosec}\varphi_{۰}-b}{ac}=\frac{z\operatorname{cosec}\psi_{۰}-c}{ab}$ ۳۵۴۶– $x\cos\varphi_{۰}+y\sin\varphi_{۰}-$

$-z\,\mathrm{tg}\,\alpha=۰$ ؛ $\frac{x-r_{۰}\cos\varphi_{۰}}{\cos\varphi_{۰}}=\frac{y-r_{۰}\sin\varphi_{۰}}{\sin\varphi_{۰}}=\frac{z-r_{۰}\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{-\mathrm{tg}\,\alpha}$

۳۵۴۷ - $ax\sin v_۰ - ay\cos v_۰ + uz_۰ = au_۰v_۰$ ؛ $\frac{x-u_۰\cos v_۰}{a\sin v_۰} =$

$= \frac{y-u_۰\sin v_۰}{-a\cos v_۰} = \frac{z-av_۰}{u_۰}$ ۳۵۴۸ - $\frac{۳x}{u_۰} - \frac{۳y}{u_۰^۲} + \frac{z}{u_۰^۳} = ۲$

۳۵۴۹ - $A(۰, \pm ۲\sqrt{۲}, \mp ۲\sqrt{۲})$ ؛ $B(\pm ۲, \mp ۴, \pm ۲)$ ؛

$C(\pm ۴, \mp ۲, ۰)$ ۳۵۵۰ - $x = \pm\frac{a^۲}{d}$ ؛ $y = \pm\frac{b^۲}{d}$ ؛ $z = \pm\frac{c^۲}{d}$

که در آن $d = \sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$ ۳۵۵۱ - $x + ۴y + ۶z = \pm ۲۱$

۳۵۵۶ - $x^۲+y^۲-xy=۱$ ؛ $z=۰$ ؛ $۳y^۲+۴z^۲=۴$ ؛ $x=۰$ ؛

$۳x^۲+۴z^۲=۴$ ؛ $y=۰$ ۳۵۵۷ - $\delta < ۰,۰۰۳$ ۳۵۵۹ - $\cos\varphi = \frac{۲bz_۰}{a\sqrt{a^۲+b^۲}}$

۳۵۶۳ - $\frac{\partial u}{\partial n} = x_۰ + y_۰ + z_۰$ ؛ الف) $x_۰ = y_۰ = z_۰ = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ؛

ب) $x_۰ = y_۰ = z_۰ = -\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ؛ پ) روی دایرهٔ $x+y+z=۰$، $x^۲+y^۲+z^۲=۱$

۳۵۶۴ - $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{۲}{\sqrt{\frac{x_۰^۲}{a^۴}+\frac{y_۰^۲}{b^۴}+\frac{z_۰^۲}{c^۴}}}$ ۳۵۶۶ - $x^۲+y^۲=p^۲$

۳۵۶۷ - $y = \pm x$ ۳۵۶۸ - $y^۲ = ۴ax$ ۳۵۶۹ - پوش ندارد ۳۵۷۰ -

$x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = l^{\frac{۲}{۳}}$ ۳۵۷۱ - $|xy| = \frac{S}{۲\pi}$ ۳۵۷۲ - $y = \frac{v_۰^۲}{۲g} - \frac{gx^۲}{۲v_۰^۲}$

۳۵۷۴ - الف) $y=۰$ پوش است (مکان هندسی نقاط عطف) ؛ ب) $y=۰$
پوش است ؛ پ) $y=۰$ مکان هندسی نقاط خاص (نقاط بر گشت) است ؛
ت) $x=۰$ مکان هندسی نقاط مضاعف است، $x=a$ پوش است ۳۵۷۵- چنبرهٔ

$(\sqrt{x^۲+y^۲}-R)^۲+z^۲=r^۲$ ۳۵۷۶ - $x^۲\sin^۲\alpha + y^۲\sin^۲\beta + z^۲\sin^۲\gamma -$

$-۲xy\cos\alpha\cos\beta - ۲xz\cos\alpha\cos\gamma - ۲yz\cos\beta\cos\gamma = ۱$

۳۵۷۷ - $|xyz| = \frac{V}{۴\pi\sqrt{۳}}$ ۳۵۷۸ - $\left|z \pm \sqrt{x^۲+y^۲}\right| = \rho\sqrt{۲}$

۳۵۷۹ - $\begin{vmatrix} x & y \\ x_۰ & y_۰ \end{vmatrix}^۲ + \begin{vmatrix} y & z \\ y_۰ & z_۰ \end{vmatrix}^۲ + \begin{vmatrix} z & x \\ z_۰ & x_۰ \end{vmatrix}^۲ \leqslant R^۲(x^۲+y^۲+z^۲)$ ۳۵۸۰ -

$(x-x_۰)^۲+(y-y_۰)^۲=(z-z_۰)^۲$ ۳۵۸۱ - $f(x, y) = ۵ + ۲(x-۱)^۲ -$

$-(x-۱)(y+۲)-(y+۲)^۲$ ۳۵۸۲ - $f(x, y, z) = ۳[(x-۱)^۲ +$

$+(y-۱)^۲+(z-۱)^۲-(x-۱)(y-۱)-(x-۱)(z-۱)-(y-۱)\times$

$\times (z-۱)] + (x-۱)^۳ + (y-۱)^۳ + (z-۱)^۳ - ۳(x-۱)(y-۱)(z-۱)$

۳۵۸۳- $\Delta f(۱, -۱) = h - ۳k + (-h^۲ - ۲hk + k^۲) + (h^۲k + hk^۲)$

۳۵۸۴- $f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + ۲[h(Ax + Dy + E) +$
$+ k(Dx + By + F) + l(Ex + Fy + Cz)] + f(h, k, l)$

۳۵۸۵- $x^y = ۱ + (x-۱) + (x-۱)(y-۱) + R_۲(۱+\theta(x-۱)$ ، $۱+\theta(y-۱))$
$(۰<\theta<۱)$ که در آن $R_۲(x, y) = \frac{۱}{۶} x^y \left[\left(\frac{y}{x} dx + \ln x\, dy\right)^۳ + \right.$
$\left. + ۳\left(\frac{y}{x} dx + \ln x\, dy\right)\left(-\frac{y}{x^۲} dx^۲ + \frac{۲}{x} dx\, dy\right) + \left(\frac{۲y}{x^۳} dx^۳ - \frac{۳}{x^۲} dx^۲ dy\right)\right]$
و $dx = x-۱$ ، $dy = y-۱$

۳۵۸۶- $۱ - \frac{۱}{۲}(x^۲ + y^۲) - \frac{۱}{۸}(x^۲ + y^۲)^۲$

۳۵۸۷- الف) $۱ - \frac{۱}{۲}(x^۲ - y^۲)$ ؛ ب) $\frac{\pi}{۴} + x - xy$

۳۵۸۸- $-(xy + xz + yz)$

۳۵۸۹- $F(x, y) = \frac{h^۲}{۴}(f''_{xx} + f''_{yy}) +$
$+ \frac{h^۴}{۴۸}(f^{(۴)}_{xxxx} + f^{(۴)}_{yyyy}) + \dots$

۳۵۹۰- $F(\rho) = f(x, y) + \frac{\rho^۲}{۴}[f''_{xx}(x, y) + f''_{yy}(x, y)]$

۳۵۹۱- $$\Delta_{xy} f(x, y) = hk \left[\frac{\partial^۲ f}{\partial x\, \partial y} + \sum_{n=۳}^{\infty} \sum_{m=۱}^{n-۱} \frac{h^{m-۱} k^{n-m-۱}}{m!(n-m)!} \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}\right]$$

۳۵۹۲- $F(\rho) = f(x, y) + \sum\limits_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(n!)^۲} \left(\frac{\rho}{۲}\right)^{۲n} \Delta^n f(x, y)$ که در آن
$\Delta = \frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲}$

۳۵۹۳- $۱ + mx + ny + \frac{m(m-۱)}{۲!} x^۲ +$
$+ mn\, xy + \frac{n(n-۱)}{۲!} y^۲ + \dots \quad (|x| < ۱, \ |y| < ۱)$

۳۵۹۴- $$\sum_{m, n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^{m+n-۱}(m+n-۱)!}{m!\,n!} x^m y^n \quad (|x| + |y| < ۱)$$

۳۵۹۵- $$\sum_{m=۰}^{\infty} \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{x^m y^{۲n+۱}}{m!(۲n+۱)!} \quad (|x| < +\infty, \ |y| < +\infty)$$

۳۵۹۶- $\sum_{m=۰}^{\infty} \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{x^m y^{۲n}}{m!(۲n)!} \quad (|x|<+\infty, |y|<+\infty)$

۳۵۹۷- $\sum_{m=۰}^{\infty} \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^m \frac{x^{۲m+۱} y^{۲n+۱}}{(۲m+۱)!\,(۲n+۱)!} \quad (|x|<+\infty, |y|<+\infty)$

۳۵۹۸- $\sum_{m=۰}^{\infty} \sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^m \frac{x^{۲m} y^{۲n}}{(۲m)!(۲n)!} \quad (|x)<+\infty, |y|<+\infty)$

۳۵۹۹- $\sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n \frac{(x^۲+y^۲)^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} \quad (x^۲+y^۲<+\infty)$

۳۶۰۰- $\sum_{m=۱}^{\infty} \sum_{n=۲}^{\infty} (-۱)^{m+n} \frac{x^m y^n}{md} \quad (|x|<۱, |y|<۱)$

۳۶۰۱- $f(x, y) = ۱ + \frac{۱}{۳}\left(x - \frac{x^۲}{۲}\right) y$

۳۶۰۲- $\sum_{m=۰}^{\infty} \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(x-۱)^m (y+۱)^n}{m!n!} \quad (|x|<+\infty, |y|<+\infty)$

۳۶۰۳- $\sum_{n=۰}^{\infty} (-۱)^n [۱+(x-۱)](y-۱)^n \quad (-\infty<x<+\infty, ۰<y<۲)$

۳۶۰۴- $z = ۱ + [۲(x-۱) - (y-۱)] - [۸(x-۱)^۲ - ۱۰(x-۱) \times$
$\times (y-۱) + ۳(y-۱)^۲] + \dots$ ۳۶۰۵- $(۰, ۰)$ نقطهٔ منفرد است اگر
$a<۰$ ؛ نقطهٔ برگشت است اگر $a=۰$ ؛ نقطهٔ مضاعف است اگر
$a>۰$ ۳۶۰۶- $(۰, ۰)$ نقطهٔ مضاعف است ۳۶۰۷- $(۰, ۰)$ نقطهٔ منفرد
است ۳۶۰۸- $(۰, ۰)$ نقطهٔ منفرد است ۳۶۰۹- $(۰, ۰)$ نقطهٔ مضاعف
است ۳۶۱۰- $(۰, ۰)$ نقطهٔ برگشت (نوع دوم) است ۳۶۱۱- $(۰, ۰)$
نقطهٔ مضاعف است ۳۶۱۲- اگر $a<b<c$ در آنصورت منحنی از یک
بیضی و شاخهٔ بی‌نهایت تشکیل میشود ؛ اگر $a=b<c$ در آنصورت
$A(a, ۰)$ نقطه منفرد است ؛ اگر $a<b=c$ در آنصورت $B(b, ۰)$
نقطهٔ مضاعف است ؛ اگر $a=b=c$ در آنصورت $A(a, ۰)$ نقطهٔ برگشت
است ۳۶۱۳- $(۰, ۰)$ نقطهٔ مضاعف است ۳۶۱۴- $(۰, ۰)$ نقطهٔ برگشت
است ۳۶۱۵- $(۰, ۰)$ نقطهٔ انقطاع است ۳۶۱۶- $(۰, ۰)$ نقطهٔ زاویه‌دار

است ۳۶۱۷ – $x+k\pi\ (k=۰, \pm۱, \pm۲\ \ldots)$ نقاط انفصال نوع اولند
۳۶۱۸ – $x=۰$ نقطهٔ انفصال نوع دوم است ۳۶۱۹ – $x=۰$ نقطهٔ مضاعف
است ۳۶۲۰ – $x=k\pi\ (k=۰, \pm۱, \pm۲, \ldots)$ نقاط برگشت میباشند
۳۶۲۱ – $z_{\min}=۰$ بازای $x=۰$ و $y=۱$ ۳۶۲۲ – نقطهٔ اکسترمم ندارد
۳۶۲۳ – مینیمم ناکید $z=۰$ در نقطه‌های خط $x-y+۱=۰$
۳۶۲۴ – $z_{\min}=-۱$ بازای $x=۱$ و $y=۰$ ۳۶۲۵ – $z_{\max}=۱۰۸$ بازای
$x=۲$ ، $y=۳$؛ مینیمم ناکید $z=۰$ بازای $x=۰$، $۰<y<۶$ ؛
ماگزیمم ناکید $z=۰$ بازای $x=۰$ ، $-\infty<y<۰$ و $۶<y<+\infty$
۳۶۲۶ – $z_{\min}=-۱$ بازای $x=۱$ و $y=۱$ ۳۷۲۷ – $z_{\min}=-۲$ بازای
$x_۱=-۱$ ، $y_۱=-۱$ و $x_۲=۱$، $y_۲=۱$ ؛ بازای $x=۰$ ، $y=۰$
اکسترمم ندارد ۳۶۲۷,۱ – ماگزیمم $z=۰$ بازای $x=۰$ ، $y=۰$ ؛
مینیمم $z=-۱\frac{۱}{۸}$ بازای $x=\pm\frac{۱}{۲}$ ، $y=\pm۱$ ؛ زین $z=-۱$ بازای
$x=۰$ ، $y=\pm۱$ و زین $z=-\frac{۱}{۸}$ بازای $x=\pm\frac{۱}{۲}$ ، $y=۰$ ۳۶۲۸ –
مینیمم $z=۳۰$ بازای $x=۵$ ، $y=۲$ ۳۶۲۹ – $z_{\min}=-\frac{ab}{۳\sqrt{۳}}$
بازای $\frac{x}{a}=-\frac{y}{b}=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ؛ $z_{\max}=\frac{ab}{۳\sqrt{۳}}$ بازای $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$
۳۶۳۰ – $z_{\max}=\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$ بازای $x=\frac{a}{c}$ ، $y=\frac{b}{c}$ اگر $c>۰$ ؛
$z_{\min}=-\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$ $x=\frac{a}{c}$، بازای $y=\frac{b}{c}$ اگر $c<۰$؛ اگر $c=۰$،
$a^۲+b^۲\neq۰$ اکسترمم ندارد ۳۶۳۱ – $z_{\max}=۱$ بازای $x=۰$ و $y=۰$
۳۶۳۲ – مینیمم $z=۰$ بازای $x=۰$ ، $y=۰$ ؛ زین $z=\frac{۱}{۲}e^{-۲}$
بازای $x=-\frac{۱}{۴}$ ، $y=-\frac{۱}{۲}$ ۳۶۳۳ – زین $z=e^۳$ بازای $x=۱$، $y=-۲$
۳۶۳۴ – ماگزیمم $z=e^{-۱۳}\approx۲,۲۶\times۱۰^{-۶}$ بازای $x=۱$ ، $y=۳$ ؛
مینیمم $z=-۲۶e^{-\frac{۱}{۵۲}}\approx-۲۵,۰۱$ بازای $x=-\frac{۱}{۲۶}$، $y=-\frac{۳}{۲۶}$ ۳۶۳۵ –
مینیمم $z=۷-۱۰\ln۲\approx۰,۰۶۸۵$ بازای $x=۱$ ، $y=۲$ ۳۶۳۶ –

$z_{\max}=\frac{٣}{٢}\sqrt{٣}$ بازای $x=\frac{\pi}{٣}$ ، $y=\frac{\pi}{٦}$ ٣٦٣٧ – $z_{\min}=-\frac{٣\sqrt{٣}}{٨}$

بازای $x=y=\frac{٢\pi}{٣}$ ؛ $z_{\max}=\frac{٣\sqrt{٣}}{٨}$ بازای $x=y=\frac{\pi}{٣}$ ٣٦٣٨ – زین

$z=-١+\frac{١}{٢}\ln ٢+\frac{٣}{٤}\pi\approx ١,٧٠$ بازای $x=١$ ، $y=١$ ٣٦٣٩ –

مینیمم $z=-\frac{١}{٢e}\approx -٠,١٨٤$ بازای $x=y=\pm\frac{١}{\sqrt{٢e}}\approx\pm٠,٤٣$ ؛ ماگزیمم

$z=\frac{١}{٢e}$ بازای $x=-y=\pm\frac{١}{\sqrt{٢e}}$ ؛ در نقاط سکون $x=٠$ ، $y=\pm١$

و $x=\pm١$ ، $y=٠$ اکسترمم ندارد ٣٦٤٠ – نقاط سکون:

$x=\frac{\pi}{١٢}(-١)^{m+١}+(m+n)\frac{\pi}{٢}$ ، $y=\frac{\pi}{١٢}(-١)^{m+١}+(m-n)\frac{\pi}{٢}$

$(m, n=٠, \pm١, \pm٢, \dots)$. اکسترمم $z=m\pi+\left(\frac{\pi}{٦}+\sqrt{٣}\right)$

$(-١)^{m+١}+٢(-١)^{n}$ اگر m و n از نظر زوج یا فرد بودن متفاوت باشند
(ماگزمم بازای m فرد و n زوج ، مینیمم بازای m زوج و n فرد) ؛ اگر
m و n از نظر زوج یا فرد بودن یکسان باشند اکسترمم ندارد ٣٦٤١ –
$z_{\min}=٠$ بازای $x=٠$ و $y=٠$ ؛ ماگزیمم ناا کید $z=e^{-١}$ بازای
$x^{٢}+y^{٢}=١$ ٣٦٤٢ – $u_{\min}=-١٤$ بازای $x=-١$ ، $y=-٢$ ، $z=٣$
٣٦٤٣ – مینیمم $u=-٦٩١٣$ بازای $x=٢٤$ ، $y=-١٤٤$ ، $z=-١$
٣٦٤٤ – مینیمم $u=٤$ بازای $x=\frac{١}{٢}$ ، $y=١$ ، $z=١$ ٣٦٤٥ – $u_{\max}=\frac{a^{٧}}{٧^{٧}}$

بازای $x=y=z=\frac{a}{٧}$ ؛ اکسترمم ناا کید $u=٠$ بازای $y=٠$ ، $x\neq٠$ ،

$z\neq٠$ ، $x+٢y+٣z\neq a$ ٣٦٤٦ – مینیمم $u=\frac{١٥a}{٤}\sqrt[١٥]{\frac{a}{١٦b}}$

بازای $x=\frac{١}{٢}\sqrt[١٥]{١٦a^{١٤}b}$ ، $y=\frac{١}{٤}\sqrt[٥]{١٦a^{٤}b}$ ، $z=\frac{١}{٢}\sqrt{\frac{a^{٨}b^{٧}}{٤}}$

