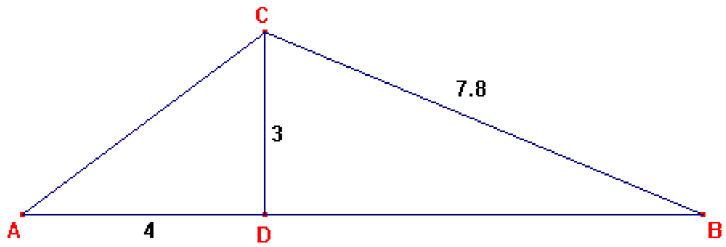
Samenvatting VWO wiskunde B H04 Meetkunde

Getal & Ruimte editie 11

Goniometrie in rechthoekige driehoeken

Stap 1: Zoek de rechthoekige driehoeken



Figuur 1: Ga na dat in dit voorbeeld alleen ΔADC en ΔDBC rechthoekige driehoeken zijn.

Stap 2: Bepaal de uitgangssituatie

A. Je weet twee zijden en wilt de derde berekenen — Stelling Pythagoras

B. Je weet een zijde en een hoek en wilt een zijde berekenen — *SIN*, *COS* of *TAN*

C. Je weet twee zijden en wilt een hoek berekenen — *ASIN*, *ACOS* of *ATAN*

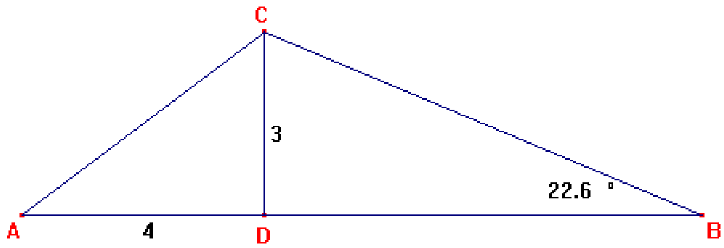
<u>2A Je weet twee zijden en wilt de derde zijde berekenen Stelling Pythagoras</u>

In figuur 1 bereken je AC met: $a^2+b^2 = c^2$. *AD* en *CD* zijn rechthoekszijden, dus: $AD^2+CD^2 = AC^2$.

Invullen wat je weet geeft: $4^2+3^2 = AC^2$ $25 = AC^2$ $AC = \sqrt{25} = 5$.

<u>Opdracht 1</u>: Bereken de lengte van *DB*.

<u>2B Je weet een zijde en een hoek en wilt een zijde berekenen SIN, COS, TAN</u>

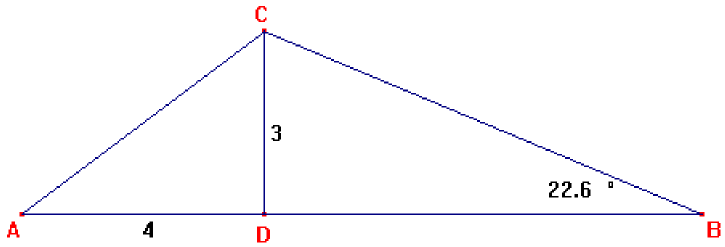


Figuur 2: Van driehoek *DBC* weet je zijde *CD* en hoek *B.*

1. Ga in de hoek staan die je weet (in dit geval hoek *B*.)
2. Kijk welke zijde je weet (*CD*) en welke je wilt berekenen (bijvoorbeeld *BC*).Vanuit hoek *B* gezien weet je de **O**verstaande zijde en wil je de **S**chuine zijde berekenen. Hier hoort de **S**inus bij.
3. Schrijf de bijbehorende definitie op. In dit geval: $Sin\angle B = \dfrac{CD}{BC}$.
4. Vul in wat je weet en reken uit. In dit geval: $\dfrac{Sin\ 22{,}6}{1} = \dfrac{3}{BC}$.
5. Reken de onbekende uit. In dit geval: $BC = \dfrac{3}{Sin\ 22{,}6} \approx 7{,}8$.
6. Controleer je antwoord: kan dit kloppen? De schuine zijde is altijd de langste zijde.

Opdracht 2: Bereken op vergelijkbare wijze de lengte van *DB*.

