Φ,
TANKER
&
TALKUNST

af

Jens Rasmussen, Holme i juli 2003

0. Forord

Den opmærksomme læser har vel allerede gættet at titlen ikke bare skal foregøgle indhold på et højt niveau, men at den skal være en nem huskeregel for tallet Φ eller tilnærmet 1,618. Bortset fra det, er der flere formål med at skrive denne rapport.

For det første er formålet at sætte et foreløbigt punktum for nogle undersøgelser og regnerier, jeg har foretaget med udgangspunkt i Fibonacci-rækken og den hermed nært beslægtede konstant, phi eller Φ. Mit arbejde har været drevet af glæden ved at se sammenhænge i tallenes verden og måske bevæge mig inden for områder der kun har været sparsomt undersøgt af andre.

For det andet har jeg ønsket at motivere andre til at lege med tal og herigennem opdage skønheden ved dem. Endelig har også villet demonstrere at det kan lade sig gøre at komme langt med matematikkundskaber på gymnasieniveau, og ydermere at det kan gøres ved hjælp af et ganske almindeligt regnearksprogram.

Hvis nogen spørger hvad resultaterne egentlig kan bruges til, må jeg blive dem svar skyldig. Blot kan jeg sige at selve processen har været afvekslende, spændende og afslappende som en god roman, og at jeg hermed håber at introducere begrebet hyggematematik for en større kreds.

For at gøre det følgende læseligt har jeg udeladt beviserne som for det meste er enkle. I noterne er samlet nogle kildehenvisninger og links til hjemmesider på Internettet. Endvidere er i Appendix samlet nogle resultater vedr. funktioner af uniformt fordelte variable, som har betydning for beregningerne i Afsnit 10.

1. Generelt

Der er vel ingen grund til at gå nærmere ind i beskrivelse af Fibonacci-rækken der tilskrives Leonardo af Pisa, også kaldet Fibonacci, og som fremkommer ved gentagen anvendelse af formlen

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{hvor } F_0 = 0 \text{ og } F_1 = 1$$

De første led bliver: 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 osv.

Det er dog værd at nævne at forholdet mellem to på hinanden følgende elementer i rækken går asymptotisk mod Φ, dvs.

$$F_{n+1}/F_n \to \Phi = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1{,}618\ldots \text{ for } n \to \infty$$

Φ kaldes også grundtallet for Det gyldne Snit som kan findes i arkitektur og malerkunst. I de fleste bøger om emnet samt på et væld af hjemmesider på internettet [1.1] nævnes også Lucas-rækken som beregnes på samme måde som Fibonacci-rækken, men med andre startværdier.

De nævnte steder kan man også finde en fyldig gennemgang af anvendelser af Fibonacci-rækken inden for matematikken. Her kan man også finde en udledning af Binets formel for det n'te led i Fibonacci-rækken:

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}$$

Φ har nogle specielle egenskaber, da den findes ud fra formlen $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$:

$-1/\Phi = 1 - \Phi$
$\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$
$\Phi^2 = \Phi/(\Phi - 1) = (\Phi^2 - 1)/(\Phi - 1) = \Phi + 1$

2. Forholdet mellem Lucas og Fibonacci

Lucas-rækken $L_{1,3}$ der starter med 1 og 3, har som de første led:

1 3 4 7 11 18 29 47 86 osv.

Hvis man nu tager Fibonacci-tallene (som er et specialtilfælde af Lucas-tallene) fra: 1 1 2 3 5 ... og dividerer hvert enkelt tal op i Lucas-tallet på samme plads, fås følgende række:

1 3 2 2,3 2,2 2,25 2,23 2,24 2,24 ...

der konvergerer mod $\sqrt{5} \approx 2{,}236067977$ [2.1]. Dette betyder at tallene i Lucas-rækken kan udtrykkes ved Binets formel gange med $\sqrt{5}$ (dog med et plus mellem de to led i tælleren). Det er jo i sig selv interessant at der består en sådan forbindelse mellem to hele tal som 21 og 47, men gælder der andre lige så smukke sammenhænge mellem Fibonacci-rækken og andre Lucas-rækker?

Det kan man bevise at der ikke gør. Hvis man tager udgangspunkt i Lucas-rækken $L_{m,n}$ med startværdierne m og n, får man som de første led:

m n m+n m+2n 2m+3n 3m+5n 5m+8n .... hvor man genfinder Fibonacci-rækken startende med (1,1), dvs.

$L_{m,n}(i) = F_{i-2}*m + F_{i-1}*n$

Her som i det følgende forudsættes at hverken n eller m er nul. Hvis begge er nul, kommer rækken aldrig ud af stedet, og hvis en af dem er nul, får man Fibonacci-rækken ganget med en konstant som er lig det andet tal.

Forholdet, R, mellem Fibonacci-rækken og den pågældende Lucas-række er

F_i / [$F_{i-2}*m$+ $F_{i-1}*n$] hvoraf fås:

$$R_{m,n} = \frac{-0,5[(n-3m)+(n-m)\sqrt{5}]}{(n^2-m^2-mn)}$$

Her vil man umiddelbart spørge sig selv om nu nævneren kan blive nul. Det kan den ikke da

$n^2 - m^2 - mn = 0 \Leftrightarrow n/m - m/n - 1 = 0$ (Både n og m er som nævnt forskellige fra nul)

Ved substitution af n/m med v fås:

$v - 1/v - 1 = 0 \Leftrightarrow v2 - v - 1 = 0$.

Nu kender man jo løsningen til denne ligning, som kun har irrationale løsninger, og kvotienten mellem de to hele tal, m og n, kan ikke være irrationel. Hvis kvotienten n/m er tæt på Φ, fx hvis de følger efter hinanden i en Fibonacci-række, vil n^2-m^2-mn blive enten 1 eller –1. Dette gælder dog mærkværdigvis ikke for en vilkårlig Lucas-række hvor kvotienten mellem to på hinanden følgende led også går asymptotisk mod Φ. Her afhænger størrelsen af n^2-m^2-mn af m og n, men også her er den konstant og dens fortegn svinger mellem plus og minus.

Ovenstående betyder at der består et slægtsskab mellem de hele tal via √5, idet ethvert helt tal tilhører en eller flere Lucas-rækker. Fx tilhører tallet 103 rækken der starter med 1 og 102, men en mere interessant række fås ved at dividere først 103 og derefter kvotienterne med Φ og runde af til heltal. På den måde kan man få rækken

3 11 14 25 39 64 103 ….

hvor (m,n) = (3,11). I dette tilfælde bliver $R_{3,11} = (1+4\sqrt{5})/79 = 0{,}125877$, og det til 103 svarende led i Fibonacci-rækken kan beregnes til 103R = 12,965 eller mindre end tre promille fra den sande værdi på 13. (Havde man brugt rækken 1 102 103 … ville det til 103 svarende led blive beregnet til 1,62 eller næsten 20% fra den sande værdi, 2.)

Af udtrykket for $R_{m,n}$ ses at kun når n = 3m, falder det første led i tælleren bort, og $R_{m,n}$ bliver lig 1/(m√5) hvilket var indholdet i den oprindelige iagttagelse hvor m var lig 1. Der er altså ikke andre 'pæne' sammenhænge mellem Lucas- og Fibonacci-rækken end den oprindelige. Hvis n = m, falder leddet med √5 bort, men så er man også ovre i Fibonacci-rækken ganget med m.

3. Lucas-rækkerne indbyrdes

Via Fibonacci-rækken kan forskellige Lucas-rækker sættes i forbindelse med hinanden. Kvotienten $K = R_{k,l}/R_{m,n}$ vil igen blive af formen (a + b√5)/c, men det betyder en dobbelt unøjagtighed i beregningen. Målet her er derfor at finde en formel for den direkte sammenhæng mellem to Lucas-rækker $L_{m,n}$ og $L_{k,l}$. Den fås direkte ved at dividere $R_{k,l}$ op i $R_{m,n}$ hvorefter man får:

$$K = \frac{0{,}5[(n(2l - k) - m(l + 2k) + (kn - lm)\sqrt{5}]}{n2 - m2 - mn}$$

Det kunne nu være interessant at undersøge om der er tilfælde hvor forholdet mellem de to Lucas-rækker bliver af formen K = konstant*√5.

n(2l - k) - m(l + 2k) = 0 ⇔ m = n(2l - k)/(l + 2k) = n[2 - 5/(q + 2)] hvor q = l/k

Da nu m og n er heltallige, må q + 2 enten være lig 1, -1, 5 eller –5 hvilket betyder at m er lig –3n, 7n, n eller 3n.

To af disse fire løsninger giver sammenfaldende Lucas-rækker. De tre resterende giver alle et forhold mellem den lille og den store række, som er lig √5. Den ene er allerede nævnt i indledningen, men de to andre er nye. De nye har kvotienter der konvergerer langsommere mod √5 end den oprindelige som vist i nedenstående tabel:

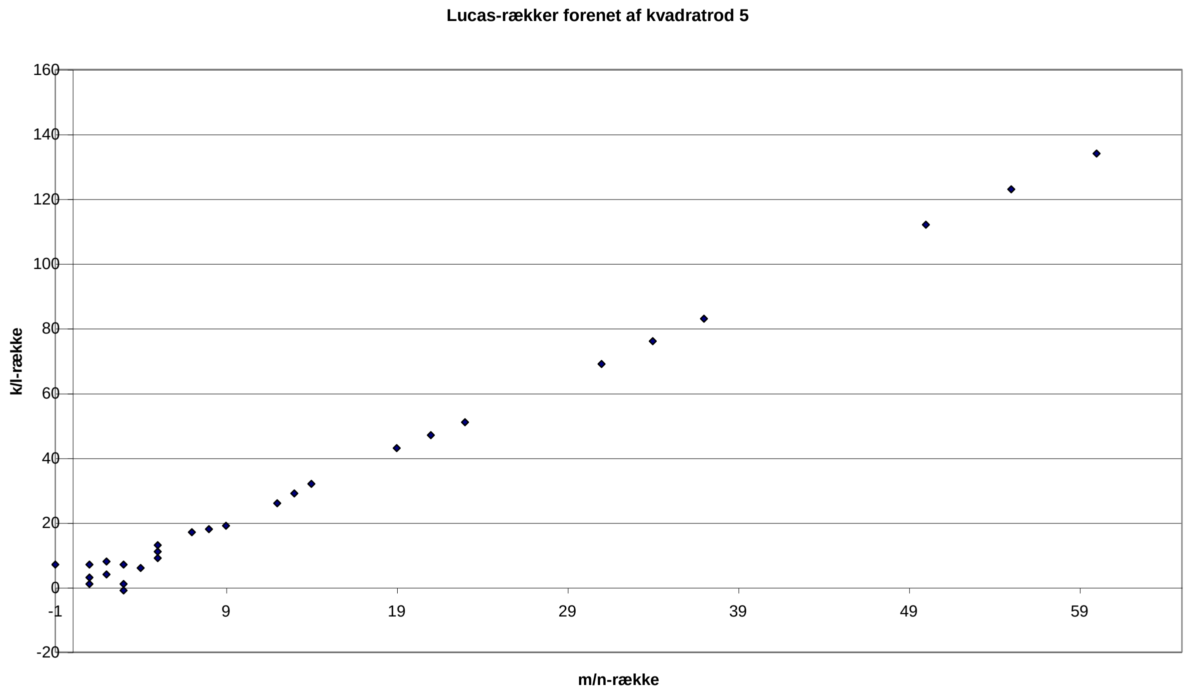
m	k		m	k		m	k	
n	l	K	n	l	K	n	l	K
			1	1	1,00000			
-1	7	-1,00000	1	3	3,00000	3	-1	-0,33333
3	1	0,33333	2	4	2,00000	1	7	7,00000
2	8	4,00000	3	7	2,33333	4	6	1,50000
5	9	1,80000	5	11	2,20000	5	13	2,60000
7	17	2,42857	8	18	2,25000	9	19	2,11111
12	26	2,16667	13	29	2,23077	14	32	2,28571
19	43	2,26316	21	47	2,23810	23	51	2,21739
31	69	2,22581	34	76	2,23529	37	83	2,24324
50	112	2,24000	55	123	2,23636	60	134	2,23333
81	181	2,23457	89	199	2,23596	97	217	2,23711
131	293	2,23664	144	322	2,23611	157	351	2,23567
212	474	2,23585	233	521	2,23605	254	568	2,23622
343	767	2,23615	377	843	2,23607	411	919	2,23601
555	1241	2,23604	610	1364	2,23607	665	1487	2,23609
898	2008	2,23608	987	2207	2,23607	1076	2406	2,23606
1453	3249	2,23606	1597	3571	2,23607	1741	3893	2,23607
2351	5257	2,23607	2584	5778	2,23607	2817	6299	2,23607

Tabel 3.1 Tre par af Lucas-rækker med et indbyrdes forhold på √5

De tre rækkepar hænger sammen på en interessant måde hvilket man ser ved at tage værdierne under 100 og samle dem i et xy-diagram som vist på grafen nedenfor. Efter et noget forvirrende billede i starten ses allerede efter 4-5 led at 5 indgår i alle tre rækkepar. Herefter kommer grupper med 8 som centerværdi på x-aksen, siden 13, 21, 34 osv. iht. Fibonacci-rækken.

Afstanden fra centerværdien på x-aksen til værdierne for de to øvrige rækkepar er også Fibonacci-tal (0, 1, 1, 2, ...) medens de tilsvarende afstande på y-aksen er Lucas-tal (1, 3, 4, 7, …). Dette betyder også at hældningen af den linie der går gennem tre sammenhørende punkter konvergerer mod √5 hvilket er klart da alle punkter efterhånden vil ligge på linien y = √5x.

Afstanden langs x-aksen mellem de nærmeste punkter i to på hinanden følgende punktgrupper er Lucas-tal hvorfor afstanden mellem to centerpunkter kan skrives som to Fibonacci-tal plus et Lucas-tal. Fx er afstanden mellem 21 og 34 lig (34-31) + (23-21) + (31-23) = 3 + 2 + 8. Atter et tegn på hvor smukt det hele passer sammen.



Figur 3.2 Lucas-rækker forenet af √5

Selvom der således er en smuk sammenhæng mellem Lucas-rækkerne via √5, burde man undersøge om der findes andre former for sammenhæng fx via √3. For selvom √5 indgår i Φ som er vigtig for alle Lucas-rækker, er det jo intet bevis for at andre konstanter ikke også kunne spille en vigtig rolle i dette spil. Det er dog endnu ikke lykkedes.

4. Produkt af Lucas- og Fibonacci-rækker

Som en lille adspredelse efter de foregående to afsnit ses her på et produkt af Fibonacci- og Lucas-rækker:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
$F_n * L_n$	1	3	8	21	55	144	377	787	2584	6765

Der synes at være følgende sammenhæng: $F_n * L_n = F_{2n}$

Beviset følger ved direkte regning idet man husker at

$L_n = (\Phi)^n + (-1)^n(1/\Phi)^n$

5. Udvidelse af Lucas-rækken med faktorer

Formlen for en Lucas-række kan nemt udvides ved at indsætte nogle faktorer, m og n, på de foregående to led idet startværdierne for nemheds skyld begge sættes lig 1:

$L_n = mL_{n-2} + nL_{n-1}$

Med de nævnte startværdier må summen af m og n ikke være lig 1, for så bliver alle de efterfølgende led lig 1.

Kvotienten, g, mellem to på hinanden følgende led kan nemt findes da følgende gælder tilnærmet:

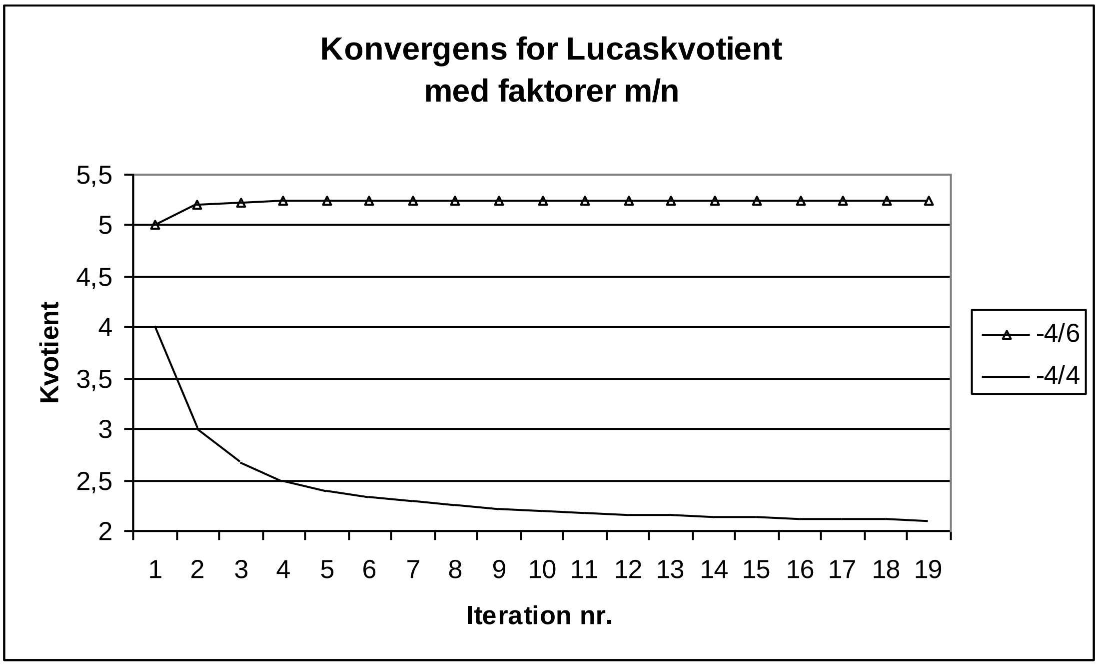
$L_n = g^2L_{n-2}$ og $L_{n-1} = gL_{n-2}$

Efter forkortelse med L_{n-2} fås $g^2 – ng – m = 0$ eller

$$g = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4m}}{2}$$

Her må n^2+4m ikke være negativ, dvs. $m \geq -n^2/4$

Normalt konvergerer kvotienten i en Lucas-række med faktorer hurtigt, men hvis $m = -n^2/4$, konvergerer kvotienten meget langsomt, jf. nedenstående figur hvor kvotienten for (m,n) = (-4,6) har en relativ afvigelse mindre end 10^{-5} allerede efter 10 iterationer, medens kvotienten for (m,n) = (-4,4) selv efter 1000 iterationer stadig er 10^{-3} fra den sande værdi på 2.



6. To specielle Lucas-rækker

Hvis man prøver at dividere 98765432 med 12345678, fås et resultat der er meget tæt på 8 (8,00000006). For at vurdere om der er tale om et tilfælde, kan man tage udgangspunkt i talrækkerne X: 9, 98, 987, 9876, ... og Y: 1, 12, 123, 1234, ...og omformulere spørgsmålet til:

Hvordan fortsætter man på en logisk måde de to rækker ud over de første 9 led, og går kvotienten X/Y asymptotisk mod 8 ?

Begge rækker kan ses som specielle Lucas-rækker idet de kan skrives som:

$X_n = 10X_{n-1} + 10 - n$ hvor $X_0 = 0$ eller som $X_n = 11X_{n-1} - 10X_{n-2} + 1$ hvor $X_0 = 0$ og $X_1 = 1$

Sidstnævnte fremstilling begynder at ligne rækkerne fra afsnit 5. Tilsvarende for følgende:

$Y_n = 10Y_{n-1} + nY_1$ hvor $Y_0 = 0$ og $Y_1 = 1$

X_n kan dog også skrives som:

$$X_n = (10-n)\sum_{i=0}^{n-1} 10^i + \sum_{i=0}^{n-1} i \cdot 10^i$$

og tilsvarende for Y_n:

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\cdot 10^i = n\cdot\sum_{i=0}^{n-1} 10^i + \sum_{i=0}^{n-1} i\cdot 10^i$$

Herefter kan man ved hjælp denne formel som også kan findes i bedre formelsamlinger:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i\cdot 10^i = (9\cdot n\cdot 10^n - 10\cdot 10^n + 10)/81$$

samt formlen for en kvotientrække ved direkte regning finde hhv.

$$X_n = (10-n)\cdot(10^n - 1)/(10-1) + (9n\cdot 10^n - 10\cdot 10^n + 10)/81 = (-80 + 80\cdot 10^n + 9n)/81$$

og

$$Y_n = n\cdot(10^n - 1)/(10-1) + (9n\cdot 10^n - 10\cdot 10^n + 10)/81 = (-10 + 10\cdot 10^n - 9n)/81$$

Kvotienten X/Y bliver nu - efter at have forkortet med 10^n lig:

$$\frac{X}{Y} = \frac{-80/10^n + 80 + 9n/10^n}{-10/10^n + 10 - 9n/10^n}$$

som går mod 8 for store værdier af n.