٣٦٤٧ – ماگزیمم $u=٤$ بازای $x=y=z=\frac{\pi}{٢}$ ؛ مینیمم مرزی $u=٠$ بازای

$x=y=z=٠$ و $x=y=z=\pi$ ٣٦٤٨ – $u_{\max}=\left(\frac{٢}{n^{٢}+n+٢}\right)^{\frac{n^{٢}+n+٢}{٢}}$

بازای $x_۱ = x_۲ = \dots = x_n = \frac{۲}{n^۲+n+۲}$ ۳۶۴۹ – مینیمم $u=(n+۱)\,۲^{\frac{۱}{n+۱}}$

بازای $x_۱ = ۲^{\frac{۱}{n+۱}},\ x_۲ = x_۱^۲,\ \dots\ ,\ x_n = x_۱^n$ ۳۶۵۰ – اعداد

$a, x_۱, x_۲\ , \dots\ , x_n, b$ بایستی تصاعد هندسی بقدر نسبت $q = \sqrt[n+۱]{\frac{b}{a}}$

را تشکیل دهند ۳۶۵۱ – مینیمم $z_۱ = -۲$ و ماگزیمم $z_۲ = ۶$ بازای $x = ۱$،
$y = -۱$ ۳۶۵۲ – $z_{\min} = -(۴+۲\sqrt{۶})$ بازای $x = y = -(۳+\sqrt{۶})$؛
$z_{\max} = ۲\sqrt{۶} - ۴$ بازای $x = y = -(۳-\sqrt{۶})$ ۳۶۵۳ – مینیمم ناکید

$z = -\frac{a}{۲\sqrt{۲}}$ بازای $x^۲+y^۲ = \frac{۳a^۲}{۸}$ ، $z < ۰$ ؛ ماگزیمم ناکید

$z = \frac{a}{۲\sqrt{۲}}$ بازای $x^۲+y^۲ = \frac{۳a^۲}{۸}$ ، $z > ۰$ ۳۶۵۴ – $z_{\max} = \frac{۱}{۴}$

بازای $x = \frac{۱}{۲}$ ، $y = \frac{۱}{۲}$ ۳۶۵۵ – $z_{\min} = -\frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{|ab|}$ بازای

$x = -\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ ، $y = -\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ ؛ $z_{\max} = \frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{|ab|}$ بازای

$x = \frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ ، $y = \frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ که در آن $\varepsilon = \operatorname{sgn} ab \neq ۰$ ۳۶۵۶ –

$z_{\max} = \frac{a^۲b^۲}{a^۲+b^۲}$ بازای $x = \frac{ab^۲}{a^۲+b^۲}$ ، $y = \frac{a^۲b}{a^۲+b^۲}$ ۳۶۵۷ – $z_{\min} = \lambda_۱$ ،
$z_{\max} = \lambda_۲$ که در آن $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ عبارتند از ریشه‌های معادلهٔ
$(A-\lambda)(C-\lambda)-B^۲=۰$ و $\lambda_۱ < \lambda_۲$ ۳۶۵۷٫۱ – ماگزیمم $z = ۱۰۶\frac{۱}{۴}$

بازای $x = \pm۱\frac{۱}{۲}$، $y = \pm۴$؛ مینیمم $z = -۵۰$ بازای $x = \pm۲$، $y = \pm۳$

۳۶۵۸ – اکسترمم $z = ۱ + \frac{(-۱)^k}{\sqrt{۲}}$ بازای $x = \frac{\pi}{۸} + \frac{\pi k}{۲}$ ، $y = -\frac{\pi}{۸} + \frac{\pi k}{۲}$
$(k = ۰, \pm۱, \pm۲, \dots)$ (ماگزیمم اگر k زوج باشد و مینیمم اگر k فرد
باشد) ۳۶۵۹ – $u_{\min} = -۳$ بازای $x = -\frac{۱}{۳}$ ، $y = \frac{۲}{۳}$ ، $z = -\frac{۲}{۳}$ ؛

$u_{\max} = ۳$ بازای $x = \frac{۱}{۳}$ ، $y = -\frac{۲}{۳}$ ، $z = \frac{۲}{۳}$

۳۶۶۰ – $u_{\max} = \frac{a^{m+n+p} m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$ بازای $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{a}{m+n+p}$

۳۶۶۱ – $u_{\min} = c^۲$ بازای $x = ۰$ ، $y = ۰$ ، $z = \pm c$ ؛ $u_{\max} = a^۲$

بازای $x = \pm a$ ، $y = ۰$ ، $z = ۰$ ۳۶۶۲ – $u_{\max} = \left(\frac{a}{۶}\right)^۶$ بازای

$x = y = z = \frac{a}{۶}$ ۳۶۶۳ – $u_{\min} = -\frac{۱}{۳\sqrt{۶}}$ بازای $x = y = \frac{۱}{\sqrt{۶}}$

و $z = -\frac{۲}{\sqrt{۶}}$ ، $x = z = \frac{۱}{\sqrt{۶}}$ و $y = -\frac{۲}{\sqrt{۶}}$ ، $y = z = \frac{۱}{\sqrt{۶}}$

و $x = -\frac{۲}{\sqrt{۶}}$ ؛ $a_{\max} = \frac{۱}{۳\sqrt{۶}}$ بازای $x = y = -\frac{۱}{\sqrt{۶}}$ و $z = \frac{۲}{\sqrt{۷}}$ ،

$x = z = -\frac{۱}{\sqrt{۶}}$ و $y = \frac{۲}{\sqrt{۶}}$ ، $y = z = -\frac{۱}{\sqrt{۶}}$ و $x = \frac{۲}{\sqrt{۶}}$

۳۶۶۳,۱ – ماگزیمم مشروط $u = ۲$ بازاری $x = ۱$ ، $y = ۱$ ، $z = ۱$

۳۶۶۴ – $u_{\max} = \frac{۱}{۸}$ بازای $x = y = z = \frac{\pi}{۶}$ ۳۶۶۵ – $u_{\min} = \lambda_۱$

و $u_{\max} = \lambda_۲$ که در آن $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ ریشه‌های معادلهٔ

$$\lambda^۲ - \left(\frac{\sin^۲\alpha}{a^۲} + \frac{\sin^۲\beta}{b^۲} + \frac{\sin^۲\gamma}{c^۲}\right)\lambda + \left(\frac{\cos^۲\alpha}{b^۲c^۲} + \frac{\cos^۲\beta}{a^۲c^۲} + \frac{\cos^۲\gamma}{a^۲b^۲}\right) = ۰$$

$(\lambda_۱ < \lambda_۲)$ میباشند   ۳۶۶۶ – $u_{\min} = \frac{R^۲(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)^۲}{A^۲ + B^۲ + C^۲}$ ؛

$u_{\max} = R^۲$ ۳۶۶۷ – $u_{\min} = \left(\sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{a_j^۲}\right)^{-۱}$ بازای

$(i = ۱, ۲, \dots, n)$ $x_i = \frac{۱}{a_i}\left(\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{a_i^۲}\right)^{-۱}$ ۳۶۶۸ – $u_{\min} = \frac{a^p}{n^{p-۱}}$

بازای $(i = ۱, ۲, \dots, n)$ $x_i = \frac{a}{n}$ ۳۶۶۹ – $u_{\min} = \left(\sum_{j=۱}^{n} \sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^۲$

بازای $(i = ۱, ۲, \dots, n)$ $x_i = \sqrt{\frac{\alpha_j}{\beta_j}}\left(\sum_{j=۱}^{n} \sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^{-۱}$

۳۷۷۰ - $u_{\max}=\left(\frac{a}{\alpha_۱+\alpha_۲+\ldots+\alpha_n}\right)^{\alpha_۱+\alpha_۲+\ldots+\alpha_n}\alpha_۱^{\alpha_۱}\alpha_۲^{\alpha_۲}\ldots\alpha_n^{\alpha_n}$

بازای $\frac{x_۱}{\alpha_۱}=\frac{x_۲}{\alpha_۲}=\ldots=\frac{x_n}{\alpha_n}=\frac{a}{\alpha_۱+\alpha_۲+\ldots+\alpha_n}$ ۳۶۷۱ - اکسترمم

$u=\lambda$ از معادلهٔ $|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=۰$ که در آن $\delta_{ij}=۰$ بازای $i\neq j$ و

$\delta_{ii}=۱$ تعیین میشود ۳۶۷۵ - $\operatorname{Inf} z=-۵$ ، $\sup z=-۲$ ۳۶۷۶ -

$\operatorname{Inf} z=-۷۵$ ، $\sup z=۱۲۵$ ۳۶۷۷ - $\operatorname{Inf} z=۰$ ، $\sup z=۱$ ۳۶۷۸ -

$\operatorname{Inf} u=۰$ ؛ $\sup u=۳۰۰$ ۳۶۷۹ - $\operatorname{Inf} u=-\frac{۱}{۲}$ ؛ $\sup u=۱+\sqrt{۲}$

۳۶۸۰ - $\operatorname{Inf} u=۰$ ؛ $\sup u=e^{-۱}\approx ۰,۳۷$ ۳۶۸۲ - خیر ۳۶۸۳ - مینیمم

مساوی با $\frac{n}{\sqrt[n]{a}}$ است ۳۶۸۴ - اجزاء حاصل جمع برابرند ۳۶۸۵ - عوامل

ضرب برابر $x_i=\frac{\left(x\alpha_۱^{\frac{۱}{\alpha_۱}}\alpha_۲^{\frac{۱}{\alpha_۲}}\ldots\alpha_n^{\frac{۱}{\alpha_n}}\right)^{\frac{\frac{۱}{\alpha_۱}}{\frac{۱}{\alpha_۱}+\frac{۱}{\alpha_۲}+\ldots+\frac{۱}{\alpha_n}}}}{(\alpha_i)^{\frac{۱}{\alpha_i}}}$ $(i=۱,۲,\ldots,n)$

میباشند که در آن $\alpha_i\,(i=۱,۲,\ldots,n)$ نماهای نظیر توانهاست؛ کمترین مقدار

مجموع $\left(\frac{۱}{\alpha_۱}+\frac{۱}{\alpha_۲}+\ldots+\frac{۱}{\alpha_n}\right)\left(a\alpha_۱^{\frac{۱}{\alpha_۱}}\alpha_۲^{\frac{۱}{n_۲}}\ldots\alpha_n^{\frac{۱}{\alpha_n}}\right)^{\frac{۱}{\frac{۱}{\alpha_۱}+\frac{۱}{\alpha_۲}+\cdots+\frac{۱}{\alpha_n}}}$

۳۶۸۶ - $x=\frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{n}m_ix_i$ ، $y=\frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{n}m_iy_i$ که در آن $M=\sum_{i=۱}^{n}m_i$

۳۶۸۷ - اندازه‌های وان: $\sqrt[۳]{۲V}$ ؛ $\sqrt[۳]{۲V}$ ؛ $\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۲V}$ ۳۶۸۸ -

$H=۲R=۲\sqrt{\frac{S}{۳\pi}}$ که در آن R شعاع سطح استوانه‌ای و H مولد آنست

۳۶۸۹ - $x=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{n}x_i$ ، $y=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{n}y_i$ ، $z=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{n}z_i$ که در آن

$N=\sqrt{\left(\sum_{i=۱}^{n}x_i\right)^۲+\left(\sum_{i=۱}^{n}y_i\right)^۲+\left(\sum_{i=۱}^{n}z_i\right)^۲}$ کمترین مجموع مربعات فواصل

برابر است با $n-۲N+\sum_{i=۱}^{n}(x_i^۲+y_i^۲+z_i^۲)$ ۳۶۹۰ – زاویهٔ میل مولد
مخروط نسبت به قاعدهٔ آن مساویست با $\arcsin\frac{۲}{۳}$ ۳۶۹۱ – زاویهٔ میل یال
جانبی هرم‌ها نسبت بقاعده‌ها مساویست با $\arcsin\frac{۲}{۳}$ ۳۶۹۲ – اضلاع
مستطیل: $\frac{۲p}{۳}$ و $\frac{p}{۳}$ ۳۶۹۳ – اضلاع مثلث: $\frac{p}{۲}$، $\frac{۳p}{۴}$ و $\frac{۳p}{۴}$
اندازه‌های متوازی السطوح: $\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$، $\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ و $\frac{R}{\sqrt{۳}}$ ۳۶۹۵ –ارتفاع
متوازی‌السطوح مساوی $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع مخروط است ۳۶۹۶ – اندازه‌های متوازی
السطوح: $\frac{۲a}{\sqrt{۳}}$، $\frac{۲b}{\sqrt{۳}}$ و $\frac{۲c}{\sqrt{۳}}$ ۳۶۹۸ – ارتفاع متوازی السطوح
$h=l\sin x\frac{\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{۲}}{۲\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{۲}}$ اگر $\alpha\geqslant\operatorname{arctg}\sqrt{۲}$ و $h=۰$ اگر
$۰<\alpha<\operatorname{arctg}\sqrt{۲}$ ۳۶۹۸ – اندازه‌های متوازی السطوح: a, b و $\frac{c}{۲}$
۳۶۹۹– $\frac{|Ax_۰+By_۰+Cz_۰+D|}{\sqrt{A^۲+B^۲+C^۲}}$ ۳۷۰۰ – $d=\frac{۱}{\pm\Delta}\begin{vmatrix}x_۱-x_۲ & y_۱-y_۲ & z_۱-z_۲\\ m_۱ & n_۱ & p_۱\\ m_۲ & n_۲ & p_۲\end{vmatrix}$
که در آن $\Delta=\sqrt{\begin{vmatrix}m_۱ & n_۱\\ m_۲ & n_۲\end{vmatrix}^۲+\begin{vmatrix}n_۱ & p_۱\\ n_۲ & p_۲\end{vmatrix}^۲+\begin{vmatrix}p_۱ & m_۱\\ p_۲ & m_۲\end{vmatrix}^۲}$ ۳۷۰۱ –
$\frac{۷}{۴\sqrt{۲}}$ ۳۷۰۲ – مجذور نیم محورها $a^۲=\lambda_۱$ و $b^۲=\lambda_۲$ ریشه‌های معادلهٔ
$(۱-\lambda A)(۱-\lambda C)-\lambda^۲B^۲=۰$ میباشند ۳۷۰۳ – مجذور نیم محورها
$a^۲=\lambda_۱$، $b^۲=\lambda_۲$ و $c^۲=\lambda_۳$ ریشه‌های معادلهٔ $\begin{vmatrix}A\lambda-۱ & D\lambda & F\lambda\\ D\lambda & B\lambda-۱ & E\lambda\\ F\lambda & E\lambda & C\lambda-۱\end{vmatrix}=۰$
میباشند ۳۷۰۴ – $\frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^۲+B^۲+C^۲}$ ۳۷۰۵ –
$\frac{\pi abc}{\sqrt{a^۲\cos^۲\alpha+b^۲\cos^۲\beta+c^۲\cos^۲\gamma}}$ ۳۷۰۷ – زاویهٔ تابش برابر است با

$\arcsin\left(n\sin\frac{\pi}{۲}\right)$ ؛ زاویهٔ انحراف شعاع برابر است با $۲\arcsin\left(n\sin\frac{a}{۲}\right)-\alpha$

۳۷۰۸ – ضرایب مطلوب a و b از دستگاه معادلات $a[xx]+b[x۱]=[xy]$ ، $a[x۱]+bn=[y۱]$ معین میشوند که در آن $[xy]=\sum_{i=۱}^{n}x_iy_i$ و غیره. مساله دارای جواب معین است اگر $\sum_{i=j}(x_i-x_j)^۲\neq۰$

۳۷۰۹ – $\operatorname{tg}۲x=\frac{۲(\bar{x}\times\bar{y}-\overline{xy})}{[\overline{x^۲}-(\bar{x})^۲]-[\overline{y^۲}-(\bar{y})]^۲}$ ، $p=\bar{x}\cos\alpha+\bar{y}\sin\alpha$ که در آن $\bar{x}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}x_i$ ، $\overline{xy}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}x_iy_i$ و غیره مقادیر میانگین میباشند

۳۷۱۰ – $x-\frac{۷}{۲}$ ؛ $\Delta_{\min}=\frac{۱}{۲}$

فصل ۷

۳۷۱۱ – $F(y)=۱$ اگر $-\infty<y<۰$ ؛ $F(y)=۱-۲y$ اگر $۰\leqslant y\leqslant۱$ ؛ $F(y)=-۱$ اگر $۱<y<+\infty$

۳۷۱۲ – $F(y)$ بازای $y=۰$ منفصل است

۳۷۱۳ – الف) $\frac{\pi}{٤}$ ؛ ب) ۱ ؛ پ) $\frac{۸}{۳}$ ؛ ت) $\ln\frac{۲e}{۱+e}$

۳۷۱۳,۱ – ۰

۳۷۱۵ – نمیتوان

۳۷۱۶ – نمیتوان

۳۷۱۷ – $F'(x)=۲xe^{-x^۵}-e^{-x^۳}-\int_{x}^{x^۲}y^۲e^{-xy^۲}dy$

۳۸۱۸ – الف) $-(e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha+e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha)+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{۱-x^۲}\,e^{\alpha\sqrt{۱-x^۲}}dx$ ؛

ب) $\left(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{b+\alpha}\right)\sin\alpha(b+\alpha)-\left(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{a+\alpha}\right)\sin\alpha(a+\alpha)$ ؛

پ) $\frac{۲}{\alpha}\ln(۱+\alpha^۲)$ ؛ ت) $f(\alpha,-\alpha)+۲\int_{۰}^{\alpha}f'_u(u,v)\,dx$ که در آن $u=x+\alpha$ و $v=x-\alpha$ ؛

ث) $۲\alpha\int\limits_{\alpha^۲-\alpha}^{\alpha^۲+\alpha}\sin(y^۲+\alpha^۴-\alpha^۲)\,dy+۲\int\limits_۰^{\alpha^۲}\sin ۲x^۲\times\cos ۲\alpha x\,dx-$

$-۲\alpha\int\limits_۰^{\alpha^۲}dx\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^۲+y^۲-\alpha^۲)\,dy$ ۳۷۱۹ – $F''(x)=۳f(x)+۲xf'(x)$

۳۷۲۰ – $F''(x)=۲f(x)$ اگر $x\in(a, b)$ و $F''(x)=۰$ اگر $x\in(a, b)$

۳۷۲۱ – $F''(x)=\frac{\Delta^۲f(x)}{h^۲}$ که در آن $\Delta^۲f(x)=f(x+۲h)-۲f(x+h)+$

$+f(x)$ ۳۷۲۲ – $F^{(n)}(x)=(n-۱)!f(x)$ ۳۷۲۳ – $x-\frac{۱۱}{۳}$؛ ۳۷۲۴ –

$۰,۹۳۴+۰,۴۲۸x$ (تقریباً) ۳۷۲۵ – $\frac{dE}{dk}=\frac{E-F}{k}$؛ $\frac{dF}{dk}=\frac{E}{k(۱-k^۲)}-\frac{F}{k}$

۳۷۲۹ – $F''_{xy}(xy)=x(۲-۳y^۲)f(xy)+\frac{x}{y^۲}f\left(\frac{x}{y}\right)+x^۲y(۱-y^۲)f'(xy)$

