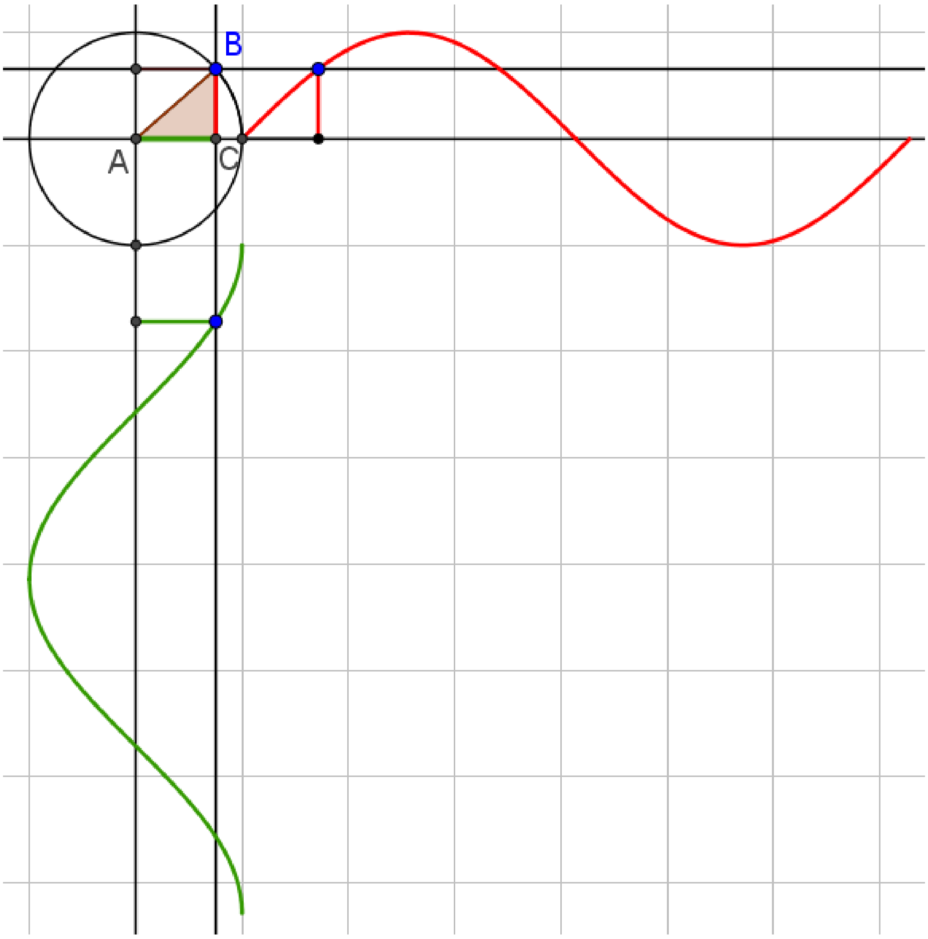
Sinusoïden



Inhoudsopgave

Stap 1: Verdiepen van het begrip in goniometrische verhoudingen

Sinus *en* ***cosinus*** *als* ***verhoudingsgetallen***

Opdracht 1

Teken een rechthoekige driehoek ABC met de rechte hoek bij C. Nummer de hoeken, in tegenstelling tot wat we normaal gesproken doen, met de wijzers van de klok mee.
NB. Deze rechthoekige driehoek zullen we in de goniometrie nog vaak gebruiken.

Opdracht 2

a) Construeer een ΔABC met $a = 3$, $b = 4$ en $c = 5$.
b) Spiegel ΔABC in de lijn AC, dit geeft $\Delta A'B'C'$.
c) Roteer $\Delta A'B'C'$ om hoek A over 120°. Zo ontstaat $\Delta A''B''C''$.
d) Verklein $\Delta A''B''C''$ met factor 2 tot $\Delta A'''B'''C'''$.
e) Meet bij iedere driehoek zijden a en c en bereken de verhouding tussen zijden a en c. Wat valt je op?

