Über Geometrie und den Unsinn vom gekrümmten Raum

Mathias Hüfner

Der Large Hadron Collider sorgt mangels echter nachprüfbarer Ergebnisse für Mythen, wie zB. die Meinung, man könne Mini-Schwarze Löcher damit erzeugen oder neue Dimensionen entdecken. So ist es sicher notwendig, einmal ein paar Grundlagen der Geometrie zu beleuchten.

Die Geometrie als eine Abstraktion der Realität ist eine der ältesten Wissenschaften. Ihre Wurzeln liegen im alten Ägypten und bereits vor fünftausend Jahren wurde sie zur Landvermessung eingesetzt. Ihren vorläufigen Entwicklungs-Abschluß fand sie etwa vor 2300 Jahren und ist seither mit dem Namen Euklid verbunden.
Die Geometrie wurde deduktiv aufgebaut. Eine deduktive Darstellung umfasst als wesentliche Elemente

1. die Aufzählung der Grundbegriffe,
2. die Erklärung des Sinns der Grundbegriffe
3. die Aufstellung von Axiomen
4. die Angabe von Sätzen
5. den Beweis dieser Sätze

Allen Erklärungen liegen Grundbegriffe zugrunde, die selbst nicht definiert werden, und allen Beweisen liegen Axiome zu Grunde, die selbst nicht bewiesen werden. Es ist deshalb sinnvoll, die Anzahl der Axiome möglichst klein zu halten.

Die Darstellung der Geometrie muss mit einer Einführung der Grundbegriffe und der Axiome beginnen. Alle Beziehungen zwischen den Grundbegriffen werden durch die Axiome charakterisiert. Die Axiome bilden die Grundlage zum Beweis jedes Satzes der Geometrie, während sie selbst nicht bewiesen werden. Die Euklidische Geometrie betrachtet drei Grundobjekte: Punkt, Gerade und Ebene. Sowie die drei Grundbeziehungen: die Verknüpfung, die Beziehung zwischen … liegen und die Beziehung der Bewegung.
Daraus resultieren fünf Gruppen von Axiomen

1. Die Axiome der Verknüpfung
2. Die Axiome der Anordnung
3. die Axiome der Bewegung
4. Das Stetigkeitsaxiom
5. das Parallenaxiom

Das Parallelenaxiom gab den Mathematikern viele Jahrhunderte Rätsel auf. Da es komplizierter als alle anderen ist, nahmen sie an, dass man es beweisen könne und damit die Zahl der Axiome zu verringern. Es haben sich viele daran ohne Erfolg versucht.

Nikolai Lobatschewski hat nach 1826 einen indirekten Beweis gewagt. Er ersetzte das Parallenaxiom durch die Annahme, dass eine Senkrechte und eine Schräge zu einer Geraden sich nicht zu schneiden brauchen. Daraus begann er Schlussfolgerungen zu ziehen, in der Hoffnung, auf einen Widerspruch zu stoßen. Damit wäre die dem Parallelenaxiom entgegengestellte Annahme widerlegt und das Parallelenaxiom als solches identifiziert.
Zu seinem Erstaunen fand er aber eine ganz neue Geometrie. Er formulierte:
Wir sagen, dass die Winkelsumme eines geradlinigen Dreiecks nicht größer als π sein kann. Es bleibt die Möglichkeit, diese Summe gleich π oder kleiner als π anzunehmen. Das eine und das andere kann ohne jeden Widerspruch in den Folgerungen angenommen werden; .dadurch entstehen zwei Geometrien, die eine ist die gewöhnliche und die andere ist die imaginäre.

Karl Friedrich Gauß war mit der Landesvermessung zwischen 1818 und 1826 im Land Hannover betraut worden und dabei entdeckte er auch, dass die Winkelsumme in großen geodätischen Dreiecken größer als π war.
Doch das Merkwürdige in der Euklidischen Geometrie und auch bei Lobatschewski ist, dass die Grundbegriffe der Geometrie der Punkt, die Gerade und die Ebene sind, der Raum aber überhaupt nicht vorkommt.
Mathematisch ist ein Raum ein Merkmalstupel, dessen Merkmale voneinander unabhängig sind.