۳۷۳۲ – $\pi\ln\frac{|a|+|b|}{۲}$ ۳۷۳۳ – ۰ اگر $|a|\leqslant۱$؛ $\pi\ln a^۲$ اگر $|a|>۱$

۳۷۳۴ – $\frac{\pi}{۲}\operatorname{sgn}a\ln(۱+|a|)$ ۳۷۳۵ – $\pi\arcsin a$ ۳۷۳۶ –

$\frac{\pi}{۲}\ln(۱+\sqrt{۲})$ ۳۷۳۷ – $\ln\frac{b+۱}{a+۱}$ ۳۷۳۸ – الف) $\operatorname{arc\,tg}\frac{b-a}{۱+(a+۱)(b+۱)}$؛

ب) $\frac{۱}{۲}\ln\frac{b^۲+۲b+۲}{a^۲+۲a+۲}$ ۳۷۴۱ – $a\geqslant۰$ ۳۷۴۲ – $\max(p, q)>۱$

۳۷۴۳ – $\left|\frac{p-۱}{q}\right|<۱$ ۳۷۴۴ – $p<۱$ ۳۷۴۵ – $n<۰$ و $n>\frac{۱}{۲}$

۳۷۴۶ – $p>\frac{۱}{۲}$ ۳۷۴۷ – بازای $a>۰$ و بازای $a=-\frac{۲n-۱}{۲}\pi$

$(n=۱, ۲, \ldots)$ همگراست ۳۷۴۸ – بازای $n>۴$ همگراست ۳۷۴۹ – بازای
$p>۱$ همگراست ۳۷۵۰ – بازای $-۱<n<۲$ همگراست ۳۷۵۵,۱ – الف)
همگرای یکنواخت؛ ب) همگرای نایکنواخت ۳۷۵۵,۲ – همگرای نایکنواخت
۳۷۵۶ – همگرای یکنواخت ۳۷۵۷ – همگرای یکنواخت ۳۷۵۸ – همگرای
یکنواخت ۳۷۵۹ – همگرای نایکنواخت ۳۷۶۰ – همگرای یکنواخت
۳۷۶۰,۱ – همگرای یکنواخت ۳۷۶۱ – همگرای یکنواخت ۳۷۶۲ – همگرای
نایکنواخت ۳۷۶۳ – الف) همگرای یکنواخت ؛ ب) همگرای نایکنواخت
۳۷۶۴ – همگرای نایکنواخت ۳۷۶۵ – همگرای یکنواخت ۳۷۶۵,۱ – $b\geqslant۱۰^{۷۰}$

۳۷٦٦ – الف) همگرای یکنواخت؛ ب) همگرای نایکنواخت   ۳۷٦۷ – همگرای
یکنواخت   ۳۷٦۸ – همگرای نایکنواخت   ۳۷٦۹ – همگرای یکنواخت

۳۷۷۰ – همگرای یکنواخت   ۳۷۷۲ – خیر   ۳۷۷٦ – $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ ۳۷۷٦,۲ – ۱

۳۷۷۸ – $a=\pm ۱$ ۳۷۷۹ – پیوسته   ۳۷۸۰ – پیوسته   ۳۷۸۱ – پیوسته

۳۷۸۲ – پیوسته   ۳۷۸۳ – بازای $\alpha=۰$ منفصل است   ۳۷۸٤ – $\frac{(-۱)^m m!}{n^{m+۱}}$

۳۷۸٥ – $\frac{\pi}{۲}\frac{(۲n-۱)!!}{(۲n)!!}a^{-\left(n+\frac{۱}{۲}\right)}$ ۳۷۸۸ – $\ln\frac{b}{a}$ ۳۷۹۰ – $\ln\frac{b}{a}$

۳۷۹۱ – ۰   ۳۷۹۲ – $\frac{\pi}{۲}\ln\frac{a}{b}$ ۳۷۹۳ – $\frac{۱}{۲}\ln\frac{\beta}{\alpha}$

۳۷۹٤ – $\ln\frac{(۲\alpha)^{۲\alpha}(۲\beta)^{۲\beta}}{(\alpha+\beta)^{۲\alpha+۲\beta}}$ ۳۷۹٥ – $\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{m}\ (m\neq ۰)$

۳۷۹٦ – $\frac{۱}{۲}\ln\frac{\beta^۲+m^۲}{\alpha^۲+m^۲}$ ۳۷۹۷ – $-\pi\left(۱-\sqrt{۱-a^۲}\right)$

۳۷۹۸ – $\pi\ln\frac{۱+\sqrt{۱-\alpha^۲}}{۲}$ ۳۷۹۹ – $\frac{\pi}{۲}\operatorname{sgn}\alpha\left(۱+|\alpha|-\sqrt{۱+\alpha^۲}\right)$

۳۸۰۰ – $\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|)\ (\beta\neq ۰)$ ۳۸۰۱ – $\frac{\pi}{۲}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}\ (\alpha>۰,\ \beta>۰)$

۳۸۰۲ – $\frac{۲\pi}{۳}[\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^۳\ln\alpha+\beta^۳\ln\beta-(\alpha^۳+\beta^۳)\ln(\alpha+\beta)]$

$(\alpha>۰,\ \beta>۰)$ ۳۸۰۳ – $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ ۳۳۰٤ – $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{ac-b^۲}{a}}$

۳۸۰٥ – $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{ac-b^۲}{a}}\frac{(a+۲b^۲)a_۱-٤abb_۱+۲a^۲c_۱}{۲a^۲}$ ۳۸۰٦ – $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^۲}{٤a}}$

۳۸۰۷ – $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}e^{-۲a}$ ۳۸۰۸ – $\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)$ ۳۸۰۹ –

$\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^۲}{٤a}}$ ۳۸۱۰ – $\frac{b\sqrt{\pi}}{٤a\sqrt{a}}e^{\frac{b^۲}{٤a}}$ ۳۸۱۱ – $(-۱)^n\frac{\sqrt{\pi}}{۲^{۲n+۱}}\times\frac{d^{۲n}}{db^{۲n}}(e^{-b^۲})$

۳۸۱۲ – $\frac{\pi}{۲}\operatorname{sgn}\beta$ ۳۸۱۲,۱ – تابع فرد است. بازای $x>۰$ در نقاط $۲k\pi$
مینیمم و در نقاط $(۲k-۱)\pi$ ماگزیمم است که در آن $k=۱, ۲, ۳, \ldots$.

مجانب‌ها : $y=\frac{\pi}{۲}$ بازای $x\to+\infty$ و $y=-\frac{\pi}{۲}$ بازای $x\to-\infty$

۳۸۱۳- $\pi\frac{|\beta|}{۲}-\sqrt{\pi a}$ ۳۸۱۴- $\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$ ۳۸۱۵- ۰ اگر $|\alpha|<|\beta|$؛

اگر $\frac{\pi}{۴}\operatorname{sgn}\alpha$ $|\alpha|=|\beta|$ ؛ $\frac{\pi}{۲}\operatorname{sgn}\alpha$ اگر $|\alpha|>|\beta|$ ۳۸۱۶- $\frac{\pi}{۴}\operatorname{sgn}\alpha$

۳۸۱۷- $\frac{\pi}{۲}|\alpha|$ ۳۸۱۸- $\frac{۳\pi}{۸}\alpha|\alpha|$ ۳۸۱۹- $\frac{\pi}{۴}$ ۳۸۲۰- $\frac{۳}{۸}\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$

۳۸۲۱- $\frac{\pi}{۴}$ ۳۸۲۲- $\frac{\alpha+\beta}{۲}\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\frac{\alpha-\beta}{۲}\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-\beta}{k}+\frac{k}{۴}\times$

$\times\ln\frac{k^۲+(\alpha-\beta)^۲}{k^۲+(\alpha+\beta)^۲}$ ۳۸۲۳- $D(x)=۱$ بازای $|x|<۱$ ؛ $D(x)=\frac{۱}{۲}$

بازای $x=\pm۱$؛ $D(x)=۰$ بازای $|x|>۱$ ۳۸۲۴- الف) $\pi\operatorname{sgn}a\cos ab$؛

ب) $\pi\operatorname{sgn}a\sin ab$ ۳۸۲۵- $\frac{\pi}{۲}e^{-|\alpha|}$ ۳۸۲۶- $\frac{\pi}{۲}\operatorname{sgn}\alpha e^{-|\alpha|}$

۳۸۲۷- $\frac{\pi}{۲}(۱-e^{-۲})$ ۳۸۲۸- $\frac{\pi(۱+|\alpha|)}{۴}e^{-|\alpha|}$ ۳۸۲۹-

$\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^۲}}\cos\frac{b\alpha}{a}e^{-\frac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^۲}}$ ۳۸۳۰- $\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}$ ؛ $\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}$

۳۸۳۱- $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\sin\left(\frac{ac-b^۲}{a}+\frac{\pi}{۴}\operatorname{sgn}a\right)$ ۳۸۳۲- $\sqrt{\pi}\cos\left(a^۲+\frac{\pi}{۴}\right)$

۳۸۳۳- $\sqrt{\pi}\sin\left(a^۲+\frac{\pi}{۴}\right)$ ۳۸۳۵- الف) $\frac{n!}{p^{n+۱}}$ ؛ ب) $\frac{\sqrt{\pi}}{۲p\sqrt{p}}$ ؛

پ) $\frac{۱}{p-\alpha}$ بازای $p>\alpha$ ؛ ت) $\frac{۱}{(p+\alpha)^۲}$ ؛ ث) $\frac{p}{p^۲+۱}$ ؛

ج) $\ln\left(۱+\frac{۱}{p}\right)$ ؛ چ) $\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{۲p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha^۲}{۴p}}$ ۳۸۳۷- الف) ۱؛

ب) $x^۲+\frac{۱}{۲}$ پ) $e^{۲ax+a^۲}$ ؛ ت) $\frac{۱}{۲}e^{-\frac{a^۲}{۴}}\cos ax$ ۳۸۳۹-

$\varphi(x)=\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{x^۲}{۲\sigma^۲}}$ که در آن $\sigma=\sqrt{\sigma_۱^۲+\sigma_۲^۲}$ ۳۸۵۳- $\frac{\pi}{۸}$

۳۸۴۴- $\frac{\pi a^۴}{۱۶}$ ۳۸۴۵- $\frac{\pi}{۲\sqrt{۲}}$ ۳۸۴۶- $\frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}$

۳۸۴۷ – $\frac{\pi}{۲\sqrt{۲}}$

۳۸۴۸ – $\frac{۳\pi}{۵۱۲}$

۳۸۴۹ – $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$

۳۸۵۰ – $\frac{(۲n-۱)!!\sqrt{\pi}}{۲^{n+۱}}$

۳۸۵۱ – $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}\ (۰<m<n)$

۳۸۵۲ – $B(n-m,\ m)\ (۰<m<n)$

۳۸۵۳ – $\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+۱}{n}} B\left(\frac{m+۱}{n},\ p-\frac{m+۱}{n}\right)\ \left(۰<\frac{m+۱}{n}<p\right)$

۳۸۵۴ – $\frac{(b-a)^{m+n+۱}}{(a+c)^{n+۱}(b+c)^{m+۱}} B(m+۱,\ n+۱)\ (m>-۱,\ n>-۱)$

۳۸۵۵ – $\frac{۱}{m} B\left(\frac{۱}{m},\ ۱-\frac{۱}{n}\right)$ ($n<۰$ یا $n>۱$)

۳۸۵۶ – $\frac{۱}{۲} B\left(\frac{m+۱}{۲},\ \frac{n+۱}{۲}\right)\ (m>-۱,\ n>-۱)$

۳۸۵۷ – $\frac{\pi}{۲\cos\frac{n\pi}{۲}}\ (|n|<۱)$

۳۸۵۸ – $\frac{۲^{n-۱}}{(۱-k^۲)^{\frac{n}{۲}}} B\left(\frac{n}{۲},\ \frac{n}{۲}\right)\ (n>۰)$

۳۸۵۹ – $\frac{۱}{n}\Gamma\left(\frac{۱}{n}\right)\ (n>۰)$

۳۸۶۰ – $\frac{۱}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+۱}{n}\right)\left(\frac{m+۱}{n}>۰\right)$

۳۸۶۱ – $\Gamma(p+۱)\ (p>-۱)$

۳۸۶۲ – $\frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma(p+۱)}{a^{p+۱}}\right]\quad (p>-۱)$

۳۸۶۳ – $-\frac{\pi^۲\cos p\pi}{\sin^۲ p\pi}\ (۰<p<۱)$

۳۸۶۴ – $\pi^۳\frac{۱+\cos^۲ p\pi}{\sin^۳ p\pi}\ (۰<p<۱)$

۳۸۶۴,۱ – $\frac{۲}{۲۷}\pi^۲$

۳۸۶۴,۲ – $\frac{۳\pi^۳}{۳۲\sqrt{۲}}$

۳۸۶۵ – $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{p\pi}{۲}}{\operatorname{tg}\frac{q\pi}{۲}}\right|\ (۰<p<۱,\ ۹<q<۱)$

۳۸۶۶ – $\pi\operatorname{ctg}\pi p$

۳۸۶۷ – $\frac{\pi}{۲\beta}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{۲\beta}$

۳۸۶۸ – $\ln\sqrt{۲\pi}$

۳۸۶۹ – $\ln\sqrt{۲\pi}+a(\ln a-۱)$

۳۸۷۰ – $\frac{۱}{\pi}\left(۱+\ln\frac{\pi}{۲}\right)$

۳۸۷۱ – $\frac{۱}{۴n}$

۳۸۷۶ – $\frac{\pi a^{m-۱}}{۲\Gamma(m)\cos\frac{m\pi}{۲}}\ (a>۰)$

۳۸۷۷ – $\frac{\pi a^{m-۱}}{۲\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{۲}}\ (a>۰)$

۳۹۷۹ - $aB\left(\frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{۲n}\right)$ ۳۸۸۰ - $\frac{۲a^{۲}}{n}\ \frac{\Gamma^{۲}\left(\frac{۱}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{۲}{n}\right)}$

۳۸۸۱ - $f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$

۳۸۸۲ - $f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\frac{۱-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$

۳۸۸۳ - $f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\frac{\sin\lambda(x-a)-\sin\lambda(x-b)}{\lambda}d\lambda$

۳۸۸۴ - $f(x)=\frac{۲h}{\pi a}\int_{۰}^{+\infty}\frac{۱-\cos a\lambda}{\lambda^{۲}}\cos\lambda x\,d\lambda$

۳۸۸۵ - $\frac{۱}{a^{۲}+x^{۲}}=\frac{۱}{a}\int_{۰}^{+\infty}e^{-a\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda$

۳۸۸۶ - $\frac{x}{a^{۲}+x^{۲}}=\int_{۰}^{+\infty}e^{-a\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda$

۳۸۸۸ - $f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\frac{\sin\lambda\pi}{۱-\lambda^{۲}}\sin\lambda x\,d\lambda$

۳۸۸۸ - $f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\frac{\cos\frac{\lambda\pi}{۲}}{۱-\lambda^{۲}}\cos\lambda x\,d\lambda$

۳۸۸۹ - $f(t)=\frac{۲A\omega}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\frac{\sin\frac{۲\pi n\lambda}{\omega}}{\lambda^{۲}-\omega^{۲}}\sin\lambda t\,d\lambda$

۳۸۹۰ - $f(x)=\frac{۲\alpha}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{\lambda^{۲}+a^{۲}}d\lambda$

۳۸۹۱ - $f(x)=\frac{\alpha}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\left[\frac{۱}{(\lambda-\beta)^{۲}+\alpha^{۲}}+\frac{۱}{(\lambda+\beta)^{۲}+\alpha^{۲}}\right]\cos\lambda x\,d\lambda$

۳۸۹۲ − $f(x)=\frac{۴\alpha\beta}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{[(\lambda-\beta)^۲+\alpha^۲][\lambda+\beta)^۲+\alpha^۲]}d\lambda$

۳۸۹۳ − $e^{-x^۲}=\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\int_{۰}^{+\infty}e^{-\frac{\lambda^۲}{۴}}\cos\lambda x\,d\lambda$

۳۸۹۴ − $xe^{-x^۲}=\frac{۱}{۲\sqrt{\pi}}\int_{۰}^{+\infty}\lambda e^{-\frac{\lambda^۲}{۴}}\sin\lambda x\,d\lambda$

۳۸۹۵ − الف) $(۰\leqslant x<+\infty)\ \ e^{-x}=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{۱+\lambda^۲}d\lambda$ ؛

ب) $(۰<x<+\infty)\ \ e^{-x}=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{۱+\lambda^۲}d\lambda$

۳۸۹۶ − $F(x)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{\alpha}{x^۲+\alpha^۲}$ ۳۸۹۷ − $F(x)=-i\sqrt{\frac{۸}{\pi}}\frac{\alpha x}{(x^۲+\alpha^۲)^۲}$

۳۸۹۸ − $F(x)=e^{-\frac{x^۲}{۲}}$ ۳۸۹۹ − $F(x)=e^{-\frac{x^۲+\alpha^۲}{۲}}\operatorname{ch}\alpha x$

۳۹۰۰ − الف) $(y\geqslant ۰)\ \ \varphi(y)=e^{-y}$ ؛ ب) $(y\geqslant ۰)\ \ \psi(y)=\frac{۲}{\pi}\frac{y}{۱+y^۲}$

فصل ۸

۳۹۰۱ − $\frac{۱}{۴}$ ۳۹۰۲ − $\underline{S}=\frac{۴۰}{۳}-\frac{۱۱}{n}+\frac{۵}{۳n^۲}$ ؛ $\overline{S}=\frac{۴۰}{۳}+\frac{۱۱}{n}+\frac{۵}{۳n^۲}$ ؛

$۱۳\frac{۱}{۳}$ ۳۹۰۳ − ۹,۸۸ . مقدار دقیق : $۲\pi(۷-\sqrt{۲۴})\approx ۱۳,۲۰$

۳۹۰۴ − ۰,۴۰۲ . مقدار دقیق : ۰,۴ ۳۹۰۵ − $\delta<۰,۰۰۰۲۲$ ۳۹۰۶ − ۱

۳۹۰۷ − $\frac{۱}{۴۰}$ ۳۹۰۸ − $\frac{\pi a^۳}{۳}$ ۳۹۱۰ − $I=F(A,B)-F(A,b)-$

$-F(a,B)+F(a,b)$ ۳۹۱۲ − الف) منفی ؛ ب) منفی ؛ پ) مثبت

۳۹۱۳ − $\frac{۱}{۴}$ ۳۹۱۴ − $۱,۹۶<I<۲$ ۳۹۱۵ − $a^۲+b^۲+\frac{R^۲}{۲}$

٣٩١٦ –

$$\int_{٠}^{١} dx \int_{٠}^{x} f(x, y)\, dy = \int_{٠}^{١} dy \int_{y}^{١} f(x, y)\, dx$$

٣٩١٧ –

$$\int_{-٢}^{٢} dx \int_{\frac{|x|}{٢}}^{١} f(x, yx)\, dy = \int_{٠}^{١} d \int_{-٢y}^{٢y} f(x, y)\, dx$$