2C Je weet twee zijden en wilt een hoek berekenen ASIN, ACOS, ATAN



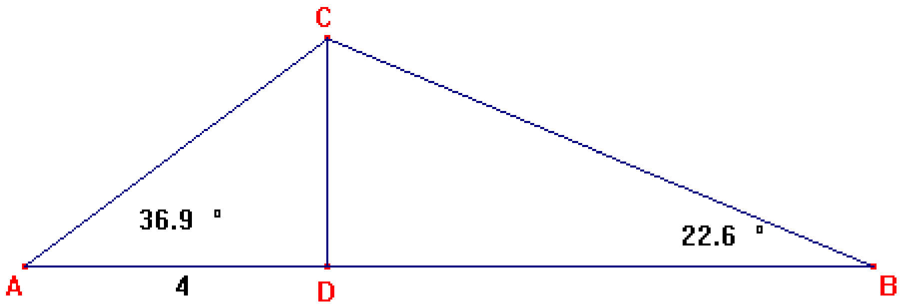
Figuur 3: in driehoek *ADC* weet je de twee zijden *AD* en *DC*, maar niet hoe groot hoek *A* is.

1. Ga in de hoek staan die je wit weten (in dit geval hoek *A*).
2. Ga na welke zijden je weet: in dit geval een **O**verstaande en een **A**anliggende. Hier hoort de **T**angens bij.
3. Schrijf de bijbehorende definitie op. In dit geval: $Tan\angle A = \frac{CD}{AD}$.
4. Vul in wat je weet en reken uit. In dit geval: $Tan\angle A = \frac{3}{4} = 0{,}75$.
5. Reken de onbekende uit met A..... . In dit geval: $\angle A = ATAN(0,75) \approx 36,9^o$.
6. Controleer je antwoord: kan dit kloppen? Een scherpe hoek is altijd minder dan 90°.

Opdracht 3 bereken $\angle ACD$ (hoek C in driehoek ACD) op vergelijkbare wijze. Wat valt je op?

Stap 3: Bepaal een goede strategie

Soms wil je iets uitrekenen, maar weet je te weinig om 2A, 2B of 2C uit te kunnen voeren.
Ga dan op zoek naar de rechthoekige driehoek waar je het meeste over weet.

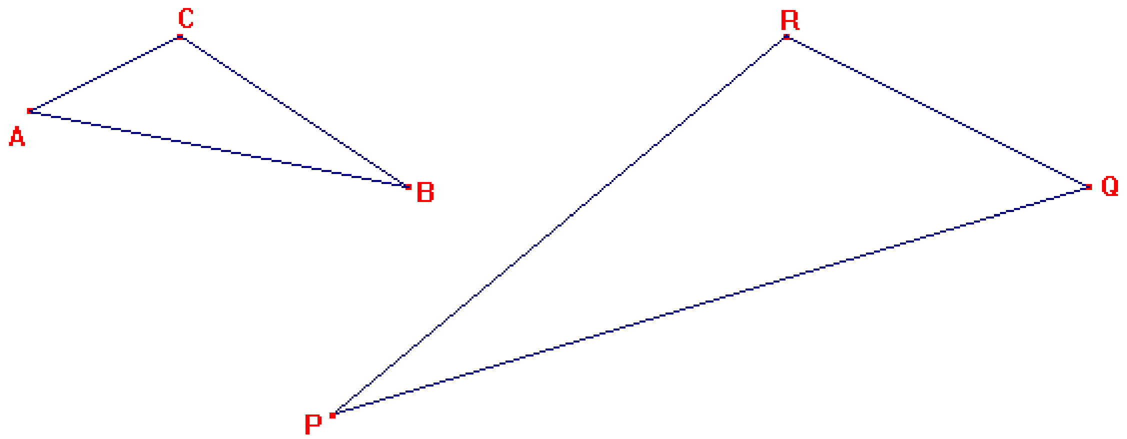


Figuur 4

Gevraagd: bereken *BC*.
1. Van driehoek *BCD* weet je maar één ding: een hoek. Dit is te weinig. Je hebt tenminste nog één zijde nodig.
2. Zoek een zijde die ook in een andere rechthoekige driehoek zit, bijvoorbeeld *CD*. Kun je die berekenen?

