Samenvatting VWO wiskunde B H03 Vergelijkingen en herleidingen

Getal & Ruimte editie 11

Hoofdstuk 3 gaat over het algebraïsch oplossen van vergelijkingen en is een belangrijk basishoofdstuk. Alles wat wij hierna gaan doen bij vwo wiskunde B bouwt hierop voort.

Niet bij de toets horen, dus overslaan:

- Voorkennis theorie A over een andere schrijfwijze van een lijn.
- Voorkennis theorie D over kwadratische ongelijkheden bij berekeningen met de discriminant.
- §3.1 theorie E over modulusvergelijkingen.

Tweedegraads vergelijkingen oplossen

De volgende technieken voor het oplossen van tweedegraads vergelijkingen moet je kennen en vloeiend en foutloos toe kunnen passen:
(zie stencil Tweedegraads vergelijkingen - Theorie in snelhechter)

1) Links en rechts worteltrekken. Let op: je krijgt 2 oplossingen: $+\sqrt{\ldots}$ en $-\sqrt{\ldots}$!
2) Een gemeenschappelijke factor x buiten haakjes halen.
   Let op: je krijgt 2 oplossingen, waarvan de eerste is $x = 0$!
3) Som-product methode. Let op: je krijgt 2 oplossingen!
4) *abc*-formule. Reken eerst de Discriminant uit en bepaal hiermee het aantal oplossingen.
5) Kwadraatafsplitsen. Hiermee kun je snel de coördinaten van de top bepalen.
   Maar als je verder gaat met oplossen van de vergelijking, vind je ook de nulpunten.

Hogeregraads vergelijkingen oplossen

Bij het oplossen van hogeregraadsvergelijkingen bouwen we door op de technieken voor het oplossen van tweedegraads vergelijkingen:

1) Hogeremachtswortels trekken (§3.1 theorie A).
   Let op: bij even exponenten 2 oplossingen, bij oneven exponenten slechts 1!
2) Een gemeenschappelijke factor x (of x^2 of …) buiten haakjes halen (§3.1 theorie B links).
   Daarna $A \cdot B = 0$ toepassen.
3) Substitutie toepassen om een tweedegraads vergelijking te krijgen, die je op kunt lossen met de som-product methode of de *abc*-formule (§3.1 theorie B rechts en §3.1 theorie C).

Tweedegraads en hogeregraads ongelijkheden oplossen

Het stappenplan staat in Voorkennis theorie C en in §3.1 theorie D.

1) Noem het linkerlid van de ongelijkheid $f(x)$ en het rechterlid $g(x)$.
2) Los eerst de gelijkheid $f(x) = g(x)$ op om de x-waarden van de snijpunten te vinden.
3) Schets in een xy-assenstelsel zowel $f(x)$ als $g(x)$. Doe dit door van beide functies op een kladblaadje enkele basiskenmerken af te leiden:
   Bij een lijn: richtingscoëfficiënt (1 naar rechts, a omhoog) en beginwaarde (= snijpunt y-as).
   Bij een parabool: berg of dal, nulpunten, coördinaten van de top, snijpunt y-as.
4) Lees af voor welke stukjes op de x-as de ongelijkheid waar is.
   Geef die een kleurtje (bv. groen) en schrijf je antwoord op.

Stelsel van 2 vergelijkingen met 2 onbekenden oplossen

Er zijn 4 technieken om een zo'n stelsel vergelijkingen op te lossen:

1) Elimineren van een variabele naar keuze (meestal x of y) door de vergelijkingen bij elkaar optellen of van elkaar af te trekken (§3.2 theorie A).
2) Idem, maar nu door eerst iedere vergelijkingen met een bepaalde factor te vermenigvuldigen (§3.2 theorie B).
3) Eerst in één van beide vergelijkingen één van beide variabelen (naar keuze x of y) vrijmaken en dan die variabele in de andere vergelijking vervangen, substitueren. Zo ontstaat ook een vergelijking met nog maar één variabele en die kun je oplossen
(Voorkennis theorie B en §3.2 theorie D).

§3.2 theorie C geeft een voorbeeld van hoe je een stelsel van 2 vergelijkingen met 2 onbekenden krijgt als je een lijn en een parabool met elkaar gaat snijden. Daarvoor staan bij opgaven 28, 29, 31, 32 en 33 nog een aantal voorbeelden uit de praktijk waarbij je eerst een stelsel van 2 vergelijkingen met 2 onbekenden gaat opstellen en daarna oplossen.

