Efter en uafhængig granskning kan jeg bekræfte at dine udregninger af arealet er helt korrekte :-).

Som et alternativ til rækkeudviklingen av ”sin” kan man måske tænke sig at anvende at ”sin” kan udtrykkes gennem $\sqrt{2}$, se nedenstående udtryk. Jeg ved ikke om det kan bruges til noget godt, men du er jo god til sådanne kæder :-)

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{32}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{64}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{128}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$$

osv

Når det gælder selve summeringen kom jeg frem til følgende:

Jeg har ikke lykkedes at gennemføre summeringen til ∞ , men kun et godt stykke på vejen:

$$\sum_{n=1}^{20\,000} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2\times 2^n}\right)\right) \approx$$
$$-0.1245764241565023546129717849562455771281$$

Det betyder med 40 decimalers nøjagtighed er arealet:

$$\frac{\pi}{4}-0.12457642... \quad = 0.660821739240945955002689060863630143921 19.....$$

Din approksimation

$$\frac{\pi}{40}\left(5+\sqrt{3}+2^{0.75}\right)$$

giver følgende:

0.660821734045843581567883902275999347001876665920 2466

dvs kun de første 8 decimaler er korrekte. Det er således ikke en god approksimation.

Problemet at finde en analytisk løsning er således ikke løst, og sandsynligvis findes den slet ikke.

//Johan