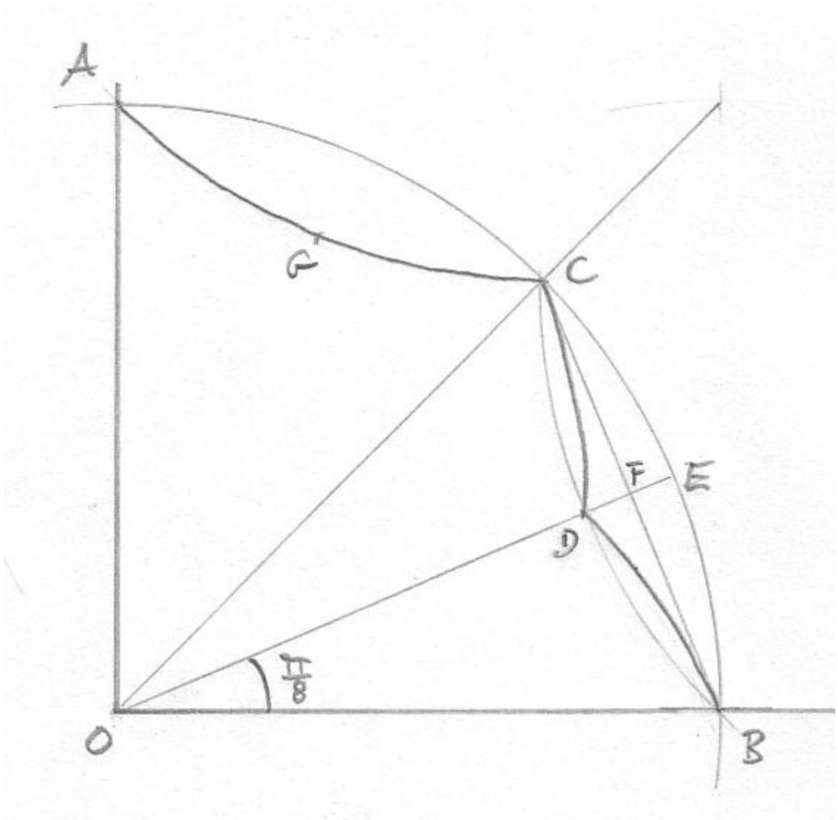
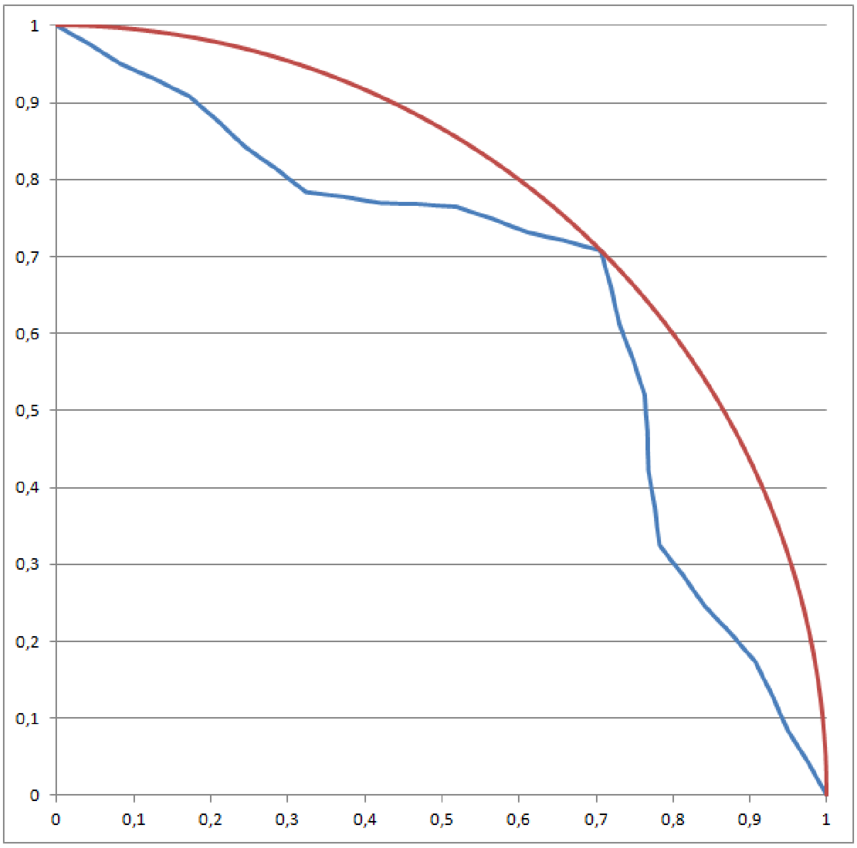
Højbjerg, 07-10-2013/jr