٣٩١٨ –

$$\int_{٠}^{١} dx \int_{٠}^{x+١} f(x, y)\, dy = \int_{٠}^{١} dy \int_{٠}^{١} f(x, y)\, dx + \int_{١}^{٢} dy \int_{y-١}^{١} f(x, y)\, dx$$

٣٨١٩ –

$$\int_{-١}^{١} dx \int_{-\sqrt{١-x^{٢}}}^{\sqrt{١-x^{٢}}} f(x, y)\, dy = \int_{-١}^{١} dy \int_{-\sqrt{١-y^{٢}}}^{\sqrt{١-y^{٢}}} f(x, y)\, dx$$

٣٩٢٠ –

$$\int_{-\frac{١}{٢}}^{\frac{١}{٢}} \int_{\frac{١}{٢}-\sqrt{\frac{١}{٤}-x^{٢}}}^{\frac{١}{٢}+\sqrt{\frac{١}{٤}-x^{٢}}} f(x, y)\, dy = \int_{٠}^{١} dx \int_{-\sqrt{y-y^{٢}}}^{\sqrt{y-y^{٢}}} f(x, y)\, dx$$

٣٩٢١ –

$$\int_{-١}^{١} x \int_{٠}^{١} f(x, y)\, dy = \int_{٠}^{١} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx$$

٣٩٢٢ –

$$\int_{-٢}^{-١} dx \int_{-\sqrt{٤-x^{٢}}}^{\sqrt{٤-x^{٢}}} f(x, y)\, dy + \int_{-١}^{١} dx \left\{ \int_{-\sqrt{٤-x^{٢}}}^{-\sqrt{١-x^{٢}}} f(x, y)\, dy + \right.$$

$$\left. + \int_{\sqrt{١-x^{٢}}}^{\sqrt{٤-x^{٢}}} f(x, y)\, dy \right\} + \int_{١}^{٢} x \int_{-\sqrt{٤-x^{٢}}}^{\sqrt{٤-x^{٢}}} f(x, y)\, dy$$

٣٩٢٤ –

$$\int_{٠}^{٢} dy \int_{\frac{y}{٢}}^{y} f(x, y)\, dx + \int_{٢}^{٤} dy \int_{\frac{y}{٢}}^{٢} f(x, y)\, dx$$

٣٩٢٥ –

$$\int_{-١}^{٠} dy \int_{-٢\sqrt{١+y}}^{٢\sqrt{١+y}} f(x, y)\, dx + \int_{٠}^{٨} dy \int_{-٢\sqrt{١+y}}^{٢-y} f(x, y)\, dx$$

۳۹۲۶ — $\int_{۰}^{۱} dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[۳]{y}} f(x, y)\,dx$

۳۹۲۷ — $\int_{-۱}^{۰} dy \int_{-\sqrt{۱-y^{۲}}}^{\sqrt{۱-y^{۲}}} f(x, y)\,dx + \int_{۰}^{۱} dy \int_{-\sqrt{۱-y}}^{\sqrt{۱-y}} f(x, y)\,dx$

۳۹۲۸ — $\int_{۰}^{۱} dy \int_{۲-y}^{۱+\sqrt{۱-y^{۲}}} f(x, y)\,dx$

۳۹۲۹ — $\int_{۰}^{a} dy \left\{ \int_{\frac{y^{۲}}{۲a}}^{a-\sqrt{a^{۲}-y^{۲}}} f(x, y)\,dx + \int_{a+\sqrt{a^{۲}-y^{۲}}}^{۲a} f(x, y)\,dx \right\} + \int_{a}^{۲a} dy \int_{\frac{y^{۲}}{۲a}}^{۲a} f(x, y)\,dx$

۳۹۳۰ — $\int_{۰}^{۱} dy \int_{e^{y}}^{e} f(x, y)\,dx$

۳۹۳۱ — $\int_{۰}^{۱} dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y)\,dx - \int_{-۱}^{۰} dy \int_{\pi - \arcsin y}^{۲\pi + \arcsin y} f(x, y)\,dx$

۳۹۳۲ — $\frac{p^{۵}}{۲۱}$ ۳۹۳۳ — $\left(۲\sqrt{۲} - \frac{۸}{۳}\right) a\sqrt{a}$ ۳۹۳۴ — $\frac{a^{۴}}{۲}$

۳۹۳۵ — $۱۴a^{۴}$ ۳۹۳۶ — $\frac{۳۵\pi a^{۴}}{۱۲}$ ۳۹۳۷ — $\int_{۰}^{۲\pi} d\varphi \int_{۰}^{a} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$

۳۹۳۸ — $\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} d\varphi \int_{۰}^{a\cos\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$

۳۹۳۹ — $\int_{۰}^{۲\pi} d\varphi \int_{|a|}^{|b|} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$

۳۹۴۰ −

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} d\varphi \int_{۰}^{\frac{۱}{\sqrt{۲}} \operatorname{cosec}\left(\varphi+\frac{\pi}{٤}\right)} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, dr$$

۳۹٤۱ −

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{٤}} d\varphi \int_{۰}^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^{۲}\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, dr + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{۳\pi}{٤}} d\varphi \int_{۰}^{\frac{a}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, dr +$$

$$+ \int_{\frac{۳\pi}{٤}}^{\pi} d\varphi \int_{۰}^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^{۲}\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, dr$$

۳۹٤۲ − در صورتیکه حوزهٔ انتگرال گیری به دو دایرهٔ متحد المرکز بمرکز مبدأ مختصات و دو شعاع دارای ابتدا در مبدأ مختصات محدود باشد

۳۹٤۳ −

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{٤}} d\varphi \int_{۰}^{\frac{۱}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, dr + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{۲}} d\varphi \int_{۰}^{\frac{۱}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, dr = \int_{۰}^{۱} r\, dr \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, d\varphi +$$

$$+ \int_{۱}^{\sqrt{۲}} r\, dr \int_{\operatorname{arc\,cos}\frac{۱}{r}}^{\operatorname{arc\,sin}\frac{۱}{r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, d\varphi$$

۳۹٤٤ −

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} d\varphi \int_{\frac{۱}{\sqrt{۲}} \operatorname{cosec}\left(\varphi+\frac{\pi}{٤}\right)}^{۱} rf(\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, dr =$$

$$= \int_{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}^{۱} r\, dr \int_{\frac{\pi}{٤} - \operatorname{arc\,cos}\frac{۱}{r\sqrt{۲}}}^{\frac{\pi}{٤} + \operatorname{arc\,cos}\frac{۱}{r\sqrt{۲}}} t(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, d\varphi$$

— ٣٩٤٥

$$\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} d\varphi \int_{٠}^{\frac{٢}{\cos\varphi}} rf(r)\,dr = \frac{\pi}{١٢}\int_{٠}^{٢\sqrt{٢}} rf(r)\,dr +$$

$$+ \int_{٢\sqrt{٢}}^{٤} \left(\frac{\pi}{٣} - \arccos\frac{٢}{r}\right) rf(r)\,dr$$

— ٣٩٤٦

$$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} d\varphi \int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^{٢}\varphi}}^{\frac{١}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr = \int_{٠}^{١} r\,dr \times$$

$$\times \int_{٠}^{\arcsin\frac{\sqrt{١+٤r^{٢}}-١}{٢r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi + \int_{١}^{\sqrt{٢}} r\,dr \times$$

$$\times \int_{\arccos\frac{١}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{١+٤r^{٢}}-١}{٢r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi$$

— ٣٩٤٧

$$\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} d\varphi \int_{٠}^{a\sqrt{\cos ٢\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr = \int_{٠}^{a} r\,dr \times$$

$$\times \int_{-\frac{١}{٢}\arccos\frac{r^{٢}}{a^{٢}}}^{\frac{١}{٢}\arccos\frac{r^{٢}}{a^{٢}}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi$$

— ٣٩٤٨

$$\int_{٠}^{a} dr \int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi,\ r)\,d\varphi$$

— ٣٩٤٩

$$\int_{٠}^{a} dr \int_{\frac{١}{٢}\arcsin\frac{r^{٢}}{a^{٢}}}^{\frac{\pi}{٢}-\frac{١}{٢}\arcsin\frac{r^{٢}}{a^{٢}}} f(\varphi,\ r)\,d\varphi$$

٣٩٥٠ – $\int\limits_{٠}^{a} dr \int\limits_{r}^{a} f(\varphi, r)\, d\varphi$ ٣٩٥١ – $٢\pi \int\limits_{٠}^{١} rf(r)\, dr$

٣٩٥٢ – $\pi \int\limits_{٠}^{١} rf(r)\, dr + \int\limits_{١}^{\sqrt{٢}} \left(\pi - ٤ \arccos \frac{١}{r}\right) rf(r)\, dr$

٣٩٥٣ – $\frac{١}{٢} \int\limits_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} f(\operatorname{tg}\varphi) \cos^{٢}\varphi\, d\varphi$ ٣٩٥٤ – $\frac{٢\pi a^{٣}}{٣}$ ٣٩٥٥ – $-٦\pi^{٢}$ ٣٩٥٦–

$\frac{٦}{٥} \times \frac{b^{٢} + b(b+h) + (b+h)^{٢} + (٢b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}\,(\sqrt{a} + \sqrt{a+h})\,(\sqrt{b} + \sqrt{b+h}}$ ؛ $\frac{٣}{٢}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{٣}{٢}}$

٣٩٥٧ – $\int\limits_{a}^{b} u\, du \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(u, uv)\, dv$ ٣٩٥٨ – $\frac{١}{٢} \int\limits_{١}^{٢} du \int\limits_{-u}^{٤-u} f\left(\frac{u+v}{٢}, \frac{u-v}{٢}\right) dv$

٣٩٥٩ – $٤ \int\limits_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sin^{٣}v \cos^{٤} v\, dv \int\limits_{٠}^{a} uf(u\cos^{٤}v, u\sin^{٤}v)\, du$

٣٩٦١ – $u = xy,\ v = x - y$

٣٩٦٢ – $\int\limits_{-١}^{١} f(u)\, du$ ٣٩٦٣ – $٢ \int\limits_{-١}^{١} \sqrt{١ - u^{٢}}\, f(u\sqrt{a^{٢} + b^{٢}} + c)\, du$

٣٩٦٤ – $\ln ٢ \int\limits_{١}^{٢} f(u)\, du$ ٣٩٦٥ – $\frac{\pi}{٢}$ ٣٩٦٦ – $\frac{٤}{٣}$ ٣٩٦٧ – $\frac{٢}{٣}\pi ab$

٣٩٦٨ – $\frac{\pi}{\sqrt{٢}}$ ٣٩٦٩ – $٥٤٣\frac{١١}{١٥}$ ٣٩٧٠ – $١\frac{٣٧}{١٢٨} - \ln ٢$

٣٩٧١ – ٢π ٣٩٧٢ – $\frac{٩}{١٦}\pi$ ٣٩٧٣ – $\frac{٥}{٣} + \frac{\pi}{٤}$

٣٩٧٤ – $\frac{٤}{٣}\pi + ٨\ln\frac{١+\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ ٣٩٧٥ – ٦

٣٩٧٦ – $\frac{٤}{٣}(٤ - ٣\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٣})$ ٣٩٧٨ – $f(٠, ٠)$ ٣٩٧٩ – $\frac{٢}{t}F(t)$

اگر $t > ٠$ ٣٩٨٠ – $٢ \iint\limits_{(x-t)^٢+(y-t)^٢ \leqslant ١} \frac{x+y}{\sqrt{x^٢+y^٢}}\, dx\, dy$

٣٩٨١ – $F'(t) = \int\limits_٠^{٢\pi} t f(t\cos\varphi,\ t\sin\varphi)\, d\varphi$ ٣٩٩٤ – $\left(\frac{١٠}{٨} - ٢\ln ٢\right) a^٢$

٣٩٨٥ – $\frac{٢}{٣}(p+q)\sqrt{pq}$ ٣٩٨٦ – $\pi a^٢$ ٣٩٨٨ – $\frac{٣\sqrt{٣}-\pi}{٣} a^٢$

٣٩٨٨ – $\frac{\pi}{٦} + \frac{\sqrt{٢}}{٣}\ln(١+\sqrt{٢})$ ٣٩٨٩ – $\frac{\pi a^٢}{٤}$ ٣٩٩٠ –

$a^٢\left(\frac{\sqrt{٧}}{٢} + \arcsin\frac{\sqrt{١٤}}{٨}\right)$ ٣٩٩١ – $\frac{\pi ab}{٤}\left(\frac{a^٢}{h^٢} + \frac{b^٢}{k^٢}\right)$ ٣٩٩٢ –

$\frac{ab}{٣}\left[\frac{٢\pi}{٣\sqrt{٣}}\left(\frac{a^٤}{h^٤} + \frac{b^٤}{k^٤}\right) + \frac{a^٢b^٢}{h^٢k^٢}\right]$ ٣٩٩٣ – $\frac{ab}{٦}\left(\frac{a^٢}{h^٢} + \frac{b^٢}{k^٢}\right)$

٣٩٩٤ – $\frac{a^٤ bk(ak+٢bh)}{٦h^٢(ak+bh)^٢}$ ٣٩٩٤,١ – $\frac{١}{١٢٦٠}\,\frac{(ab)^٥}{c^٨}$ ٣٩٩٥ – $\frac{ab}{٧٠}$

٣٩٩٦ – $\frac{(\beta-\alpha)(b^٢-a^٢)}{٢(\alpha+١)(\beta+١)}$ ٣٩٩٧ – $\frac{a^٢}{٢}\ln ٢$ ٣٩٩٨ – $\frac{٤}{٣}(q-p)(s-r)$

٣٩٩٨,١ – $\frac{١}{١٥}(b^٥-a^٥)(c^{-٣}-d^{-٣})$ ٣٩٩٨,٢ – $\frac{q-p}{(p+١)(q+١)} \times$

$\times\left(b^{\frac{q+١}{q-p}} - a^{\frac{q+١}{q-p}}\right)\left(c^{-\frac{p+١}{q-١}} - d^{-\frac{p+١}{q-١}}\right)$ ٣٩٩٩ – $\frac{٦٥}{١٠٨} ab$

٣٠٩٩,١ – $\frac{١٨٩}{١٦}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{١}{٣} + \frac{١٢}{٢٥}\right) ab$ ٤٠٠٠ – $\frac{c^٢}{٦}(\sqrt{١٠}-٢)\arcsin\frac{١}{٣}$

٤٠٠١ – $\frac{\pi}{|\delta|}$ ٤٠٠٢ – $\frac{c^٢}{٤}[(v_٢-v_١)(\operatorname{sh}٢u_٢-\operatorname{sh}٢u_١) -$

$-(u_٢-u_١)(\sin ٢v_٢-\sin ٢v_١)]$ ٤٠٠٣ – $\frac{٢}{٣}\pi a^٢$ ٤٠٠٤ – $\frac{٦\pi}{٧\sqrt{٧}}$

٤٠٠٧ – $\frac{٥}{٦}$ ٤٠٠٨ – $\frac{\pi R^٢ a}{٤} - \frac{٢}{٣}R^٣$ ٠٠٩ –– $\frac{٨٨}{١٠٥}$ ٤٠١٠ – π

٤٠١١ – π ٤٠١٢ – $\frac{١٧}{١٢} - ٢\ln ٢$ ٤٠١٣ – $\frac{٤}{٣-\sqrt{\pi}}\Gamma^٢\left(\frac{٣}{٤}\right) a^٣$

٤٠١٤ – $\frac{\pi}{٨}$ ٤٠١٥ – $\frac{٤٥}{٣٢}\pi$ ٤٠١٦ – $\frac{١٦}{٩}a^٣$ ٤٠١٧ – $\frac{\pi a^٣}{٨}$

٤٠١٨ - $\pi\left(١-e^{-R^{٢}}\right)$ ٤٠١٩ - $٢a^{٢}c\frac{(\beta-\alpha)(\pi-٢)}{\pi^{٢}}$ ٤٠٢٠ - $\frac{\pi}{٨}$

٤٠٢١ - $\frac{١}{٣}\pi abc\left(٢-\sqrt{٢}\right)$ ٤٠٢٢ - $\frac{٤}{٣}\pi abc\left(٢\sqrt{٢}-١\right)$

٤٠٢٣ - $\frac{٣\pi abc}{٨}$ ٤٠٢٤ - $\frac{٢}{٣}\pi abc$ ٤٠٢٥ - $\frac{abc}{٣}$ ٤٠٢٦ -

$\frac{٢}{٩}abc\left(٣\pi+٢٠-١٦\sqrt{٢}\right)$ ٤٠٢٧ - $\frac{\pi(b^{٣}-a^{٣})}{١٢}$ ٤٠٢٨ - $\frac{٩}{٢}a^{٤}$

٤٠٢٩ - $\frac{٣}{٤}$ ٤٠٣٠ - $\frac{a^{٢}c}{\pi}\ln\frac{\beta}{\alpha}$ ٤٠٣١ - $\frac{٨}{٣٥}$ ٤٠٣٢ - $\frac{٨٥}{٢٥٦}\pi abc$

٤٠٣٣ - $\frac{\pi^{٤}a^{٢}c}{١٢٨}$ ٤٠٣٣,١ - $(n-m)(e^{-١}-e^{-٢})a^{٢}$

٤٠٣٤ - $\frac{abc}{٣n^{٢}}\times\frac{\Gamma^{٣}\left(\frac{١}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{٣}{n}\right)}$ ٤٠٣٥ - $\frac{abc}{٢m+n}\times\frac{\Gamma\left(\frac{١}{m}\right)\Gamma\left(\frac{٢}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{١}{m}+\frac{٢}{n}\right)}$

٤٠٣٦ - $\frac{٢}{٣}\pi a^{٢}\left(٢\sqrt{٢}-١\right)$ ٤٠٣٧ - $١٦a^{٢}$ ٤٠٣٨ - $٨a^{٢}\arcsin\frac{b}{a}$

٤٠٣٩ - $\frac{\pi}{\sqrt{٢}}$ ٤٠٤٠ - $٨a^{٢}$ ٤٠٤١ - $\pi\sqrt{٢}$ ٤٠٤٢ - $\frac{\pi a^{٢}}{٢}$

٤٠٤٣ - $-\frac{٢\pi}{٣}+\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}\left(١+\frac{٧}{٤}\ln ٢\right)+\frac{٨}{٣}\operatorname{arc\,tg}\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ٤٠٤٤ -

$\frac{a^{٢}}{٩}(٢٠-٣\pi)$ ٤٠٤٥ - $٢a^{٢}$ ٤٠٤٥,١ - $\frac{\pi}{٦}\left[٣\sqrt{١٠}+\ln\left(٣+\sqrt{١٠}\right)\right]$

٤٠٤٥,٢ - $\frac{١}{٣}abc\left(\frac{١}{a^{٢}}+\frac{١}{b^{٢}}\right)^{-١}\left[\left(\frac{١}{a^{٢}}+\frac{١}{b^{٢}}+\frac{١}{c^{٢}}\right)^{\frac{٣}{٢}}-\frac{١}{c^{٣}}\right]$