Opdracht 4: Bereken eerst *CD* in rechthoekige driehoek *ADC*.
Bereken hiermee de lengte van zijde *BC* in rechthoekige driehoek *BCD*.

Gelijkvormige driehoeken



<u>Stappenplan</u>

1. Zoek een tweede driehoek die een uitvergroting, spiegeling en/of draaiing is.
   Voorbeeld: Δ *PQR een omkering (spiegeling) en uitvergroting van* Δ *ABC.*

2. Kijk welke hoeken er gelijk zijn aan elkaar en schrijf die op.
   Voorbeeld: $\angle A = \angle Q$ en $\angle B = \angle P$

   Let op: de volgende hoeken zijn altijd gelijk aan elkaar:
   a. Rechte hoeken
   b. Overstaande hoeken
   c. F-hoeken (in een sna**v**elfiguur)
   d. Z-hoeken (in een **z**andloperfiguur).

3. Schrijf de gelijkvormigheid op.
   Let er op dat overeenkomstige hoeken op een overeenkomstige plaats staan!
   Voorbeeld: $\Delta ABC \sim \Delta QPR$

4. Schrijf de verhoudingstabel uit met de overeenkomstige zijden onder elkaar.
   Voorbeeld:

AB	*BC*	*AC*
QP	*PR*	*QR*

5. Schrijf de verhoudingstabel nog een keer op met de lengtes in die je al weet.
   Gebruik bij rechthoekige driehoeken de stelling van Pythagoras om de lengte van een nog onbekende zijde te berekenen.
   Voorbeeld:

5,2	3,6	2,2
10,4	*PR*	*QR*

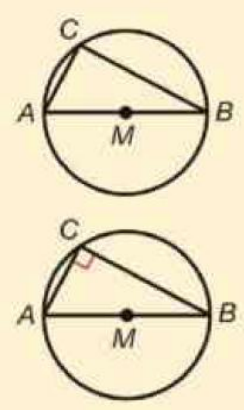
6. Reken nu de ontbrekende lengtes in de verhoudingstabel uit.

Meetkundige stellingen

Moet je kennen en herkennen wanneer je ze toe kunt passen.
Je hoeft ze bij toetsen en (school)examens niet te kunnen bewijzen.

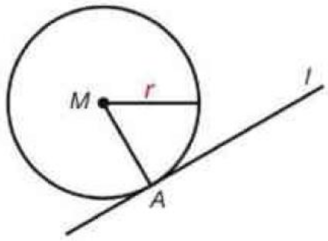
De stelling van Thales:
als C op de cirkel met middellijn AB ligt,
dan is hoek C in driehoek ABC recht.

Het omgekeerde is ook waar (omgekeerde stelling van Thales):
als hoek C in driehoek ABC recht is,
dan ligt C op de cirkel met middellijn AB.

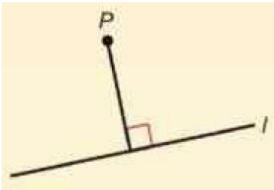


Definitie raaklijn
een raaklijn aan een cirkel is een lijn de cirkel precies in één punt raakt.

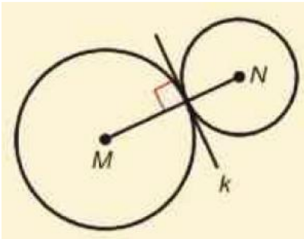
Stelling raaklijn aan cirkel:
Een raaklijn l aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van het middelpunt M van de cirkel en het raakpunt A.



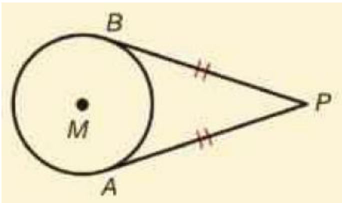
Definitie afstand punt en lijn
De afstand (kortste verbinding) van een punt P tot een lijn l is de lengte van het loodlijnstuk neergelaten vanuit punt P op lijn l.



Stelling raaklijn in gemeenschappelijk raakpunt
De raaklijn in het gemeenschappelijk raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.