Dit leidt tot de volgende conclusie:

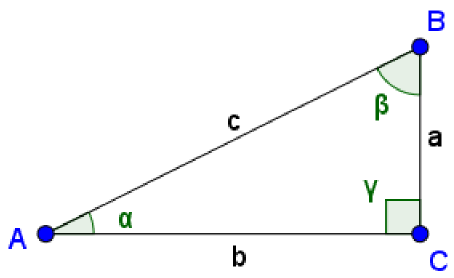
De verhouding van de zijden a en c blijft gelijk,
ook als we de rechthoekige driehoek transformeren
(spiegelen, transleren, roteren, vergroten of verkleinen).

De verhouding van de zijden a en c in een rechthoekige driehoek hangt dus alleen af van hoek α.
Deze verhouding is zo belangrijk dat hij een eigen naam heeft gekregen: de sinus van hoek α.

Er geldt: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$.

> *Terzijde*
> *De Arabieren introduceerden het begrip sinus als gib, wat letterlijk koorde betekent.*
> *In de 12e eeuw werden de Arabische werken vertaald naar het Latijn. Hierbij werd gib verward met gaib, dat bocht of boezem betekent. Het Latijnse woord hiervoor is sinus. Ondanks de foute vertaling is het begrip sinus ingeburgerd geraakt in de wiskunde.*
> Bron: https://nl.wikipedia.org/wiki/Sinus_en_cosinus.

In een ***eenheidsdriehoek*** is de Schuine zijde = c = 1 geldt:



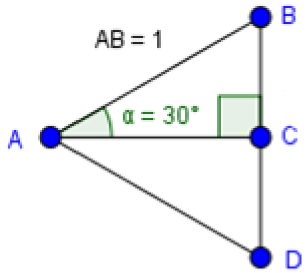
$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{a}{1} = a \text{ = hoogte van deze driehoek.}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} = b \text{ = lengte van de basis.}$$

Exacte-waarden-driehoeken

Opdracht 3

Neem gelijkzijdige driehoek ABD met snijpunt C van loodlijn uit A op BD.
Zie de tekening hiernaast.



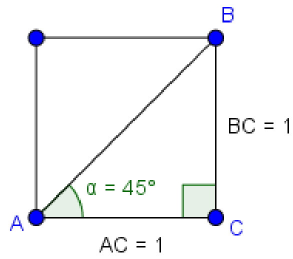
a) Bewijs met behulp van deze tekening dat $\sin\left(30^o\right) = \frac{1}{2}$.

b) Bereken de exacte lengte van AC en leg uit dat hetzelfde is als $\cos\left(30^o\right)$.

In de hierboven getekende eenheidsdriehoek geldt dus dat $a = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$ en $b = \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Opdracht 4

Teken een vierkant $ABCD$ met zijden 1.
Teken hierin driehoek ABC.



a) Bewijs met behulp van deze tekening dat $\sin\left(45^o\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b) Bereken ook de exacte waarde van $\cos\left(45^o\right)$.

Opnieuw blijkt dat de grootte van de driehoek niet uitmaakt.
De waarden van de sinus en cosinus zijn alleen afhankelijk van de grootte van de hoek.
Er geldt altijd dat: $\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Opdracht 5

a) Hoe zou je $\sin 60^0$ exact kunnen berekenen?

b) Hoe kun je deze afleiden uit datgene wat we hiervoor al hebben gedaan?

Conclusie: $\sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$ en $\sin 60^0 = \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Dit alles leidt tot de bovenste drie regels van de tabel in de voorkennis van hoofdstuk 7 uit Getal & Ruimte vwo B (2015) op blz. 94:

hoek	**30°**	**45°**	**60°**
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cosinus	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
tangens	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

De onderste regel uit de tabel over de tangens kun je hier heel eenvoudig uit afleiden, want in een eenheidsdriehoek geldt: $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

NB. Het bewijs dat deze stelling in iedere rechthoekige driehoek geldt, komt in opdracht 19 aan bod.

Opdracht 6

Toon met een berekening aan dat de exacte waarde van $\tan(\alpha)$ op de onderste regel juist zijn.