٤٠٤٥,٣ - $\sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{٤}{٣}ab\left(٢\sqrt{٢}-١\right)\operatorname{arc\,tg}$ ٤٠٤٥,٤ - $\frac{\pi}{٢}\ln(e+e^{-١})$

٤٠٤٦ - $S=٤\pi\left(٣+٢\sqrt{٣}\right)a^{٢}$ ؛ $V=\frac{٨\pi}{\sqrt{٣}}a^{٣}$

٤٠٤٧ - $(\varphi_{٢}-\varphi_{١})(\sin\psi_{٢}-\sin\psi_{٢})R^{٢}$ که در آن $\varphi_{١}$ و $\varphi_{٢}$ طول نصف النهارات و $\psi_{١}$ و $\psi_{٢}$ عرض مدارات و R شعاع کره است. ٤٠٤٨ -

$\pi\left\{a\sqrt{a^{٢}+h^{٢}}+h^{٢}\ln\frac{a+\sqrt{a^{٢}+h^{٢}}}{h}\right\}$ ٤٠٤٩ - $S=a(\varphi_{٢}-\varphi_{١})\times$

$\times [b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)]$ ؛ $4\pi^2ab$ ۴۰۵۰ –

۴۰۵۲ – $\omega = \arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$ ؛ $\omega \approx \frac{bc}{a^2}$ ۴۰۵۱ –

$\frac{\rho_0 a^2}{3}[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})]$ ۴۰۵۲ – $x_0=-\frac{a}{2}$ ؛ $y_0=\frac{8}{5}a$

۴۰۵۳ – $x_0=y_0=\frac{a}{5}$ ۴۰۵۴ – $x_0=y_0=\frac{256}{315\pi}a$ ۴۰۵۵ –

$x_0=\frac{a^2b}{14c^2}$ ؛ $y_0=\frac{ab^2}{14c^2}$ ۴۰۵۶ – $x_0=y_0=\frac{\pi a}{8}$ ۴۰۵۷ – $x_0=\frac{5}{6}a$ ؛

$y_0=\frac{16}{9\pi}a$ ۴۰۵۸ – $x_0=\pi a$ ؛ $y_0=\frac{5}{6}a$ ۴۰۵۹ – $x_0=-\frac{a}{5}$ ؛

$y_0=0$ ۴۰۶۰ – سهمی $y_0=\frac{1}{8}\sqrt{30px_0}$ ۴۰۶۱ – $I_x=\frac{bh^3}{12}$ ؛

$(b=|b_1-b_2|)$ $I_y=\frac{h|b_1^3-b_2^3|}{12}$ ۴۰۶۲ – $I_x=I_y=\frac{a^4}{16}(16-5\pi)$

۴۰۶۳ – $I_x=\frac{21\pi a^4}{32}$ ؛ $I_y=\frac{49\pi a^4}{32}$ ۴۰۶۴ – $I_x=I_y=\frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$

۴۰۶۵ – $I_x=I_y=\frac{9}{8}a^4$ ۴۰۶۶ – $I_0=\frac{\pi a^4}{8}$ ۴۰۶۶٫۱ – $\frac{a^4}{12}$

۴۰۶۹ – $I_a=\frac{a^4}{32\sqrt{3}}$ ۴۰۷۰ – $X=ah^2$ ؛ $Y=0$ که در آن X و Y بترتیب تصاویر نیروی فشار بر محورهای مختصات Ox و Oy می باشند

۴۰۷۱ – $P_1=\pi a^2\delta\left(h-\frac{2}{3}a\right)$ ؛ $P_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{2}{3}a\right)$ ۴۰۷۲ –

تصاویر نیروی فشار بر محورهای Ox و Oz واقع در صفحهٔ قایم مار بر محور استوانه و ضمناً محور Ox افقی و محور Oz عمودی میباشند ، بترتیب برابرند با :

$X_1=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha$ ، $Z_1=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha$

$X_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha$ ، $Z_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha$

۴۰۷۳ – تصاویر نیروی جاذبه بر محورهای Ox ، Oy ، Oz بترتیب برابرند با :

$X=0$ ، $Y=0$ ، $Z=-\frac{2kmM}{a^2h}\{|b|-|b-h|+\sqrt{a^2+(b-h)^2}-$

$-\sqrt{a^٢+b^٢}\}$ که در آن k ثابت جاذبه است ٤٠٧٤ - $p_{\text{متوسط}}=\frac{١}{٢}p_٠$

٤٠٧٥ - $A=\frac{kp}{١٢}\left\{٢ab\sqrt{a^٢+b^٢}+a^٣\ln\frac{b+\sqrt{a^٢+b^٢}}{a}+b^٣\ln\frac{a+\sqrt{a^٢+b^٢}}{b}\right\}$

٤٠٧٦ - $\frac{١}{٣٦٤}$ ٤٠٧٧ - $\frac{١}{٢}\ln ٢-\frac{٥}{١٦}$ ٤٠٧٨ - $\frac{١}{٤٨}$ ٤٠٧٩ - $\frac{٤}{٥}\pi abc$

٤٠٨٠ - $\frac{\pi}{٦}$ ٤٠٨١ - $\int_٠^١ dx\left\{\int_٠^x dz\int_٠^{١-x} f(x,y,z)\,dy+\right.$

$$+\int_x^١ dz\int_{z-x}^{١-x} f(x,y,z)\,dy\Big\}=\int_٠^٢ dz\left\{\int_٠^١ dy\int_{z-y}^{١-y} f(x,y,z)\,dx+\int_x^١ dy\times\right.$$

$\left.\times\int_٠^{١-y} f(x,y,z)\,dx\right\}$ ٤٠٨٢ - $\int_{-١}^{١} dx\int_{|x|}^{١} dz\int_{-\sqrt{z^٢-x^٢}}^{\sqrt{z^٢-x^٤}} f(x,y,z)\,dy=$

$=\int_٠^١ dz\int_{-z}^{z} dy\int_{-\sqrt{z^٢-y^٢}}^{\sqrt{z^٢-y^٢}} f(x,y,z)\,dx$ ٤٠٨٣ -

$$\int_٠^١ dx\left\{\int_٠^{x^٢} dz\int_٠^١ f(x,y,z)\,dy+\int_{x^٢}^{x^٢+١} dz\int_{\sqrt{z-x^٢}}^{١} f(x,y,z)\,dy\right\}=$$

$$=\int_٠^١ dz\left\{\int_٠^{\sqrt{z}} dy\int_{\sqrt{z-y^٢}}^{٢} f(x,y,z)\,dx=\int_{\sqrt{z}}^{١} dy\int_٠^١ f(x,y,z)\,dx\right\}+$$

$+\int_١^٢ dz\int_{\sqrt{z-١}}^{١} dy\int_{\sqrt{z-y^٢}}^{١} f(x,y,z)\,dx$ ٤٠٨٤ - $\frac{١}{٢}\int_٠^x (x-\zeta)^٢ f(\zeta)\,d\zeta$

٤٠٨٥ - $\frac{١}{٢}\int_٠^١ (٢-z)^٢ f(z)\,dz+\frac{١}{٢}\int_١^٢ (٢-z)^٢ f(z)\,dz$ ٤٠٨٦ -

$F(A,B,C)-F(A,B,c)-F(A,b,C)-F(a,B,C)+F(A,b,c)+$

$+F(a,B,c)+F(a,b,C)-F(a,b,c)$ ٤٠٨٧ - $\frac{\pi}{١٠}$

٤٠٨٨- $\frac{\pi}{١٥}\left(٢\sqrt{٢}-١\right)$ ٤٠٨٩- $\int\limits_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} d\varphi \int\limits_{٠}^{\operatorname{arc\,tg}\frac{١}{\cos\varphi}} \cos\psi\, d\psi \int\limits_{\frac{\sin\psi}{\cos^{٢}\psi}}^{\frac{١}{\cos\varphi\cos\psi}} r^{٢} f(r)\, dr$

٤٠٩٠- $\frac{\pi^{٢}abc}{٤}$ ٤٠٩١- $\frac{١٦\pi}{٣}$ ٤٠٩٢- $\frac{٢}{٢٧}\left(\frac{١}{\alpha^{٣}}-\frac{١}{\beta^{٣}}\right)\left(\frac{١}{\sqrt{a}}-\frac{١}{\sqrt{b}}\right)h^{٤}\sqrt{h}$

٤٠٩٣- $\frac{١}{٣٢}\left(\frac{١}{m^{٢}}-\frac{١}{n^{٢}}\right)(b_{٨}-a^{٨})\left[(\beta^{٢}-\alpha^{٢})\left(١+\frac{١}{\alpha^{٢}\beta^{٢}}\right)+٤\ln\frac{\beta}{\alpha}\right]$

٤٠٩٤- $\frac{٦}{٥}$ ٤٠٩٥- $٣(e-٢)$ ٤٠٩٦- $u=\frac{٤\pi}{٣}\frac{R^{٣}}{\sqrt{a^{٢}+b^{٢}+c^{٢}+\theta R}}$

که در آن $|\theta|<١$ ٤٠٩٨- الف) $F'(t)=٤\pi t^{٢}f(t^{٢})$ ٤

ب) $F'(t)=\frac{٣}{t}\left[F(t)+\iiint\limits_{V} xyz\, f'(xyz)\, dx\, dy\, dz\right]$ که در آن $t>٠$ و

$V=\{٠\leqslant x\leqslant t,\ ٠\leqslant y\leqslant t,\ ٠\leqslant z\leqslant t\}$ ٤٠٩٩- ٠ اگر یکی

از اعداد m، n و p فرد باشد؛ $\frac{٤\pi}{m+n+p+٣}\times\frac{(m-١)!!(n-١)!!(p-١)!!}{(m+n+p+١)!!}$

اگر اعداد m، n و p زوج باشند ٤١٠٠- $\frac{\Gamma(p+١)\,\Gamma(q+١)\,\Gamma(r+١)\,\Gamma(s+١)}{\Gamma(p+q+r+s+٤)}$

٤١٠١- $\frac{٣}{٣٥}$ ٤١٠٢- $\frac{٧}{٢٤}$ ٤١٠٣- $\frac{٢}{٣}a^{٤}(٣\pi-٤)$ ٤١٠٤- $\frac{\pi a^{٣}}{٦}$

٤١٠٥- $\frac{a^{٣}}{٢٤}(٣\pi-٤)$ ٤١٠٦- $\frac{٣٢}{٣}\pi$ ٤١٠٧- $\pi a^{٣}$ ٤١٠٨- $\frac{\pi^{٢}a^{٣}}{٤\sqrt{٢}}$

٤١٠٩- $\frac{١}{٢}$ ٤١١٠- $\frac{\pi}{٣}\left(٢-\sqrt{٢}\right)(b^{٣}-a^{٣})$ ٤١١١- $\frac{\pi}{٣}\times\frac{a^{٢}bc}{h}$

٤١١٢- $\frac{\pi^{٢}}{٤}abc$ ٤١١٢,١- $\frac{\pi^{٢}abc}{٤\sqrt{٢}}$ ٤١١٣- $\frac{٥\pi abc}{١٢}\left(٣-\sqrt{٥}\right)$

٤١١٤- $\frac{٨\pi}{٥}abc$ ٤١١٥- $\frac{abc}{٣}\sqrt{\frac{\pi}{٢}}\,\Gamma^{٢}\left(\frac{١}{٤}\right)$

٤١١٦- $\frac{abc}{٦٠}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\times\left(\frac{a^{٢}}{h^{٢}}+\frac{b^{٢}}{k^{٢}}\right)$ ٤١١٦,١- $\frac{abc}{٦٠}\times\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^{٤}}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}$

٤١١٧- $\frac{abc}{٥٥٤٤٠٠}$ ٤١١٨- $\frac{adc}{٣}$ ٤١١٨,١- $\frac{abc}{٩٠}$ ٤١١٨,٢- $\frac{abc}{١٦٨٠}$

٤١١٨,٣ – $\frac{٤\pi}{٣٥}abc$ ٤١١٩ – $\frac{٩}{٤}a^٢$ ٤١٢٠ – $\frac{١}{٣}(b^٤-a^٣)\sqrt{\frac{٢}{\pi}}\,\Gamma^٢\left(\frac{٣}{٤}\right)$

٤١٢١ – $\frac{٤\pi}{٣}a^٣$ ٤١٢٢ – $\frac{\pi abc^٢}{٣h}(١-e^{-١})$ ٤١٢٣ – $\frac{٣}{٢}abc$

٤١٢٤ – $٥abc\left(\frac{١}{e}-\frac{١}{٣}\right)$ ٤١٢٥ – $\frac{٣٧}{٢٧}$ ٤١٢٦ – $V=\frac{٥\pi a^٣}{٦}$ ؛

$S=\frac{\pi a^٢}{٦}(٦\sqrt{٢}+٥\sqrt{٥}-١)$ ٤١٢٧ – $\frac{٨h_١h_٢h_٣}{|\Delta|}$ ٤١٢٨ – $\frac{٤\pi h^٣}{٣|\Delta|}$

٤١٢٩ – $\frac{abc^٢}{h}\times\frac{\pi^٢}{٣n\sin\frac{\pi}{n}}$ ٤١٣٠ – $\frac{abc}{mn+mp+np}\times\frac{\Gamma\left(\frac{١}{m}\right)\Gamma\left(\frac{١}{n}\right)\Gamma\left(\frac{١}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{١}{m}+\frac{١}{n}+\frac{١}{p}\right)}$

٤١٣١ – $\frac{٣}{٢}$ ٤١٣٢ – $٤\pi\rho_٠\left(\frac{١}{k}+\frac{٢}{k^٢}+\frac{٢}{k^٣}\right)e^{-k}$

٤١٣٣ – $\left(٠,\ ٠,\ \frac{٣}{٤}c\right)$ ٤١٣٤ – $x_٠=y_٠=\frac{٢}{٥}a$ ؛ $z_٠=\frac{٧}{٣٠}a^٢$

٤١٣٥ – $x_٠=\frac{٧}{١٨}p$ ؛ $y_٠=٠$ ؛ $z_٠=\frac{٧}{١٧٦}p$ ٤١٣٦ – $x_٠=\frac{٣}{٨}a$ ؛

$y_٠=\frac{٣}{٨}b$ ؛ $z_٠=\frac{٣}{٨}c$ ٤١٣٧ – $x_٠=y_٠=٠$ ؛ $z_٠=\frac{٣a}{٨}$

٤١٣٨ – $x_٠=y_٠=١$ ؛ $z_٠=\frac{٥}{٣}$ ٤١٣٩ – $x_٠=\frac{٩\pi}{٤٤٨}a$ ؛ $y_٠=\frac{٩\pi}{٤٤٨}b$ ؛

$z_٠=\frac{٩\pi}{٤٤٨}c$ ٤١٤٠ – $x_٠=y_٠=٠$ ؛ $z_٠=\frac{٧}{٢٠}$

٤١٤١ – $\frac{x_٠}{a}=\frac{y_٠}{b}=\frac{z_٠}{c}=\frac{٣}{٤}+\frac{\Gamma\left(\frac{٢}{n}\right)\Gamma\left(\frac{٣}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{١}{n}\right)\Gamma\left(\frac{٤}{n}\right)}$ ٤١٤٢ – $x_٠=\alpha$ ؛

$y_٠=\beta$ ؛ $z_٠=\gamma$ ٤١٤٣ – $I_{xy}=\frac{abc^٣}{٦٠}$ ؛ $I_{yz}=\frac{a^٣bc}{٦٠}$ ؛ $I_{zx}=\frac{ab^٣c}{٦٠}$

٤١٤٤ – $I_{xy}=\frac{٤}{١٥}\pi abc^٣$ ؛ $I_{yz}=\frac{٤}{١٥}\pi a^٣bc$ ؛ $I_{zx}=\frac{٤}{١٥}\pi ab^٣c$ ٤١٤٥ –

$I_{xy}=\frac{\pi abc^٣}{٥}$ ؛ $I_{yz}=\frac{\pi a^٣bc}{٢٠}$ ؛ $I_{xz}=\frac{\pi ab^٣c}{٢٠}$ ٤١٤٦ –

$I_{xy}=\frac{٢abc^٣}{٢٢٥}(١٥\pi-١٦)$ ؛ $I_{xz}=\frac{٢ab^٣c}{١٥٧٥}(١٠٥\pi-٢٧٢)$ ؛

$I_{yz}=\frac{٢a^٣bc}{١٥٧٥}(١٠٥\pi-٩٢)$ ٤١٤٧- $I_{xy}=\frac{٧}{٢}\pi abc^٣$ ؛ $I_{xz}=\frac{٤}{٣}\pi ab^٣c$ ؛

$I_{yz}=\frac{٤}{٣}\pi a^٣bc$ ٤١٤٧,١- $I_{yz}=\frac{١٥\pi^٢}{٢٥٦\sqrt{٢}}a^٣bc$ ؛

$I_{zx}=\frac{١٥\pi^٢}{٢٥٦\sqrt{٢}}ab^٣c$ ؛ $I_{xy}=\frac{\pi^٢}{١٢٨\sqrt{٢}}abc^٣$ ٤١٤٧,٢-

$I_{yz}=\frac{١}{٥n^٢}\times\frac{\Gamma^٢\left(\frac{١}{n}\right)\Gamma\left(\frac{٣}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{٥}{n}\right)}a^٣bc$ ؛ $I_{zx}=\frac{١}{٥n^٢}\times\frac{\Gamma^٢\left(\frac{١}{n}\right)\Gamma\left(\frac{٣}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{٥}{n}\right)}ab^٣c$ ؛

$I_{xy}=\frac{١}{٥n^٢}\times\frac{\Gamma^٢\left(\frac{١}{n}\right)\Gamma\left(\frac{٣}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{٥}{n}\right)}abc^٣$ ٤١٤٨- $I_z=\frac{١٤}{١٥}$ ٤١٤٩-

$I_z=\frac{٤\pi}{١٥}(٤\sqrt{٢}-٥)$ ٤١٤٩,١- $\frac{\pi}{٥}a^٥$ ٤١٥٠- $\frac{٤}{٩}MR^٢$

٤١٥٣- $I=\frac{M}{٣}\left(a^٢+\frac{٢}{٣}h^٢\right)$ که در آن $M=٢\pi\rho_٠a^٢h$ جرم استوانه است.