Det er interessant at heltallene i de to rækker kan skrives på en så særpræget måde. Ligeledes at de cifre der kommer når man skriver 1/81 som decimaltal er de samme som cifrene i Y_n for n større end 10. Fx er Y_{15} = 123456790123456, så 8-tallet bliver ganske enkelt sprunget over. I X-rækken er det 1-tallet der bliver sprunget over.

Beviset kan gennemføres på en helt anden måde, se [6.1]

7. Det gyldne dobbeltsnit

I omtaler af Det gyldne Snit henvises ofte til en harmonisk opdeling af en billedflade i to stykker. Fx vises et landskabsbillede med et træ hvor det så viser sig at Det gyldne Snit ligger til grund for træets placering. Men hvad nu hvis maleren skal placere to træer på billedfladen.? Eller med andre ord, hvordan er den harmoniske opdeling af et liniestykke i tre stykker a, b og c (hvor a+b+c for nemheds skyld sættes til 1)?

Man kunne jo starte med at dele én gang med Det gyldne Snit og så dele det store delstykke med Det gyldne Snit igen. Men herved fås tre stykker hvoraf de to er lige store. De lige store stykker skal så enten stå ved siden af hinanden eller symmetrisk i billedet.

Man kan opstille følgende sammenhænge der hver rummer sin matematiske logik:

1. a/b = b/c = c/(a+b+c) = c
2. a/b = b/(a+b) = (a+b)/(a+b+c) = a+b
3. a/b = b/(a+b) = (a+b)/c
4. a/b = b/(a+b) og b/c = c/(b+c)
5. a/b = b/(a+b) og b/c = c/(a+b+c) = c

Her er nr. 2 den samme som den med de to lige store stykker. De kan alle løses eksakt, men nr. 1 påkalder sig opmærksomhed fordi løsningen findes af :

$c^3 + c^2 + c = 1$,

som svarer helt til ligningen for Det gyldne Snit: $b^2 + b = 1$

Ovenstående tredjegradsligning har følgende relevante løsning:

$$c = \left(\sqrt[3]{17 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{17 - 3\sqrt{33}}\right) / 3$$

som omtrent er lig 0,54 medens a og b bliver hhv. 0,16 og 0,30.

Opdeling af en størrelse i forholdet 0,54 0,30 og 0,16 kaldes her for Det gyldne Dobbeltsnit

Kvotienten b/a, som for Det gyldne Snit er ca. 1,62, bliver her 1,84, og helt parallelt med det gyldne snits sammenhæng med Fibonacci-rækken kan man finde 1,84 som kvotienten i Lucas-rækken hvor man finder næste værdi ved at addere de tre foregående værdier:

0 0 1 1 2 4 7 13 24 44 81 ......

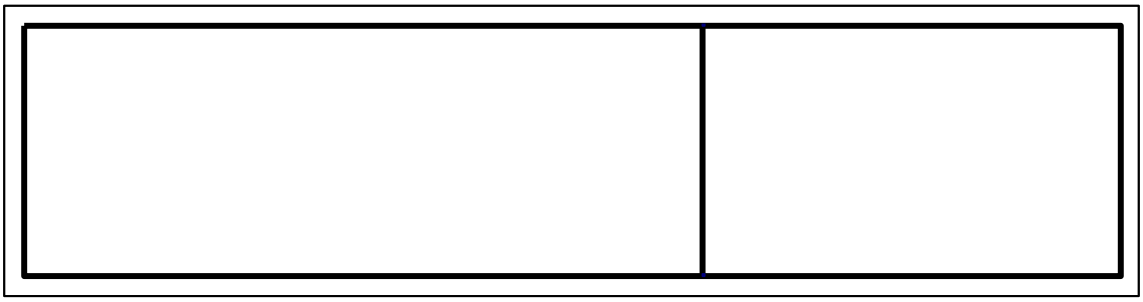
Denne række kaldes også med matematisk humor for Tribonacci-rækken, og på Internettet kan man finde en formel svarende til Binet's formel.

Hvis man nu vil anbringe uendeligt mange træer på et liniestykke, bliver løsningen:

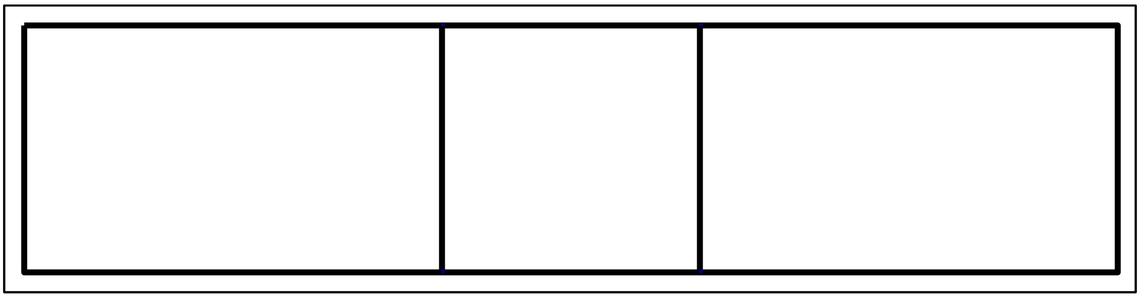
1/2 1/4 1/8 1/16 1/32 ......

Da summen af $(½)^n$ hvor n går fra 1 til uendelig er lig én, er ½ nemlig rod i ligningen
$d^n + d^{n-1} + ... +d^3 + d^2 + d = 1$ svarende til ligningerne for Det gyldne Snit og Det gyldne Dobbeltsnit.

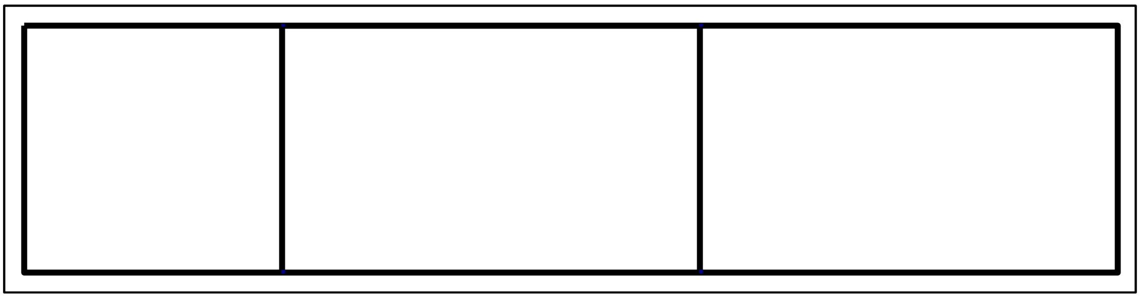
Til anskueliggørelse er nedenfor vist nogle billedrammer (som med vilje ikke er gyldne rektangler) der er opdelt med Det gyldne Snit i Figur1. Dernæst er i Figur 2 og 3 vist hvordan den videre opdeling ville se ud hvis man atter brugte Det gyldne Snit til at underopdele den største flade.



Figur 7.1 Det gyldne Snit



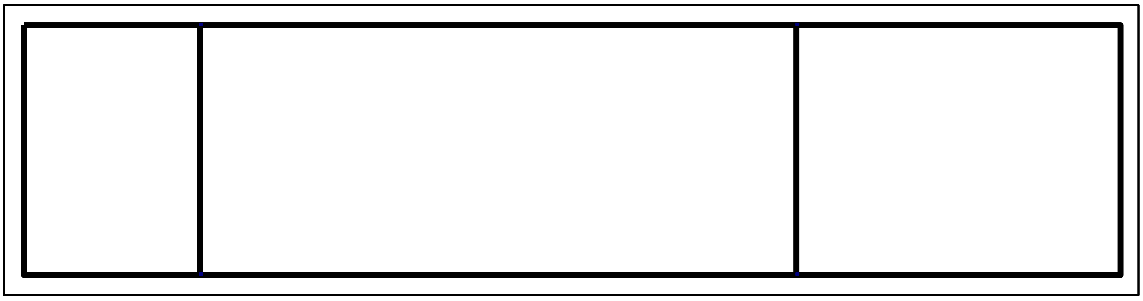
Figur 7.2 Det gyldne Snit brugt to gange, symmetrisk



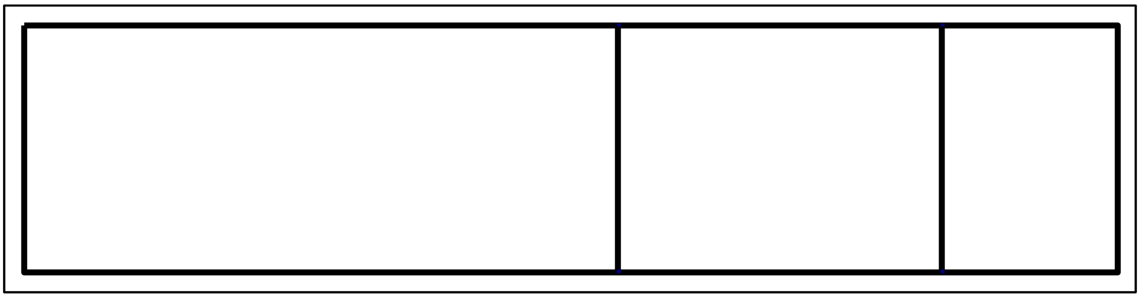
Figur 7.3 Det gyldne Snit brugt to gange, asymmetrisk

Hverken Figur 2 eller Figur 3 giver en harmonisk tredeling. I Figur 2 bliver midterfeltet for lille i forhold til de andre felter, og i Figur 3 falder det i øjnene at de store felter er ens.