Exacte-waarden-cirkel** in een **eenheidscirkel

Opdracht 7

a) Teken op een vel papier een xy-assenstelsel met een diameter van 1 dm.

b) Teken in dit assenstelsel drie eenheidsdriehoeken met respectievelijk $\alpha = 30^o$, $\alpha = 45^o$ en $\alpha = 60^o$. Kies daarbij steeds punt A op de oorsprong, punt B op een afstand van 1 dm (= 10 cm) en punt C op de positieve x-as.

c) Verbind hoekpunten B zodat een cirkel ontstaat met straal 1 ontstaat: de **eenheidscirkel**.

d) Spiegel de drie eenheidsdriehoeken in x- en y-as en laat zo de **exacte-waarden-cirkel** ontstaan op blz. 103 van het boek. Noteer de exacte waarden bij de assen.

e) Wat zegt $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$ nu over het punt B van de betreffende eenheidsdriehoek?

Samenvattend

	$\sin(\alpha)$ =	$\cos(\alpha)$ =
Rechthoekige driehoek	$\dfrac{\text{Overstaande rechthoekszijde}}{\text{Schuine zijde}}$	$\dfrac{\text{Aanliggende rechthoekszijde}}{\text{Schuine zijde}}$
Rechtopstaande eenheidsdriehoek	Hoogte eenheidsdriehoek	Basis eenheidsdriehoek
Eenheidscirkel	y-coördinaat punt op eenheidscirkel	x-coördinaat punt op eenheidscirkel

Stap 2: De brug van goniometrische verhoudingen naar sinusoïden

<u>Opdracht 8</u>

Wie heeft er wel eens in de London Eye gezeten?
Wie heeft zich daarbij wel eens afgevraagd hoe hoog hij zich boven de Thames bevindt?

a) Hoe zou je een grafiek kunnen tekenen van de hoogte boven het water van de Thames?
b) Schets dan een grafiek van de hoogte boven het water van de Thamse uitgezet tegen de tijd.
c) Schets ook een grafiek van de horizontale positie van de cabine uitgezet tegen de tijd.
   Aanwijzing: probeer als een soort seismograaf onder het reuzenrad de positie te tekenen.

De London Eye heeft een straal van 67,5 meter. Eigenlijk is dit reuzenrad een uitvergroting van de exacte-waarden-cirkel: alle afstanden zijn 67,5 keer zo groot. Verder gaan we er in deze opgave vanuit dat het instapplatform 2,5 meter boven het wateroppervlak van de Thames ligt.
Eén rondgang duurt 30 minuten.

<u>Opdracht 9</u>

a) Maak nu met behulp van de exacte-waarden-cirkel een exacte tekening van de grafiek van de hoogte van de cabine boven het wateroppervlak uitgezet tegen de tijd.
b) Welke kenmerken kun je uit deze grafiek aflezen? Wat vertellen die over het reuzenrad?
c) Welke formule past hierbij?

Stap 3: Verdieping van het begrip van sinusoïden

Graden en radialen

Eigenlijk is de tijd niet zo'n handige variabele. Als het reuzenrad steeds even stil zou staan om mensen in en uit te laten stappen, komen er allemaal knikken in de grafiek.

Opdracht 10

a) Van welke variabelen is de hoogte van het reuzenrad nog meer afhankelijk?
b) Probeer met de grafische rekenmachine een formule te vinden die past bij de grafiek van de hoogte van een cabine van de London Eye.
c) Hoe zijn de kenmerken van de London Eye terug te vinden in jouw formule?

Terzijde

Het meten van hoeken in graden komt uit Babylonie waar men met een 60-tallig stelsel rekende. Een cirkel werd opgedeeld in 360 graden (mogelijk verband houdend met het aantal dagen in het jaar), elke graad in 60 minuten en elke minuut in 60 seconden. Voor de wiskunde is dit 60-tallig stelsel heel onhandig. Daarom is men in de wiskunde halverwege de 18e eeuw overgegaan op hoekmeting in radialen. Hierbij wordt de straal (radius) afgepast op de boog van de cirkel. Afspraak is dat we daarbij beginnen te meten bij het snijpunt van de cirkel met de positieve x-as.