٤١٥٤- $I_٠=\frac{\pi^٢a^٥\rho_٠}{٨}$ ٤١٥٥- $u=٢\pi\rho_٠\left(R^٢-\frac{r^٢}{٣}\right)$ اگر $r\leqslant R$ ؛

$u=\frac{٤\pi R^٣\rho_٠}{٣r}$ اگر $r>R$ که در آن $r=\sqrt{x^٢+y^٢+z^٢}$ ٤١٥٦-

٤١٥٦- $u=٤\pi\int_{R_١}^{R_٢}f(\rho)\min\left(\frac{\rho^٢}{r},\ \rho\right)d\rho$ که در آن $r=\sqrt{x^٢+y^٢+z^٢}$

٤١٥٧- $u=\pi\rho_٠\Big\{(h-z)\sqrt{a^٢+(h-z)^٢}+z\sqrt{a^٢+z^٢}-[(h-z)\times$

$\times|h-z|+z|z|]+a^٢\ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^٢+(h-z)^٢}}{\sqrt{a^٢+z^٢}-z}\right|\Big\}$ ٤١٥٨- $X=٠$ ؛

$Y=٠$ ؛ $Z=-\frac{kMm}{a|a|}$ اگر $|a|\geqslant R$ ؛ $Z=-\frac{kMm}{R^٣}a$ اگر $|a|<R$

٤١٥٩- $X=٠$ ؛ $Y=٠$ ؛ $Z=-٢\pi\rho_٠k\{\sqrt{a^٢+z^٢}-\sqrt{a^٢+(h-z)^٢}-$

$-(|z|-|h-z|)\}$ ٤١٦٠- $X=٠$ ؛ $Y=٠$ ؛ $Z=-\pi k\rho_٠R\sin^٢\alpha$

٤١٦١- بازای $p>١$ همگرا است ٤١٦٢- بازای $p>١$ و $q>١$ همگرا

است ۴۱۶۳- بازای $p>\frac{1}{2}$ همگرا است ۴۱۶۴- بازای $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$

همگرا است ۴۱۶۵- واگرا است ۴۱۶۹- $\frac{4}{(p-q)(q-1)}\ (p>q>1)$

۴۱۷۰- $\frac{1}{p-1}\ (p>1)$ ۴۱۷۱- 2π ۴۱۷۲- $\frac{\pi}{p-1}\ (p>1)$

۴۱۷۳- $\pi\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}$ ۴۱۷۴- $\frac{1}{2}$ ۴۱۷۵- π ۴۱۷۶- $\frac{\pi}{2}$

۴۱۷۷- $\frac{\pi}{2}$ ۴۱۷۸- $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}$ که در آن $\delta=\begin{vmatrix}a&b\\b&c\end{vmatrix}$

و $\Delta=\begin{vmatrix}a&b&d\\b&c&e\\d&e&f\end{vmatrix}$ ۴۱۷۹- $\frac{\pi}{e}ab$ ۴۱۸۰- $-\frac{\pi\varepsilon a^2b^2}{2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$

۴۱۸۱- همگرا است ۴۱۸۲- بازای $p<1$ همگرا است ۴۱۸۳- بازای

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$ همگرا است ۴۱۸۴- بازای $p<1$ همگرا است ۴۱۸۵- بازای

$p<1$ همگرا است ۴۱۸۷- $\frac{\pi}{2}$ ۵۱۸۸- πa ۴۱۸۹- $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$

۴۱۹۰- 2 ۴۱۹۱- بازای $p>\frac{3}{2}$ همگرا است ۴۱۹۲- بازای

$p<\frac{3}{2}$ همگرا است ۴۱۹۳- بازای $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$ همگرا است

۴۱۹۴- بازای $p<1$ همگرا است ۴۱۹۵- بازای $p<1$ همگرا است

۴۱۹۶- $(1-p)^{-1}(1-q)^{-1}(1-r)^{-1}\ (p<1,\ q<1,\ r<1)$ ۴۱۹۷-

$\frac{4\pi}{3}$ ۴۱۹۸- $2\pi B\left(\frac{3}{2},\ 1-p\right)\ (p<1)$ ۴۱۹۹- $\pi^{\frac{3}{2}}$

۴۲۰۰- $\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}$ که در آن $\Delta=|a_{ij}|$ ۴۲۰۴- الف) $\frac{n}{3}$ ؛

ب) $\frac{n(3n+1)}{12}$ ۴۲۰۵- $\frac{a^n}{n!}$ ۴۲۰۶- $\frac{1}{2^n n!}$ ۴۲۰۷- $\frac{2}{(n-1)!\,(2n+1)}$

۴۲۰۸- $\frac{2^n h_1h_2\dots h_n}{|\Delta|}$ ۴۲۰۹- $\frac{a_1a_2\dots a_n}{n!}$

٤٢١٠ – $\frac{\pi^{\frac{n-١}{٢}}}{n\Gamma\left(\frac{n+١}{٢}\right)}a_١a_٢\ \dots\ a_n$ ٤٢١١ – $\frac{\pi^{\frac{n}{٢}}a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{٢}+١\right)}$

٤٢١٢ – $\frac{\pi^{\frac{n-١}{٢}}a^{n-١}h^٣}{١٢\Gamma\left(\frac{n+١}{٢}\right)}$ ٤٢١٣ – $\frac{\pi^{\frac{n+١}{٢}}}{\Gamma\left(\frac{n+١}{٢}\right)}$

٤٢١٨ – $R^n\frac{\pi^{\frac{n}{٢}}}{\Gamma\left(\frac{n}{٢}\right)}\int_٠^١ f\left(\sqrt{u}\right)u^{\frac{n}{٢}-١}\,du$ ٤٢١٩ – $u=\frac{١٦}{١٠}\pi^٢\rho_٠^٢R^٥$

٤٢٢٠ – $\sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}e^{-\frac{\Delta}{\delta}}}$ که در آن $\delta=|a_{ij}|$ و $\Delta=\left|\begin{array}{c:c}a_{ij}&b_i\\ \hdashline b_j&c\end{array}\right|$

دترمینان کناره‌دار است ٤٢٢١ – $١+\sqrt{٢}$ ٤٢٢٢ – $\frac{٢٥٦}{١٥}a^٣$

٤٢٢٣ $٢\pi^٢a^٣(١+٢\pi^٢)$ ٤٢٢٤ – $\frac{a^٣}{٦}\left(\text{ch}^{\frac{٣}{٢}}٢t_٠-١\right)$ ٤٢٢٥ – $٤a^{\frac{٧}{٣}}$

٤٢٢٧ – $٢(e^a-١)+\frac{\pi}{٤}ae^a$ ٤٢٢٧ – $٢a^٢\left(٢-\sqrt{٢}\right)$

٤٢٢٨ – $\frac{٢ka^٢\sqrt{١+k^٢}}{١+٤k^٢}$ ٤٢٢٩ – $٢a^٢$ ٤٢٣٠ – $\frac{\pi}{a}$ ٤٢٣١ – ٥

٤٢٣٢ – $\sqrt{٣}$ ٤٢٣٣ – $|x_٠|+|z_٠|$ که در آن $|x_٠|<a$

٤٢٣٤ – $\frac{٣}{٤\sqrt{٢}}\left(\sqrt[٣]{\frac{٣z_٠^٤}{a}}+٢\sqrt[٣]{\frac{az_٠^٢}{٣}}\right)$ ٤٢٣٥ – $\left(١+\frac{٢z_٠}{٣c}\right)\sqrt{cz_٠}$

٤٢٣٦ – $a\sqrt{٢}\,\text{arc tg}\frac{|z|}{\sqrt{a^٢-z^٢}}$ ٤٢٣٧ – $\frac{٢\pi}{٣}(٣a^٢+٤\pi^٢b^٢)\sqrt{a^٢+b^٢}$

٤٢٣٨ – $\frac{٢}{٣}\pi a^٣$ ٤٢٣٩ – $\frac{١}{٣}\left[(٢+t_٠^٢)^{\frac{٣}{٢}}+٢^{\frac{٣}{٢}}\right]$

٤٢٤٠ – $\frac{a^٢}{٢٥٦\sqrt{٢}}\left[١٠٠\sqrt{٣٨}-٧٢-١٧\ln\frac{٢٥+٤\sqrt{٣٨}}{١٧}\right]$ ٤٢٤١ –

$٢b\left(b+a\frac{\text{arc sin}\,\varepsilon}{\varepsilon}\right)$ که در آن $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^٢-b^٢}}{a}$ خروج از مرکز بیضی است

٤٢٤١,١ – $\frac{٢}{٣}p^٢\left(٢\sqrt{٢-١}\right)$ ٤٢٤٢ – $\frac{a}{٨}\left[\left(٣\sqrt{٣}-١\right)+\frac{٣}{٢}\ln\frac{٣+٢\sqrt{٣}}{٣}\right]$

٤٢٤٣ – $x_٠ = b - a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}}$ ؛ $y_٠ = \frac{h}{٢} + \frac{ab}{٢\sqrt{h^٢ - a^٢}}$ ٤٢٤٤ –

$x_٠ = y_٠ = \frac{٤}{٣}a$ ٤٢٤٤,١ – $S_x = S_y = \frac{٣}{٥}a^٢$ ٤٢٤٤,٢ – $\pi a^٣$

٤٢٤٤,٣ – الف) $\frac{٣٢}{٣}a^٣$ ؛ ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}a^٣$ ٤٢٤٤,٤ – $r_٠ = \frac{a}{\sqrt{٢}}$

٤٢٤٥ – $x_٠ = y_٠ = z_٠ = \frac{٤a}{٣\pi}$ ٤٢٤٦ – $x_٠ = \frac{٢}{٥}$ ؛ $y_٠ = -\frac{١}{٥}$ ؛

$z_٠ = \frac{١}{٢}$ ٤٢٤٧ – $I_x = I_y = \left(\frac{a^٢}{٢} + \frac{h^٢}{٣}\right)\sqrt{٤\pi^٢a^٢ + h^٢}$ ؛

$I_z = a^٢\sqrt{٤\pi^٢a^٢ + h^٢}$ ٤٢٤٨ – الف) ٠ ؛ ب) $\frac{٢}{٣}$ ؛ پ) ٢

٤٢٤٩ – الف) ٢ ؛ ب) ٢ ؛ پ) ٢ ٤٢٥٠ – $-\frac{١٤}{١٥}$ ٤٢٥١ – $\frac{٤}{٣}$

٤٢٥٢ – ٠ ؛ ٤٢٥٣ – $-٢\pi a^٢$ ٤٢٥٤ – -٢π ٤٢٥٥ – ٠ ٤٢٥٦ – ٠

٤٢٥٧ – $\frac{\pi}{٤} - ١$ ٤٢٥٨ – ٨ ٤٢٥٩ – ١٢ ٤٢٦٠ – ٤ ٤٢٦١ – -٢

٤٢٦٢ – $\int_{٠}^{a+b} f(u)\,du$ ٤٢٦٣ – $-\frac{٣}{٢}$ ٤٢٦٤ – ٩

٤٢٦٥ – $\int_{x_١}^{x_٢} \varphi(x)\,dx + \int_{y_١}^{y_٢} \psi(y)\,dy$ ٤٢٦٦ – ٦٢ ٣٢٦٧ – ١ ٤٢٦٨ –

$\pi + ١$ ٤٢٦٩ – $e^a \cos b - ١$ ٤٢٧١ – $z = \frac{x^٣}{٣} + x^٢y - xy^٢ - \frac{y^٣}{٣} + C$

٤٢٧٢ – $\frac{١}{٢\sqrt{٢}} \operatorname{arc\,tg} \frac{٣x - y}{٢y\sqrt{٢}} + C$ ٤٢٧٣ –

$z = -\frac{٢y^٢}{(x+y)^٢} + \ln|x+y| + C$ ٤٢٧٤ – $z = e^{x+y}(x - y + ١) + ye^x + C$

٤٢٧٥ – $z = \frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n \partial y^m} + C$ ٤٢٧٦ – $z = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\right) + C$

٤٢٧٨ – $|I_R| \leqslant \frac{٨\pi}{R^٢}$ ٤٢٧٩ – $\frac{١}{٣٠}$ ٤٢٨٠ – $-\pi a^٢$

٤٢٨١ – $\pi\sqrt{٢}\,a^٢\sin\left(\frac{\pi}{٤}-\alpha\right)$ ٤٢٨٢ – $-\frac{\pi a^٣}{٤}$ ٤٢٨٣ – -٤

٤٢٨٤ – $-٥٣\frac{٧}{١٢}$ ٤٢٨٥ – ٠ ٤٢٨٦ – $b-a$

٤٢٨٧ – $\int\limits_{x_١}^{x_٢}\varphi(x)\,dx+\int\limits_{y_١}^{y_٢}\psi(y)\,dy+\int\limits_{z_١}^{z_٢}\chi(z)\,dz$

٤٢٨٨ – $\int\limits_{x_١+y_١+z_١}^{x_٢-y_٢+z_٢}f(u)\,da$ ٤٢٨٩ – $\int\limits_{\sqrt{ ٢_١^٢+y_١^٢+z_١^٢}}^{\sqrt{x_٢^٢+y_٢^٢+z_٢^٢}}uf(u)\,du$ ٤٢٩٠ – $u=$

$=\frac{١}{٣}(x^٣+y^٣+z^٣)-٢xyz+C$ ٤٢٩١ – $u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C$ ٤٢٩٢ –

$u=\ln\sqrt{(x+y)^٢+z^٢}+\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{x+y}+C$ ٤٢٩٣ – $A=-mg(z_٢-z_١)$

٤٢٩٤ – $A=-\frac{k}{٢}(a^٢-b^٢)$ ٤٢٩٥ – $A=k\left(\frac{١}{r_١}-\frac{١}{r_٢}\right)$ که در آن

$r_i=\sqrt{x_i^٢+y_i^٢+z_i^٢}\ \ (i=١,\ ٢)$ ٤٢٩٦ – $I=\iint\limits_S y^٢dx\,dy$

٤٦٩٧ – $-٤٦\frac{٢}{٣}$ ٤٢٩٨ – $\frac{\pi a^٤}{٢}$ ٤٢٩٩ – $-٢\pi ab$ ٤٣٠٠ – $-\frac{١}{٥}(e^{\pi}-١)$

٤٣٠١ – ٠ ٤٣٠٢ – $I_١-I_٢=٢$ ٤٣٠٣ – $\frac{\pi ma^٢}{٨}$

٤٣٠٤ – $\frac{m}{٢}(x_٢-x_١)(y_٢+y_١)-m(y_٢-y_١)-e^{x_١}\varphi(y_١)+e^{x_٢}\varphi(y_٢)+mS$

٤٣٠٥ – $P=\frac{\partial u}{\partial x}$ ، $Q=kx+\frac{\partial u}{\partial y}$ که در آن u تابع دو بار

دیفرانسیل‌پذیر و مقدار ثابتی است   ٤٣٠٦ – $\frac{\partial}{\partial y}[yF(x,y)]=\frac{\partial}{\partial x}[xF(x,\ y)]$

٤٣٠٧ – ١) $I=٠$ ؛ ٢) $I=٢\pi$ ٤٣٠٨ – πab ٤٣٠٩ – $\frac{٣}{٨}\pi ab$

٤٣١٠ – $\frac{a^٢}{٦}$ ٤٣١١ – $\frac{٣}{٢}a^٢$ ٤٣١٢ – $a^٢$ ٤٣١٣ – $\frac{١}{٣}+\frac{٤\pi}{٩\sqrt{٣}}$

٤٣١٤ − $\frac{a^{٢}}{٢}B(٢m+١,\ ٢n+١)$ ٤٣١٥ − $\frac{ab\,\Gamma^{٢}\left(\frac{١}{n}\right)}{٢n\Gamma\left(\frac{٢}{n}\right)}$

٤٣١٦ − $\frac{ab}{n}\left[١+\frac{\left(١-\frac{١}{n}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right]$ ٤٣١٧ − $\frac{abc^{٢}}{٢\,(٢n+١)}$

٤٣١٨ − $\pi(y+١)(n+٢)r^{٢}$ ؛ $٦\pi r^{٢}$ ٤٣١٩ − $\pi(n-١)(n-٢)r^{٢}$ ؛ $٦\pi r^{٢}$

٤٣٢٠ − $٤a^{٢}$ ٤٣٢١ − $\operatorname{sgn}(ad-bc)$ ٤٣٢٢ − $I=\sum\operatorname{sgn}\frac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial(x,\ y)}$

که در آن ، مجموع به همهٔ نقاط تقاطع منحنی‌های $\varphi(x,y)=٠$ و
$\psi(x,y)=٠$ در درون دورگرد C گسترده شده است   ٤٣٢٤ − $I=٢S$
که در آن S مساحت محدود به دورگرد C است   ٤٣٢٥ −
$X'_x(x_٠,y_٠)+Y'_y(x_٠,y_٠)$ ٤٣٢٦ − تصاویر نیرو بر محورهای مختصات
برابرند با: $X=٠$ ؛ $Y=\frac{٢kmM}{\pi a^{٢}}$ که در آن k ثابت ثقل است

٤٣٢٧ − $u=٢\pi\kappa R\ln\frac{١}{R}$ اگر $\rho=\sqrt{x^{٢}+y^{٢}}\leqslant R$ ؛ $u=٢\pi\kappa R\ln\frac{١}{\rho}$
اگر $\rho>R$ ٤٣٢٨ − $I_١=\frac{\pi}{m}\rho^{m}\cos m\varphi$ ، $I_٢=\frac{\pi}{m}\rho^{m}\sin m\varphi$ اگر
$٠\leqslant\rho\leqslant١$ ؛ $I_١=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi$ ، $I^{٢}=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi$ اگر $\rho>١$

٤٣٢٩ − $u=٢\pi$ اگر نقطهٔ $A(x,y)$ در درون دورگرد C واقع باشد ؛ $u=\pi$
اگر نقطهٔ $A(x,y)$ بر روی دورگرد C واقع باشد ؛ $u=٠$ اگر نقطهٔ
$A(x,y)$ در بیرون دورگرد C واقع باشد   ٤٣٣٠ − $K_١=\pi\rho^{m}\cos m\varphi$ ،
$K_٢=\pi\rho^{m}\sin m\varphi$ اگر $٠\leqslant\rho<١$ ؛ $K_١=٠$ ، $K_٢=٠$ اگر $\rho=١$ ؛
$K_١=-\frac{\pi}{\rho^{m}}\cos m\varphi$ ، $K_٢=-\frac{\pi}{\rho^{m}}\sin m\varphi$ اگر $\rho>١$ ٤٣٣٩ −

٤٣٣٩ − $Q=\iint\limits_{S}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=٠$

٤٣٤٠ − $H_x=ki\oint\limits_{C}\frac{١}{r^{٣}}[(\eta-y)\,dz-(\zeta-z)\,dy]$ ؛

$H_y=ki\oint\limits_{C}\frac{١}{r^{٣}}[\zeta-z)\,dx-(\xi-x)\,dz]$ ؛

$$H_z=ki\oint\limits_C\frac{۱}{r^۳}[(\xi-x)\,dy-(\eta-y)\,dx]$$

۴۳۴۱– $I_۱-I_۲=(۴\pi-۲\sqrt{۳})\,a^۴$ ۴۳۴۲– $\frac{۷}{۲}\pi\sqrt{۲}\,a^۳$ ۴۳۴۳– $\pi a^۳$

۴۳۴۴– $\frac{\pi}{۲}(۱+\sqrt{۲})$ ۴۳۴۵– $\frac{۳-\sqrt{۳}}{۲}+(\sqrt{۳}-۱)\ln ۲$

۴۳۴۶– $\frac{۱۲۵\sqrt{۵}-۱}{۴۲۰}$ ۴۳۴۷– $\frac{۴\pi}{۳}abc\left(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}\right)$