Arealet af den indfoldede cirkel

Hvis man tager en kvartcirkel (enhedscirkel) og halverer buen i C som vist nedenfor i Figur 1 og spejler de to halvbuer i hhv. AC og CB, fås en figur med to buer i stedet for én og med modsat krumning af den oprindelige. Dette kan man fortsætte med, og man får da figuren i Figur 2 hvor også kvartcirklen er vist. Der er ikke tale om en fraktal kurve, for dens længde er helt den samme som for den oprindelige kvartcirkel. Men kurven er på intet sted glat, den er ikke differentiabel i noget punkt. Krumningen af alle cirkelstykker er konstant. Kurven kaldes for den indfoldede cirkel.



Figur 1. Skitse



Figur 2. Den indfoldede cirkel

Det kunne nu være interessant at finde arealet af figuren inden for den indfoldede cirkel og sammenligne med arealet for kvartcirklen. Arealet er som udgangspunkt kvartcirklen som alternerende får fratrukket og adderet stadigt mindre cirkelafsnit.

Se Figur 1 som viser den første opdeling (n=1) af buen AB i de to buestykker AC og CB. Vinkel EOB er $\frac{\pi}{8}$, og arealet af cirkeludsnittet EOB er $\frac{\pi}{16}$.

Arealet af den retvinklede trekant OFB er $0{,}5 * sin\left(\frac{\pi}{4*2}\right) * \cos\left(\frac{\pi}{4*2}\right)$, og når det trækkes fra cirkeludsnittet, fås arealet af det halve cirkelafsnit CEB. Dette areal skal nu trækkes fra 8 gange fra $\frac{\pi}{4}$ for at få arealet af den indfoldede cirkel for n=1 (OAGCDBO).

Beregningen er tilsvarende for n større end 1; men for hver gang n vokser med 1, bliver der dobbelt så mange arealer der skal fratrækkes. I Figur 1 er to af cirkelbuerne for n=2 markeret (Buerne CD og DB med samme krumning som kvartcirklen).

For den endelige figur (n -> ∞) fås arealet A:

$$A = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 * 2^n (-1)^n \left(\frac{\pi}{8 * 2^n} - 0{,}5 * sin\left(\frac{\pi}{4 * 2^n}\right) * \cos\left(\frac{\pi}{4 * 2^n}\right)\right)$$

Nu ganges 2^n ind i parentesen, og udtrykket med sinus og cosinus omskrives til sinus af den dobbelte vinkel:

$$A = \frac{\pi}{4} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{8} - \frac{2^n}{4} sin\left(\frac{\pi}{2 * 2^n}\right)\right)$$

Sinusleddet rækkeudvikles herefter:

$$A = \frac{\pi}{4} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{8} - \frac{2^n}{4} \left(\frac{\left(\frac{\pi}{2 * 2^n}\right)}{1!} - \frac{\left(\frac{\pi}{2 * 2^n}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2 * 2^n}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{2 * 2^n}\right)^7}{7!} + \ \ldots \right)\right)$$

Størrelsen $\frac{\pi}{8}$ går ud mod det første led i rækkeudviklingen. For hvert af de øvrige led i rækkeudviklingen har man med voksende n en potensrække hvis sum let kan beregnes. Herved fås:

$$A = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \frac{(-1)^n}{(2^{2n} + 1) * (2n + 1)!}$$

Summationsudtrykket fremgår ikke af almindelige formelsamlinger, men ved numerisk beregning (konvergens allerede ved små værdier af n) og opslag på internettet kan gættes på følgende værdi:

$$A' = \frac{\pi}{40}\left(5 + \sqrt{3} + 2^{0{,}75}\right)$$

Dette kunne tyde på at forholdet mellem arealet af kvartcirklen og den indfoldede cirkel derfor en irrationel størrelse bestående af tre enkle led.

Den relative forskel på det numerisk beregnede og det sidstnævnte udtryk er på 10^{-8} og forskellen kan måske tilskrives beregningsusikkerheden i Excel. Der kan dog også være tale om en ren numerisk tilfældighed. Kun en analytisk løsning af summationerne ovenfor kan vise det.