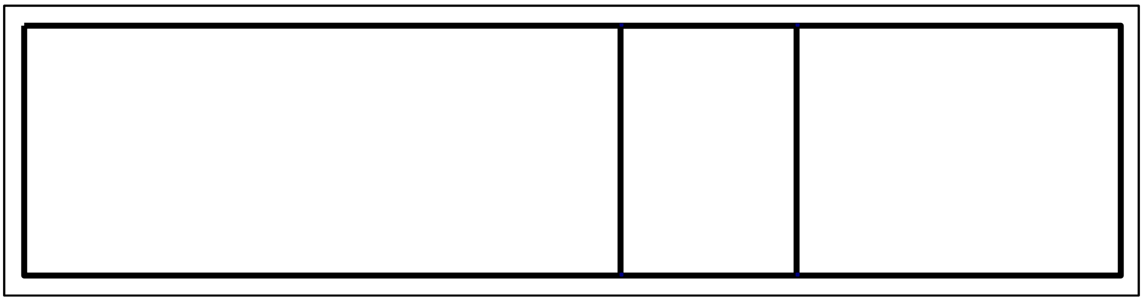
Til sammenligning kan man opdele efter Det gyldne Dobbeltsnits princip. Der bliver her tre muligheder idet man kan placere det store stykke i midten og med de to andre ved siden Model A. Alternativt kan det store stykke være i siden og de to små kan anbringes på to måder Model B og C.



Figur 7.4 Det gyldne Dobbeltsnit, model A



Figur 7.5 Det gyldne Dobbeltsnit, model B



Figur 7.6 Det gyldne Dobbeltsnit, model C

Opdelingerne efter 0,54 / 0,30 / 0,16 ser nydelige ud alle tre.

Det gyldne rektangel skulle være bestemmende for dimensionerne af fx forsiden af Akropolis. Svarende til det gyldne rektangel kan man frembringe en 'gylden kasse' ved at bruge de tre ovenfor fundne tal som kassens længde, bredde og højde. Det kunne være interessant om man også kunne finde eksempler på den 'gyldne kasse' i naturen eller arkitekturen.

8. En singularitet i den generaliserede Fibonacci-række

I standardværker om Det gyldne Snit og Φ anføres det som regel at kvotienten mellem to på hinanden følgende tal i en Fibonacci- eller Lucas-række er lig Φ, uafhængigt af startværdierne for rækken. Dette gælder imidlertid ikke generelt.

Fibonacci-rækken kan generaliseres og forlænges hinsides nul ved at rokere lidt rundt på den oprindelige formel:

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

Og den kommer nu til at se sådan ud:

… 34 -21 13 -8 5 -3 2 -1 1 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 …

altså svarende til den kendte Fibonacci-række i begge retninger, men med alternerende fortegn i den forlængede del af rækken. Kvotienten bliver her lig med $-1/\Phi = (1 - \sqrt{5})/2 = -0{,}618$ hvilket er lig den anden rod i ligningen som man løser for at finde Φ: $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.

Der findes imidlertid tilfælde hvor man ved passende valg af begyndelsesværdier i denne række får en række der ikke vokser mod uendeligt, men som konvergerer mod nul. Formelt er den vel også blevet til en Lucas-række.

Det kan nemt vises at med startværdier på –1 og 1/Φ eller mere generelt –a og a/Φ konvergerer rækken mod nul, jf. nedenstående

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-1	0,618034	-0,38197	0,236068	-0,1459	0,09017	-0,05573	0,034442	-0,02129	0,013156	-0,00813

Værdierne i rækken alternerer, men de går hurtigt mod nul.

9. Finicolai for reelle og komplekse tal

De rækker som hidtil er blevet omtalt har alle været additive, dvs. et led i rækken er en linearkombination af et eller flere af de foregående led. Hvis man nu i stedet for addition bruger multiplikation, får man en hurtigt voksende række som vist ikke er navngivet, men som her bliver kaldt for Finicolai-rækker med symbolet N.

Ligesom man ikke kan starte en Fibonacci-række med 0 og 0 som er additionens neutrale element, kan man heller ikke starte en Finicolai-række med 1 og 1 som er det neutrale element for multiplikation. I grundformen nedenfor startes med 1 og 2:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N(n)	1	2	2	4	8	32	256	8,19E+03	2,10E+06	1,72E+10	3,60E+16	6,19E+26
logN(n)	0,00	0,30	0,30	0,60	0,90	1,51	2,41	3,91	6,32	10,24	16,56	26,79
Phi		2,0000	1,0000	2,0000	1,5000	1,6667	1,6000	1,6250	1,6154	1,6190	1,6176	1,6182

Allerede ved 8. og 9. led i rækken bliver værdierne uhåndterligt store hvorfor man som vist fristes til at tage logaritmen til N(n). Hvis man betragter eksponenten på N(n) eller størrelsen af logN(n), ser man den kendte Fibonacci-egenskab (et element er lig summen af de to foregående) hvilket betyder at

$$N(n+1) = N(n)^{\Phi}$$

Φ kan derfor også estimeres ud fra Finicolai-rækken som vist ovenfor ved at tage forholdet mellem logaritmen til to på hinanden følgende led.

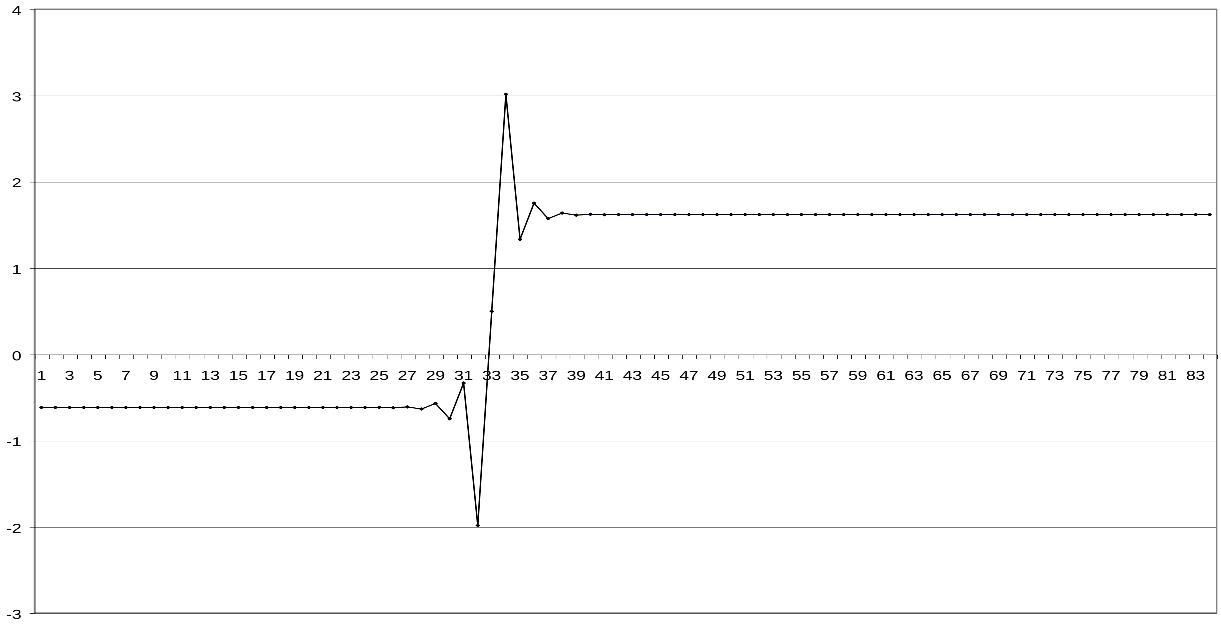
Men ligesom for Fibonacci gælder det ikke generelt at man når frem til Φ på denne måde.
Igen ved simpel regning kan man bevise at hvis de første led i Finicolai-rækken har formen

$$a \text{ og } a^{-1/\Phi}$$

hvor a er forskellig fra 1, så vil rækken konvergere mod 1.

$a^{-1/\Phi}$ kan også (jf. Afsnit 1) skrives som $a^{1-\Phi}$

Bruger man nu som input til Finicolai værdierne 0,9 og $0{,}9^{-1/\Phi} \approx 1{,}067$, tager logaritmen til to på hinanden følgende led og finder deres kvotient, fås nedenstående figur hvis input er beregnet i et Excel-regneark:



Figur 9.1 Udvikling i kvotienten for en Finicolai-række beregnet i et regneark

Med de valgte startværdier skal kvotienten gerne være lig 1-Φ fra starten, og der holder værdien sig også indtil omkring det 27. led. Her spiller Excel's regnenøjagtighed ind, og værdien begynder at fluktuere hvorefter den snart falder til ro omkring Φ.

Det kan altså konstateres at Φ fremtræder som en meget stabil værdi, og det er ikke mærkeligt at der kan opstå en myte om at Φ altid er kvotienten i en Fibonacci-række. Omvendt er med de to særtilfælde i Fibonacci og Finicolai fundet en meget smuk singularitet: Hvis man bruger eksakt de to fundne sæt af startværdier, konvergerer de respektive rækker, men kommer man bare et infinitesimalt stykke væk fra udgangsbetingelserne, vil man være tilbage i de almindelige rækker der går mere eller mindre hurtigt mod uendeligt.

