Hyggeregning i sommervarmen

Hvis man tager Fibonaccirækken begyndende med startparret (1,1) og udelukkende betragter det sidste ciffer, dvs. F_n modulus 10, fås en talrække, R_0, der gentager sig selv med en periode på 60:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9, 0, 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, 1, 6, 7, 3, 0, 3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1, 0, 1

Dette har været kendt siden Lagrange i 1774, og Pisano-perioden giver perioden for andre modulus-værdier end 10.

Perioden på 60 dækker imidlertid kun en del af de 100 kombinationer man får ved at addere to tal hver fra intervallet 0 – 9. De øvrige 40 kombinationer ses af nedenstående tabel, hvor Kolonne A viser en del af R_0. I Kolonne B er vist de 20 kombinationer man får ved at starte med talparret (2,2) hvor kombinationerne udgøres af parvise naboer af de i alt 21 tal. Tilsvarende for de resterende kolonner sluttende med Kolonne F hvor talparret (0,0) ikke giver anledning til flere kombinationer.

Nummer	A	B	C	D	E	F
1	1	2	1	2	5	0
2	1	2	3	6	5	0
3	2	4	4	8	0	
4	3	6	7	4	5	
5	5	0	1	2		
6	8	6	8			
7	3	6	9			
8	1	2	7			
9	4	8	6			
10	5	0	3			
11	9	8	9			
12	4	8	2			
13	3	6	1			
14	7	4				
15	0	0				
16	7	4				
17	7	4				
18	4	8				
19	1	2				
20	5	0				
21	6	2				
22	osv.					

De 100 kombinationer falder således i seks grupper med følgende antal kombinationer:

60 20 12 4 3 1

som kaldes talrækken R_1

Dette er en aftagende række som ikke kan siges at være jævnt aftagende, og den er heller ikke medtaget i ”The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences”.

R_1 kan imidlertid fremkomme ved gentagen opdeling af 100 med en faktor 0,8:

Først tages 0,8*100 = 80, og resten på 20 opdeles ligeledes i 0,8*20 = 16 og resten 4, dvs. vi får talrækken R_2:

80 16 4

Hvis man nu lægger mærke til at de to første tal i Kolonne B er det dobbelte af de to første tal i Kolonne A (modulus 10), og tilsvarende for Kolonne D og C samt F og E, er det rimeligt at gruppere R_1 tilsvarende, og herved får man netop talrækken R_2.

Det synes også rimeligt at dele de tre tal i R_2 i forholdet 3:1 som følge af additionens grundlæggende natur hvor et startpar bestående af lige tal altid giver et lige tal, medens der er tre kombinationer ved at starte med et par bestående af et lige og et ulige tal. Bruger man forholdet 3:1 på R_2, fås R_1.

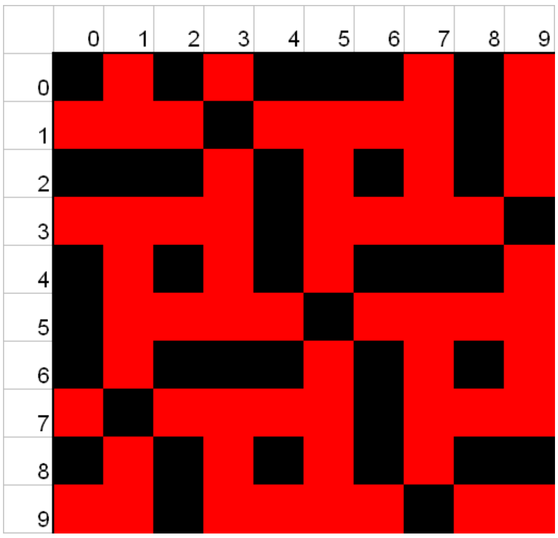
Kolonnerne A, C og E kan siges at være udgangskolonnerne, da de andre kan fås ved en fordobling af det første talpar.

De to rækker der ligger til grund for kolonnerne A og C er hhv. Fibonaccirækken og Lucasrækken med startpar (1,3). Disse to rækker forenes af noget meget interessant: Hvis man dividerer et af leddene i Lucasrækken, L_n, med det tilsvarende led i Fibonaccirækken, F_n, får man at

$$L_n / F_n \to \sqrt{5} \;\; for \;\; n \to \infty$$

Noget tilsvarende interessant kan man ikke få med kolonne E der har samme startpar som Fibonaccirækken blot ganget med 5.

Til slut et smukt mønster à la pepita-tern der fremkommer ved at farvelægge de 60 talpar fra kolonne A i et kvadratnet som vist nedenfor hvor de nævnte talpar er vist med rødt, og de øvrige med sort. Mønstret kan umiddelbart forskydes lodret og vandret og dermed gøres fladedækkende.



Jens Rasmussen
15-07-2009