۴۳۴۸– $\pi^۲[a\sqrt{۱+a^۲}+\ln(a+\sqrt{۱+a^۲})]$ ۴۳۴۹– $\frac{\pi a^۴}{۲}\sin\alpha\cos^۲\alpha$

$z_۰=\left(۰\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{۲}\right)$ ۴۳۵۰– $\frac{۶۴}{۱۵}\sqrt{۲}\,a^۴$ ۴۳۵۲– $\frac{۲\pi(۱+۶\sqrt{۳})}{۱۵}$

۴۳۵۲,۱– $\pi a^۲$ ۴۳۵۲,۲– $\frac{a^۳}{۲\sqrt{۳}}$ ۴۳۵۳– $\frac{۴}{۳}\pi\rho_۰a^۴$

۴۳۵۴– $\frac{\pi\rho_۰a(۳a^۲+۲b^۲)\sqrt{a^۲+b^۲}}{۱۲}$ ۴۳۵۵– $x_۰=\frac{a}{۲}$ ؛ $y_۰=۰$ ؛

$z_۰=\frac{۱۶}{۹\pi}a$ ۴۳۵۶– $x_۰=y_۰=\frac{a}{۲\sqrt{۲}}$ ؛ $z_۰=\frac{a}{\pi}(\sqrt{۲}+۱)$

۴۳۵۶,۱– الف) $۴۰a^۴$ ؛ ب) $\pi R\left[R(R+H)^۲+\frac{۲}{۳}H^۳\right]$

۴۳۵۶,۲– $\frac{\sqrt{۳}}{۱۲}$ ۴۳۵۷– تصاویر نیروی جاذبه بر محورهای مختصات:

$X=۰$ ؛ $Y=۰$ ؛ $Z=\pi kmp_۰\ln\frac{a}{b}$ ۴۳۵۸– $u=۴\pi\rho_۰\min\left(a,\frac{a^۲}{r_۰}\right)$

که در آن $r_۰=\sqrt{x_۰^۲+y_۰^۲+z_۰^۲}$ ۴۳۵۹– $F(t)=\frac{\pi}{۱۸}(۳-t^۲)^۲$ اگر

$|t|\leqslant\sqrt{۳}$ ؛ $F(t)=۰$ اگر $|t|>\sqrt{۳}$ ۴۳۶۰– $F(t)=\frac{\pi(۸-۵\sqrt{۲})}{۲}t^۴$

۴۳۶۱– $F=۰$ اگر $t\leqslant r-a$ ؛ $F=\frac{\pi t}{r}[a^۲-(r-t)^۲]$ اگر

$r-a<t<r+a$ ؛ $F=۰$ اگر $t>r+a$ $(t\geqslant ۰)$ ۴۳۶۲– $۴\pi a^۳$

۴۳۶۳– $abc\left[\frac{f(a)-f(۰)}{a}+\frac{g(b)-g(۰)}{b}+\frac{h(c)-h(۰)}{c}\right]$ ۴۳۶۴– ۰

۴۳۶۵ - $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$ ۴۳۶۶ - $\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$

۴۳۶۷ - $-\pi a^2\sqrt{3}$ ۴۳۶۸ - $\frac{h^3}{3}$ ۴۳۶۹ - ۲ برابر مساحت S

۴۳۷۰ - ۰   ۴۳۷۱ - $-2\pi a(a+h)$ ۴۳۷۲ - $2\pi R^2$ ۴۳۷۳ - $-\frac{9}{2}a^3$

۴۳۷۴ - ۰   ۴۳۷۶ - $3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ ۴۳۷۷ - ۰

۴۳۷۸ - $2\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ۴۳۷۹ - $\iiint\limits_V \Delta u\,dx\,dy\,dz$ که در آن

$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \partial}{\partial z^2}$ ۴۳۸۰ - ۰   ۴۳۸۴ - $\frac{4\pi}{3}\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)|c|$

۴۳۸۵ - $\frac{2}{9}a^3$ ۴۳۸۵,۱ - $3\pi^2a^2b$ ۴۳۸۷ - $3a^4$ ۴۳۸۸ - $\frac{12}{5}\pi a^5$

۴۳۸۹ - ۱   ۴۳۹۰ - $-\frac{\pi h^4}{2}$ ۴۳۹۲ - الف) $I=0$ ؛ ب) $I=4\pi$

۴۴۰۱ - الف) $\operatorname{grad} u(0)=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}-6\mathbf{k}$، $|\operatorname{grad} u(0)|=7$، $\cos\alpha=\frac{3}{7}$،
$\cos\beta=-\frac{2}{7}$، $\cos\gamma=-\frac{6}{7}$ ؛ ب) $\operatorname{grad} u(A)=6\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ ،
$|\operatorname{grad} u(A)|=3\sqrt{5}$، $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ ، $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ ، $\cos\gamma=0$ ؛
$\operatorname{grad} u(B)=8\mathbf{i}$ ، $|\operatorname{grad} u(B)|=7$ ، $\cos\alpha=1$ ، $\cos\beta=0$ ، $\cos\gamma=0$ ؛
$\operatorname{grad} u=0$ در نقطهٔ $M(-2,1,1)$ ۴۴۰۱,۱ -
$\operatorname{grad} u(M)=12\mathbf{i}-9\mathbf{j}-20\mathbf{k}$ ، $|\operatorname{grad} u(M)|=25$ ، $\cos\alpha=\frac{12}{25}$،
$\cos\beta=-\frac{9}{25}$ ، $\cos\gamma=-\frac{4}{5}$ ؛ $\frac{du}{dl}=\frac{3}{\sqrt{2}}$ ۴۴۰۲ - الف) $xy=z^2$ ؛
ب) $x=y=0$ و $x=y=z$ ؛ پ) $x=y=z$ ۴۴۰۳ - $r=1$

۴۴۰۴ - $(u\geqslant 16)$ $\frac{4(x^2+y^2)}{u^2-256}+\frac{4z^2}{u^2}=1$ ؛ $\frac{x^2+y^2}{960}+\frac{z^2}{1024}=1$

$\max u=20$ ۴۴۰۵ - $\cos\varphi=-\frac{8}{9}$ ۴۴۰۶ - سطوح تراز عبارتند از سطوح

مخروطی ؛ سطوح متساوی المدول گردایان عبارتند از سطح چنبره‌ها ؛

$\inf u = ٠$ ، $\sup u = ١$ ؛ $\inf |\operatorname{grad} u| = ٠$ ،

$\sup |\operatorname{grad} u| = \frac{١}{٢}$ ٤٤٠٧ - $\frac{|\Delta c|}{|\operatorname{grad} u (x_٠, y_٠, z_٠|}$ ٤٤٠٩ - الف) $\frac{\mathbf{r}}{r}$ ؛

ب) $٢\mathbf{r}$ ؛ پ) $-\frac{\mathbf{r}}{r^٣}$ ٤٤١٠ - $f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$ ٤٤١١ - $\mathbf{c}$ ٤٤١٢ -- $٢\mathbf{r}(\mathbf{c}\times\mathbf{c})$

$-٢\mathbf{c}(\mathbf{c}\times\mathbf{r})$ ٤٤١٥,١ - الف) $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{١}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{e}_z$

که در آن $\mathbf{e}_r = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi$ ، $\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi$ ، $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$
بردارهای هادی مماس بر خطوط مختصات مربوطه میباشند ؛

ب) $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{١}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{١}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi$ که در آن

$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}\cos\varphi\sin\theta + \mathbf{j}\sin\varphi\sin\theta + \mathbf{k}\cos\theta$ ،

$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{i}\cos\varphi\cos\theta + \mathbf{j}\sin\varphi\cos\theta - \mathbf{k}\sin\theta$ ، $\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi$
بردارهای هادی مماس بر محورهای مختصات مربوطه می باشند ٤٤١٦ -

$\frac{\partial u}{\partial u} = \frac{٢u}{r}$ که در آن $r = \sqrt{x^٢ + y^٢ + z^٢}$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial r} = |\operatorname{grad} u|$ اگر

$a = b = c$ ٤٤١٧ - $\frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{\cos(l, \mathbf{r})}{r^٢}$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial l} = ٠$ اگر $l \perp \mathbf{r}$

٤٤١٨ - $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial l} = ٠$ اگر $\operatorname{grad} u \perp \operatorname{grad} v$

٤٤١٩ - $$a = \frac{i\left(\sqrt{x^٢ + y^٢} + yz\right) - \mathbf{j}\left(\sqrt{x^٢ + y^٢} + xz\right) + k(x - y)z}{(x^٢ + y^٢ + z^٢)\sqrt{x^٢ + y^٢}}$$

٤٤٢٠ - $y = c_١x,\ z = c_٢x^٢$ ٤٤٢٢,١ - $\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = \frac{١٨}{١٢٥}$ ؛

$\Pi = \frac{٢٤}{١٢٥}\pi\varepsilon^٣$ ٤٤٢٣ - ٠ ٤٤٢٥ - $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$ که در آن

$\Delta u = \frac{\partial^٢ u}{\partial x^٢} + \frac{\partial^٢ u}{\partial y^٢} + \frac{\partial^٢ u}{\partial z^٢}$ ٤٤٢٦ - $f''(r) + \frac{٢}{r}f'(r)$ ؛ $f(r) = c + \frac{c_١}{r}$

که در آن c و $c_١$ ثابتند ٤٤٢٧ - الف) ٣ ؛ ب) $\frac{٢}{r}$

٤٤٢٨ - $\frac{f'(r)}{r}(\mathbf{c}\times\mathbf{r})$ ٤٤٢٩ - $f(r) = \frac{c}{r^٣}$ ؛ $٣f(r) + rf'(r)$ که در آن

c ثابت است ٤٤٣٠ – الف) $u\Delta u + (\operatorname{grad} u)^{٢}$ ؛ ب) $u\Delta v + \operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v$
که در آن Δu اپراتور لاپلاس است ٤٤٣١ – $\operatorname{div} v = ٠$ ؛ $\operatorname{div} w = -٢\omega^{٢}$
٤٤٣٢ – ٠ در بیرون از مراکز جذب ٤٤٣٣ – $\operatorname{div}\, \mathbf{a} = \frac{١}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}((ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right]$
که در آن a_r و a_φ تصاویر بردار **a** بر خطوط مختصات $\varphi = \text{const}$ و $r = \text{const}$ میباشند

٤٤٣٤ – $$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{١}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_u) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial w}(LMa_w)\right]$$

که در آن a_u ، a_v ، a_w تصاویر بردار **a** بر محورهای مختصات مربوطه میباشند و $L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^{٢} + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^{٢} + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^{٢}}$ ،

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^{٢} + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^{٢} + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^{٢}}$$ ،

$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^{٢} + \left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^{٢} + \left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^{٢}}$ اگر r, φ, z مختصات استوانه‌ای باشد در آنصورت $\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{١}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right]$ ؛ اگر r, θ, φ مختصات کروی باشد آنگاه

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{١}{r^{٢}\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^{٢}a_r\sin\theta) + r\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta \sin\theta) + r\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right]$$

٤٤٣٦ – الف) ٠ ؛ ب) ٠ ٤٤٣٦,١ – $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = -\frac{٥}{٤}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{٥}{٢}\mathbf{k}$ ،
$|\operatorname{rot} \mathbf{a}(M)| = \frac{١}{٤}\sqrt{١٤١}$ ، $\cos\alpha = \frac{-٥}{\sqrt{١٤١}}$ ، $\cos\beta = \frac{-٤}{\sqrt{١٣١}}$ ،
$\cos\gamma = \frac{١٠}{\sqrt{١٤١}}$ ٤٤٣٧ – الف) $\frac{f'(r)}{r}[\mathbf{r} \times \mathbf{c}]$ ؛
ب) $٢f(r)\mathbf{c} + \frac{f'(r)}{r}[c(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) - r(\mathbf{c} \times \mathbf{r})]$ ٤٤٣٩ – الف) ٠ ؛ ب) ٠
٤٤٤٠ – $\operatorname{rot} v = ٢\omega$ ٤٤٤٠,١ – $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{١}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right]\mathbf{k}$
که در آن a_φ و a_r بترتیب تصاویر بردار **a** بر خطوط مختصات $r = \text{const}$
و $\varphi = \text{const}$ میباشند ٤٤٤٠,٢ – الف)

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{١}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{١}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right]\mathbf{e}_z$$

که در آن $a_r = a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi$ ، $a_\varphi = -a_x \sin\varphi + a_y \cos\varphi$ ؛ $a_z = a_z$ ؛

ب) $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{١}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (a_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{١}{r} \left[\frac{١}{\sin\theta} \times \frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{١}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial\theta} \right] \mathbf{e}_\varphi$ که در آن

$a_r = a_x \cos\varphi \sin\theta + a_y \sin\varphi \sin\theta + a_z \cos\theta$ ،

$a_\theta = a_x \cos\varphi \cos\theta + a_y \sin\varphi \cos\theta - a_z \sin\theta$ ،

$a_\varphi = -a_x \sin\varphi + a_y \cos\varphi$ ٤٤٤١ – الف) ٠ ؛ ب) $\pi h^{٣}$ ٤٤٤٢ – الف) ٠ ؛

ب) ٠ ٤٤٤٣ – π ٤٤٤٤ – $\frac{٣\pi}{٨}$ ٤٤٤٥ – ٠ ٤٤٤٥,١ – $\frac{\pi}{٥}$ ٤٤٤٧ – $٤\pi m$ ؛

٤٤٤٨ – $\sum_{i=٢}^{n} e_i$ ٤٤٥٠ – $c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} u)$ که در آن c گرمای ویژه و ρ جرم ویژهٔ جسم میباشد ٤٤٥٢ – $٢\pi^{٢} b^{٢}$ ٤٤٥٢,١ – $٨ \frac{٢٠}{٢١} \times \ln ٢$

٤٤٥٢,٢ – $\frac{٣}{٤} (٣ + e^{٤} - ١٢ e^{-٢})$ ٤٤٥٣ – $\int_{rA}^{rB} f(r)\, r\, dr$ ٤٤٥٤ – الف) ٢π ؛

ب) ٢π ٤٤٥٥ – الف) $\Gamma = ٠$ ؛ ب) $\Gamma = ٢\pi n$ که در آن تعداد دورهای دورگرد C حول محور Oz است . ٤٤٥٥,١ – $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = -\mathbf{j} - ٢\mathbf{k}$ ،

$\Gamma = -\pi (\cos\beta + ٢ \cos\gamma) \varepsilon^{٢}$ ٤٤٥٦ – $Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\, dy$

؛ $\Gamma = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\, dy$ ؛ $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

٤٤٥٧ – $u = xyz(x + y + z) + C$ ٤٤٥٧,١ – $\frac{١}{٣}$ ٤٤٥٨ – $u = \frac{m}{r}$

٤٤٥٩ – $u(x, y, z) = \sum_{i=١}^{n} \frac{m_i}{r_i}$ که در آن r_i فاصلهٔ نقطهٔ متغیر $M(x, y, z)$ از نقطهٔ $M_i (i = ١, ٢, \dots, n)$

٤٤٦٠ – $u(x, y, z) = \int_{r_٠}^{r} t f(t)\, dt$

که در آن $r = \sqrt{x^{٢} + y^{٢} + z^{٢}}$

ضمائم

I ــ ثابتهای مهم

$$M = \lg e = ٠,٤٣٤٢٩٤٤٨١٩$$
$$\frac{١}{M} = \ln ١٠ = ٣,٣٠٢٥٨٥٠٩٣٠$$
$$١ \text{ رادیان } = ٥٧^\circ ١٧' ٤٤,٨٠٦''$$
$$\text{arc } ١^\circ = ٠,٠١٧٤٥٣٢٩٢٥$$

$$e = ٢,٧١٨٢٨١٨٢٨٥$$
$$\frac{١}{e} = ٠,٣٦٧٨٧٩٤٤٢١$$
$$e^{٢} = ٧,٣٨٩٠٥٦٠٩٨٩$$
$$\sqrt{e} = ١,٦٤٨٧٢١٢٧٠٧$$

$$\pi = ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٦$$
$$\frac{١}{\pi} = ٠,٣١٨٣٠٩٨٨٦٢$$
$$\pi^{٢} = ٩,٨٦٩٦٠٤٤٠١١$$
$$\sqrt{\pi} = ١,٧٧٢٤٥٣٨٥٠٩$$

II ــ جدول‌ها

١ ــ مقادیر عکس . جذر و کعب . تابع نمایی

n	$\frac{١}{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{١٠n}$	$\sqrt[٣]{n}$	$\sqrt[٣]{١٠n}$	$\sqrt[٣]{١٠٠n}$	e^{n}	$e^{\frac{n}{١٠}}$	$e^{-\frac{n}{١٠}}$	e^{-n}
١	١,٠٠٠	١,٠٠	٣,١٦	١,٠٠	٢,١٥	٤,٦٤	٢,٧١٨	١,١٠٥	٠,٩٠٥	٠,٣٦٨
٢	٠,٥٠٠	١,٤١	٤,٤٧	١,٢٦	٢,٧١	٥,٨٥	٧,٣٨٩	١,٢٢١	٠,٨١٩	٠,١٣٥
٣	٠,٣٣٣	١,٧٣	٥,٤٨	١,٤٤	٣,١١	٦,٦٩	٢٠,٠٩	١,٣٥٠	٠,٧٤١	٠,٠٤٩٨
٤	٠,٢٥٠	٢,٠٠	٦,٣٢	١,٥٩	٣,٤٢	٧,٣٧	٥٤,٦٠	١,٤٩٢	٠,٦٧٠	٠,٠١٨٣
٥	٠,٢٠٠	٢,٢٤	٧,٠٧	١,٧١	٣,٦٨	٧,٩٤	١٤٨,٤١	١,٦٤٩	٠,٦٠٧	٠,٠٠٦٧٤

٦	٠,١٦٧	٢,٤٥	٧,٧٥	١,٨٢	٣,٩١	٨,٤٣	٤٠٣,٤	١,٨٢٢	٠,٥٤٩	$٢,٤٨\times١٠^{-٣}$
٧	٠,١٤٣	٢,٦٥	٨,٣٧	١,٩١	٤,١٢	٨,٨٨	١٠٩٦,٦	٢,٠١٤	٠,٤٩٧	$٩,١٢\times١٠^{-٤}$
٨	٠,١٢٥	٢,٨٣	٨,٩٤	٢,٠٠	٤,٣١	٩,٢٨	٢٩٨١	٢,٢٢٦	٠,٤٤٩	$٣,٣٥\times١٠^{-٤}$
٩	٠,١١١	٣,٠٠	٩,٤٩	٢,٠٨	٤,٤٨	٩,٦٥	٨١٠٣	٢,٤٦٠	٠,٤٠٧	$١,٢٣\times١٠^{-٤}$
١٠	٠,١٠٠	٣,١٦	١٠,٠٠	٢,١٥	٤,٦٤	١٠,٠٠	٢٢٠٢٦	٢,٧١٨	٠,٣٦٨	$٤,٥٤\times١٠^{-٥}$

