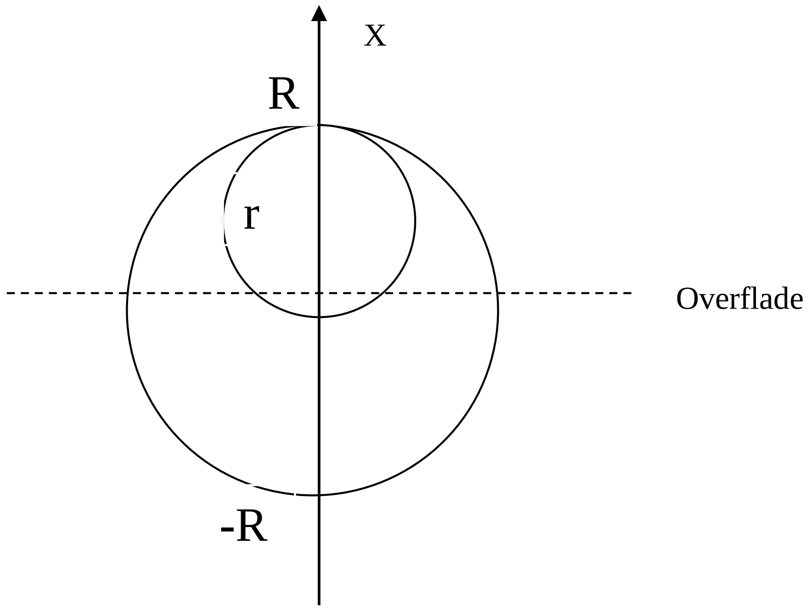
Holme, 31-07-2004

Stabilitet af en stammebåd

Problemet

Skal en træstamme med cirkulært tværsnit bruges til transport, må man udhule den for at sænke massemidtpunktet i forhold til opdriftens angrebspunkt, tyngdepunktet, så den kommer i en stabil tilstand. Forudsættes det nu at udhulingen sker ved at bore et cirkulært hul med radius r på langs med stammen med radius R og lade de to cirkler tangerer hinanden, fås situationen som vist nedenfor:



Spørgsmålet er nu: Hvordan opnår man den største stabilitet, forstået som det laveste tyngdepunkt?

Løsning

For at bestemme den optimale værdi af r indlægges en x-akse som vist på figuren, og tyngdepunktet, Xtp, vil af symmetrigrunde ligge på x-aksen. Stedet kan beregnes af følgende generelle formel, hvor f(x) angiver afgrænsningskurven for den betragtede overflade:

$$Xtp = \frac{\int_{-R}^{R} xf(x)dx}{\int_{-R}^{R} f(x)dx}$$

$$Xtp = \frac{\int_{-R}^{R} xf(x)dx}{\int_{-R}^{R} f(x)dx}$$

Nævneren er arealet, A, af kurven, og i det aktuelle tilfælde er det nemt beregnet som:

$$A = \Pi(R^2 - r^2)/2$$

$$A = \Pi(R^2 - r^2)/2$$

Tælleren bliver:

$$\int_{-R}^{R} x\sqrt{R^2 - x^2}dx - \int_{R-2r}^{R} x\sqrt{r^2 - (x-(R-r))^2}dx =$$

$$\int_{-R}^{R} x\sqrt{R^2 - x^2}dx - \int_{R-2r}^{R} x\sqrt{r^2 - (x-(R-r))^2}dx =$$

$$\int_{-R}^{R} x\sqrt{R^2 - x^2}dx - (x-R+r)\int_{R-2r}^{R} \sqrt{r^2 - (x-(R-r))^2}dx - (R-r)\int_{R-2r}^{R} \sqrt{r^2 - (x-(R-r))^2}dx =$$

$$\int_{-R}^{R} x\sqrt{R^2 - x^2}dx - (x-R+r)\int_{R-2r}^{R} \sqrt{r^2 - (x-(R-r))^2}dx - (R-r)\int_{R-2r}^{R} \sqrt{r^2 - (x-(R-r))^2}dx =$$

(da de to første led giver nul)

$$-(R-r)\left[\frac{x-R+r}{2}\sqrt{r^2 - (x-R+r)^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x-R+r}{r}\right]_{R-2r}^{R} = -(R-r)\Pi r^2/2$$

$$-(R-r)\left[\frac{x-R+r}{2}\sqrt{r^2 - (x-R+r)^2} + \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x-R+r}{r}\right]_{R-2r}^{R} = -(R-r)\Pi r^2/2$$

Heraf fås:

$$Xtp = -\frac{(R-r)\Pi r^2/2}{\Pi(R^2 - r^2)/2} = -\frac{r^2}{R+r}$$

$$Xtp = -\frac{(R-r)\Pi r^2/2}{\Pi(R^2-r^2)/2} = -\frac{r^2}{R+r}$$

Konklusion

Formlen for X_{tp} er meget enkel, men overraskende. Når r er næsten nul, bliver X_{tp} som forventet lig nul, dvs. tyngdepunktet er midt i stammen. Når r vokser mod R, ville man antage at X_{tp} aftog indtil et vist punkt for herefter at stige når stammen var næsten helt udhulet, idet den da ville ligne et cylinderrør med tyngdepunkt i centrum.

I stedet er X_{tp} konstant aftagende med en grænseværdi på -R/2. Det betyder at når r er næsten lig R, vil der stadig være en tynd halvmåne tilbage i bunden og et endnu tyndere lag op ad siderne, men med en sådan fordeling at det samlede tyngdepunkt lige netop er i -R/2