Bronnen: Getal & Ruimte (2015a), https://en.wikipedia.org/wiki/Radian, http://www.jphogendijk.nl/sources/zestig.html en http://www.wisfaq.nl/showfaq3.asp?Id=5215.

Opdracht 11

Het meten van hoeken in graden is bekend. Nu wordt het tijd om uit te zoeken hoe het meten van hoeken in radialen werkt. En hoe je van graden naar radialen en omgekeerd kunt gaan. Bestudeer hiervoor paragraaf 7.1 van het boek en maak hiervan opgaven 2, 4, 6, 7 t/m 10, 13, 14, 15, 17 en 19.

Opdracht 12

In de bijlage vind je een werkblad voor het tekenen van de standaardgrafieken van een punt op de exacte-waarden-cirkel.

a) Deel de horizontale as in in graden. Doe dit met stappen van 30^o en kies de stappen zo dat je minimaal van 0^o tot en met 360^o (één rondgang) kunt tekenen.
b) Zet daaronder de hoeken uitgedrukt in radialen.
c) Maak nu eerst een tabel met exacte waarden voor de sinus en cosinus bij de hoeken: 0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o, 120^o, 135^o, 150^o, 180^o enz. tot en met 360^o.
d) Voer de opdrachten van het werkblad uit.

Transformaties

Opdracht 13

a) Bij opdracht 12 heb je een grafiek gemaakt van de hoogte van een punt op de eenheidscirkel Zoek de verschillen tussen deze basisgrafiek en met de grafiek van het reuzenrad bij opdracht 9a).
b) Welke transformaties zijn er toegepast op de standaardgrafiek van opdracht 11 a) om de grafiek van opdracht 9 a) te krijgen?

Opdracht 14

a) Bestudeer de theorie van Getal & Ruimte paragraaf 7.3 en 7.4. Maak daarbij steeds een vertaling van de grafiek naar de eenheidscirkel. Enkele opmerkingen bij de theorie:
- Op bladzijde 116 staan vier verschillende transformaties genoemd. De meesten daarvan zijn al bekend van het transformeren van parabolen (zie hoofdstuk 5 blz. 10). De enige die nieuw is, is de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as. Besteed hier even extra aandacht aan.
- Sla theorie C van paragraaf 7.3 nog even over. Het werken met goniometrische formules komt later aan bod.
- Sla theorie C van paragraaf 7.4 ook nog even over. De tangensfunctie komt hierna aan bod.

b) Maak van paragraaf 7.3 en 7.4 de volgende opgaven: 37, 38, 41 t/m 46, 55 t/m 66.

Tangensfunctie

Maak voordat je theorie C van paragraaf 7.4 bestudeert eerst deze opdracht.

Opdracht 15

We kennen de tangens al als verhoudingsgetal: $\mathbf{T}\text{an}(\alpha) = \dfrac{\mathbf{O}\text{verstaand}}{\mathbf{A}\text{anliggend}}$.

a) Neem een vel A4-papier (in je schrift) en leg die overdwars. Teken links van het midden op dit vel papier een exacte-waarden-cirkel met straal van 5 cm.

b) Teken rechts van deze cirkel een assenstelsel. Deel de horizontale as in in radialen van $-\pi$ tot π met stapjes van $\frac{1}{12}\pi$.

c) Bereken zoveel mogelijk coördinaten van de tangensfunctie en teken de grafiek.
Wat valt je op? Kun je dit verklaren?

d) De sinus geeft de hoogte aan van een punt op de cirkelrand, de cosinus de horizontale positie. Welke informatie geeft de tangens van een hoek?

Stap 4: Oplossen goniometrische vergelijkingen

Goniometrische vergelijkingen

Opdracht 16

Maak van paragraaf 7.2 de opgaven 21, 22, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 33, 35 en 36.
Maak over de tangensfunctie opgave 23 en van paragraaf 7.4 de opgaven 68 t/m 71.