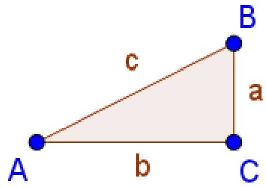


Stelling afstand punt tot raakpunten
Als vanuit een punt P twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt P tot de twee raakpunten A en B gelijk.



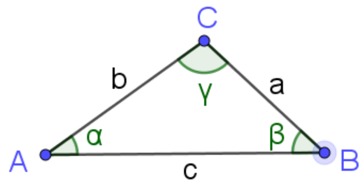
Spoorboekje driehoekmeetkunde (trigoniometrie)

Rechthoekige driehoek



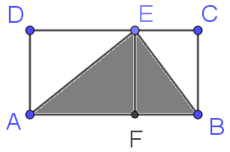
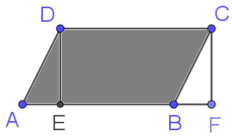
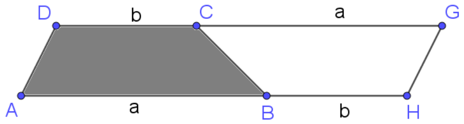
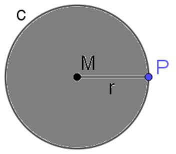
Wat je weet	Wat je wilt weten	Aanpak
Rechte hoek, 2 zijden	3e zijde	***Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$.*** Kijk goed wat de rechthoekszijden *a* en *b* zijn en wat de schuine zijde *c*. Vul in wat je weet en los de vergelijking op.
Rechte hoek, 1 zijde, 1 scherpe hoek	2e zijde	***SIN, COS of TAN*** Ga in de scherpe hoek staan. Welke zijde weet je, welke wil je weten (Overstaand, Aanliggend of Schuin)? Kies daarbij SOS CAS TOA. Werk vanuit deze definitie.
Rechte hoek, 2 zijden	1 hoek	***ASIN, ACOS of ATAN*** Ga in de hoek staan die je wilt weten. Welke zijden weet je (Overstaand, Aanliggend, Schuin)? Kies daarbij SOS CAS TOA. Werk vanuit deze definitie.

Geen rechthoekige driehoek

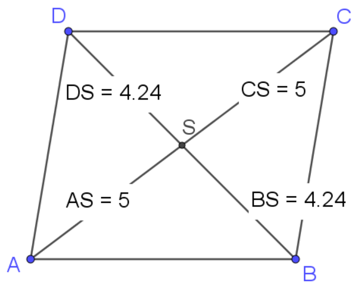


Variabelen	Aanpak
2 hoeken met 2 overstaande zijden, waarvan 3 bekend en 1 onbekend	***Sinusregel*** $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$. Schrijf de sinusregel op en vul in wat je weet. Zoek een kruisverhouding waarbij slechts één onbekende overblijft. Let op bij stompe hoeken, daar moet je "$180^0 - \ldots$" nemen!
3 zijden en 1 hoek, waarvan 3 bekend en 1 onbekend	***Cosinusregel*** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ Kies de cosinusregel waarin de hoek voorkomt. Vul alles in wat je weet en los de vergelijking op.

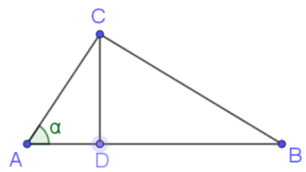
Oppervlaktes

Vlakke figuur	Plaatje	Oppervlakte
Rechthoek		basis * hoogte $O = b \cdot h$
Driehoek	 Driehoek *ABE* past twee keer in rechthoek *ABCD*.	basis * hoogte / 2 $O = \frac{1}{2} b \cdot h$
Parallellogram	 Parallellogram *ABCD* heeft dezelfde oppervlakte als rechthoek *EFCD*.	basis * hoogte $O = b \cdot h$
Trapezium	 De oppervlakte van trapezium *ABCD* is de helft van de oppervlakte van parallellogram *AHGD.*	gemiddelde van de lengte van de evenwijdige zijden * hoogte. $O = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$
Cirkel		$O = \pi \cdot r^2$

Lengtes



De diagonalen van een parallellogram (en dus ook van een rechthoek) snijden elkaar middendoor.



