H10 Meetkunde met vectoren

Getal & Ruimte editie 11 vwo wiskunde B

Vectoren

Een punt $A(p,q)$ in een assenstelsel kan ook aangeduid worden met vector $\vec{a} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

De lengte van deze vector is $\left|\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right| = \sqrt{p^2+q^2}$. Vector $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heet de nulvector.

De som van $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ is $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} p+r \\ q+s \end{pmatrix}$. Deze somvector kan op twee manieren worden getekend: met een parallellogramconstructie en met een kop-staartconstructie.

Verder kun je een vector met een scalar λ vermenigvuldigen. $\lambda\vec{a} = \lambda\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda p \\ \lambda q \end{pmatrix}$.

Scalar λ staat voor een willekeurig reëel getal van de getallenlijn, zowel positief als negatief.

Vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ en $-\vec{a} = -\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ -q \end{pmatrix}$ zijn tegengestelde vectoren. Zij hebben dezelfde lengte, maar een tegengestelde richting.

Vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ is te ontbinden in loodrechte componenten $\vec{v_x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{v_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

Er geldt dat $\vec{v_x} = \vec{v}\cdot\cos\varphi$ en $\vec{v_y} = \vec{v}\cdot\sin\varphi$.

Vectorvoorstelling van een lijn

Voor elk punt P op lijn l geldt: $\vec{OP} = \vec{s}+\lambda\cdot\vec{r}$. Hierin is $\vec{s}$ de steunvector naar een punt op lijn l, $\vec{r}$ de richtingsvector en λ een scalar.

De vectorvoorstelling van lijn l door A en B is: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a}+\lambda\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$.

Afstandsformule

De afstand van punt $P\left(x_p, y_p\right)$ en lijn $k: ax+by=c$ is te berekenen met $d(P,k) = \dfrac{\left|ax_p+by_p-c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Zie de afleiding van deze formule in opgave 21 op blz. 69. Leer deze formule uit je hoofd.

Raaklijnen aan cirkels

Voor raaklijnen aan cirkels geldt dat $d(M,k) = r$.

Hoek tussen twee vectoren

De hoek tussen twee vectoren $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ en $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ is te berekenen met $\cos\varphi = \dfrac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|}$.

De uitdrukking in de teller $a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$ heet het inwendig product, kortweg inproduct.
Het inproduct speelt in praktijksituaties met veel vectoren (krachten) een belangrijke rol.

Bij de hoek tussen twee **lijnen** worden in de teller absoluutstrepen geplaatst, zodat $0^o \le \varphi \le 90^o$.

Als het inproduct $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0$, dan staan $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht op elkaar.

Normaalvector van een lijn

Bij lijn $l: ax+by=c$ staat normaalvector $\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ loodrecht op deze lijn.

Vectoren en rotaties

Bij $\vec{a}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ betekent $\vec{a_R}=\begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ een rotatie rechtsom over 90°

en $\vec{a_L}=\begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$ een rotatie linksom over 90°.

Parametervoorstelling van de baan van een punt P

De baan van een punt P kan worden weergegeven door de bewegingsvergelijking $\begin{cases} x(t)=f(t) \\ y(t)=g(t) \end{cases}$.

Dit wordt ook wel de parametervoorstelling van de baan van P of de parameterkromme genoemd.

Vector $\vec{r}(t)=\vec{OP}=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ is de plaatsvector van punt P.

Vector $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ heet de snelheidsvector van punt P. Dit is een richtingsvector aan de baan op het tijdstip t. De baansnelheid wordt berekend met $\left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}$.

Vector $\vec{a}(t)=\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ heet de versnellingsvector van punt P.

De baanversnelling wordt uitgerekend met $\vec{a_b}(t) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{\left|\vec{v}(t)\right|}$.