٢ — مانتیس لگاریتم‌های اعشاری

N	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠	$-\infty$	٠٠٠	٣٠١	٤٧٧	٦٠٢	٦٩٩	٧٧٨	٨٤٥	٩٠٣	٩٥٤
١٠	٠٠٠	٠٤١	٠٧٩	١١٤	١٤٦	١٧٦	٢٠٤	٢٣٠	٢٥٥	٢٧٩
٢٠	٣٠١	٣٢٢	٣٤٢	٤٦٢	٣٨٠	٣٩٨	٤١٥	٤٣١	٤٤٧	٤٦٢
٣٠	٤٧٧	٤٩١	٥٠٥	٥١٩	٥٣١	٥٤٤	٥٥٦	٥٦٨	٥٨٠	٥٩١
٤٠	٦٠٢	٦١٣	٦٢٣	٦٣٣	٦٤٣	٦٥٣	٦٦٣	٦٧٢	٦٨١	٦٩٠
٥٠	٦٩٩	٧٠٨	٧١٦	٧٢٤	٧٣٢	٧٤٠	٧٤٨	٧٥٦	٧٦٣	٧٧١
٦٠	٧٧٨	٧٨٥	٧٩٢	٧٩٩	٨٠٦	٨١٣	٨٢٠	٨٢٦	٨٣٣	٨٣٩
٧٠	٨٤٥	٨٥١	٨٥٧	٨٦٣	٨٦٩	٨٧٥	٨٨١	٨٨٦	٨٩٢	٨٩٨
٨٠	٩٠٣	٩٠٨	٩١٤	٩١٩	٩٢٤	٩٢٩	٩٣٤	٩٤٠	٩٤٤	٩٤٩
٩٠	٩٥٤	٩٥٩	٩٦٤	٩٦٨	٩٧٣	٩٧٨	٩٨٢	٩٨٧	٩٩١	٩٩٦

٣ — لگاریتم‌های طبیعی

N	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٠	$-\infty$	٠٫٠٠٠	٠٫٦٩٣	١٫٠٩٩	١٫٣٨٦	١٫٦٠٩	١٫٧٩٢	١٫٩٤٦	٢٫٠٧٩	٢٫١٩٧
١٠	٢٫٣٠٣	٢٫٣٩٨	٢٫٤٨٥	٢٫٥٦٥	٢٫٦٣٩	٢٫٧٠٨	٢٫٧٧٣	٢٫٨٣٣	٢٫٨٩٠	٢٫٩٤٤
٢٠	٢٫٩٩٦	٣٫٠٤٥	٣٫٠٩١	٣٫١٣٥	٣٫١٧٨	٣٫٢١٩	٣٫٢٥٨	٣٫٢٩٦	٣٫٣٣٢	٣٫٣٦٧
٣٠	٣٫٤٠١	٣٫٤٣٤	٣٫٤٦٦	٣٫٤٩٧	٣٫٥٢٦	٣٫٥٥٥	٣٫٥٨٤	٣٫٦١١	٣٫٦٣٨	٣٫٦٦٤
٤٠	٣٫٦٨٩	٣٫٧١٤	٣٫٧٣٨	٣٫٧٦١	٣٫٧٨٤	٣٫٨٠٧	٣٫٨٢٩	٣٫٨٥٠	٣٫٨٧١	٣٫٨٩٢
٥٠	٣٫٩١٢	٣٫٩٣٢	٣٫٩٥١	٣٫٩٧٠	٣٫٩٨٩	٤٫٠٠٧	٤٫٠٢٥	٤٫٠٤٣	٤٫٠٦٠	٤٫٠٧٨
٦٠	٤٫٠٩٤	٤٫١١١	٤٫١٢٧	٤٫١٤٣	٤٫١٥٩	٤٫١٧٤	٤٫١٩٠	٤٫٢٠٥	٤٫٢٢٠	٤٫٢٣٤
٧٠	٤٫٢٤٨	٤٫٢٦٣	٤٫٢٧٧	٤٫٢٩٠	٤٫٣٠٤	٤٫٣١٨	٤٫٣٣١	٤٫٣٤٤	٤٫٣٥٧	٤٫٣٦٩
٨٠	٤٫٣٨٢	٤٫٣٩٤	٤٫٤٠٧	٤٫٤١٩	٤٫٤٣١	٤٫٤٤٣	٤٫٤٥٤	٤٫٤٦٦	٤٫٤٧٧	٤٫٤٨٩
٩٠	٤٫٥٠٠	٤٫٥١١	٤٫٥٢٢	٤٫٥٣٣	٤٫٥٤٣	٤٫٥٥٤	٤٫٥٦٤	٤٫٥٧٥	٤٫٥٨٥	٤٫٥٩٥
١٠٠	٤٫٦٠٥	٤٫٦١٥	٤٫٦٢٥	٤٫٦٣٥	٤٫٦٤٤	٤٫٦٥٤	٤٫٦٦٣	٤٫٦٧٣	٤٫٦٨٢	٤٫٦٩١

لگاریتم‌های طبیعی $١٠^{\pm n}$

n	+	−	n	+	−	n	+	−
١	٢٫٣٠٢٦	$\overline{٣}$٫٦٩٧٤	٣	٦٫٩٠٧٨	$\overline{٧}$٫٠٩٢٢	٥	١١٫٥١٢٩	$\overline{١٢}$٫٤٨٧١
٢	٤٫٦٠٥٢	$\overline{٥}$٫٣٩٤٨	٤	٩٫٢١٠٣	$\overline{١٠}$٫٧٨٩٧	٦	١٣٫٨١٥٥	$\overline{١٤}$٫١٨٤٥

٤ — توابع هذلولی

x	$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{th}\,x$	x	$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{th}\,x$
٠	٠	١	٠				
٠,١	٠,١٠٠	١,٠٠٥	٠,١٠٠	١,٦	٢,٣٧٦	٢,٥٧٨	٠,٩٢٢
٠,٢	٠,٢٠١	١,٠٢٠	٠,١٩٧	١,٧	٢,٦٤٦	٢,٨٢٨	٠,٩٣٥
٠,٣	٠,٣٠٥	١,٠٤٥	٠,٢٩١	١,٨	٢,٩٤٢	٣,١٠٧	٠,٩٤٧
٠,٤	٠,٤١١	١,٠٨١	٠,٣٨٠	١,٩	٣,٢٤٨	٣,٤١٨	٠,٩٥٦
٠,٥	٠,٥٢١	١,١٢٨	٠,٤٦٢	٢,٠	٣,٦٢٧	٣,٧٦٢	٠,٩٦٤
٠,٦	٠,٦٣٧	١,١٨٥	٠,٥٣٧	٢,١	٤,٠٢٢	٤,١٤٤	٠,٩٧٠
٠,٧	٠,٧٥٩	١,٢٥٥	٠,٦٠٤	٢,٢	٣,٤٥٧	٤,٥٦٨	٠,٩٧٦
٠,٨	٠,٨٨٨	١,٣٣٧	٠,٦٦٤	٢,٣	٤,٩٣٧	٥,٠٣٧	٠,٩٨٠
٠,٩	١,٠٢٧	١,٤٣٣	٠,٧١٦	٢,٤	٥,٤٦٦	٥,٥٥٧	٠,٩٨٤
١,٠	١,١٧٥	١,٥٤٣	٠,٧٦٢	٢,٥	٦,٠٥٠	٦,١٣٢	٠,٩٨٧
١,١	١,٣٣٦	١,٦٦٩	٠,٨٠١	٢,٦	٦,٦٩٥	٦,٧٦٩	٠,٩٨٩
١,٢	١,٥٠٩	١,٨١١	٠,٨٣٤	٢,٧	٧,٤٠٦	٧,٤٧٣	٠,٩٩١
١,٣	١,٦٩٨	١,٩٧١	٠,٨٦٢	٢,٨	٨,١٩٢	٨,٢٥٣	٠,٩٩٣
١,٤	١,٩٠٤	٢,١٥١	٠,٨٨٥	٢,٩	٩,٠٦٠	٩,١١٥	٠,٩٩٤
١,٥	٢,١٢٩	٢,٣٥٢	٠,٩٠٥	٣,٠	١٠,٠١٨	١٠,٠٦٨	٠,٩٩٥

بازای $x > ٣$ با خطای کمتر از ٠,٠٥ داریم $\mathrm{sh}\,x \approx \mathrm{ch}\,x \approx \frac{١}{٢}e^x$

۵ــ فاکتوریل و توابع مربوط به آن

$\frac{۱}{(۲n)!!}$	$\frac{۱}{(۲n-۱)!!}$	$\frac{۱}{n!}$	$(۲n)!!$	$(۲n-۱)!!$	$n!$	n
۰,۵	۱	۱	۲	۱	۱	۱
۰,۱۲۵	۰,۳۳۳۳۳۳۳۳۳۳	۰,۵	۸	۳	۲	۲
۰,۰۲۰۸۳۳۳۳۳	۰,۰۶۶۶۶۶۶۶۶۷	۰,۱۶۶۶۶۶۶۶۶۷	۴۸	۱۵	۶	۳
۰,۰۰۲۶۰۴۱۶۷	۰,۰۰۹۵۲۳۸۱۰	۰,۰۴۱۶۶۶۶۶۶۷	۳۸۴	۱۰۵	۲۴	۴
۰,۰۰۰۲۶۰۴۱۷	۰,۰۰۱۰۵۸۲۰۱	۰,۰۰۸۳۳۳۳۳۳	۳ ۸۴۰	۹۴۵	۱۲۰	۵
۰,۰۰۰۰۲۱۷۰۱	۰,۰۰۰۰۹۶۲۰۰	۰,۰۰۱۳۸۸۸۸۹	۴۶ ۰۸۰	۱۰ ۳۹۵	۷۲۰	۶
۰,۰۰۰۰۰۱۵۵۰	۰,۰۰۰۰۰۷۴۰۰	۰,۰۰۰۱۹۸۴۱۳	۶۴۵ ۱۲۰	۱۳۵ ۱۳۵	۵ ۰۴۰	۷
۰,۰۰۰۰۰۰۰۹۷	۰,۰۰۰۰۰۰۴۹۳	۰,۰۰۰۰۲۴۸۰۲	۱۰ ۳۲۱ ۹۲۰	۲ ۰۲۷ ۰۲۵	۴۰ ۳۲۰	۸
۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۵	۰,۰۰۰۰۰۰۰۲۹	۰,۰۰۰۰۰۲۷۵۶	۱۸۵ ۷۹۴ ۵۶۰	۳۴ ۴۵۹ ۴۲۵	۳۶۲ ۸۸۰	۹
۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۵,۰۰۰۰۰۰۰۰۲	۰,۰۰۰۰۰۰۲۷۶	۳ ۷۱۵ ۸۹۱ ۲۰۰	۶۵۴ ۷۲۹ ۰۷۵	۳ ۶۲۸ ۸۰۰	۱۰

٦ — توابع مثلثاتی

α°	α(رادیان)	sin α	tg α	ctg α	cos α		
٠	٠	٠	٠	∞	١	١,٥٧١	٩٠
١	٠,٠١٧	٠,٠١٧	٠,٠١٧	٥٧,٢٩	١,٠٠٠	١,٥٥٣	٨٩
٢	٠,٠٣٥	٠,٠٣٥	٠,٠٣٥	٢٨,٦٤	٠,٩٩٩	١,٥٣٦	٨٨
٣	٠,٠٥٢	٠,٠٥٢	٠,٠٥٢	١٩,٠٨	٠,٩٩٩	١,٥١٨	٨٧
٤	٠,٠٧٠	٠,٠٧٠	٠,٠٧٠	١٤,٣٠	٠,٩٩٨	١,٥٠١	٨٦
٥	٠,٠٨٧	٠,٠٨٧	٠,٠٨٧	١١,٤٣	٠,٩٩٦	١,٤٨٤	٨٥
٦	٠,١٠٥	٠,١٠٥	٠,١٠٥	٩,٥١٤	٠,٩٩٥	١,٤٦٦	٨٤
٧	٠,١٢٢	٠,١٢٢	٠,١٢٣	٨,١٤٤	٠,٩٩٣	١,٤٤٩	٨٣
٨	٠,١٤٠	٠,١٣٩	٠,١٤١	٧,١١٥	٠,٩٩٠	١,٤٣١	٨٢
٩	٠,١٥٧	٠,١٥٦	٠,١٥٨	٦,٣١٤	٠,٩٨٨	١,٤١٤	٨١
١٠	٠,١٧٥	٠,١٧٤	٠,١٧٦	٥,٦٧١	٠,٩٨٥	١,٣٩٦	٨٠
١١	٠,١٩٢	٠,١٩١	٠,١٩٤	٥,١٤٥	٠,٩٨٢	١,٣٧٩	٧٩
١٢	٠,٢٠٩	٠,٢٠٨	٠,٢١٣	٤,٧٠٥	٠,٩٧٨	١,٣٦١	٧٨
١٣	٠,٢٢٧	٠,٢٢٥	٠,٢٣١	٤,٣٣١	٠,٩٧٤	١,٣٤٤	٧٧
١٤	٠,٢٤٤	٠,٢٤٢	٠,٢٤٩	٤,٠١١	٠,٩٧٠	١,٣٢٦	٧٦
١٥	٠,٢٦٢	٠,٢٥٩	٠,٢٦٨	٣,٧٣٢	٠,٩٦٦	١,٣٠٩	٧٥
١٦	٠,٢٧٩	٠,٢٧٦	٠,٢٨٧	٣,٤٨٧	٠,٩٦١	١,٢٩٢	٧٤
١٧	٠,٢٩٧	٠,٢٩٢	٠,٣٠٦	٣,٢٧١	٠,٩٥٦	١,٢٧٤	٧٣
١٨	٠,٣١٤	٠,٣٠٩	٠,٣٢٥	٣,٠٧٨	٠,٩٥١	١,٢٥٧	٧٢

α°	α(رادیان)	sin α	tg α	ctg α	cos α		
١٩	٠,٣٣٢	٠,٣٢٦	٠,٣٤٤	٢,٩٠٤	٠,٩٤٦	١,٢٣٩	٧١
٢٠	٠,٣٤٩	٠,٣٤٢	٠,٣٦٤	٢,٧٤٧	٠,٩٤٠	١,٢٢٢	٧٠
٢١	٠,٣٦٧	٠,٣٥٨	٠,٣٨٤	٢,٦٠٥	٠,٩٣٤	١,٢٠٤	٦٩
٢٢	٠,٣٨٤	٠,٣٧٥	٠,٤٠٤	٢,٤٧٥	٠,٩٢٧	١,١٨٧	٦٨
٢٣	٠,٤٠١	٠,٣٩١	٠,٤٢٤	٢,٣٥٦	٠,٩٢١	١,١٦٩	٦٧
٢٤	٠,٤١٩	٠,٤٠٧	٠,٤٤٥	٢,٢٤٦	٠,٩١٤	١,١٥٢	٦٦
٢٥	٠,٤٣٦	٠,٤٢٣	٠,٤٦٦	٢,١٤٥	٠,٩٠٦	١,١٣٤	٦٥
٢٦	٠,٤٥٤	٠,٤٣٨	٠,٤٨٨	٢,٠٥٠	٠,٨٩٩	١,١١٧	٦٤
٢٧	٠,٤٧١	٠,٤٥٤	٠,٥١٠	١,٩٦٣	٠,٨٩١	١,١٠٠	٦٣
٢٨	٠,٤٨٩	٠,٤٦٩	٠,٥٣٢	١,٨٨١	٠,٨٨٣	١,٠٨٢	٦٢
٢٩	٠,٥٠٦	٠,٤٨٥	٠,٥٥٤	١,٨٠٤	٠,٨٧٥	١,٠٦٥	٦١
٣٠	٠,٥٢٤	٠,٥٠٠	٠,٥٧٧	١,٧٣٢	٠,٨٦٦	١,٠٤٧	٦٠
٣١	٠,٥٤١	٠,٥١٥	٠,٦٠١	١,٦٦٤	٠,٨٥٧	١,٠٣٠	٥٩
٣٢	٠,٥٥٩	٠,٥٣٠	٠,٦٢٥	١,٦٠٠	٠,٨٤٨	١,٠١٢	٥٨
٣٣	٠,٥٧٦	٠,٥٤٥	٠,٦٤٩	١,٥٤٠	٠,٨٣٩	٠,٩٩٥	٥٧
٣٤	٠,٥٩٣	٠,٥٥٩	٠,٦٧٥	١,٤٨٣	٠,٨٢٩	٠,٩٧٧	٥٦
٣٥	٠,٦١١	٠,٥٧٤	٠,٧٠٠	١,٤٢٨	٠,٨١٩	٠,٩٦٠	٥٥
٣٦	٠,٦٢٨	٠,٥٨٨	٠,٧٢٧	١,٣٧٦	٠,٨٠٩	٠,٩٤٢	٥٤
٣٧	٠,٦٤٦	٠,٦٠٢	٠,٧٥٤	١,٣٢٧	٠,٧٩٩	٠,٩٢٥	٥٣
٣٨	٠,٦٦٣	٠,٦١٦	٠,٧٨١	١,٢٨٠	٠,٧٨٨	٠,٩٠٨	٥٢
٣٩	٠,٦٨١	٠,٦٢٩	٠,٨١٠	١,٢٣٥	٠,٧٧٧	٠,٨٩٠	٥١
٤٠	٠,٦٩٨	٠,٦٤٣	٠,٨٣٩	١,١٩٢	٠,٧٦٦	٠,٨٧٣	٥٠

٤٩	٠,٨٥٥	٠,٧٥٥	١,١٥٠	٠,٨٦٩	٠,٦٥٦	٠,٧١٦	٤١
٤٨	٠,٨٣٨	٠,٧٤٣	١,١١١	٠,٩٠٠	٠,٦٦٩	٠,٧٣٣	٤٢
٤٧	٠,٨٢٠	٠,٧٣١	١,٠٧٢	٠,٩٣٣	٠,٦٨٢	٠,٧٥٠	٤٣
٤٦	٠,٨٠٣	٠,٧١٩	١,٠٣٦	٠,٩٦٦	٠,٦٩٥	٠,٧٦٨	٤٤
٤٥	٠,٧٨٥	٠,٧٠٧	١,٠٠٠	١,٠٠٠	٠,٧٠٧	٠,٧٨٥	٤٥
α°	α (رادیان)	$\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\cos\alpha$		

٧ — تابع گاما

x	١,٠	١,١	١,٢	١,٣	١,٤	١,٥	١,٦	١,٧	١,٨	١,٩	٢,٠
$\Gamma(x)$	١,٠٠٠	٠,٩٥١	٠,٩١٨	٠,٨٩٧	٠,٨٨٧	٠,٨٨٦	٠,٨٩٤	٠,٩٠٩	٠,٩٣١	٠,٩٦٢	١,٠٠٠

بازای $x > ٠$ $\min\Gamma(x) = \Gamma(١,٤٦١٦) = ٠,٨٨٥٦$

فهرست

قسمت اوّل

توابع یک‌متغیره

قسمت دوم

توابع چندمتغیره