Oplossen van vergelijkingen waarbij vermenigvuldigd wordt

Ga nooit als een blind paard aan de slag. Kijk eerst globaal naar een vergelijking en probeer objecten $A,.\,B,\ldots$ te onderscheiden!

1) Er is al ontbonden in factoren: $A \cdot B = 0$.
Ga geen haakjes wegwerken (haakjes zijn je vrienden) en ga verder met $A = 0 \;\; of \;\; B = 0$.
2) Het linkerlid en rechterlid zijn kwadraten: $A^2 = B^2$.
Ga links en rechts worteltrekken. Let op: even exponent, dus twee oplossingen!
3) Het linkerlid en rechterlid hebben dezelfde factor: $A \cdot B = A \cdot C$. Let op: twee oplossingen!
Als $A = 0$ ontstaat 0 = 0 en dit is altijd waar.
Als $A \neq 0$ mag je links en rechts door A delen en ontstaat $B = C$. Los dit verder op.
4) Als 3) maar nu is $C = 1$ en ontstaat $A \cdot B = A$. De aanpak is hetzelfde.

Oplossen van vergelijkingen waarbij gedeeld wordt

Hierbij gelden twee basisregels (§3.3 theorie B):

1) Kruiselings vermenigvuldigen: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ kun je herleiden tot $AD = BC$.
Ga zelf na met de balansmethode. Let op: dit mag alleen als er "=" tussen de breuken staat!
2) De noemer mag niet 0 worden, want delen door 0 kan niet.

Alle overige regels op blz. 119 zijn hier uit af te leiden. Tip: ga deze regels <u>niet</u> uit je hoofd leren, omdat de ervaring leert dat je ze dan door elkaar gaat halen. Ga zelf na dat ze volstrekt logisch zijn en leer vooral om ze toe te passen door veel te oefenen.

Oplossen van vergelijkingen met wortels

Je kunt twee verschillende situaties tegen komen (§3.3 theorie C en D):

1) Je kunt de wortel isoleren en vervolgens elimineren door links en rechts te kwadrateren. Vergeet niet te controleren of de gevonden oplossingen voldoen!
2) Je kunt de wortelvorm vervangen (substitueren) door een letter waardoor er een vergelijking ontstaat die je wel op kunt lossen. Vergeet niet om terug te substitueren en de werkelijke oplossingen uit te rekenen. Ook hier oplossingen controleren of ze voldoen.

Breuken herleiden

1) Ga na of er waarden zijn waarvoor de noemer 0 wordt. Deze oplossingen moet je (aan het eind) uitsluiten.
2) Je mag eenzelfde factor in teller en noemer op elkaar weg<u>delen</u> (niet weg<u>strepen</u>), omdat iets gedeeld door zichzelf altijd 1 is.
3) Let op merkwaardig producten, die kun je ontbinden in factoren (§3.4 theorie A). Dit levert vaak meer mogelijkheden op om factoren op elkaar weg te delen.
4) Ga voor het herleiden van breuken (§3.4 theorie B) niet deze regeltjes uit je hoofd leren, omdat de ervaring leert dat je ze dan allemaal door elkaar gaat halen.
   Ga na dat deze regels volstrekt logisch zijn, omdat je dat met getallen ook zo zou doen.
   Leer vooral om ze toe te passen door veel te oefenen. Schrijf bij twijfel op een kladblaadje een getallenvoorbeeld op.
5) Bij het wegwerken van breuken in breuken kun je boven en onder met de binnenste noemer vermenigvuldigen (§3.4 theorie C).

Variabelen vrijmaken

Bij het vrijmaken van variabelen bij gebroken formules (§3.4 theorie D) zet je de volgende stappen:

1) Werk toe naar kruiselings vermenigvuldigen en voer dit uit.
2) Breng alle termen naar links waar de variabele in zit die je vrij wilt maken.
3) Breng alle overige termen naar rechts.
4) Haal in het linkerlid de variabele buiten haakjes die je vrij wilt maken.
5) Deel links en rechts door de factor waar deze variabele mee is vermenigvuldigd.