Samenvatting H09 Exponentiële en logaritmische functies
vwo wiskunde B, Getal & Ruimte editie 11

Logaritme
Er zijn drie rekenkundige bewerkingen met machten:

1. machtsverheffen: $x = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (2 wordt 3 keer met zichzelf vermenigvuldigd)
2. worteltrekken: $x^3 = 8 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{8} = 2$, want $2^3 = 8$.
3. logaritme nemen: $2^x = 8 \;\Rightarrow\; x = {}^2\log 8 = 3$, want $2^3 = 8$.

Met het **logaritme** kun je dus een **onbekende exponent berekenen**.
In dit geval bereken je de exponent waarmee je grondtal 2 moet verheffen om 8 te krijgen.
In het algemeen geldt:

$${}^g\log x = c \;\Rightarrow\; g^c = x$$

De grafiek van $f^{inv}(x) = {}^g\log x$ is de inverse van $f(x) = g^x$, dus elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

Dit betekent dat beide functies elkaar opheffen, dus $g^{{}^g\log x} = x$ en ${}^g\log\left(g^x\right) = x$.

Als er geen grondtal bij het logaritme staat aangegeven, is het grondtal 10 (tientallig getallenstelsel).

Verder geldt dat ${}^g\log x = \dfrac{{}^p\log x}{{}^p\log g}$ voor ieder grondtal p > 0. Bewijs: zie bijlage.

NB. Op de HP Prime bereken je ${}^2\log 8$ met LOG(8, 2).

Rekenregels machten

Rekenregels logaritmen

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ machten met eenzelfde grondtal vermenigvuldigen ⇔ exponenten optellen

logaritmen met eenzelfde grondtal optellen ⇔ onderliggende machten vermenigvuldigen

$${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ machten met eenzelfde grondtal delen ⇔ exponenten aftrekken

logaritmen met eenzelfde grondtal aftrekken ⇔ onderliggende machten delen

$${}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$\left(a^p\right)^q = a^{p \cdot q}$ een macht tot een macht ⇔ exponenten vermenigvuldigen

getal met logaritme vermenigvuldigen ⇔ onderliggende macht tot een macht verheffen

$$n \cdot {}^g\log(a) = {}^g\log\left(a^n\right)$$

Logaritmische vergelijkingen oplossen
Uit de grafiek van een exponentiële functie volgt dat $g^A = g^B \;\Leftrightarrow\; A = B$.

Uit de grafiek van een logaritmische functie volgt dat ${}^g\log(A) = {}^g\log(B) \;\Leftrightarrow\; A = B$.

Logaritmisch papier

Bij logaritmisch papier zijn één of beide assen op een andere manier ingedeeld. In plaats van lineair, dus met gelijke stapjes, stijgt de waarde logaritmisch met als grondtal 10. Dat betekent dat de exponent lineair stijgt, maar de onderliggende waarde van de macht exponentieel toeneemt.

Voorbeeld: als een logaritmische as linksonder begint met 10^1 en hij de waarde wordt iedere 5 cm vertienvoudigd, dan betekent het dat op 3 cm hoogte de waarde $10^{1+\frac{3}{5}} = 10^{1,6} \approx 39,8$ is.

Andersom betekent dat bij een rechte lijn op enkelvoudig logaritmisch papier een exponentiële functie hoort.

Transformaties

Soort functie		**Translatie (p, q) = verschuiving p naar rechts, q omhoog**	**Vermenigvuldiging t.o.v. x-as met factor a en y-as met factor b**
$y = g^x$	Exponentieel	$y = g^{x-p} + q$	$y = a \cdot g^{\frac{x}{b}} = a \cdot \left(g^{\frac{1}{b}}\right)^x$
$y = {}^g\log x$	Logaritmisch	$y = {}^g\log(x-p) + q$	$y = a \cdot {}^g\log\left(\frac{x}{b}\right) = a\left({}^g\log x - {}^g\log b\right)$

NB. De volgorde waarin je de transformaties toepast, is van invloed op de functie die ontstaat.

Grondtal e

Er is één unieke functie waarvoor geldt dat de afgeleide gelijk is aan de functie zelf.
Voor $f(x) = e^x$ geldt dat $f'(x) = e^x$ met e = 2,71828... (e = constante van Euler).
Dit is een exponentiële functie met grondtal e waarvoor alle rekenregels voor machten gelden.

Evenzo bestaat er een logaritmische functie met grondtal e. Dit wordt het natuurlijk logaritme genoemd en afgekort tot $f(x) = \ln(x)$. Hiervoor gelden alle rekenregels voor logaritmen.

Leer de volgende tabel uit je hoofd. De bewijzen staan in de bijlage.

Functie	**Afgeleide**
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = g^x$	$f'(x) = g^x \cdot \ln(g)$
$f(x) = {}^g\log(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(g)}$

Verder gelden ook bij deze functies de productregel, quotiëntregel en kettingregel.

Voorbeeld: bepaal de afgeleide van $f(x) = e^{5x} \cdot {}^5\log\left(x^2 + 3x\right)$.

$$f'(x) = \left[e^{5x}\right]' \cdot {}^5\log\left(x^2+3x\right) + e^{5x} \cdot \left[{}^5\log\left(x^2+3x\right)\right]'$$

$$= e^{5x} \cdot 5 \cdot {}^5\log\left(x^2+3x\right) + e^{5x} \cdot \frac{1}{\left(x^2+3x\right) \cdot \ln 5} \cdot (2x+3)$$

Bijlage: bewijzen

Te bewijzen: ${}^{g}\log x = \dfrac{{}^{p}\log x}{{}^{p}\log g}$.

Bewijs in §9.1 theorie D op blz. 15 met grondtal p i.p.v. grondtal 10:

$$\left(p^{\,{}^{p}\log g}\right)^{{}^{g}\log x} = g^{\,{}^{g}\log x}$$

$$p^{\,{}^{p}\log g\,\cdot\,{}^{g}\log x} = x$$

$$p^{\,{}^{p}\log g\,\cdot\,{}^{g}\log x} = p^{\,{}^{p}\log x}$$

$${}^{p}\log g \cdot {}^{g}\log x = {}^{p}\log x$$

$${}^{g}\log x = \frac{{}^{p}\log x}{{}^{p}\log g}$$

Te bewijzen: als $f(x) = g^{x}$ dan is $f\,'(x) = g^{x}\ln g$.

Bewijs in §9.5 theorie A op blz. 46:

$$f(x) = g^{x} = \left(e^{\,{}^{e}\log g}\right)^{x} = e^{\,{}^{e}\log g\,\cdot\,x}.$$

$$f\,'(x) = e^{\,{}^{e}\log g\,\cdot\,x} \cdot {}^{e}\log g \quad (kettingregel)$$

$$f\,'(x) = g^{x} \cdot \ln g$$

Te bewijzen: als $f(x) = \ln(x)$ dan is $f\,'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Bewijs in §9.5 blz. 49 opgave 80 a en b:

$$e^{\,{}^{e}\log x} = e^{\ln(x)} = x.$$

Links en rechts differentiëren geeft

$$e^{\ln(x)} \cdot [\ln(x)]\,' = 1$$

$$[\ln(x)]\,' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

Te bewijzen: als $f(x) = {}^{g}\log x$ dan is $f\,'(x) = \dfrac{1}{x\ln(g)}$.

Bewijs in §9.5 theorie C op blz. 49:

$$f(x) = {}^{g}\log x = \frac{{}^{e}\log x}{{}^{e}\log g} = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \ln(x)$$

$$f\,'(x) = \frac{1}{\ln(g)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln(g)}$$