Beispiele: die Ebene E(X,Y), der geometrische Raum R(X,Y,Z) bzw. in Winkelkoordinaten R(R,Φ, Ψ), der Prozess P(X,Y,Z,T) , der Farbraum F(Rot, Gelb, Blau), aber auch eine relationale Datenbank kann als ein Merkmalsraum aufgefasst werden. Sie haben richtig gelesen, die Ebene ist streng genommen ein Unterraum des geometrischen Raumes. Er besteht aus den zwei unabhängigen Merkmalen Länge und Breite. Da diese beiden Merkmale durch reelle Zahlen ausgedrückt werden, die man messen kann, nennt man das einen metrischen Raum die metrischen Merkmale Dimensionen. Für metrische Räume gibt es zusätzlich noch ein Abstandsmaß.

Die Unabhängigkeit der Dimensionen wird dadurch gekennzeichnet, dass die Schnittmengen der Merkmalsmengen, aus denen die Dimensionen bestehen, leer sind.
Für metrische Räume bedeutet das, dass das Skalarprodukt der Einheitsvektoren verschwindet, was wiederum bedeutet, dass die Koordinatenachsen senkrecht aufeinander stehen. Ohne diese Festlegung kann man strenggenommen keine Geometrie betreiben. Das senkrecht stehen der Koordinatenachsen allein ist somit kein hinreichendes Kriterium für die Unabhängigkeit der Merkmale. Wenn nämlich die Koordinatenachsen durch Funktionen beschrieben werden, kann man zwar partiell das Senkrechtstehen erreichen, aber über die ganze Funktion ist das nicht mehr gewährleistet.
Wir betrachten einen metrischen Raum, dann können wir Punkt, Ebene und Gerade als Elemente des Raumes erklären.
Ein Punkt p(x,y,z) ist dann ein Element des Raumes.R(X,Y,Z)
Eine Eben, für die z für alle Punkte konstant ist, ist dann ein Unterraum E(X,Y), jede Gerade, die keine Koordinatenachse ist, für die gibt es eine Funktion im Unterraum E(X,Y) $y= ax+b$
Mittels Funktionen kann ein Raum begrenzt werden. Der Unterschied zwischen Funktion und Raum besteht darin, dass die Funktion eine Abhängigkeit zwischen den Dimensionen herstellt. Eine Funktion teilt den Raum in zwei Teilräume. Die Grenze wird durch die Funktionen beschrieben.
Kehren wir nun zu dem Parallelenaxiom zurück.
Anstelle des Parallelenaxioms verwenden wir das Dreieck, dessen Winkelsumme π in der Euklidischen Geometrie ist. Das ist gleichbedeutend mit der Tatsache, dass das Dreieck in der Ebene liegt. Die Grundelemente einer Geometrie sind also:
1. ein Raum
2. Punkte als Elemente des Raumes
3. eine Ebene dh. Unterraum
4. Funktionen zur Begrenzung des Unterraumes

Stelle ich die Forderung auf, dass die Winkelsumme im Dreieck verschieden von π sein soll, führt das aus der Euklidischen Geometrie heraus. Diese Forderung ist nur zu erfüllen, wenn man die Fläche des Dreiecks krümmt. Die Krümmung bewirkt, dass die lineare Begrenzung des Dreiecks eine nichtlineare wird. Die Dimension des Unterraumes muss um eine weitere Dimension erhöht werden, da das Dreieck dann nicht mehr in einer Ebene liegen kann. Man benötigt den Krümmungsradius als ein zusätzliches Merkmal, das unabhängig von der Ebene ist, dh. auf ihr senkrecht steht. Der Krümmungsradius ist deshalb eine Funktion im Raum und diese Funktion beschreibt die Oberfläche auf der das Dreieck liegt. Der Krümmungsradius kann dann als eine Abstandsfunktion von einem Krümmungszentrum aufgefasst werden und in den Raumkoordinaten ausgedrückt werden:

$$r = f(x, y, z)$$

f(x,y,z) ist ein Polynom höheren Grades. Damit ist aus der Ebene eine gekrümmte Oberfläche geworden. Aus dem Unterraum wird infolge der Krümmung eine Funktion in der die Koordinaten nicht mehr voneinander unabhängig sind, da ich die Forderung gestellt habe, dass die Winkelsumme im Dreieck verschieden von π sein soll.
Für die Beschreibung der Geometrie auf der Erdoberfläche ist r = 6378 km. Daraus ergibt sich die Frage, wie groß die Abweichung der Winkelsumme von π in einem geodätischen Dreieck ist.

Ohne Beweis sei hier angemerkt, dass der Defekt eines Dreiecks infolge der Krümmung proportional seinem Flächeninhalt dividiert durch das Quadrat des Krümmungsradius ist. Das gibt für den Defekt einen dimensionslosen Faktor.[1]
Man sieht daran schon, dass ein geodätisches Dreieck ziemlich groß sein muss, wenn man eine spürbare Abweichung nachweisen will. Gauß soll das an dem Dreieck Brocken, Inselsberg und Hohenhagen zu testet versucht haben. Ergebnisse sind nicht bekannt. Aber da er das als ein Lichtstrahl-Dreieck getestet hat, unterlag das Dreieck anders als die Erdoberfläche keiner Krümmung, da die Lichtstrahlen nicht der Krümmung der Erdoberfläche folgen. So dürfte das Ergebnis im Rahmen des Messfehlers π ergeben haben und es konnte so keine Krümmung nachgewiesen werden. Die Krümmung der Lichtstrahlen wird durch die optischen Dichten von durchsichtigen Stoffen hervorgerufen. Dass die Gravitation ebenfalls eine Krümmung der Lichtstrahlen bewirken könne, ist niemals zweifelsfrei nachgewiesen worden. Greifen doch Kräfte an Massen an und Licht wird nicht durch Massen, sondern durch ein elektromagnetisches Feld transportiert.
Nun kann man den Vorgang verallgemeinern. Durch die Krümmung wird ein Unterraum stets in eine Oberfläche verwandelt, die eine Funktion der Krümmung ist. Durch die Einführung einer Krümmung, die senkrecht auf der Hyperfläche steht, muss der Raum um eine Dimension erweitert werden. Im Falle der dreidimensionalen Hyperfläche brauchen wir einen vierdimensionalen Raum. Dann können wir auf der gekrümmten Hyperfläche Geometrie betreiben. Wir sehen, dass wir bei der Verallgemeinerung keinen gekrümmten Raum, sondern eine gekrümmte Hyperfläche erhalte. Ein Raum kann schon per Definition nicht gekrümmt sein. Aber in einem Raum können gekrümmte Oberflächen existieren. Das ist ein wesentlicher Unterschied.
Nehmen wir mal an, unser Kosmos wäre kein Raum, sondern eine gekrümmte Hyperfläche, dann könnten wir abschätzen, wie groß dieser Krümmungsradius mindestens sein müsste, um auf Grund der Parallaxe nicht mehr nachweisbar zu sein.

In der Astronomie sind die größten Dreiecke die, welche der Erdbahndurchmesser mit einem Stern bilden kann. Dann ist die Parallaxe nach A.P. Norden[2], die der Auflösungsgrenze des Hubbleteleskops entspricht :

$$ß > \frac{a}{r}$$

Parallaxe: β = 0,05“ --> $24 \cdot 10^{-8}$ rad, die gerade noch gemessen werden kann.
Erdbahndurchmesser: a = $158 \cdot 10^{-7}$ Lichtjahre
Daraus folgt ein Krümmungsradius von

$$r > 65{,}8\ \textit{Lichtjahre}$$

1 A. P. Norden: Elementare Einführung in die Lobatschewkische Geometrie VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1958 S.182 ff
2 Dito S.207