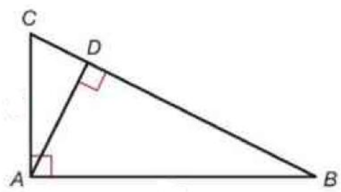
In driehoek ABC geldt dat hoogte $CD = AC \cdot \sin\alpha$.

Ga dit zelf na dat dit volgt uit $\sin\alpha = \dfrac{CD}{AC}$.

Bij het berekenen van de oppervlakte van een driehoek ben je zelf vrij in het kiezen van de basis. De hoogte moet hier altijd loodrecht op staan. Soms kun je op twee verschillende manieren deze oppervlakte berekenen. Deze oppervlaktes moeten aan elkaar gelijk zijn. Zo ontstaat de <u>zijde x hoogte methode</u>. Hiermee kun je een onbekende basis of onbekende hoogte uitrekenen:

ene zijde x bijbehorende hoogte = andere zijde x bijbehorende hoogte,

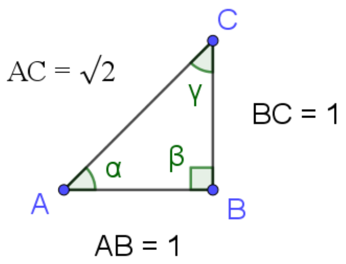
dus: AB x AC = AC x AD.

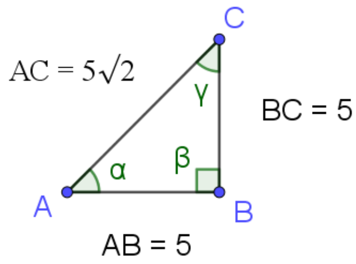


Bijzondere rechthoekige driehoeken

Met de stelling van Pythagoras is eenvoudig na te gaan dat in een rechthoekige gelijkbenige driehoek met hoeken van $45^0, 45^0$ en 90^0 de verhouding tussen de zijden gelijk is aan $1:1:\sqrt{2}$.

Deze verhoudingsgetallen kunnen we met een vergrotingsfactor vermenigvuldigen, bv. $5:5:5\sqrt{2}$.





Verder geldt dat $\sin 30^0 = 0,5$. Dit betekent dat in een $30^0, 60^0$, 90^0 driehoek de overstaande zijde van hoek A de helft is van de schuine zijde. Met de stelling van Pythagoras is dan na te gaan dat de verhoudingen van de zijden gelijk is aan $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3} : 1$. Meestal vermenigvuldigen we deze verhouding met 2 zodat we krijgen: $1 : \sqrt{3} : 2$.

Exacte waarden van zijden berekenen

Bij figuren die bovengenoemde bijzondere rechthoekige driehoeken bevatten, kunnen we de lengtes van zijden exact berekenen. Daarbij moeten we vaak met wortels vermenigvuldigen of delen. Hiervoor gelden de volgende regels (zie voorkennis hoofdstuk 4):

Regel	**Getallenvoorbeeld**	**Maar let op!!!**
$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$ en omgekeerd	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{36} = 6$	$\sqrt{A} + \sqrt{B} \neq \sqrt{A+B}$ want $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 5 \;\; en \;\; \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ Deze regel geldt dus alleen voor vermenigvuldigen van wortels, niet voor het optellen van wortels!!!
$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$ en omgekeerd	$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$	

Het is gebruikelijk om wortels zoveel mogelijk te vereenvoudigen.

Dus $\sqrt{6,25} = 2,5$ (probeer gewoon uit met je rekenmachine of er een mooi kommagetal uitkomt).

En $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (probeer of het getal onder de wortel deelbaar is door een kwadraat).

Ten slotte is het gebruikelijk om wortels in de noemer weg te werken.

Dus $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 1} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$.

En: $\frac{7}{1+\sqrt{3}} = \frac{7}{1+\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{7}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{7\left(1-\sqrt{3}\right)}{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3} = \frac{7-7\sqrt{3}}{-2} = \frac{-7}{2} + \frac{7}{2}\sqrt{3}$.