Finicolai-rækken kan også defineres for komplekse tal og plotter man værdierne i et xy-diagram, vil punkterne hurtigt blive slynget ud i uendeligheden eller mod origo. Men igen kan man finde et sæt af startbetingelser hvor dette ikke sker. Primært er her set på tilfældet hvor realdel og imaginærdel er ens og lig m som er forskellig fra nul:

De to første led i denne følge af komplekse tal bliver:

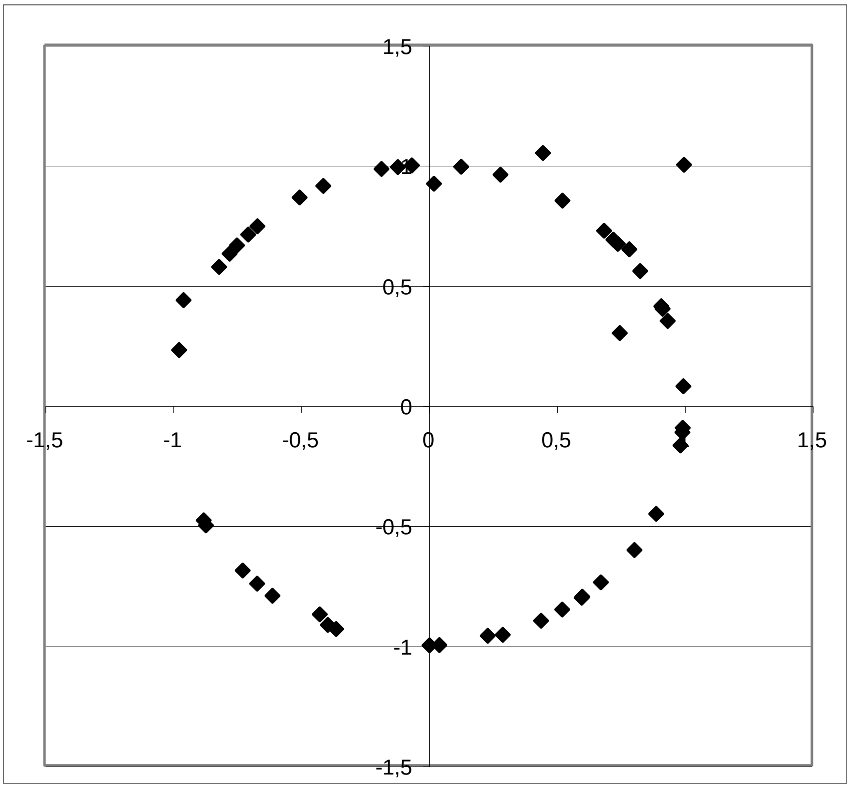
$m + im \quad (1/\sqrt{2})^{\Phi}{}_{*}m^{(1-\Phi)} + i(1/\sqrt{2})^{\Phi}{}_{*}m^{(1-\Phi)}$

hvorefter de følgende værdier tilhører gruppen af følgende tal:

$1, i, 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}, \; -1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}, \; 1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}$ og $-1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}$

indtil regnenøjagtigheden i Excel sender alle følgende punkter imod origo.

Som en illustration af andre begyndelsestilstande er medtaget nedenstående figur, der viser de første 50 led af den komplekse Finicolai-række, der starter med 1+i og 0,74937 + 0,3i (Realdelen er fundet numerisk). Først efter ca. 60 iterationer begynder punkterne at søge mod origo.



Figur 9.2 Led i en singulær, kompleks Finicolai-række

Som opsummering af resultaterne i dette og foregående afsnit og som understregning af Φ's centrale placering er nedenfor anført det andet led i de betragtede rækker når første led er m hhv. m+im, og rækken skal konvergere:

Fibonacci	$m(1-\Phi)$, $m \neq 0$
Finicolai (m reel)	$m^{(1-\Phi)}$, $m \neq 1$
Finicolai (m+im kompleks)	$(1/\sqrt{2})^{\Phi} * m^{(1-\Phi)}$ for både real- og imaginærdel, $m \neq 1$

Smukt! Værdien $(1/\sqrt{2})^{\Phi} \approx 0{,}57077$ burde man holde øje med for at se om den indgår i andre sammenhænge. Da $\cos 36° = \Phi/2$ hvilket er kendt fra Det hellige Pentagram og af talmystikere også sættes i forbindelse med Dyrets Tal (666), kan den nævnte konstant også skrives $0{,}5^{\cos 36°}$ uden at det dog viser hen mod andre sammenhænge.

10. Tilfældigheder i Fibonacci-rækken

I det følgende beskrives en udvikling af Fibonacci-rækken med tilfældige tal. Den herved fremkomne række får betegnelsen R og de enkelte led kaldes R_n. Sidstnævnte er stokastiske variable.

Tilfældighed indføres på følgende måde, hvor X_1 og X_2 er to udfald af en stokastisk variabel, der tilhører den rektangulære fordeling på intervallet]0;2]:

$R_n = X_2R_{n-2} + X_1R_{n-1}$ hvor $R_{-1} = 0$ og $R_0 = 1$

Der er her tale om en radikal ændring af Fibonacci-rækken, idet der nærmest spilles 'kvit eller dobbelt' med de to tidligere led i rækken. Grunden til, at udfaldsrummet for den rektangulære fordeling har længden 2 er netop at middelværdien så bliver 1.

Med denne middelværdi kunne man tro at R_n har en middelværdi som er lig F_n, da R_n 'i gennemsnit' bliver lig $R_{n-2} + R_{n-1}$. Dette gælder dog ikke da der er tale om produkt af de stokastiske variable, X og R. Det viser sig også at forholdet mellem to på hinanden følgende led tilnærmet bliver 1,86605. Det er her angivet med 6 cifre som gennemsnit af et antal regnearkssimulationer i milliardklassen.

Som det senere viser sig, kan man ikke nå frem til en formel for denne værdi som netop er et gennemsnit og ikke udtryk for en middelværdi. Man kan imidlertid gentage beregningen af kvotienten med aftagende værdier af bredden, 2b, af intervallet for den rektangulære fordeling, idet dens middelværdi dog stadig holdes fast på 1. Resultaterne er vist i Tabel 10.1, hvor værdien for b = 0 naturligvis bliver lig Φ.

2b	**Rn**
2	1,8660
1,75	1,7383
1,5	1,6910
1	1,6443
0	1,6180

Tabel 10.1 Simuleret værdi af kvotienten i en stokastisk Fibonacci-række

Det interessante er hvor hurtigt kvotienten nærmer sig Φ selvom der stadig (fx for b = ½) er meget stokastisk udsving i den variable størrelse X der svinger mellem 0,5 og 1,5 svarende til udtrykket: 'Det er ikke det halve galt'.

Tilfældigheder i Fibonacci-rækken er sjældent beskrevet. En søgning på Internettet leder dog frem til en matematiker ved navn Viswanath. Han indsætter et tilfældigt fortegn i den originale Fibonacci-række og kommer derved frem til en ny række og en konstant som han betegner som en universal konstant da han ikke kan finde en formel for den.

Et første forsøg på at finde en formel for kvotienten i den stokastiske Fibonacci-række består i at skrive de første led op. Her betegner x_i det i'te udfald af den stokastiske variabel X som er uniformt fordelt i intervallet]0;2]. De første led bliver da:

0
1
x_1
$x_1x_2 + x_3$
$x_1x_2x_4 + x_3x_4 + x_1x_5$
osv.

Det bliver meget hurtigt uoverskueligt, men hvis man som en grov forenkling kalder alle de stokastiske størrelser for x , kan man forenkle den stokastiske Fibonacci-række til:

R_{-1}	0
R_0	1
R_1	x
R_2	$x + x^2$
R_3	$2x^2 + x^3$
R_4	$x^2 + 3x^3 + x^4$
R_5	$3x^3 + 4x^4 + x^5$
R_6	$x^3 + 6x^4 + 5x^5 + x^6$
R_7	$4x^4 + 10x^5 + 6x^6 + x^7$
	…..

Med den valgte stokastiske variabel bliver middelværdien af variablen i en tilfældig potens lig 1, se Appendix. Middelværdien af hver linie ovenfor bliver derfor summen af koefficienterne, og man ser at resultaterne tilhører Fibonacci-rækken (fx for R_5 hvor 3+4+1 = 8) . Med den måde de er skrevet op på, kan man også straks se at man lodret har de vandrette rækker i Pascals trekant. Det er jo en kendt sag at Fibonacci-tallene kan dannes ud fra denne trekant, men her kommer det ind som en hjælp, idet rækkerne nu kan dannes automatisk i et regneark. Formelt kan værdien af det n'te led i den forenklede række skrives som:

$$R_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i} X^{n-i}$$ med en middelværdi på F(n+1) eller det n+1'te Fibonacci-tal

Middelværdierne kan – da de er Fibonacci-tal - ikke lede til andet end Φ når man dividerer et led op i det følgende.

Variansen af udtrykkene i hver linie kunne måske antyde en løsning. Variansen af en uniformt fordelt variabel X i det pågældende interval er $2^2(1/12) = 1/3$. Variansen af X^n kan ved klassisk sandsynlighedsregning – se Appendix - vises at være $(4/3)^n – 1$.

Variansen af $X^n(b)$ hvor X(b) har et udfaldsrum defineret som før ved]1-b;1+b] følger en tilsvarende enkel formel:

$$V(X^n(b)) = (1+b^2/3)^n – 1 = (1+b^2V(X))^n – 1$$

Hvis b er nul, er man tilbage i Fibonacci-rækken med en varians på nul.

Parallelt med udtrykket for middelværdien af det n'te led i den forenklede række kan variansen af det n'te led skrives som:

$$\mathrm{Var}(R_n) = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i} \left((4/3)^{n-i} - 1\right)$$

Dette indføres nemt i Excel som et sumprodukt, og hvis man nu dividerer variansen for en linie op i variansen for den følgende, får man som asymptotisk værdi 2 for n gående mod uendeligt. Dette ligner et kuriosum som ikke umiddelbart kunne forventes ud fra udtrykket for variansen. Det kan dog forklares ved følgende omskrivning:

$$\mathrm{Var}(R_n) = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i} \left((4/3)^{n-i} - 1\right) = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i} (4/3)^{n-i} - \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i} = (4/3)^n \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i} (3/4)^i - \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i}$$

Man kan så benytte [10.2] og huske at sidstnævnte led er lig F_{n+1}. Man får da ved at omsætte ¾ til x efter formlen $\frac{3}{4} = \frac{-x}{(1+x)^2}$ (hvor begge løsninger x = -3 og x = -1/3 kan bruges):

$$\mathrm{Var}(R_n) = (4/3)^n \frac{x^{n+1} - 1}{(x-1)(1+x)^n} - F_{n+1} = (4/3)^n \frac{-3^{n+1} - 1}{(-4)(-2)^n} - F_{n+1} \approx \frac{3}{4} 2^n - \Phi \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} \approx \frac{3}{4} 2^n$$

for store værdier af n da 2^n vokser hurtigere end Φ^n.

$\mathrm{Var}(R_{n+1})/\mathrm{Var}(R_n)$ går derfor mod 2 for n gående mod uendelig, og allerede for n = 20 er afvigelsen fra 2 mindre end 0,01.

$\mathrm{Var}(R_n)$ som defineret her er imidlertid ikke variansen af det oprindelige udtryk for en stokastisk Fibonacci-værdi, for som det ses af udtrykket af den oprindelige række, er de enkelte led korrelerede. Fx indgår x_4 i flere af leddene i den 5'te linie, så den sande varians vil blive noget større.

Formlen for det n'te led $\sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i} X^{n-i}$ og det tilsvarende led for det n+1'te led er af en sådan art at det forekommer umuligt at regne på kvotienten når man tager i betragtning at X^{n-i} er stokastiske variable. I stedet kan man tage udgangspunkt i forholdene et tilfældigt sted i rækken fx efter n iterationer hvor R_n for nemheds skyld kaldes R_1

Her gælder: $R_3 = X_1 * R_1 + X_2 * R_2$ og $R_4 = X_3 * R_2 + X_4 * R_3$

$R_4/R_3 = X_3 * R_2/R_3 + X_4 \Leftrightarrow R_4/R_3 = X_3 * R_2/(X_1 * R_1 + X_2 * R_2) + X_4 \Leftrightarrow$

$\frac{R_4}{R_3} = \frac{X_3 * R_2/R_1}{X_1 + X_2 * R_2/R_1} + X_4$ eller hvis man kalder kvotienten mellem to på hinanden følgende tal p:

$$p = \frac{X_3 * p}{X_1 + X_2 * p} + X_4 \Leftrightarrow p = \frac{(X_2X_4 + X_3 - X_1) +/- \sqrt{(X_2X_4 + X_3 - X_1)^2 - 4X_1X_2X_4}}{2X_2}$$

Kvotienten, p, er altså en stokastisk variabel, der kan skrives som en funktion af lutter uniformt fordelte størrelser med samme parameter. I teorien kan man vel finde fordelingsfunktion og middelværdi for denne variabel, men det synes for kompliceret til dette niveau. I stedet antages det at R_1/R_2 ikke er en variabel men fast og lig k. Udtrykket for p bliver derfor enklere:

$$p_k = \frac{X_3}{k * X_1 + X_2} + X_4$$

p_k er stadig en stokastisk variabel, men nu også en funktion af k.

I Appendix er beskrevet hvordan p_k kan beregnes analytisk. Det ses hurtigt at den stokastiske variabel X ikke må være lig nul da middelværdien i så fald ikke vil være defineret. Det forudsættes derfor at X er defineret på området [1-b;1+b] hvor b<1.

Hvis man nu itererer ved at indsætte p_k som k i beregningen indtil beregningen konvergerer, burde man opnå samme resultat som hvis man fandt en analytisk løsning af udtrykket for p ovenfor.

I nedenstående Tabel 10.2 er vist både analytiske (approksimative) og simulerede værdier af $R_n(b)$ for en række værdier af b:

2b	**p_k, approksimativ**	**p_k, simuleret**	p, simuleret	**$R_n(b)$, simuleret**
2		1,9260	4,4205	1,8660
1,99	1,9243	1,9223	2,4034	1,8513
1,75	1,7786	1,7787	1,8593	1,7383
1,5	1,7165	1,7166	1,7515	1,6910
1	1,6540	1,6539	1,6623	1,6443
0,01	1,6181	1,6180	1,6180	1,6180
0		1,6180	1,6180	1,6180

Tabel 10.2 Bestemmelse af kvotienten i en stokastisk Fibonacci-række

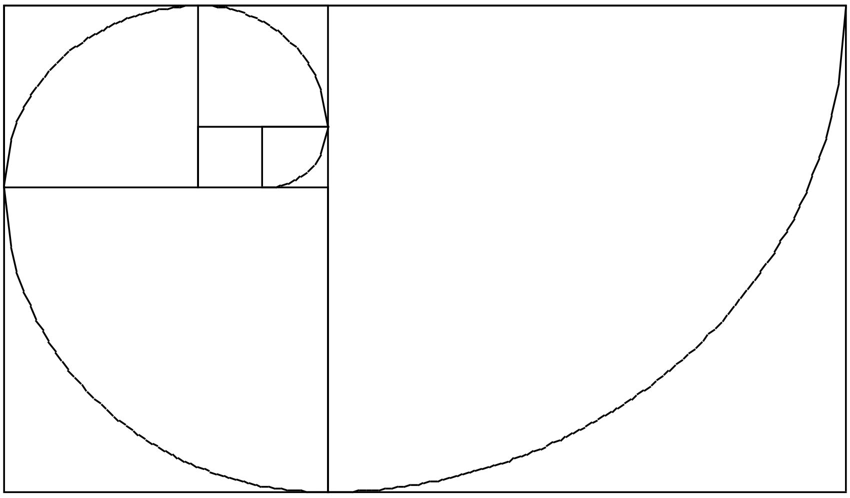
Den analytiske formel er ikke defineret for b = 0 eller b = 1. Der er passende overensstemmelse mellem p_k beregnet approksimativt og simuleret. Først for 2b = 1,99 er der en tydelig afvigelse som måske skyldes numeriske begrænsninger i Excel.

$R_n(b)$ kan vel betegnes som den sande værdi af kvotienten i den stokastiske Fibonacci-række med bredden b af den uniforme fordeling der ligger til grund. I så fald ligger p_k et stykke over den sande værdi, og afvigelsen vokser med b. Til gengæld ligger den simulerede værdi af p_k endnu længere fra den sande værdi hvor man egentlig ville forvente en bedre tilnærmelse til $R_n(b)$. Muligvis kan afvigelsen skyldes at tilfældighedsgeneratoren i Excel ikke er god nok. Dette vil betyde mere ved simulationen af p end ved simulation af p_k da nævneren i det sidste tilfælde vil være uniformt fordelt i intervallet [2-2b;2+2b] medens den i det første tilfælde vil være fordelt med en langt større del af sandsynlighedsmassen omkring værdien 1+k jf. Appendix.

Selvom det altså ikke har været muligt at vise eksakt hvordan Φ transformeres til de nye kvotienter i de her behandlede stokastiske Fibonacci-rækker, er det alligevel blevet sandsynliggjort at der ikke er tale om nye konstanter, men at de kan beregnes ved kendte sandsynlighedsteoretiske metoder.

11. Spiralen forlæns og baglæns

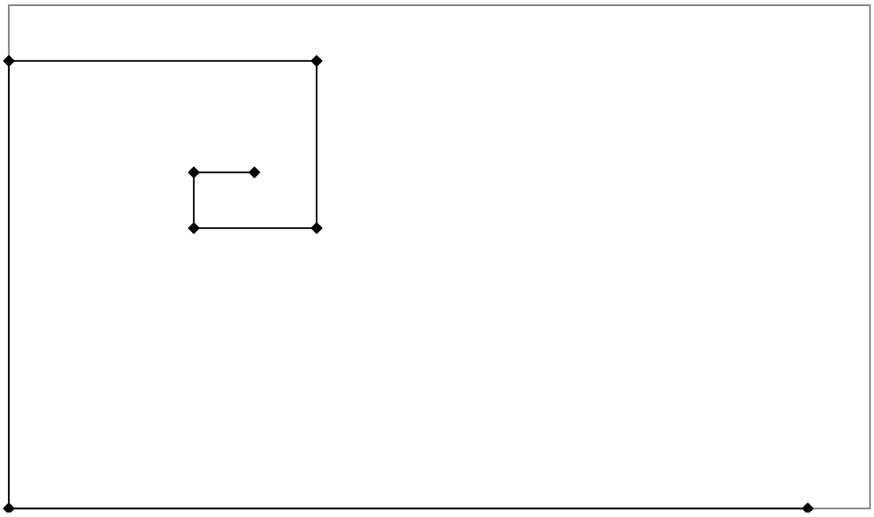
En række kvadrater med sidelængder der følger Fibonaccirækken kan arrangeres, så man får en illusion af en spiral. Denne form kan fremhæves hvis man indtegner en kvartcirkel i hvert kvadrat som vist i nedenstående figur:



Figur 11.1 Tilnærmet logaritmisk kurve

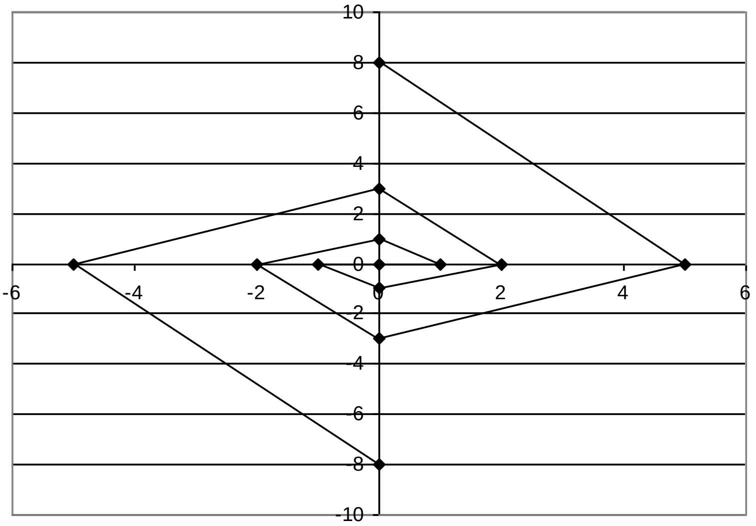
De viste kvadrater har sidelængden 1, 1, 2, 3, 5 og 8. Cirkeldelene giver tilsammen en tilnærmelse til en logaritmisk kurve.

Hvis man nu betragter centrene for cirkeldelene og forbinder disse centre med en kurve fås følgende figur:



Figur 11.2 Centre for tilnærmet logaritmisk kurve

Kurven kan dannes enkelt ud fra Fibonaccirækken behandlet med komplekse tal, så rækken overføres til planen. Idet 0 og 1 her betegnes som hhv. det første og andet led i Fibonaccirækken, kan vi danne i^n hvor n er lednummer i rækken. Når i^n afsættes i et koordinatsystem, afspejles en rotationsbevægelse gennem de fire verdenshjørner, og når så i^n ganges med F(n), fås en række punkter på hovedakserne der danner en spiral:



Figur 11.3 Fibonacci-rækken ganget med i^n

Hvis de nævnes produkter summeres fortløbende, fås grafen i Figur 11.2. I tabelform er beregningen vist nedenfor hvor RE og IM er hhv. real- og imaginærdel:

n	RE(i^n)	IM(i^n)	F(n)	X=F(n)*RE(i^n)	Y=F(n)*IM(i^n)	Sum(X)	Sum(Y)
1	0	1	0	0	0	0	0
2	-1	0	1	-1	0	-1	0
3	0	-1	1	0	-1	-1	-1
4	1	0	2	2	0	1	-1
5	0	1	3	0	3	1	2
6	-1	0	5	-5	0	-4	2
7	0	-1	8	0	-8	-4	-6
8	1	0	13	13	0	9	-6
9	0	1	21	0	21	9	15
10	-1	0	34	-34	0	-25	15
11	0	-1	55	0	-55	-25	-40
12	1	0	89	89	0	64	-40
13	0	1	144	0	144	64	104
14	-1	0	233	-233	0	-169	104

Som vist i Afsnit 8 kan Fibonacci-rækken forlænges til negative værdier af n, og vi får her en række hvis absolutte værdier er Fibonaccital, men hvor fortegnet alternerer. Afbilder man denne række i et diagram, fås et rodet billede for negative værdier af n, medens man får en nogenlunde glat, eksponentiel stigning for positive værdier af n. Multiplicerer man imidlertid også den negative del med i^n, fås følgende resultat:

n	RE(i^n)	IM(i^n)	F(n)	X=F(n)*RE(i^n)	Y=F(n)*IM(i^n)	Sum(X)	Sum(Y)	R1
-10	-1	0	89	-89	0	-25	-40	S
-9	0	-1	-55	0	55	-25	15	Ø
-8	1	0	34	34	0	9	15	N
-7	0	1	-21	0	-21	9	-6	V
-6	-1	0	13	-13	0	-4	-6	Ø
-5	0	-1	-8	0	8	-4	2	N
-4	1	0	5	5	0	1	2	V
-3	0	1	-3	0	-3	1	-1	S
-2	-1	0	2	-2	0	-1	-1	Ø
1	0	-1	-1	0	1	-1	0	N
0	1	0	1	1	0	0	0	V
1	0	1	0	0	0	0	0	S
2	-1	0	1	-1	0	-1	0	Ø
3	0	-1	1	0	-1	-1	-1	N
4	1	0	2	2	0	1	-1	V
5	0	1	3	0	3	1	2	S
6	-1	0	5	-5	0	-4	2	Ø
7	0	-1	8	0	-8	-4	-6	N
8	1	0	13	13	0	9	-6	V
9	0	1	21	0	21	9	15	S
10	-1	0	34	-34	0	-25	15	Ø
11	0	-1	55	0	-55	-25	-40	N
12	1	0	89	89	0	64	-40	V
13	0	1	144	0	144	64	104	S

Som det ses, er punkterne for den negative del sammenfaldende med punkterne fra før i den positive del. Det betyder grafisk, at når man bevæger sig mod mindre værdier af n, drejer man hele tiden til højre i spiralen, og når man når til nul, står man stille inden man bevæger sig med venstresving ud af spiralen. Som en hjælp er yderst til højre i tabellen vist bevægelsesretningen fra det pågældende punkt til det næste.

Der er derfor ingen mystik i fortegnsspringene i den forlængede Fibonacci-række hvis man blot betragter den i flere dimensioner.

12. Jubilæer og Fibonacci

Det er meget almindeligt i forretningslivet at fejre jubilæum efter at der er forløbet hhv. 25, 40 og 50 år siden ansættelsen. Men hvordan fortsætter rækken?

Efter nu at have været igennem adskillige eksempler på Lucasser og Fibonaccier volder det intet besvær at genkende de forløbne tidsrum som en Fibonacci-række med 25, 15 og 10 som de første led. De næste led bliver derfor 5, 5 og 0, og det lyder også rimeligt med en fornyet fejring efter i alt 55 år og 60 år. Samtidig antydes det også med det sidste nul at nu er det usandsynligt med flere jubilæer. Alternativt at der ikke mere er noget at fejre når den ansatte i den grad har bundet sig til en arbejdsplads i stedet for at sidde hjemme og fx beskæftige sig med hyggematematik.

Appendix

Produktet af stokastiske variable (eller division af sådanne) ses kun beskrevet i begrænset omfang og mest for den normale fordeling. Jf. dog [11.1] som nok er vanskelig at finde frem.

Det lader sig imidlertid gøre at regne på produktet af uniformt fordelte variable:

Hvis X er uniformt fordelt på intervallet]0;2] – og med frekvensfunktionen 0,5 - er $Y = X^2 = X*X$ defineret i intervallet]0;4] og har følgende fordelings- og frekvensfunktion:

F(y) = 0,25*(y –yln(y/4)) og f(y) = -0,25ln(y/4) = -(lny/4 - 0,5ln2) = $-\dfrac{\ln y - 2\ln 2}{4}$

Middelværdi og varians bliver:

E(y) = 1 og V(y) = $\dfrac{7}{9} = \dfrac{16-9}{9}$

Tilsvarende er $Z = X*Y = X^3$ defineret på intervallet]0;8] og efter adskillige besværlige udregninger kan fordelings- og frekvensfunktion bestemmes som:

F(z) = z/8 + (3zln2 – zlnz + 0,5zln^{2}z + 4,5zln^{2}2 –3zlnzln2)/8

$$F(z) = \frac{1}{16}\ln^2 z + \frac{9}{16}\ln^2 2 - \frac{3}{8}\ln 2 \ln z = \left(\frac{\ln z}{4} - \frac{3}{4}\ln 2\right)^2 = \frac{(\ln z - 3\ln 2)^2}{16}$$

E(z) = 1 og V(z) = $\dfrac{37}{27} = \dfrac{64-27}{27} = 1{,}37$

Ser man på udtrykkene for frekvensfunktionen af hhv. X, Y og Z, er det nærliggende at antage at frekvensfunktionen f_4 for X^4 bliver:

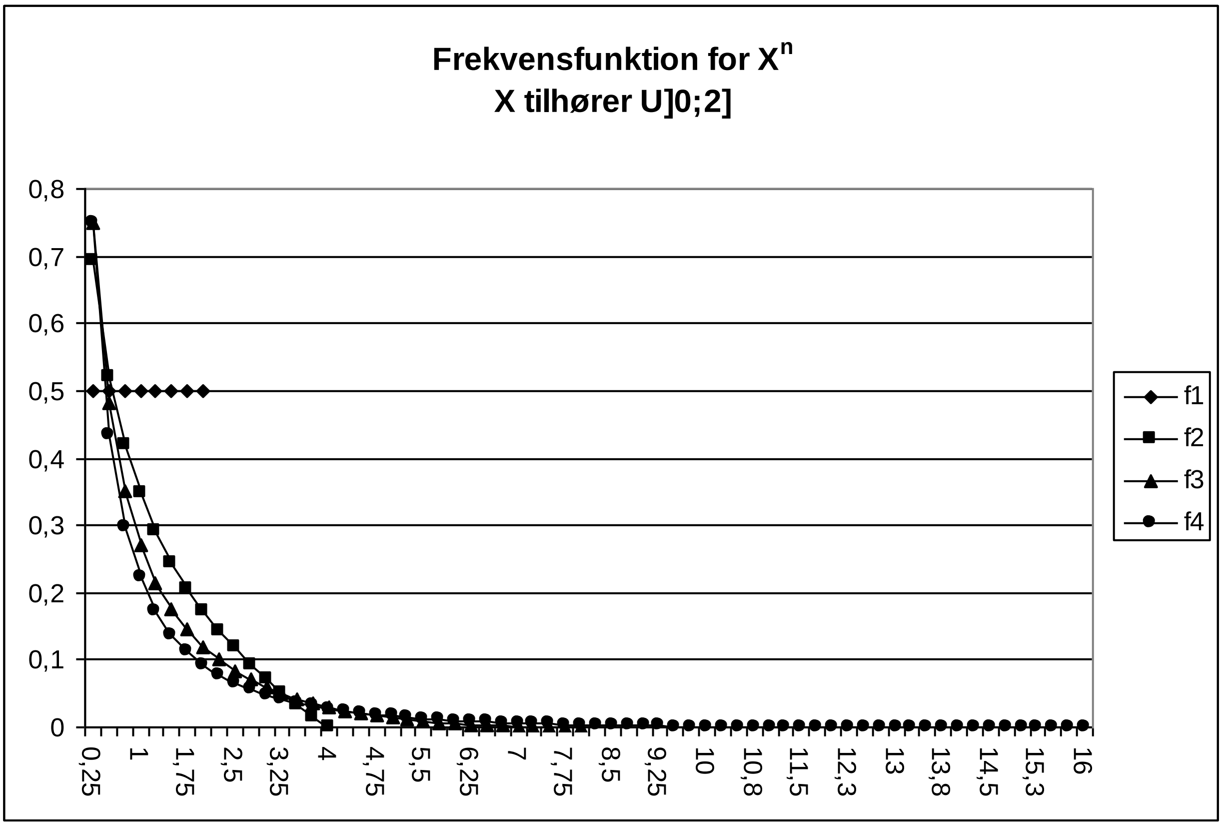
$f_4 = -\dfrac{(\ln z - 4\ln 2)^3}{96}$ og med middelværdien $\dfrac{4^4 - 3^4}{3^4} = \dfrac{256-81}{81} = 2{,}16$ eller mere generelt

$f_n = f(X^n) = (-1)^{n-1}\dfrac{(\ln z - n\ln 2)^{n-1}}{2^n (n-1)!}$ og med middelværdi på 1 og varians på $\left(\dfrac{4}{3}\right)^n - 1$

(for n= 1 fås som forventet frekvensfunktionen til ½ idet 0! = 1 og middelværdi/varians til hhv. 1 og 1/3)

Ovenstående generelle formel kan givetvis bevises ved induktion. Her er den dog blevet bekræftet ved simulation hvilket efter omstændighederne er tilfredsstillende for en ingeniør.

I den følgende figur er frekvensfunktionen for X^n vist for n = 1 til 4. Når n bliver stor ligger kurven meget tæt op ad de to akser. Middelværdien forbliver lig med 1.



Figur A.1 Frekvensfunktioner for X^n

For at kunne foretage den i Afsnit 10 omtalte beregning af p_k har det været nødvendigt at regne på en række fordelinger. Først lidt opvarmning:

Variabel	**Definition**	**Interval**	**Middel-værdi**	**Varians**	**Fordelingsfkt.**	**Frekvensfkt.**
X_2	Uniform	]0 ; 2]	1	1/3	$x_2/2$	1/2
Y_2	1/ X_2	[0,5 ; ∞[	-	-	$1-2/y_2$	$0,5/ y_2^2$
X_1	Uniform	]0,5 ; 1,5]	1	1/12	$x_1-0,5$	1
Y_1	1/ X_1	[2/3 ; 2[	ln3	$4/3-\ln^2 3$	$3/2-1/y_1$	$1/ y_1^2$
X_3	Uniform	]0 ; 1]	0,5	1/12	x_3	1
W_3	X_3/X_3	]0 ; 1]]1 ; ∞[	-	-	$w_3/2$ $1-0,5/w_3$	½ $0,5/w_3^2$
W_1	X_1/X_1	[1/3 ; 1]]1 ; 3]	ln3	$13/9-\ln^2 3$	$\frac{(1,5w_1-0,5)^2}{2w_1}$ $1-\frac{(1,5-0,5w_1)^2}{2w_1}$	$\frac{9}{8}-\frac{1}{8w_1^2}$ $\frac{9}{8w_1^2}-\frac{1}{8}$

Herefter behandles de funktioner der leder frem til beregning af p_k:

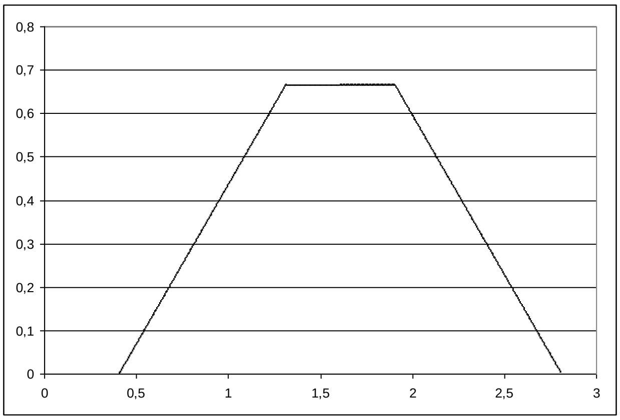
S	$X_1 + kX_1$	[a ; b] [b ; c] [c ; d]	1 + k	$\frac{1+k^2}{12}$	$\frac{(2s-(1+k))^2}{8k}$ s – k - ½ $1-\frac{((3+3k)-2s)^2}{8k}$	$\frac{2s-(1+k)}{2k}$ 1 $\frac{(3+3k)-2s}{2k}$
T	$\frac{1}{X_1+kX_1}$	$[d^{-1} ; c^{-1}]$ $[c^{-1} ; b^{-1}]$ $[b^{-1} ; a^{-1}]$	$\ln\frac{c}{b}+$ $\frac{a}{k}\ln\frac{a}{b}+$ $\frac{d}{k}\ln\frac{d}{c}$		$\frac{((3+3k)-2/t)^2}{8k}$ k – 1/t + 3/2 $1-\frac{(2/t-(1+k))^2}{8k}$	$\frac{-2/t+(3+3k)}{2kt^2}$ $\frac{1}{t^2}$ $\frac{2/t-(1+k)}{2kt^2}$
U	$X_b + kX_b$	[e ; f] [f ; g] [g ; h]			$\frac{(u-(1-b)(k+1))^2}{8b^2k}$ (u – k + b – 1)/2b $1-\frac{((1+b)(1+k)-u)^2}{8b^2k}$	$\frac{u-(1-b)(k+1)}{4b^2k}$ 1 $\frac{(1+b)(1+k)-u}{4b^2k}$
R	$\frac{1}{X_b+kX_b}$	$[h^{-1} ; g^{-1}]$ $[g^{-1} ; f^{-1}]$ $[f^{-1} ; e^{-1}]$	$\ln\frac{g}{f}+$ $\frac{e}{k}\ln\frac{e}{f}+$ $\frac{h}{k}\ln\frac{h}{g}$		$\frac{(-1/r+(1+b)(1+k))^2}{8b^2k}$ 1-(1/r – k – (1- b))/2b $1-\frac{(1/r-(1-b)(1+k))^2}{8b^2k}$	$\frac{-1/r+(1+b)(1+k)}{4b^2kr^2}$ $\frac{1}{2br^2}$ $\frac{1/r-(1-b)(1+k)}{4b^2kr^2}$

X_b tilhører U[1-b;1+b], k < 1 og

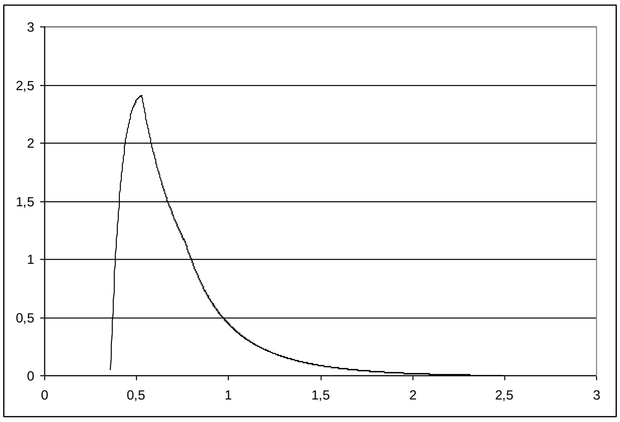
$[a\,;b]=\left[\frac{1+k}{2};\frac{1+3k}{2}\right]$ $[b\,;c]=\left[\frac{1+3k}{2};\frac{3+k}{2}\right]$ $[c\,;d]=\left[\frac{3+k}{2};\frac{3+3k}{2}\right]$

[e ; f] = [(1-b)(1+k) ; (1-b)+(1+b)k]
[f ; g] = [(1-b)+(1+b)k ; (1+b)+(1-b)k]
[g ; h] = [(1+b)+(1-b)k ; (1+b)(1+k)]

De to følgende grafer viser som eksempler frekvensfunktionerne for hhv. $U = X_b + kX_b$ og $R = \frac{1}{X_b+kX_b}$ hvor b = 0,75 og k = 0,6



Figur A.2 Frekv.fkt. for X+kX



Figur A.3 Frekv.fkt. for 1/(X+kX)

Hvis k = 1, vil grafen I Figur A.1 gå over I den kendte tagform der fås ved foldning af to uniformt fordelte variable. Svarende til grafens tre rette linier består grafen i Figur A.2 af tre dele, der skiller i toppunktet og halvt nede ad den højre del af grafen.

Middelværdien af R kan nu beregnes, og den er den samme som middelværdien af $\frac{X_b}{X_b + kX_b}$.

Der gælder nemlig at middelværdien ikke ændres ved at multiplicere en stokastisk variabel med en uniformt fordelt variabel med middelværdien 1. Dette ses ovenfor hvor middelværdien af Y_1 og W_1 er ens, men det fremgår også af følgende udledning. Her er X uniformt fordelt med frekvensfunktion f(x) og middelværdi 1, og Y er en tilfældig funktion med frekvensfunktion g(y) og middelværdi E(Y).

Hvis de to variable er uafhængige, gælder om deres produkt Z = X*Y:

$$E(Z) = \int\left(\int f(x)g(y)dx\right)dy = \int\left(\int f(x)dx\right)g(y)dy = \int g(y)dy = E(Y)$$

For nu at finde middelværdien af $\frac{X_3}{k * X_1 + X_2} + X_4$ som er målet, skal der blot adderes middelværdien af X_4 - som igen er 1 - hvorefter resultaterne i Tabel 10.2 fås.

Noter

[1.1] Se fx www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html der også giver mange links. Der findes også et tidsskrift, Fibonacci Quarterly, med artikler på et højt niveau: www.sdstate.edu/~wcsc/http/fibhome.html

[2.1] Beviset skyldes en underviser på Folkeuniversitetet, Carsten Cramon, der i øvrigt har denne hjemmeside: www.cc5.dk. Min egen metode byggede på beregning af kvotienten i et regneark og med påfølgende anvendelse af Inverse Symbolic Calculator (www.cecm.sfu.ca/projects/ISC/ISCmain.html). Her kan man ved indtastning af en værdi få forslag til en formel eller et udtryk der giver denne værdi. For en matematiker må det vel svare til at kigge i facitlisten, men det kan være en god hjælp. Fx var det opslag i ISC der viste mig at $\cos 36° = \Phi/2$ hvilket ikke er en standardværdi i formelsamlingerne.

[6.1] Min matematiklærer fra DTU, Leif Mejlbro, har vist mig hvordan man kan løse problemet vha. en lineær differensligning af første orden: $R_n = \lambda R_{n-1} + f(n)$, $n \in N$, $R_0 = a$. Men det er kompliceret, og jeg var aldrig selv kommet på denne løsning.

[10.1] www.sciencenews.org/sn_arc99/6_12_99/bob1.htm

[10.2] H.W. Gould: ”Combinatorial Identities” 1972, som var på vej I containeren på min arbejdsplads og som er fyldt med at overvældende antal summationsformler hvor binomialkoefficienter indgår

[11.1] Emnet er muligvis beskrevet i H. Sakamoto, "On the distributions of the product and the quotient of the independent and uniformly distributed random variables," *Tohoku Math. J.* 49 (1943). Tankevækkende, at selv medens stillehavskrigen rasede, studerede man dette emne på det kejserlige universitet i Japan.