Die geometrische Entfernungsbestimmung über die Parallaxe reicht bis maximal 100 Lichtjahre. Größere Entfernungen werden über optische Verfahren mit Zusatzhypothesen bestimmt, deren Richtigkeit sich jedoch einer eindeutigen Überprüfung entziehen. Aus diesen Verfahren ergibt sich

für unsere Milchstraße zum Vergleich ein Radius von 50.000 Lichtjahren. Damit müsste sich auch der Krümmungsradius um Größenordnungen vergrößern, sonst würden wir nie aus unserer Milchstraße hinaussehen können. Und wo wäre die 4. Raumdimension, die senkrecht auf den drei Raumdimensionen stehen müsste. Inzwischen haben wir Strukturen bis in Entfernungen von über 200 Millionen Lichtjahren entdeckt. Doch je größer die Entfernungen werden, desto größer sind auch die Unsicherheiten in ihren Angaben. Dass die Gravitation eine Krümmung der Lichtstrahlen bewirken könne, ist niemals zweifelsfrei nachgewiesen worden, da es in der Nachbarschaft von Sternen immer auch eine Atmosphäre gibt, die eine Licht-Brechung verursacht.

Zweifellos kann es erbaulich sein, Geometrie auf gekrümmten Oberflächen zu treiben - für Geographen ist das sogar zwingend notwendig -, doch warum soll man annehmen, dass unserer Kosmos eine gekrümmte Oberfläche sei? Der Grund dafür ist die Annahme, dass die Massen im Universum über große Strecken homogen verteilt seien, wie man noch zu Beginn des 20. Jahrhunderts glaubte. Bei einer solchen Verteilung müsste das Gravitationspotential über alle Maßen wachsen, was aber unwahrscheinlich ist. Die Möglichkeit einer inhomogenen Verteilung der Massen wurde nicht erwogen.

Andererseits ist die Annahme, dass die Masse die Geometrie beeinflusst, schon etwas sehr abwegig, da Geometrie wie jede Mathematik etwas ist, was mit Information zu tun hat und das läuft in unserem Geist ab. Es kann höchstens passieren, wenn man sich ordentlich den Kopf stößt, infolge der Gravitation. Selbst Einstein hielt diese Idee für verrückt, wie er seinem Freund Ehrenfeld gestand.[3] Er muss aber Freude daran gefunden haben, die Leute zu veralbern. Ansonsten sind Geist und Materie zwei verschiedene Welten und da lehrt die Erfahrung, dass die Gravitation an die Massen gebunden ist. Nur Paul Dirac[4] ist Einstein nicht auf den Leim gegangen. Er stellte fest, dass an gekrümmten Oberflächen die Bedingen für eine relativistische Quantentheorie nicht erfüllt seien.

Ich behaupte, dass es zu jeder gekrümmten Fläche einen Raum mit einer Dimension mehr als die Fläche gibt, in der die Fläche eingebettet ist und es gibt auch eine Abbildung der Fläche in einen Unterraum. Aber eine gekrümmte Oberfläche bleibt eine Oberfläche. Physikalische Massen nehmen Volumen ein und werden durch Oberflächen begrenzt. Das Volumen wird aber mittels eines dreidimensionalen Raumes beschrieben. Oberflächen werden durch Funktionen im Raum beschrieben, egal wie krumm sie sind. Wir erleben den Kosmos als ein Volumen, in dem unsere Erde sich um die Sonne dreht und nicht als begrenzende Oberfläche. So sind auch Schwarze Löcher als Produkte der allgemeinen Relativitätstheorie, die den Raum angeblich krümmen sollen, nichts als schwarze Magie.

---

3 A. Einstein *"Ich habe schon wieder was verbrochen in der Gravitationstheorie, was mich ein wenig in Gefahr setzt, in einem Tollhaus interniert zu werden."* - Brief an Paul Ehrenfest, 4. Februar 1917, zitiert nach Alice Calaprice (Hrsg.): Einstein sagt - Piper-Verlag, München, Zürich 1996, ISBN 3-492-03935-9, Seite 139. Siehe auch Frank Steiner bpb.de

4 P. Dirac Lectures on Quantum Mechanics Quantzaion on curved surfaces dover books 2001 S. 66