Goniometrische formules gebruiken bij het oplossen van vergelijkingen

Opdracht 17

Zoals je al gemerkt hebt, zit de eenheidscirkel vol met symmetrieën. Zo is $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)=\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$.

a) Ga na dat in het algemeen geldt dat $\sin(\alpha)=\sin(\pi-\alpha)$ en probeer dit te 'bewijzen' met een logische redenering (bv. met een spiegellijn).

b) Lever ook voor de bovenste 6 formules die in theorie C op blz. 119 genoemd worden een logisch bewijs door gebruik te maken van de eenheidscirkel en symmetrieën.

Opdracht 18

Je gaat nu bewijzen dat in het algemeen geldt dat $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$. Dit is de eennalaatste stelling uit theorie C op blz. 119.

a) Teken een xy-assenstelsel met daarin een cirkel met middelpunt op de oorsprong en een willekeurige straal r.

b) Kies een willekeurig punt P op de cirkelrand. Laat uit dit punt P een loodlijn zakken op de x-as en noem het snijpunt Q. Neem $\alpha=\angle POQ$.

c) Toon aan dat geldt dat $PQ=r\cdot\sin(\alpha)$ en $OQ=r\cdot\cos(\alpha)$.

d) Toon met behulp van de stelling van Pythagoras aan dat hieruit volgt dat $r^2\cdot\sin^2(\alpha)+r^2\cdot\cos^2(\alpha)=r^2$.

e) Toon aan dat, omdat de straal altijd groter is dan 0, hieruit volgt dat $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$. Omdat uitgegaan is van een willekeurige straal r en een willekeurig punt op de cirkelrand, is hiermee bewezen dat deze stelling altijd geldt.

Opdracht 19

Je gaat nu bewijzen dat in het algemeen geldt dat $\tan(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$. Dit is de laatste stelling uit theorie C op blz. 119.

a) Neem in een xy-assenstelsel de oorsprong en een willekeurig punt P in het vlak. Laat uit dit punt P een loodlijn zakken op de x-as en noem het snijpunt Q. $\alpha=\angle POQ$.

b) Als $r = OP$, toon aan dat dan geldt dat $PQ=r\cdot\sin(\alpha)$ en $OQ=r\cdot\cos(\alpha)$.

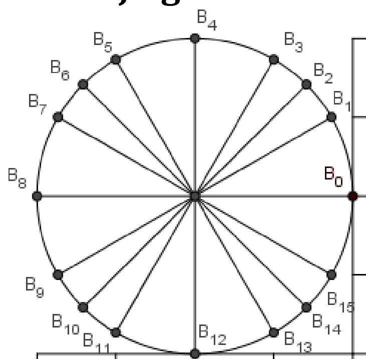
c) Toon aan dat in rechthoekige driehoek OPQ geldt dat $\tan(\alpha)=\dfrac{PQ}{OQ}=\dfrac{r\cdot\sin(\alpha)}{r\cdot\cos(\alpha)}$.

d) Toon aan dat, omdat de straal altijd groter is dan 0, hieruit volgt dat $\tan(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Opdracht 20

Maak nu van paragraaf 7.3 opgaven 50 t/m 53.

Bijlage: Werkblad ontstaan sinus- en cosinusgrafieken uit exacte waardencirkel



1. Teken hier boven de grafiek van de verticale positie van punt *B* t.o.v. de evenwichtsstand uitgezet tegen de draaihoek van 0^o t/m 360^o.
2. Teken hier links de grafiek van de verticale positie van punt *B* t.o.v. het middelpunt uitgezet tegen de draaihoek van 0^o t/m 360^o.
   Teken van boven naar beneden, alsof je een seismogram aan het maken bent.

3. Draai nu de linker grafiek 90^o tegen de wijzers van de klok in en teken hem in het assenstelsel hierboven.
4. Omschrijf in je eigen woorden weer wat de bovenste grafiek weergeeft:

5. Omschrijf in je eigen woorden wat de onderste grafiek weergeeft: