Sophie Germain, 7.-9. klasse

Opgave 1 primfaktorer og divisorer

Sophie Germain (1776-1831) gjorde mange væsentlige opdagelser i talteori. I skal arbejde med nogle af dem på de næste sider, som især handler om brug af primtal. Primtal er i dag helt afgørende elementer, når man fx arbejder med at udarbejde sikre krypteringer.

Primtal spiller ofte en nøglerolle, når vi skal opdage noget om tal. Fx kan primtal bruges, når vi skal finde antallet af divisorer til et tal (divisorer er de tal, der går op i tallet).

Et eksempel: Følgende tal går op i tallet 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12 altså 6 divisorer i alt. Man kan opløse 12 i primfaktorer, altså et gangestykke kun med primtal: $12 = 2^2 \cdot 3^1$ eller $2 \cdot 2 \cdot 3$. Man kan bruge disse primfaktorer til at finde alle divisorerne undtagen 1 (som jo er divisor i alle naturlige tal) ved at multiplicere alle kombinationer af primfaktorerne: 2, 3, $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$ og $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Se på skemaet næste side. Der er en række tal, som er opløst i primfaktorer. Se skemaet igennem og kontroller, at det er gjort korrekt.

- Hvilke tal har netop to divisorer
- Hvilke typer tal har et ulige antal divisorer

Som vist ovenfor, kan man finde divisorerne undtagen 1 ved at kombinere alle primfaktorerne. Der er en anden måde, som nogle synes er lettere: Find alle gangestykker med naturlige tal, der giver tallet. Eksempel: $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Hermed får vi alle divisorerne, her skrevet i rækkefølge efter størrelse: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 og 24.

I skal udfylde de tomme felter i skemaet på næste side. De to tomme felter under "Tal" nederst i skemaet kan I bruge til at undersøge nogle tal, der interesserer jer.

- Man kan finde antallet af divisorer ved at gøre noget med eksponenterne i primtalsfaktorerne. I skal prøve at finde en regel.

Fire udfordringer

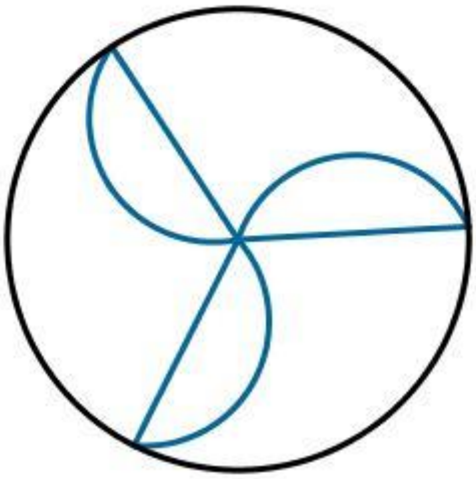
- Find et tal skrevet med primtalsfaktorer, som har netop 100 divisorer.
- Find et tal skrevet med primtalsfaktorer, som har netop 1 000 000 divisorer
- Find fire tal, der har netop 6 divisorer.
- Hvor mange tal har præcis 6 divisorer. Begrund jeres svar.

Tal	Tallet opløst i primfaktorer	Antal divisorer	Alle divisorer
2	2^1	2	1 og 2
3	3^1	2	1 og 3
4	2^2	3	1, 2 og 4
5	5^1	2	1 og 5
6	$2^1 \cdot 3^1$	4	1, 2, 3 og 6
7	7^1	2	1 og 7
8	2^3	4	1, 2, 4 og 8
10	$2^1 \cdot 5^1$	4	1, 2, 5, og 10
24	$2^3 \cdot 3^1$	8	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 og 24
144	$2^4 \cdot 3^2$	15	
300	$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2$	18	
360			
400	$2^4 \cdot 5^2$		
675			
1000			
5000			
1 000 000			

Kan man ud fra 360 og 400 i skemaet forklare, hvorfor man har valgt, at en cirkel er 360° og ikke 400°, som forsøgte at få gennemført for mere end 50 år siden?

Let omskrevet uddrag af en opgave i 10. klasseprøven, FP10 i maj 2018.

Figuren herunder er et rosettemønster, der har drejningssymmetri. Det betyder, at figuren kan flyttes over i sig selv ved at dreje hele figuren et antal grader omkring centrum.



- Hvor stor er den mindste drejningsvinkel, der fører rosettemønstret på figuren over i sig selv?

Udtrykket i den gule boks herunder beskriver sammenhængen mellem antallet af forskellige drejninger, der fører et rosettemønster over i sig selv, og den mindste drejningsvinkel.

hvor *n* er antallet af forskellige drejninger, der fører rosettemønstret over i sig selv. *n* er et helt tal større end 0.

v er størrelsen af den mindste drejningsvinkel i grader. *v* er et tal, der er større end 0 og mindre end eller lig med 360.

- Beregn antallet af forskellige drejninger, der fører rosettemønstret over i sig selv, når størrelsen af den mindste drejningsvinkel er 30°.
- Undersøg, hvilke værdier *n* kan have, hvis *v* skal være et helt tal.

Lykkelige tal

Når man beskæftiger sig med talteori omkring de naturlige tal, opdager man ofte interessante ting. Her skal vi beskæftige os med de såkaldte lykkelige tal. Et lykkeligt tal finder man ved at finde kvadratet af hvert af dets cifre og lægge dem sammen. Det bliver man ved med indtil resultatet eventuelt ender med 1. Så er der nemlig tale om et lykkeligt tal.

Er 19 et lykkeligt tal?

$1^2 + 9^2 = 1 + 81 = 82$

$8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68$

$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

$1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$

19 er altså et lykkeligt tal!

Er 11 et lykkeligt tal?

$1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$

$2^2 = 4$

$4^2 = 16$

$1^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37$

$3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$

$5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$

$8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$

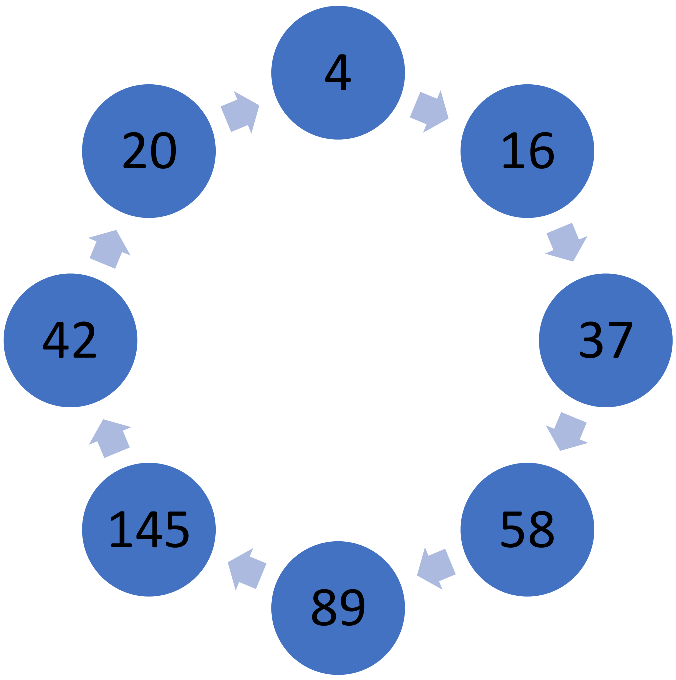
$1^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 16 + 25 = 42$

$4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$

$2^2 + 0^2 = 4$

Vi er vendt tilbage til 4 og det vil vi blive ved med. Vi ender ikke på 1 og derfor er 11 ikke et lykkeligt tal.

Hver gang vi ender i en cyklus af tallene herunder, ved vi, at det tal vi undersøger, ikke er et lykkeligt tal



- 20 af de første 100 naturlige tal er lykkelige tal. I skal i klassen samarbejde og finde de 20 lykkelige tal.
- Er et lykkeligt tal plus et andet lykkeligt tal altid et lykkeligt tal?
- Er produktet af to lykkelige tal altid et lykkeligt tal?

- Sophi Germain blev født i 1776 – er det tal et lykkeligt tal?

Sophie Germain-primtal

Et primtal p er et Sophie Germain-primtal hvis 2p + 1 også er et primtal. Tallet 2p + 1 kaldes et sikkert primtal, hvis p er et Sophie Germain-primtal.

Et eksempel:

29 er et Sophie Germain-primtal og $2 \cdot 29 + 1 = 59$ er dets tilhørende sikre primtal.

Sophie Germain-primtal og sikre primtal finder anvendelser i krypteringsnøgler og primtalstest. Det er antaget, at der er uendeligt mange Sophie Germain-primtal, men det er stadig ikke bevist.

Her er primtallene under 1000:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59

61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137
139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307
311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397
401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467	479	487
491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677
683	691	701	709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787
797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883
887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

- I skal finde så mange Sophie Germain-primtal, som I kan.